

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-8533-TDI/784

**INVESTIGAÇÕES SOBRE AS RELAÇÕES DE ESCALA DOS
SISTEMAS ESTELARES AUTO-GRAVITANTES**

Christine Córdula Dantas

Tese de Doutorado em Astrofísica, orientada pelo Dr. Hugo Vicente Capelato, aprovada
em 31 de maio de 2001.

INPE
São José dos Campos
2001

524.7

DANTAS, C. C.

Investigações sobre as relações de escala dos sistemas estelares auto-gravitantes / C. C. Dantas.- São José dos Campos: INPE, 2001.

202

p. – (INPE-8533-TDI/784).

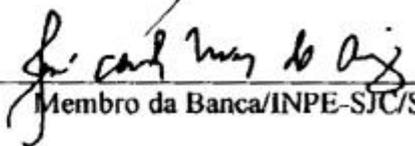
1.Galáxias elípticas. 2.Estrutura galáctica. 3.Formação das galáxias. 4.Relações de escala. 5.Simulação. I.Título.

Aprovado pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Doutor** em **Astrofísica**.

Dr. Hugo Vicente Capelato


Orientador/Presidente/INPE-SJC/SP

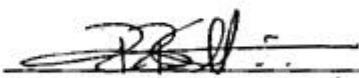
Dr. José Carlos Neves de Araújo


Membro da Banca/INPE-SJC/SP

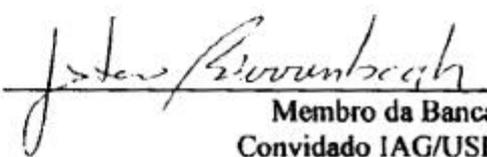
Dr. Francisco José Jablonski


Membro da Banca/INPE-SJC/SP

Dr. Reinaldo Ramos de Carvalho


Membro da Banca
Convidado ON/CNPq

Dr. Gastão Cesar Bierrenbach Lima Neto


Membro da Banca
Convidado IAG/USP

Candidato (a): Christine Córdula Dantas

São José dos Campos, 31 de maio de 2001.

“As hipóteses são redes: só quem as lança colhe alguma coisa.”

Novalis (1772-1801)

Para meu filho, **Pedro**,
nascido durante esta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Hugo Vicente Capelato, pela orientação atenciosa desta tese.

Aos Drs. André L. B. Ribeiro e Reinaldo R. de Carvalho, pelas várias colaborações realizadas nos últimos anos.

Aos Drs. R. Carlberg, J. Dubinski, e Gastão B. Lima Neto, pela cessão dos pacotes de simulação e de análise, fundamentais para este projeto.

Aos colegas da DAS, em particular, à Dra. Cláudia V. Rodrigues, pela atenção e prestatividade contínuas.

Às secretárias da DAS, Ivone e Bianca.

À FAPESP, pelos recursos cedidos.

Aos meus familiares e, em especial, a Fabiano Luis de Sousa, pelo incentivo permanente, sem o qual seria muito mais difícil a concretização deste trabalho.

RESUMO

Objetivamos neste trabalho reunir algumas investigações de ordem numérica e analítica sobre a origem das relações de escala dos sistemas estelares auto-gravitantes. Estas relações dependem de um número bastante pequeno de parâmetros físicos independentes, que reduzem e confinam os vínculos observacionais a um plano neste espaço de parâmetros, chamado de “Meta-Plano Fundamental” (MPF) (Burstein et al. 1997) dos sistemas estelares auto-gravitantes, e em particular, de “Plano Fundamental” (PF) (Djorgovski e Davis 1987), no caso exclusivo das galáxias elípticas. Do ponto de vista numérico, analisamos os parâmetros característicos dos objetos resultantes da relaxação gravitacional não-dissipativa de modelos representando protogaláxias, baseando-nos na hipótese de que as estruturas do Universo se formaram a partir de aglomerações hierárquicas. Para tal, analisamos colapsos de nuvens primordiais de estrelas e fusões de modelos de protogaláxias com uma e duas componentes. Esta investigação visa dar continuidade à pesquisa iniciada por Capelato, de Carvalho e Carlberg (1995) (daqui em diante, CdCC95), onde demonstrou-se que um esquema hierárquico de encontros não-dissipativos de modelos galácticos de uma componente seria capaz de reproduzir as correlações do PF. Nesta tese, procuramos ampliar e compreender em maior profundidade os resultados de CdCC95. Do ponto de vista analítico, procuramos isolar o efeito do halo escuro sobre as condições de equilíbrio da componente luminosa (ou bariônica). Investigamos se as propriedades físicas, observadas em projeção, de sistemas auto-gravitantes envoltos por um halo escuro poderiam ser unicamente descritas por uma formulação do teorema do virial que explicitamente toma em consideração o termo do potencial gravitacional que representa a interação do halo escuro com a componente bariônica. Comparamos as previsões resultantes desta “hipótese do virial a duas componentes” (2VT) com as relações de escala dos sistemas estelares auto-gravitantes em geral, encontrando um bom acordo, ao menos em primeira aproximação, com o MPF.

INVESTIGATIONS ON THE SCALING RELATIONS OF SELF-GRAVITATING STELLAR SYSTEMS

ABSTRACT

We aim in this work to collect several numerical and analytical investigations concerning the origin of the scaling relations of the self-gravitating stellar systems. These relations depend on a very small number of independent physical parameters that reduce and confine the observational constraints to a plane in this parameter space, called the “Fundamental Meta-Plane” (MPF) (Burstein et al. 1997) of the self-gravitating stellar systems, and the “Fundamental Plane” (PF) (Djorgovski e Davis 1987), in the case of elliptical galaxies. We analysed the characteristic parameters of objects resulting from the non-dissipative gravitational relaxation of models representing protogalaxies, based on the hypothesis that the structures in the Universe were formed from hierarchical clusterings. We analysed collapses of primordial stellar clouds and mergers of protogalactic models with one and two components. This investigation aimed to give continuity to the research carried out by Capelato, de Carvalho e Carlberg (1995), where it was demonstrated that a dissipationless one-component merger scheme of galactic models was able to reproduce the PF. In this thesis, we tried to understand more deeply the results of CdCC95. We isolated the effect of the dark halo on the conditions of the luminous component. We investigated whether the physical properties of self-gravitating systems evolved by a dark halo could be solely described by a formulation of the virial theorem that explicitly takes into consideration the gravitational potential term that represents the interaction of the dark halo with the luminous component. We compared the predictions resulting from this “two-component virial hypothesis” with the scaling relations of the self-gravitating stellar systems in general, and found a good agreement with the MPF.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	23
1.1 As Relações de Escala dos Sistemas Estelares	23
1.2 O Problema do Plano Fundamental	26
1.2.1 Previsões do Teorema do Virial e a Discrepância Observada	26
1.2.2 Definição de Não-Homologia	28
1.3 Objetivos desta Tese	29
CAPÍTULO 2 - METODOLOGIA	31
2.1 O Código em Árvore de Barnes & Hut	31
2.2 As Versões do Código e as Plataformas Computacionais Utilizadas . . .	33
2.3 Correção de Quadrupolo, Parâmetro de Amolecimento, Passo Temporal, e Parâmetro de Tolerância	33
2.4 Supressão das Interações Binárias e Resolução Espacial	35
2.5 Interrupção das Simulações e os “Escapers”	37
2.6 As Unidades Adotadas	40
CAPÍTULO 3 - FUSÕES	43

3.1	Os Modelos das Galáxias Iniciais	43
3.2	Caracterização das Condições Orbitais Iniciais para Fusão	43
3.3	A Grade de Condições Iniciais	45
3.4	Visão Geral das Simulações	47
3.5	Os Produtos Finais no Espaço do Plano Fundamental	47
3.5.1	Metodologia: Medida dos Parâmetros do PF	47
3.5.2	Resultados	50
3.6	Discussão	54
CAPÍTULO 4 - COLAPSOS		55
4.1	Apresentação dos Modelos e das Condições Dinâmicas Iniciais	55
4.2	Visão Geral das Simulações	58
4.3	Os Produtos Finais no Espaço do Plano Fundamental: Resultados	62
4.4	Discussão	63
CAPÍTULO 5 - COLAPSOS X FUSÕES		67
5.1	O Processo de Relaxação Gravitacional	67
5.1.1	Breve Revisão dos Processos de “Mistura de Fase” e de “Relaxação Violenta”	67
5.1.2	Evolução no Espaço Real e Espaço de Fase Projetados	69
5.1.3	Densidade Máxima do Espaço de Fase	79
5.1.4	O Plano $E \times L$	80
5.1.5	As Distribuições de $N(L)dL$ e $N(E)dE$	91

5.1.6	A Distribuição $N(E)dE$ e a Lei de Maxwell-Boltzmann	96
5.1.7	Análise da Conservação das Energias Médias de Coleções de Partículas	100
5.2	Características Dinâmico-Estruturais dos Modelos Finais	105
5.2.1	Perfil de Densidade Superficial	105
5.2.2	Triaxialidade	111
5.3	Discussão	116

CAPÍTULO 6 - NÃO-HOMOLOGIA **119**

6.1	O Equilíbrio das Regiões Centrais	119
6.2	Revisitando os Produtos Finais no Espaço do PF	120
6.2.1	Recapitulação dos Resultados para Fenda de Dimensões $[0, 2 r_e \times 0, 2 r_e]$	120
6.2.2	O Desvio de Homologia Visto Através dos Coeficientes C_r, C_v	122
6.2.3	Resultados para Fenda de Dimensões Superiores à $[0, 2 r_e \times 0, 2 r_e]$. .	126
6.2.4	Utilizando a Dispersão de Velocidades Tri-Dimensional	127
6.2.5	O Efeito da Fenda	129
6.3	Revisitando os Produtos Finais no Espaço κ	131
6.4	O Efeito de Maré sobre a Não-Homologia Central	137
6.5	Discussão	142

CAPÍTULO 7 - 2-VT **145**

7.1	Motivação	145
7.2	A Hipótese do Teorema do Virial a Duas Componentes (2-VT)	146
7.3	Versões do 2-VT	147

7.3.1	O 2-VT Expresso em Termos das Variáveis do PF	147
7.3.2	O 2-VT Expresso em Termos das Variáveis do Espaço- κ	148
7.4	Aplicações do Teorema do Virial a Duas Componentes	149
7.4.1	Dados Observacionais	149
7.4.2	Dados das Simulações	152
7.5	Discussão	154
CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES		155
APÊNDICES		159
APÊNDICE A - CORREÇÃO DE QUADRUPOLO		159
APÊNDICE B - MODELOS DE KING		161
APÊNDICE C - MODELOS DE HERNQUIST		165
APÊNDICE D - MODELOS $\Delta_k \sim k^n$		167
APÊNDICE E - CONDIÇÕES INICIAIS PARA FUSÃO		173
APÊNDICE F - O COEFICIENTE VIRIAL $2K/W$		181
APÊNDICE G - DEDUÇÃO DO 2-VT		185
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		195

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
2.1 Relaxação binária.	38
2.2 $2K/W$ ao longo do tempo.	39
2.3 $2K/W$ ao longo do tempo (pequeno deslocamento de -1).	41
3.1 Visão geral de uma simulação de fusão com uma componente.	48
3.2 Visão geral de uma simulação de fusão com duas componentes.	49
3.3 PF das fusões (material luminoso).	51
3.4 PF das fusões (material escuro).	52
3.5 PF das fusões (ambas componentes).	53
4.1 Visão geral de uma simulação de colapso tipo K.	59
4.2 Visão geral de uma simulação de colapso tipo A.	60
4.3 Visão geral de uma simulação de colapso tipo C ($n = 1$).	61
4.4 O PF dos colapsos.	64
5.1 Evolução de um conjunto de pêndulos.	70
5.2 Evolução no espaço de configurações projetado para um exemplo de colapso “frio”.	71
5.3 Evolução no espaço de fase projetado para um exemplo de colapso “frio”.	72
5.4 Evolução no espaço de configurações projetado para um exemplo de colapso “quente”.	73
5.5 Evolução no espaço de fase projetado para um exemplo de colapso “quente”.	74

5.6	Evolução no espaço de configurações projetado para um exemplo de fusão com uma componente.	75
5.7	Evolução no espaço de fase projetado para um exemplo de fusão com uma componente.	76
5.8	Evolução no espaço de configurações projetado para um exemplo de fusão com duas componentes.	77
5.9	Evolução no espaço de fase projetado para um exemplo de fusão com duas componentes.	78
5.10	Eficiência da mistura no espaço de fase.	81
5.11	Distribuição das partículas no plano E-L para modelos de colapso K. . .	83
5.12	Distribuição das partículas no plano E-L para modelos de colapso A. . .	84
5.13	Distribuição das partículas no plano E-L para modelos de colapso C. . .	85
5.14	Distribuição das partículas no plano E-L para modelos de fusão de Hernquist com uma componente.	86
5.15	Distribuição das partículas no plano E-L para modelos de fusão de Hernquist com duas componentes (parte luminosa).	87
5.16	Distribuição das partículas no plano E-L para modelos de fusão de Hernquist com duas componentes (parte escura).	88
5.17	Potencial gravitacional central dos modelos finais.	90
5.18	Histogramas de L_x , L_y e L_z	92
5.19	Histogramas de L	94
5.20	Histogramas de E	95
5.21	Ilustração esquemática de $f(E)d\theta(d\theta/dt)$ e $N(E)dE$	96
5.22	Ajuste da lei Maxwell-Boltzmann.	98
5.23	Média das energias das partículas por “coleção” inicial (10 intervalos, colapsos).	103

5.24	Média das energias das partículas por “coleção” inicial (5 intervalos, colapsos).	104
5.25	Média das energias das partículas por “coleção” inicial (10 intervalos, fusões).	106
5.26	Média das energias das partículas por “coleção” inicial (5 intervalos, fusões).	107
5.27	Perfil de desidade superficial (colapsos).	108
5.28	Perfil de desidade superficial (fusões com uma componente).	109
5.29	Perfil de desidade superficial (fusões com duas componentes).	110
5.30	Triaxialidades (colapsos).	113
5.31	Triaxialidades (fusões com uma componente).	114
5.32	Triaxialidades (fusões com duas componentes).	115
6.1	2K/W local.	121
6.2	Espaço dos parâmetros cinemático-estruturais.	123
6.3	Parâmetros cinemático-estruturais como função das condições iniciais (colapsos).	124
6.4	Parâmetros cinemático-estruturais como função das condições iniciais (fusões).	125
6.5	Valores das inclinações (α) dos FP's resultantes do uso de diversas fendas.	128
6.6	2K/W local usando a dispersão de velocidades tridimensional.	130
6.7	Resultado das simulações no espaço- κ .	134
6.8	Ampliação da figura anterior.	136
6.9	Variação da energia cinética interior ao raio r .	139
6.10	Razão das energias cinéticas em função das condições iniciais.	141
6.11	Razão das energias cinéticas em função dos coef. cinemático-estruturais.	143

7.1	Projeção no espaço κ dos dados apresentados por BBFN97 e ajustes do 2-VT.	150
7.2	Resultado das simulações no espaço- κ e ajustes do 2-VT.	153
E.1	Posições dos dois sistemas de massas M_1 e M_2 , com relação ao referencial de origem O e ao referencial definido pelo CM.	174
E.2	Condições iniciais para fusão no plano E-L.	179
F.1	Valor de ϵ_{vir} como função da fração de “escapers”.	184

LISTA DE TABELAS

	Pág.
2.1 PARÂMETROS INICIAIS DOS CÓDIGOS	35
3.1 FUSÕES DE MODELOS DE HERNQUIST (UMA COMPONENTE)	45
3.2 FUSÕES DE MODELOS DE HERNQUIST (DUAS COMPONENTES)	46
3.3 FUSÕES DE MODELOS DE KING (CdCC95)	46
3.4 AJUSTE DA INCLINAÇÃO DO PF: FUSÕES	54
4.1 COLAPSOS	57
4.2 AJUSTE DA INCLINAÇÃO DO PF: COLAPSOS	62
5.1 VARIANÇAS MÉDIAS DAS DISTRIBUIÇÕES DE L_x , L_y e L_z	91
6.1 AJUSTE DA INCLINAÇÃO DO PF: UTILIZANDO A DISPERSÃO DE VE- LOCIDADES 3D	129
6.2 ASPECTOS DOS SISTEMAS ESTELARES NO PLANO $\kappa_1 \times \kappa_3$	133
6.3 DIFERENÇAS FRACIONAIS DE K_x	140

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 As Relações de Escala dos Sistemas Estelares

Sistemas estelares auto-gravitantes, desde aglomerados globulares até aglomerados de galáxias, apresentam correlações significativas entre seus parâmetros cinemáticos e fotométricos. Estas correlações dependem de um número bastante pequeno (essencialmente, três) de parâmetros físicos independentes, que reduzem e confinam os vínculos observacionais a um plano neste espaço de parâmetros, chamado de “Meta-Plano Fundamental” (MPF) (Burstein et al. 1997). As galáxias elípticas, em particular, apresentam uma relação cinemático-estrutural bastante coesa, chamada de “Plano Fundamental” (PF) (Djorgovski e Davis 1987).

Por apresentarem homogeneidades estruturais globais (e.g., uniformidades no perfil de brilho superficial), dominância de populações estelares velhas, baixo conteúdo gasoso, e taxas de formação estelar nulas ou muito pequenas, as galáxias elípticas são objetos de grande interesse astrofísico. O estudo de suas relações de escala pode nos fornecer importantes indicadores acerca da história formativa e da dinâmica destas e de outras galáxias e estruturas virializadas. Podemos assumir, em primeira aproximação, um cenário de formação bastante simplificado para as galáxias elípticas, regido, possivelmente, por um mecanismo baseado na “relaxação violenta” (c.f. Lynden-Bell 1967; ver também críticas a este cenário em, e.g., Kandrup et al. 1993, Funato et al. 1992, Madsen 1987), não-dissipativa, de uma protogaláxia ou de uma fusão de protogaláxias, que sofreram um breve e intenso período de formação estelar (c.f. Sandage 1985). Assim, podemos estender o conhecimento ganho neste estudo para outras estruturas auto-gravitantes, adicionando condições mais realistas, como dissipação do gás, etc.

A origem das correlações expressas no PF das galáxias elípticas não é de todo clara. Estas correlações são descritas por: $r_e \sim \sigma_0^A I^B$ (σ_0 é a dispersão de velocidade central, I , o brilho superficial médio dentro do raio efetivo em unidades lineares, e r_e , o raio efetivo), onde $A \sim 1.53$, $B \sim -0.79$ (e.g. Pahre, Djorgovski e de Carvalho 1998). É notável que as galáxias elípticas possam ser, em particular, essencialmente descritas por uma equação tão compacta como a do PF. No entanto, o que podemos inferir destas relações é que devem representar um desvio significativo das previsões do teorema do virial, sob a hipótese de que as elípticas seriam sistemas homólogos¹ simples. Uma hipótese atual para explicar a discrepância observada postula que a razão de massa/luminosidade das elípticas seria uma função da luminosidade total, isto é, $M/L \propto L^b$, $b \sim 0.15$ (Bender, Burstein e Faber 1992, Djorgovski e Santiago

¹Definiremos formalmente o termo “homologia” nas seções seguintes.

1993, Djorgovski 1988, Pahre, Djorgovski e de Carvalho 1995). Uma outra explicação (e.g., Hjorth e Madsen 1995) baseia-se na consideração de que a hipótese de homologia não seria válida, de forma que as galáxias elípticas seriam sistemas não-homólogos virializados. Vários trabalhos discutiram esta possibilidade (e.g., Ciotti, Lanzoni e Renzini 1996, Busarello et al. 1997, Graham e Colless 1997, Bekki 1998). Em particular, Capelato, de Carvalho e Carlberg(1995) (CdCC95) mostraram que as correlações do PF surgem naturalmente a partir de objetos formados por coalescência hierárquica não-dissipativa de galáxias pré-existentes. Estas simulações geraram objetos não-homólogos.

Scodreggio et al. 1998 fizeram um estudo acerca do PF como função da banda fotométrica utilizada, a partir das bandas H (observada por aqueles autores), B , V , r , I e K (extraídas da literatura). Eles encontram que a inclinação do PF varia com a banda, aproximando-se do previsto pelo teorema do virial, na medida em que a banda observada inclui maiores comprimentos de onda, porém nunca atingindo a inclinação esperada pelo teorema do virial. A variação da inclinação com a banda seria condizente com a conhecida correlação entre cor e magnitude das galáxias elípticas (c.f. Kormendy e Djorgovsky 1989). Se a razão M/L for constante para as galáxias na banda K , então espera-se que M/L dependa da luminosidade medida numa banda diferente. Ainda assim, após as correções, resta uma inclinação significativa do PF. Forbes et al. 1998, utilizando estimativas recentes para as idades de uma amostra de elípticas, concluíram que a posição de uma dada galáxia relativamente ao PF depende de sua idade, o que poderia dar conta de uma parte do pequeno espalhamento em torno do PF. Num artigo posterior, Forbes et al. 1999 argumentaram que a inclinação do PF não pode, entretanto, ser inteiramente explicada em termos da idade das galáxias.

Por fim, de um lado mais extremo, Sanders 1999 verificou se a teoria da dinâmica newtoniana modificada (MOND) poderia explicar o PF. Ele deduziu a existência de uma relação única para descrever o equilíbrio de uma faixa de modelos não-homólogos. Porém, para reproduzir o PF, estes modelos precisariam necessariamente se aproximar de politropos de alta ordem com anisotropia de órbitas radiais nas partes externas do sistema.

Como podemos ver, a natureza do PF ainda é bastante controversa. Tal fato torna imperativa uma análise mais aprofundada dos possíveis mecanismos de formação das galáxias. Iniciando pelos cenários mais simplificados, investigações teóricas e numéricas de colapsos não-dissipativos puros de sistemas estelares sempre foram de interesse histórico especial (Polyachenko e Shukhman 1981, Hénon 1973, van Albada 1982, McGlynn 1984, Villumsen 1984, May e van Albada (1984), Merritt e Aguilar 1985, Aguilar e Merritt 1990, Londrillo et al. 1991). Em particular, o papel das instabilidades gravitacionais num modelo evoluindo em direção ao equilíbrio ainda é um campo aberto de investigação (Palmer 1994), que pode ser usado como uma ferramenta efetiva para a compreensão da dinâmica básica do processo formativo

das galáxias.

Nos modelos cosmológicos atualmente aceitos, a dinâmica das galáxias e de aglomerados de galáxias é regida por algum tipo de matéria não-bariônica (chamada de forma geral de “matéria escura”), que interage de forma puramente gravitacional com a matéria “comum” (bariônica). Nos estudos que envolvem a dinâmica destes sistemas, portanto, assume-se que a matéria luminosa está permeada por um halo de matéria escura formada por partículas acolisionais (a hipótese da matéria escura possuir algum tipo de auto-interação tem sido, não obstante, investigada recentemente, c.f. Spergel e Steinhardt 2000). Uma previsão teórica para a estrutura dos halos e conseqüentemente sua influência na história dinâmica das galáxias pode ser feita, por exemplo, tendo como ponto de partida o paradigma atual para a formação hierárquica de estruturas a partir de instabilidades gravitacionais, levando-se em consideração um dado espectro inicial para as flutuações primordiais de densidade. Somente há poucos anos as restrições computacionais devidas ao limites de resolução disponíveis têm sido amenizadas, com o uso de supercomputadores cada vez mais potentes (c.f. Bertschinger 1998). Estas simulações cosmológicas mostram que o colapso de uma flutuação de densidade primordial produz um halo com características estruturais bastante uniformes (e.g. Navarro, Frenk e White 1996, Cole e Lacey 1996, Huss, Jain e Steinmetz 1999).

Por outro lado, o mecanismo de fusão entre galáxias é um processo natural num cenário hierárquico de formação de estruturas, e as propriedades estruturais observadas das elípticas parecem ser razoavelmente compatíveis com este mecanismo (e.g. Shier e Fischer 1998, Bender e Saglia 1999). Simulações numéricas de aglomerações hierárquicas (e.g. Salvador-Solé, Solanes e Manrique 1998) têm, em particular, estudado a influência da fusão entre halos e da acreção (captura) de pequenas estruturas na determinação final do perfil e dinâmica do halo e, conseqüentemente, sua influência sobre a determinação das características físicas da componente luminosa. Estes estudos parecem apontar na direção em que o papel principal da fusão entre halos é o de rearranjar sua estrutura final no sentido de levar a um mesmo perfil de densidade, com valores universais de relação de escalas. O estudo da influência de fusões de halos de matéria escura como função da cosmologia utilizada no contexto dos parâmetros do PF, no entanto, ainda não foi suficientemente explorado (e.g. White 1997).

Uma outra questão ainda não explorada devidamente é a relação do PF com o ambiente (Evstigneeva et al. 2000, de La Rosa, de Carvalho e Zepf 2001). Sabe-se que as galáxias elípticas são encontradas predominantemente em ambientes mais densos. Evidências recentes indicam que as elípticas em aglomerados devem ter se formado em altos redshifts (e.g. Bower, Lucey e Ellis 1992, Aragon-Salamanca et al. 1993, Pahre, Djorgovski e de Carvalho 1996, Bender e Ziegler 1996, Maoz 1997). Estas galáxias parecem estar sofrendo uma evolução passiva em luminosidade, consistente com uma população estelar em envelhecimento (Tinsley 1972, Bruzual e

Charlot 1993). As evidências acima são razoavelmente compatíveis com um cenário hierárquico onde as progenitoras das elípticas tiveram tempo para colapsar e coalescer no proto-aglomerado, em tempos antigos. Porém, a formação e a evolução de galáxias de campo também precisa ser explicada. Embora assinaturas recentes de fusão em algumas elípticas de campo possam ser inferidas (Schweitzer et al. 1990), estudos preliminares de população estelar indicam que estas galáxias estão evoluindo tão passivamente quanto as elípticas de aglomerados (Schade et al. 1996).

Diante das dificuldades envolvidas em se obter um cenário claro e integrado que explique tanto a formação quanto as relações universais de escala das galáxias elípticas, as investigações numéricas de CdCC95 levantam certas questões que permitem ao menos isolar um ponto importante do problema. As simulações numéricas realizadas por aqueles autores, visando modelar em primeira aproximação o cenário hierárquico de formação das galáxias elípticas, mostraram que o PF observado pode ser inteiramente reproduzido nestes experimentos numéricos. Estes estudos indicaram que a origem do PF pode ser explicada como devido a uma não-homologia central, essencialmente de origem cinemática, dos produtos finais de fusão, e que esta não-homologia é função da energia orbital inicial dos pares. No entanto, não é claro o mecanismo dinâmico responsável por este efeito.

1.2 O Problema do Plano Fundamental

1.2.1 Previsões do Teorema do Virial e a Discrepância Observada

O teorema do virial, aplicado a um sistema estacionário auto-gravitante estabelece que

$$2\langle K \rangle + \langle W \rangle = 0, \quad (1.1)$$

onde $\langle K \rangle$ é a energia cinética e $\langle W \rangle$ é a energia potencial total do sistema, avaliados como médias temporais. Isto pode ser re-escrito como

$$\langle v^2 \rangle = GM/r_G, \quad (1.2)$$

onde r_G é o raio gravitacional, definido por (c.f. Binney & Tremaine (1987), p.69):

$$r_G \equiv GM^2/|W|. \quad (1.3)$$

$\langle v^2 \rangle$ é a velocidade média quadrática das partículas, G é a constante gravitacional, e M é a massa total do sistema. Estas quantidades físicas podem ser traduzidas para quantidades observacionais através da definição de certos coeficientes cinemático-estruturais (C_r, C_v), que por sua vez podem ser (ou não) constantes entre as galáxias:

$$C_r \equiv r_G/r_e \quad (1.4)$$

e

$$C_v \equiv \langle v^2 \rangle / \sigma_0^2; \quad (1.5)$$

onde r_G é o raio gravitacional, definido acima, e r_e é o *raio efetivo*, isto é, o raio que contém metade da luminosidade total do sistema: $L(< r_e) = L_{tot}/2$. $\langle v^2 \rangle^{1/2}$ é a *dispersão de velocidades tridimensional*, e σ_0 é a *dispersão de velocidades projetada central*, ou seja, a velocidade média quadrática projetada das estrelas no centro da galáxia (medida no interior de uma fenda quadrada). Definimos também $I_e \equiv L(< r_e)/\pi r_e^2$ como o *brilho superficial médio* no interior de r_e , em unidades lineares. Assim,

$$I_e = C_I \left(\frac{M/2}{\pi r_e^2} \right), \quad (1.6)$$

com

$$C_I \equiv \left(\frac{M}{L} \right)^{-1} \quad (1.7)$$

onde M/L é a *relação de massa-luminosidade* do sistema.

Inserindo as equações acima na relação virial (c.f. Eq.(1.2)), encontramos que

$$r_e = C_{vir} \sigma_0^2 I_e^{-1}, \quad (1.8)$$

onde C_{vir} depende dos coeficientes definidos acima:

$$C_{vir} = \frac{C_r C_v}{2\pi G C_I}. \quad (1.9)$$

Notemos, portanto, que o teorema do virial prevê que os sistemas em equilíbrio, com mesmos coeficientes C_{vir} , deverão se concentrar em um plano dentro do espaço tridimensional definido pelas variáveis r_e , σ_0 e I_e .

Em contraste à Eq.(1.8), o que se observa é que as galáxias se encontram em um plano inclinado em relação ao predito pelo teorema do virial para sistemas com coeficientes estruturais e cinemáticos, e M/L , constantes:

$$r_e \propto \sigma_0^A I_e^B; \quad (1.10)$$

onde $A \sim 1,53$, $B \sim -0,79$, para as galáxias elípticas observadas no infravermelho próximo (Pahre, Djorgovski e de Carvalho 1998).

Como já comentado, as razões para o desvio da relação observada relativamente ao teorema do virial não são bem estabelecidas. Pode-se postular, por exemplo, uma tendência sistemática da razão M/L variar com a massa da galáxia: $M/L \propto M^\alpha$ (e.g. Dressler et al. 1987), onde $\alpha \sim 1/6$, sendo os coeficientes estruturais e cinemáticos considerados constantes². Por outro lado, pode-se esperar uma variação sistemática dos coeficientes estruturais, i.e., as galáxias formariam uma família de objetos *não-homólogos* (CdCC95; Hjorth e Madsen 1995). Discutiremos o que entendemos por “não-homologia” na próxima subseção.

1.2.2 Definição de Não-Homologia

De uma forma geral, dizemos que objetos de uma determinada família (viz., resultantes de um dado modelo) são *invariantes em escala* (“scale-free”) se a medida de uma certa quantidade física qualquer, $Q(x)$, para um dado objeto (1) desta família seja igual à mesma quantidade medida para um segundo objeto (2) qualquer desta família, a menos de um fator de proporcionalidade γ (i.e. normalização do perfil $Q(x)$), seguido, se necessário, de um rescalonamento da variável independente x , i.e,

$$Q_1(x) = \gamma Q_2(x/x_0) \quad (1.11)$$

Por outro lado, se objetos de uma dada família estão virializados, e medimos indiretamente suas propriedades físicas, supondo para tal uma correlação direta entre a quantidade observada e a “real” (e.g., Eqs.(1.4), (1.5), e (1.6)), devemos esperar

²Mostra-se isto facilmente aplicando o valor de $M/L = C_{M/L} M^{1/6}$, onde $C_{M/L}$ é uma constante, na equação que define I_e (c.f. Eqs.(1.6), (1.7)), resolvendo para a massa, e reaplicando esta na equação virial (1.2). Desta forma, recupera-se a Eq.(1.10).

que sigam uma lei do tipo (1.8), onde, neste caso, C_{vir} pode ser função ou não das variáveis espacial (r_G), cinemática ($\langle v^2 \rangle$) e dinâmica (M/L) do sistema. Se C_{vir} é uma constante para todos os objetos da família, então dizemos que os sistemas são *homólogos* entre si.

Há portanto, uma diferença entre sistemas invariantes em escala e homólogos, segundo nossa definição. Quando nos referimos a sistemas homólogos, está implícito a *exigência de que os sistemas seguem estritamente a relação (1.8), com C_{vir} constante*.

1.3 Objetivos desta Tese

Nesta tese, procuramos investigar em maiores detalhes os resultados encontrados por CdCC95. Estes estudos compreenderão a maior parte da presente tese. Para tal, procuramos responder a três questões essenciais: (1) os resultados de CdCC95 são dependentes dos modelos utilizados para as fusões? (2) qual a importância da presença de um halo escuro nas relações de escala da componente luminosa? e (3) o PF surge naturalmente de qualquer mecanismo de relaxação violenta?

Acerca do primeiro ponto a ser questionado, levamos em consideração que os modelos de equilíbrio utilizados por CdCC95 não apresentam um pico central de densidade. Estudos recentes têm demonstrado (e.g. Gerhardt et al. 2000, Siopis et al. 2000), no entanto, que a presença de um pico central (e até mesmo a presença de um buraco negro central) seria muito mais comum nas galáxias elípticas do que se imaginava anteriormente, quando a instrumentação disponível não apresentava resolução suficiente para resolver o suposto “core” central.

Sobre o segundo ponto, os modelos de CdCC95 não levaram em consideração a presença de um halo escuro, supondo apenas que os modelos já houvessem espiralado dentro de um halo em comum, onde quaisquer efeitos dinâmicos do halo já estariam embutidos nas condições orbitais iniciais dos modelos. No entanto, é fundamental entendermos precisamente o efeito da presença do halo na dinâmica de fusão e quais as consequências de sua influência gravitacional nas condições de equilíbrio do conjunto componente luminosa + escura. Para tal, investigamos tanto experimentos numéricos de fusões de modelos com halos, quanto as equações gerais que descrevem a condição de equilíbrio para um conjunto formado por duas componentes, viz., o teorema do virial a duas componentes.

O terceiro ponto lida com uma questão interessante: se a não-homologia central surgiria naturalmente do próprio mecanismo de relaxação gravitacional, seja ele de qualquer grau (i.e., “violento”, no sentido de que as flutuações no potencial grav-

itacional, ao longo da evolução do sistema em direção ao equilíbrio, são extremamente rápidas; ou “suave”, onde o sistema evolui quase estaticamente em direção ao equilíbrio). Sobre este aspecto, notamos que um discernimento (homologia ou não-homologia) entre as relações de escala resultantes da relaxação gravitacional a partir diferentes tipos de condições iniciais pode nos indicar quais vínculos dinâmicos primordiais podem ter sido importantes - ou não - para o mecanismo de formação das galáxias elípticas.

Evidentemente, um estudo essencialmente completo dos mecanismos de formação das estruturas virializadas no universo e sua conexão com as relações de escala apresentadas por estes sistemas é por demasiado complexo. Nesta tese, estamos, naturalmente, adotando simplificações. Não questionamos o mecanismo físico que gerou as condições e/ou flutuações primordiais que deram origem às estruturas no universo (usando-as apenas como condições iniciais do problema), desprezamos a presença do gás e conseqüentemente efeitos dissipativos, etc. A presente tese visa delimitar e expandir os pontos fundamentais do problema aberto por CdCC95 e, se possível, inferir algo sobre a origem das relações de escala dos sistemas estelares auto-gravitantes, de uma forma geral.

Apresentamos no Capítulo 2 a metodologia utilizada nas simulações. Nos Capítulos 3 e 4, introduzimos uma visão geral das simulações de colapso e de fusão, respectivamente. Fazemos uma comparação entre as propriedades globais dos colapsos e das fusões no Capítulo 5. No Capítulo 6, estudamos o problema da não-homologia dos produtos de fusão. No Capítulo 7, apresentamos uma nova hipótese para explicar o MPF. Por fim, no Capítulo 8 discutimos os resultados obtidos por estes estudos.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA

No presente capítulo, apresentamos a metodologia envolvida para a realização das simulações numéricas. Começamos com uma breve discussão acerca do código utilizado para modelar o problema de N-corpos, tendo em vista as considerações de tempo de CPU e generalidade dos modelos iniciais. As últimas seções apresentam alguns detalhes de interesse metodológico, e.g., condições de acolisionalidade, parâmetros iniciais do código, condições de parada das simulações, as unidades computacionais adotadas, etc.

2.1 O Código em *Árvore de Barnes & Hut*

De forma geral, o problema gravitacional de N-corpos pode ser modelado pelos seguintes métodos: (1) Integração Direta; (2) Potencial Interativo; e (3) Estrutura em *Árvore*¹.

O primeiro método envolve a computação de todas as $\frac{N(N-1)}{2}$ forças entre todos os pares de partículas (N é o número total de partículas). Embora permita uma descrição acurada da evolução dinâmica do sistema, o tempo de computação cresce com $O(N^2)$.

O segundo método (também conhecido como “Particle-Mesh”, PM) utiliza uma grade, onde a densidade local é computada para cada nó, partindo do conjunto inicial de partículas. A Eq. de Poisson é resolvida para os nós da grade, onde se extrai, portanto, o potencial gravitacional (discreto). O campo de força (discreto) é então obtido pelo gradiente do potencial em cada nó da grade. Este campo de força é em seguida interpolado para se encontrar a força resultante na posição de cada partícula. Este método permite que as operações cresçam com $O(N \log N)$, porém há perdas de precisão e de generalidade devido à necessidade de adoção de um modelo específico, com uma determinada simetria, para a grade.

O terceiro método tem a vantagem de que o tempo de computação também cresce com $O(N \log N)$, mas não há qualquer necessidade de simetria inicial, e permite uma análise rigorosa de erros. Nesta tese, adotamos este método para a realização de todas as simulações, e o descreveremos em maiores detalhes a seguir.

¹Citamos aqui apenas os métodos mais gerais. Uma lista bem mais abrangente, contendo um resumo de cada método, assim como referências, pode ser vista em <http://www.amara.com/papers/nbody.html>.

A estrutura em árvore para solução do problema de N-corpos se baseia no seguinte algoritmo:

1. *Defina* as dimensões de uma célula como sendo grande o suficiente para conter todo o sistema de partículas. A célula inicialmente é vazia e é denominada de *célula-raiz*;
2. *Retire* uma partícula do sistema e a insira na célula-raiz;
3. *Retire* uma partícula do sistema;
4. *Se* houver uma outra partícula na mesma célula, então subdivida a célula em 8 sub-células cúbicas;
5. *Retorne* ao passo (4) até que não haja mais do que uma partícula por célula;
6. *Retorne* ao passo (3) até que não haja mais partículas.

Assim, quando todas as N partículas forem carregadas na estrutura em árvore, o espaço definido pelo sistema de partículas estará particionado em um certo número de células cúbicas de tamanhos diferentes, com, no máximo, uma partícula por célula. Ou seja, estas células “finais”, que contêm uma partícula no máximo, são portanto agrupadas em células-“pais” maiores, que por sua vez são agrupadas em células-“avós” ainda maiores, e assim por diante, até a célula-raiz, que contém o sistema inteiro. O passo final na construção da árvore é etiquetar as células assim subdivididas com a massa total e a posição do centro de massa de todas as partículas ali contidas.

Após a construção da árvore, é realizado o cálculo da força entre as partículas, da seguinte maneira:

1. *Tome* uma partícula p ;
2. *Comece* pela célula-raiz;
3. Seja l o comprimento da célula atualmente sendo processada, e d a distância do centro de massa da célula até p ;
4. *Se* $l/d < \theta$, onde θ é um parâmetro de “tolerância” fixo (da ordem de ~ 1), então *inclua* a interação entre esta célula e p no total da força sobre p que está sendo acumulado; *senão resolva* a célula atual nas suas 8 sub-células, e examine cada uma, indo para o item (3).
5. *Retorne* ao item (1) até que a força total sobre cada partícula tenha sido computada.

Assim, resulta que no caso em que o critério de “tolerância” é cumprido, partículas suficientemente distantes são substituídas por uma pseudo-partícula localizada no centro de massa da célula que se encontram, com massa igual à massa total das partículas desta célula. A força desta pseudo-partícula sobre uma dada partícula é então computada. Quando o critério não é cumprido, as forças de todas as partículas da célula em questão sobre uma dada partícula serão computadas diretamente, uma a uma.

2.2 As Versões do Código e as Plataformas Computacionais Utilizadas

Utilizamos duas versões (c.f. Dubinski 1988) em linguagem *C* do algoritmo “TreeCode”, originalmente proposto por Barnes e Hut 1986a: uma versão é não-paralelizada, que foi a adotada para a realização das simulações com uma componente; e a outra versão é paralelizada, para simulações de modelos com duas componentes.

As plataformas computacionais utilizadas foram:

- Código Não-Paralelizado: *Workstations* do tipo: *Sun-Sparks*; *Sun-Ultras* (1, 2, 5, 10, e 30); e *Sun E250*.
- Código Paralelizado²:
 - ★ Supercomputador de quatro processadores *Origin 2000* da Silicon Graphics usando o MPI (“Message Passing Interface”), sistema operacional IRIX.
 - ★ “Cluster” formado por 4 Pentium III, 650 MHz, trabalhando em paralelo usando o LAM (“Local Area Multicomputer”) 6.3.2/MPI 2 C++, ambiente Linux Red Hat 6.2.

2.3 Correção de Quadrupolo, Parâmetro de Amolecimento, Passo Temporal, e Parâmetro de Tolerância

As versões do código em árvore utilizadas nesta tese usam termos de correção de quadrupolo, de acordo com Dubinski 1988, para o cálculo da força exercida por

²Em cooperação ao projeto “Relatividade Computacional - Buracos Negros, Caos e Formação de Estruturas” (ref. proc. FAPESP 97/11778-8).

um conjunto de partículas suficientemente distantes da partícula que está sendo analisada. A origem deste termo de correção e a sua expressão são detalhados no Apêndice A.

Uma questão importante no que tange o cálculo das forças é que, considerando o grande número de estrelas ($\sim 10^{11}$) que compõem uma galáxia, sua dinâmica é essencialmente não-colisional (c.f. Binney e Tremaine 1987). Ao representarmos uma galáxia por um sistema de apenas $\sim 10^5$ partículas, torna-se imperativo o “amolecimento” da força gravitacional entre os pares de partículas para evitar efeitos colisionais (discutimos a questão da relaxação binária em maiores detalhes na Seção 2.4). Uma solução numérica para este problema é a adoção de um parâmetro de “amolecimento”, ϵ , de forma que a força gravitacional entre uma partícula e outra é redefinida como (assumindo aqui $m_1 = m_2 = m$):

$$F_{ij} \equiv \frac{Gm^2(\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{(\epsilon^2 + |\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2)^{3/2}}. \quad (2.1)$$

No caso de simulações com duas componentes, é necessário definirmos dois valores distintos para ϵ . Discutiremos a questão do ϵ , em maiores detalhes, na seção seguinte.

O passo temporal de integração escolhido para todas as simulações foi de $\Delta t = 0,025$. Este valor de passo temporal, utilizado por Barnes e Hut 1989 na simulação de colisão entre duas esferas de King com $N_{tot} = 4096$, mostrou violação na conservação da energia total do sistema apenas ao nível de $\sim 2\%$, utilizando um parâmetro de tolerância $\theta = 1$. O efeito de reduzir o passo temporal por um fator 2 não produziu efeitos na conservação de energia. Porém, usando $\theta = 0,7$, a conservação de energia foi violada a um nível inferior a $\sim 1\%$, mostrando que, de uma forma geral, o refinamento do cálculo da força via parâmetro de tolerância é mais importante do que a adoção de um passo temporal muito pequeno³.

Hernquist 1987 demonstra que, para se manter a eficiência ($N \log N$) e a precisão no cálculo da força pelo “TreeCode” a níveis toleráveis, resulta no limite para o parâmetro de tolerância em $0,3 \leq \theta \leq 1,0$. Tendo em vista este resultado e o discutido na parágrafo anterior, adotamos neste trabalho o valor de $\theta = 0,8$.

Na Tabela 2.1 listamos os valores utilizados para os principais parâmetros dos códigos.

³Evidentemente, a adoção de passos temporais individuais menores para partículas que sofrem interações fortes, que mudam rapidamente com o tempo, reduziria ainda mais o nível da violação da energia total. No entanto, tal refinamento exigiria uma reformulação razoavelmente complexa nos códigos, de forma que não a adotamos neste trabalho. A violação da energia sem este refinamento se dá a níveis percentuais suficientemente baixos para nossos propósitos.

TABELA 2.1: PARÂMETROS INICIAIS DOS CÓDIGOS

Parâmetro	Valor
θ : Parâmetro de Tolerância	0,8
ϵ : Parâmetro de Amolecimento	
→ Código Não-Paralelizado	0,05
→ Código Paralelizado	
Componente Luminosa	0,07
Componente Escura	0,7
Δt : Passo Temporal de Integração	0,025

2.4 Supressão das Interações Binárias e Resolução Espacial

Deflexões significativas na órbita de uma estrela em sistemas com muitos corpos ($N \gtrsim 10^{11}$) têm mais probabilidade de serem causadas pelo efeito acumulativo de várias interações fracas ao longo da órbita do que por uma única colisão (ou encontro muito próximo) com outra estrela (como demonstrado no trabalho clássico de Chandrasekhar 1942; c.f. também Binney e Tremaine 1987). Colisões entre três ou mais (poucas) estrelas são também raríssimas (Lightman e Shapiro 1978). Assim, o tempo para que um sistema de N-corpos atinja o equilíbrio via unicamente relaxação binária (colisões) é muito maior do que um tempo de Hubble. Como as galáxias se encontram atualmente num estado de aparente (quase-)equilíbrio, um outro mecanismo de relaxação que explique esta condição é necessário. O cenário da “relaxação violenta” (proposto por Lynden-Bell 1967) é interessante por fornecer um mecanismo que opera numa escala de tempo muito curta, e é baseado no efeito global do campo médio, i.e., devido a flutuações suficientemente bruscas no potencial gravitacional⁴.

Portanto, esperamos reproduzir em nossas simulações uma evolução acolisional, para as escalas de tempo envolvidas (menos do que um tempo de Hubble); de forma contrária, um tipo de efeito numérico sistemático grave seria a presença significativa de colisões binárias (e.g. o uso de um valor inadequado para o parâmetro de amolecimento). Podemos estimar um valor para ϵ a partir da condição de não-colisionalidade do sistema (Barnes e Hut 1989):

$$\epsilon > C \cdot \langle p_{90} \rangle, \tag{2.2}$$

⁴O mecanismo da “relaxação violenta” é discutido em maiores detalhes no Capítulo 5.

onde $\langle p_{90} \rangle$ é o parâmetro de impacto para desvio de 90° em encontros entre duas partículas do sistema, dado por:

$$\langle p_{90} \rangle = \left\langle \frac{G(m_1 + m_2)}{v_{rel}} \right\rangle = \frac{G(m_1 + m_2)}{2\langle v^2 \rangle}, \quad (2.3)$$

onde v_{rel} é a velocidade relativa entre os pares de partículas, $\langle v^2 \rangle$ é a dispersão de velocidades (3-D) do sistema ($\langle v^2 \rangle = 3\sigma^2$), e m_α ($\alpha = 1, 2$) é a massa individual de cada partícula do par a sofrer interação. A partir da análise dos resultados de simulações numéricas, Barnes e Hut 1989 sugerem que $C \sim 50 - 100$. Neste trabalho, assumimos $C \sim 50$.

No caso de sistemas com duas componentes, a interação poderá ser entre partículas de mesma massa ou entre partículas de massas diferentes. Seja $m_2 = fm_1$, com $f > 1$. Então:

$$p_{90}^{22} = \frac{Gm_2}{\langle v^2 \rangle}, \quad (2.4)$$

$$p_{90}^{11} = \left(\frac{1}{f} \right) p_{90}^{22}. \quad (2.5)$$

Em sistemas com duas componentes é necessário, portanto, definir um ϵ adequado para cada componente, pois, dado que no geral assume-se que $f \gtrsim 10$, dificilmente a definição de apenas um ϵ será capaz supimir bem os efeitos colisionais esperado das duas componentes. No caso de interação entre duas partículas de massas diferentes, o código adota um valor mediano para ϵ .

Por outro lado, nossas simulações precisam fornecer uma resolução espacial adequada. A resolução espacial depende também, essencialmente, do comprimento de amolecimento, ϵ . Na sua análise, Barnes e Hut 1989 sugerem que detalhes estruturais em escalas $< 10\epsilon$ ainda são sensíveis ao valor de ϵ , e portanto podem não ser reais. Assim, a resolução espacial de uma simulação deve ser:

$$R \gtrsim 10\epsilon, \quad (2.6)$$

de forma que o valor escolhido de ϵ deve ser:

$$\epsilon \lesssim R/10. \quad (2.7)$$

Das condições acima (c.f. Eqs. (2.2), (2.7)), podemos tirar uma estimativa para os valores de ϵ . Os valores da Tabela 2.1 refletem esta escolha baseados numa série de testes nos modelos iniciais.

Mostraremos que não houve problema de relaxação binária em nossas simulações através do seguinte teste: verificando se o raio efetivo diminui gradativamente com o tempo *após a relaxação do sistema*. A razão para este teste provém do seguinte fato: como já mencionado, o tempo de relaxação via colisões é muito maior do que o tempo dinâmico de um sistema com muitas partículas (e.g., $N \sim 10^{11}$). No entanto se nossas simulações não reproduzissem satisfatoriamente a evolução acolisional do sistema (por exemplo, por uma má escolha do parâmetro ϵ), então os efeitos colisionais já seriam percebidos numa escala de tempo bem mais curta. Um dos possíveis resultados da colisão ou do encontro muito próximo entre uma partícula e outra (estes eventos seriam mais prováveis onde o livre caminho médio é menor, i.e., nas regiões centrais do sistema) é o ganho de energia de uma das partículas, de forma que ela poderá ocupar as regiões mais externas, onde predominantemente se encontram as partículas com alta energia (viz., energia quase nula), ou poderá até mesmo escapar do sistema. Haverá, portanto, uma tendência do sistema transferir energia das regiões centrais (o “core”) para as externas (o “halo”), o que resultará numa lenta contração do “core” e expansão do halo, fenômeno este conhecido como *contração secular* do “core” (c.f. Lightman e Shapiro 1978).

Alguns exemplos da evolução do raio efetivo dos modelos simulados como função do tempo são apresentados na Fig. 2.1, onde observamos a ausência do efeito discutido acima: não há aparente contração gradativa das regiões centrais (viz., aumento da concentração central de partículas) após a relaxação do sistema.

2.5 Interrupção das Simulações e os “Escapers”

Cada simulação foi interrompida quando o coeficiente virial ($2K/W$) do conjunto total de partículas indicava que este não se alterava significativamente. De fato, esperamos que o coeficiente virial para um sistema isolado, em equilíbrio, se mantenha razoavelmente inalterado, em torno do valor -1 , uma vez que nesta situação o sistema obedecerá ao teorema do virial ($2\langle K \rangle + \langle W \rangle = 0$). Tipicamente, em ~ 30 “crossing times” ($T_{cr} = GM^{5/2}/(2|E|)^{3/2}$, c.f. Binney & Tremaine 1987), os produtos finais já se apresentavam em equilíbrio dinâmico, de forma que esta escala de tempo foi tomada como referência para analisar os modelos finais. Um exemplo do coeficiente virial médio ao longo do tempo pode ser visto na Fig. 2.2.

As partículas com energia maior que zero (“escapers”) foram removidas dos modelos finais. Estas partículas ganham energia a partir das flutuações no potencial gravita-

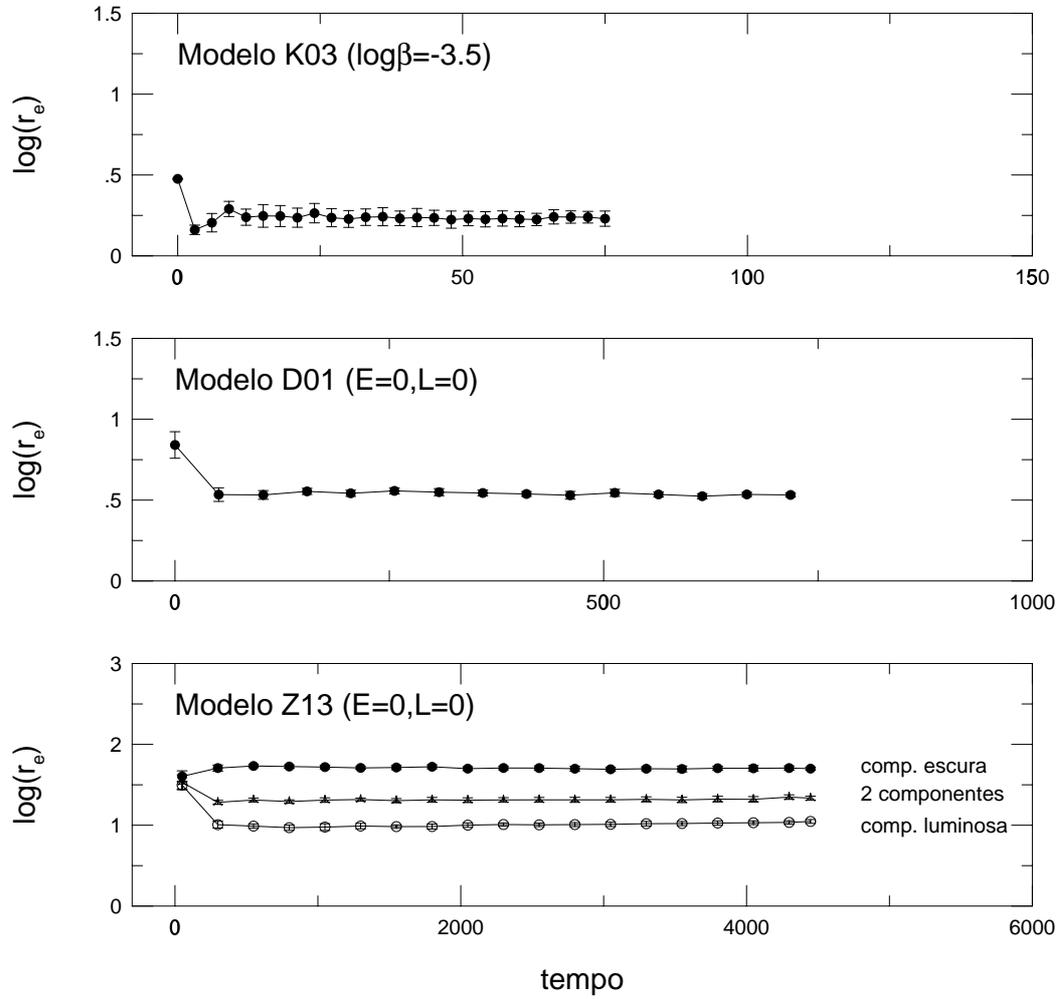


FIG. 2.1: Medida da relaxação binária para alguns exemplos de simulações. Após a contração inicial do sistema e relaxação, o raio efetivo se mantém estável e não diminui gradativamente com o tempo.

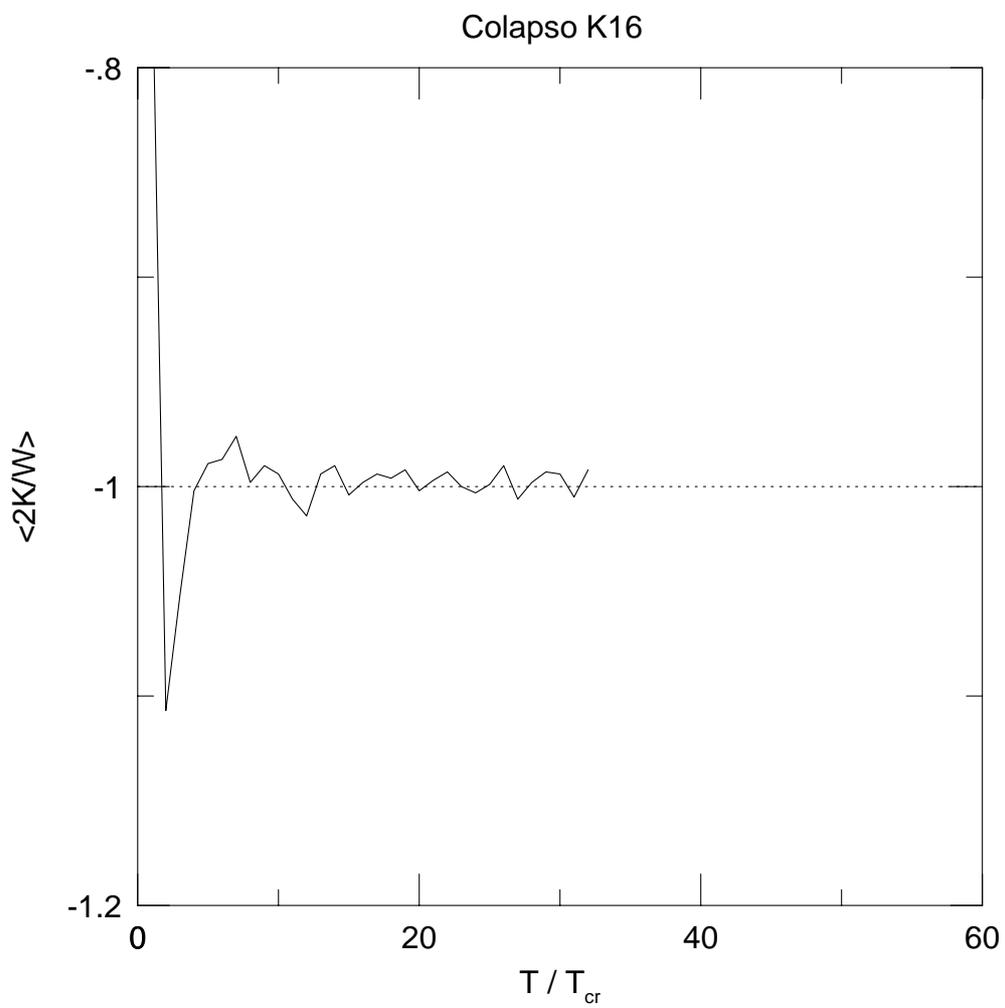


FIG. 2.2: Coeficiente virial $2K/W$ médio ao longo do tempo para um exemplo de simulação.

cional ao longo da evolução do sistema, de forma que quanto mais intensas forem estas flutuações, maior é a chance de que um certo número de partículas ganhe energia a custo da perda de energia de outras (c.f. Binney & Tremaine (1987), p. 273). A fração típica de “escapers” encontrada em nossas simulações foi da ordem de $\sim 10\%$. Toda a análise realizada neste trabalho foi feita nos sistemas removidos de “escapers”, a menos quando explicitamente indicado o oposto.

A presença de “escapers” pode deslocar razoavelmente o coeficiente virial, uma vez que nestes casos, obviamente, estamos medindo $2K/W$ não apenas para o sistema isolado em equilíbrio, mas estamos incluindo no cálculo as partículas que ganharam energia suficiente para escaparem do mesmo. Um exemplo onde este efeito se mostra mais claramente se encontra na Fig. 2.3. Esta questão é discutida em maiores detalhes no Apêndice F.

2.6 As Unidades Adotadas

As unidades computacionais adotadas neste trabalho foram as mesmas das utilizadas por CdCC95:

- Unidade de massa: $[M_c] = 10^{10} [M_\odot]$.
- Unidade de comprimento: $[L_c] = 1 [kpc]$.
- Constante gravitacional: $[G_c] = 1 [G]$.

Estes valores fixam as unidades computacionais de tempo $[T_c]$ e velocidade $[v_c]$. Ou seja, dado que:

$$\begin{aligned} [M_c] &= 10^{10} [M_\odot] = 1,989 \times 10^{43} [g] \\ [L_c] &= 1 [kpc] = 3,08567 \times 10^{21} [cm] \\ [G_c] &= 1 [G] = 6,672 \times 10^{-8} [cm^3][g^{-1}][s^{-2}] \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} [G_c] &= [L_c^3][M_c^{-1}][T_c^{-2}] \\ &\Rightarrow 1 \approx 2,214 \times 10^{28} [s^2][T_c^{-2}] \\ &\Rightarrow [T_c] \approx 1,4879 \times 10^{14} [s] \approx 4,72 [Manos]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$[v_c] = [L_c][T_c^{-1}]$$

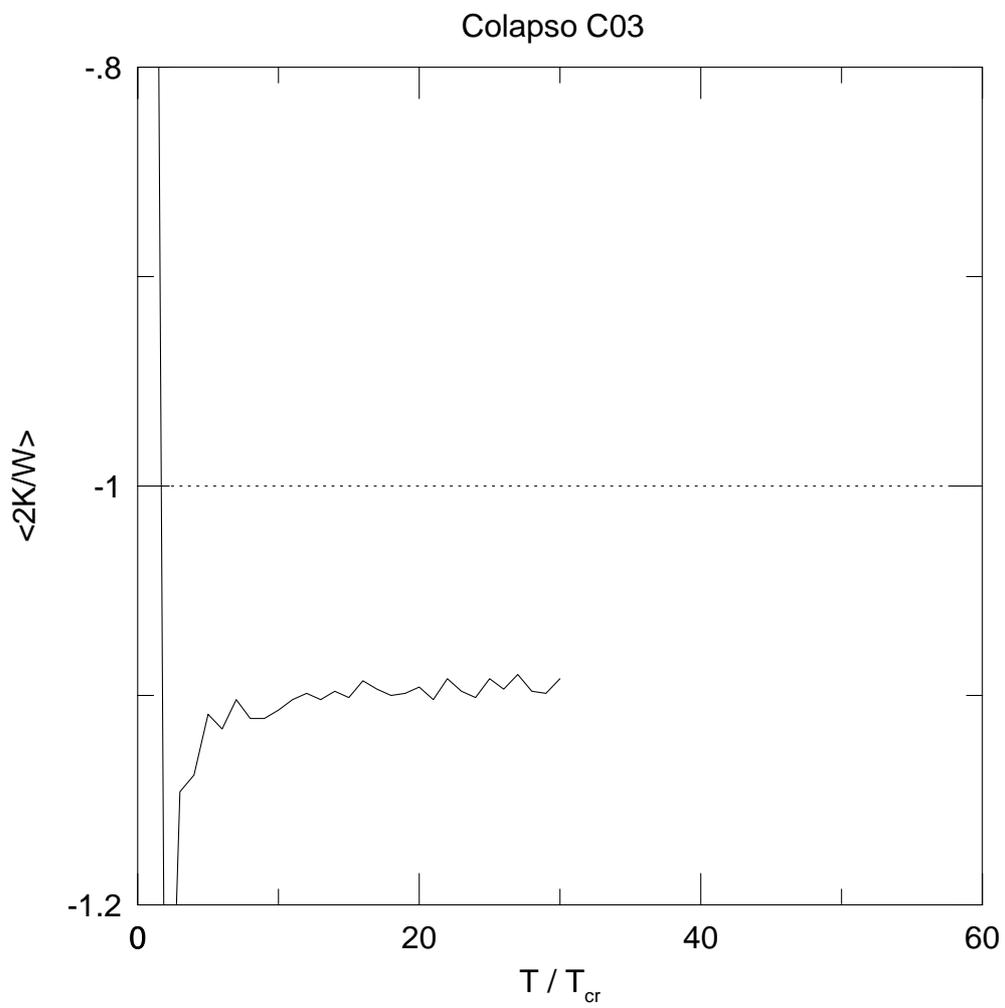


FIG. 2.3: Coeficiente virial $2K/W$ médio ao longo do tempo para um exemplo de simulação onde há um pequeno deslocamento do valor -1 .

$$\Rightarrow [v_c] = \frac{3,08567 \times 10^{16} [km]}{1,4879 \times 10^{14} [s]}$$
$$\Rightarrow [v_c] \approx 207 [km][s^{-1}].$$

Assim:

- Unidade de tempo: $[T_c] = 4,72 [Manos]$.
- Unidade de velocidade: $[v_c] = 207 [km][s^{-1}]$.

Daqui por diante as grandezas serão expressas neste sistema de unidades, a menos quando explicitamente indicado. Com este sistema de unidades computacionais, podemos comparar diretamente nossos resultados aos de CdCC95.

CAPÍTULO 3

OS REQUISITOS PARA O AMBIENTE

Ao longo de vários anos no desenvolvimento de software para sistemas de controle de satélites, é possível hoje identificar vários pontos importantes que caracterizam este desenvolvimento. Foi desenvolvido para ser aplicado ao primeiro sistema de software para controle de satélites (SICS-SCD1), um conjunto de técnicas de engenharia de software como uma metodologia (padrões) e procedimentos (garantia da qualidade e controle da configuração).

Alguns trabalhos foram publicados (Cunha e Nakanishi 1993; Sant'Anna et al.,1998a) relatando como, a implementação da metodologia e dos procedimentos foram úteis para o projeto SICS-SCD1. Com a proposição de novos conceitos de Engenharia de Software como os modelos CMM e SPICE e de novas tecnologias é possível continuar melhorando o processo de construção de software para sistemas de controle de satélites.

Neste Capítulo inicia-se a apresentação de uma proposta para um novo ambiente para o desenvolvimento de sistema de controle de satélites. Esta proposta inclui novas formas de abordar o desenvolvimento, utilizando como conceitos à gestão de projetos, a abordagem SPICE e o trabalho cooperativo. Nas seções que se seguem são apresentados, um breve histórico sobre o desenvolvimento e as características necessárias para um novo ambiente.

3.1 – Um Breve Histórico - A Engenharia de Software no SICS-SCD1

No desenvolvimento do SICS-SCD1 houve a preocupação constante com relação à adoção de técnicas de Engenharia de Software e a utilização do que havia de mais avançado no campo de desenvolvimento de software.

O controle do software, documentos, itens e seus relacionamentos durante o desenvolvimento e a manutenção de um grande sistema de software

era e é considerado um dos fatores mais importantes na garantia da qualidade dos produtos de software e da produtividade das equipes participantes.

Nos sistemas de software para Controle de Satélites, é possível chegar a um produto com algumas centenas de milhares de linhas de códigos, com milhares de módulos de programa, onde as equipes de desenvolvimento podem conter dezenas de profissionais.

Durante o desenvolvimento deste tipo de sistema, um módulo produzido por um grupo pode ser reutilizado por outros grupos em outras partes do sistema. Além disto, este módulo pode sofrer alterações e essas alterações podem afetar outros módulos. Da mesma forma, cada documento está sujeito a alteração, bem como sofrer influências de alterações realizadas em outros documentos (Madhavji, 1992).

Além dos tradicionais produtos, outras entidades, aqui denominadas de itens, foram controladas, como por exemplo: parâmetros de rotinas, nomes lógicos, fila de mensagens e área de dados globais. Outros produtos como arquivos de dados, e arquivos "include" foram também verificados (quanto a correte e consistência) e colocados sob controle (Cunha e Nakanishi, 1993).

Uma vez sob controle, todas as alterações e exclusões de qualquer um desses elementos só poderiam ser realizadas após as devidas análises e aprovações, com intuito sempre de preservar a qualidade. Os produtos foram então armazenados em bibliotecas controladas que permitiam consultas livres, porém sem a possibilidade de alterações. As alterações só eram permitidas se realizadas por equipes autorizadas para realizá-las. A autorização foi apoiada por um esquema de contas e prioridades.

A tarefa de manter os relacionamentos entre os elementos de software foi muito preocupante e seria muito difícil de executá-la de forma manual, dessa forma, um banco de dados foi necessário para manter os cadastros de todos os elementos e seus relacionamentos(Cunha e Nakanishi, 1993). Este

banco de dados de produtos foi chamado de Catálogo de Software – CATSOFT.

A necessidade de controle se estendeu para a fase de operação de modo que a manutenção fosse sempre realizada preservando o nível de qualidade obtido no desenvolvimento. O relaxamento das atividades de controle poderia permitir uma rápida degeneração da qualidade, e assim, a uma drástica redução da vida útil do sistema.

Investimentos foram feitos para a implementação desse controle que, além de ser essencial durante o desenvolvimento, foi essencial também para dar continuidade com a existência do sistema, possibilitando assim, a execução eficiente e segura das atividades de manutenção, além de facilitar a reutilização durante o desenvolvimento de novos sistemas.

Para o funcionamento do esquema de controle foi necessário que os membros da equipe de desenvolvimento executassem procedimentos de controle adequadamente integrados ao processo de desenvolvimento.

O esquema incluía normas e responsabilidades definidas que garantiam uma correta execução do esquema de controle. Por exemplo, a substituição de um produto de software por uma versão mais nova, só poderia ser realizada se houvesse uma autorização formal para tal.

Ao estabelecer um processo de desenvolvimento com o esquema de controle tornou-se necessário também estabelecer um conjunto de providências que incluíam: a organização do ambiente de desenvolvimento, das equipes, da estrutura das áreas de trabalho (diretórios) , controle de acesso (contas e senhas) e de outros recursos computacionais.

A organização do ambiente físico de desenvolvimento foi e continua sendo uma das principais providências para o controle das atividades de garantia da qualidade e controle da configuração. A organização do ambiente

de desenvolvimento implementado consiste basicamente na sua quebra em ambientes especializados. Cada um desses ambientes agrupa equipes fisicamente integradas, atividades correlatas e pertinentes a um dado objetivo ou a uma parte do processo de desenvolvimento. Esta partição foi inicialmente realizada levando-se em consideração as características do sistema desenvolvido, as equipes, a metodologia adotada, a qualidade pretendida e os recursos disponíveis. Os seguintes ambientes foram definidos: de sistema, de controle de configuração, de garantia da qualidade, de projeto e implementação, de integração de subsistema, de integração de sistema e de prototipação.

No ambiente de sistema foram realizadas as seguintes atividades como a especificação dos requisitos de sistema; definição dos ambientes e do processo de desenvolvimento; estabelecimento das normas e padrões; especificação funcional; especificação dos dados; divisão do sistema em subsistemas; especificação das interfaces lógicas entre subsistemas; aprovação das especificações dos subsistemas; definição dos testes de aceitação do sistema; aprovação dos planos de teste; aprovação das alterações dos elementos controlados.

Através da integração de pessoas em um mesmo local físico, no ambiente de controle de configuração foram realizadas as seguintes atividades: controle das versões do sistema; manutenção das bibliotecas controladas; transferências de elementos produzidos entre os diversos ambientes, o controle do banco de dados de cadastro de elementos.

No ambiente de controle de qualidade foram realizadas as seguintes atividades: verificação dos elementos produzidos; participação na definição das normas e padrões de qualidade. Estas atividades foram realizadas pela equipe de controle de qualidade.

As atividades de projeto e implementação foram realizadas em diferentes ambientes de projeto e Implementação. As equipes de projeto e

implementação, cada uma delas, com seu líder, foram responsáveis pelo desenvolvimento de um ou mais subsistemas, cada um em seu ambiente próprio.

Para integrar e testar um dado subsistema, os outros subsistemas e interfaces externas foram substituídos por simuladores. No ambiente de integração de subsistemas foram integrados e testados isoladamente em condições próximas do real. Os simuladores foram necessários para permitir que cada subsistema fosse desenvolvido com velocidades diferentes.

A integração e os testes para a montagem do sistema foram realizados no ambiente de integração do sistema a partir dos seus subsistemas e das entidades externas já integrados e testados individualmente.

Se uma equipe de projeto e implementação necessitasse realizar atividades destinadas ao desenvolvimento de protótipos ela utilizava o ambiente de prototipação, o qual, possui facilidades semelhantes ao do Ambiente de Projeto e Implementação.

Nas atividades de desenvolvimento de um sistema utilizam-se diferentes recursos computacionais tais como: áreas de armazenamento de massa e mecanismos controle de acesso. A utilização desses recursos foi disciplinada, seguindo normas previamente estabelecidas de maneira a possibilitar o funcionamento do esquema de controle.

Uma estrutura de diretórios possibilitando o armazenamento de arquivos foi estabelecida de forma coerente com a organização dos ambientes, com a definição das responsabilidades das equipes e das necessidades do esquema de controle. Além disso, algumas regras básicas foram observadas, tais como, a padronização e o armazenamento de produtos de um mesmo tipo em um mesmo diretório.

As atividades de controle exigiram outros recursos, tais como: um pacote software para o controle de versões de produtos, um pacote software para a geração do sistema, um gerenciador de banco de dados para cadastro de elementos e um pacote de software para a automatização dos procedimentos de controle.

Algumas das facilidades do pacote para controle de versões de produtos eram: armazenar as versões dos produtos e permitir a sua recuperação, permitir que um produto fosse alterado somente se ele foi previamente reservado por uma pessoa autorizada, manter o registro histórico das alterações dos produtos e informar quais usuários estavam utilizando um dado produto.

O pacote para a geração do sistema possibilitava o estabelecimento de relações entre os produtos. Assim, uma vez alterado qualquer componente do sistema o pacote pode montar o sistema novamente “recompilando” e “linkeditado” o que fosse necessário.

3.2 – As exigências para um novo Ambiente

Ao especificar um novo Ambiente é necessário caracterizar a atual conjuntura do desenvolvimento de software, para isto é preciso considerar alguns pontos sempre pertinentes à Engenharia de Software.

- O tamanho dos sistemas e a sua complexidade continuam a aumentar
- Cada vez mais novas áreas exigem sistemas computacionais para suportarem seus processos.

A modernidade e a reestruturação das empresas através de mecanismos de Reengenharia e Qualidade Total fez com que novas necessidades fossem acrescentadas ao desenvolvimento e aos produtos computacionais como:

Características importantes aos Produtos:

- Alta qualidade e confiabilidade do produto construído
- Alta eficácia no suporte aos processos dos negócios
- Alta disponibilidade das informações com restrições previstas (segurança)
- Distribuição e integração dos produtos com independência de plataformas
- Alta facilidade de manutenção: corretiva, adaptativa, evolutiva e preventiva.

Características importantes ao desenvolvimento:

- Alta eficiência dos desenvolvedores na construção dos sistemas
- Equipes de desenvolvimento heterogêneo e multidisciplinar, porém integradas.
- Projetos controlados quanto aos custos, prazos e qualidade.
- Diretriz principal do projeto com enfoque na melhoria constante dos processos

O ambiente a ser especificado para apoiar o desenvolvimento dos novos sistemas para controle de satélites deverá ter como base um conjunto de requisitos. Através de um levantamento realizando, observando os sistemas desenvolvidos até então, classificou-se em grupos, são eles: requisitos organizacionais, requisitos de metodologia e linguagens, requisitos de infraestrutura, requisitos de facilidades para o desenvolvimento e requisitos relacionados ao trabalho cooperativo.

3.2.1 - Requisitos Organizacionais

Caracteriza-se por requisito organizacional, aquele cuja definição e diretriz está diretamente relacionado com organização da Instituição que utiliza o ambiente. No INPE, que é a Instituição referência para este trabalho, vários projetos têm sido desenvolvidos e por esta razão, muitas diretrizes já estão consolidadas na cultura da Organização. Estes requisitos normalmente são estáticos (não se alteram durante o projeto) e difíceis de serem modificados. Em caso da necessidade de mudança (por exemplo, com a implementação de melhorias), uma postura forte da Organização deve ser estabelecida. Sem uma postura firme, é muito difícil para a organização adentrar em um ciclo de mudanças. São os requisitos organizacionais:

- a) A estrutura organizacional do INPE prevê atualmente a existência de coordenadorias e suas divisões, que são responsáveis por programas compostos de projetos. Outras coordenadorias apoiam a coordenação responsável, conforme Figura 3.1. Na Figura, a estrutura matricial, mostra, por exemplo, que a Coordenação Geral de Engenharia e Tecnologia Espacial - ETE (responsável pelo desenvolvimento dos projetos dos satélites) é responsável pelos programas MECB, CBERS, ECO-8 e MIC (SACI). Outras divisões apoiam a coordenação ETE no programa MECB, o Laboratório de Integração e Teste de Satélites - LIT, o Centro de Rastreamento e Controle de Satélites - CRC, Centro Espacial de Cachoeira Paulista - CES (responsável pelos dados e imagens coletados através dos satélites), e a Coordenação Geral de Observação da Terra - OBT (responsável pelas aplicações de produtos de satélites). Por fim, as divisões, que compõem as coordenadorias, são compostas por departamentos. Em função destas premissas referentes à estrutura organizacional o ambiente proposto deverá conter características que permitam que a estrutura organizacional do Instituto seja respeitada.
- b) Além das características da estrutura organizacional, o fator humano constitui um dos aspectos mais importantes para o sucesso do projeto. A

forma como as equipes são montadas, a organização das equipes com relação às responsabilidades de seus participantes e as características pessoais de cada membro da equipe são consideradas como políticas para a formação das equipes. Estas políticas são definidas de forma diferente para cada projeto e ao longo do desenvolvimento de um mesmo projeto e, para isto, é necessário que o ambiente possua características de configuração e flexibilidade, permitindo que as pessoas sejam alocadas de acordo com as necessidades de cada projeto.

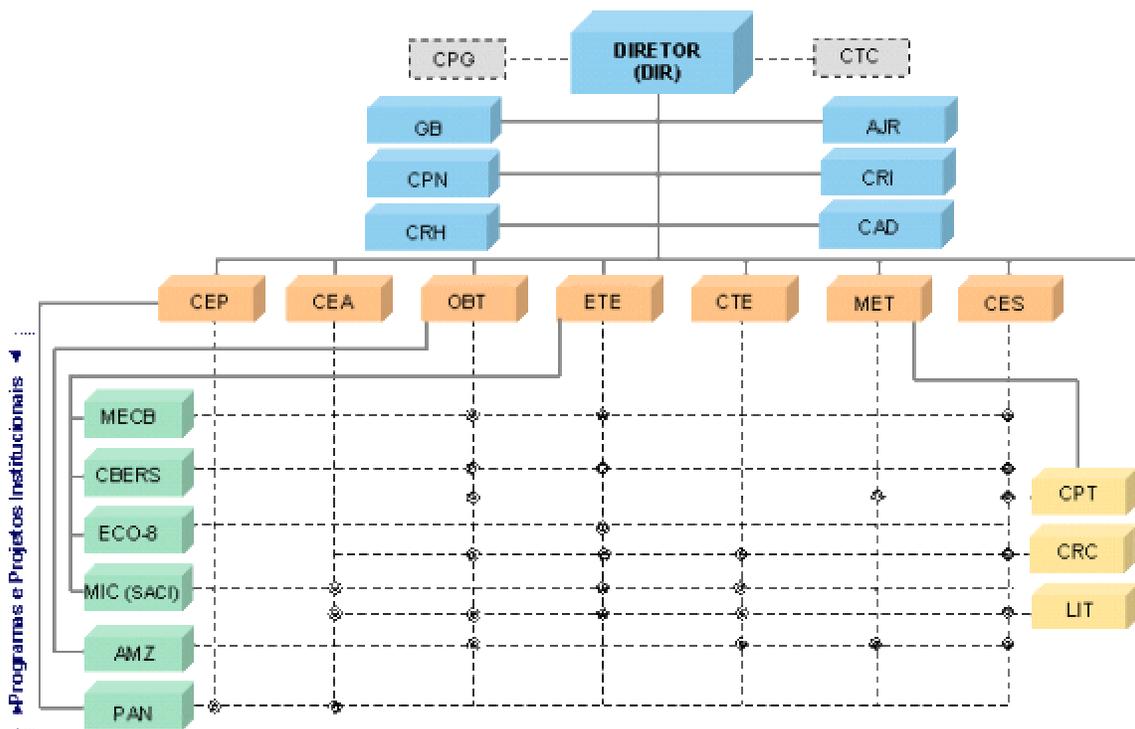


Fig.3.1 – A estrutura organizacional Matricial do INPE (Fonte INPE)

- c) Vários projetos estão atualmente em desenvolvimento no INPE e, conseqüentemente, há necessidade de que todos sejam gerenciados simultaneamente. Além disto, estes projetos são desenvolvidos de forma

independente, ou seja, cada gerente define as características de seu projeto como ciclo de vida, metodologia de desenvolvimento, ambientes de trabalho e a estruturação das equipes. Com esta gama de projetos, porém similares, é possível a reutilização de partes de um sistema desenvolvido. O ambiente deve portanto refletir a característica de multi-missão, ou seja, um conjunto de produtos desenvolvidos para um projeto, onde partes podem ser reutilizadas em outros projetos.

- d) O porte (tamanho do projeto) e a maturidade do projeto/Organização influenciam diretamente na quantidade de técnicas de engenharia de software adotadas no projeto. A característica que reflete este porte é chamada de escalabilidade. O ambiente deve levar em consideração a escalabilidade, permitindo que o conjunto de técnicas seja definido conforme os recursos estabelecidos e as necessidades específicas de cada projeto.
- e) Uma das práticas utilizadas atualmente pelo INPE é a utilização de recursos humanos terceirizados, com o objetivo de suprir sua carência de analistas e programadores em seus projetos. Visando um melhor controle de custos, produtividade e qualidade, o ambiente deve pois prover recursos para efetuar a gestão desta mão de obra terceirizada.
- f) As equipes podem conter indivíduos trabalhando em salas, prédios e até mesmo fora das dependências físicas do INPE, o que caracteriza que o ambiente deverá integrar pessoas fisicamente distribuídas formando equipes de trabalho.

3.2.2 – Requisitos de técnicas, metodologias e linguagens utilizadas

Os requisitos de metodologias e linguagens referem-se aos aspectos técnicos (métodos, ferramentas e técnicas) ligados ao desenvolvimento dos projetos realizados e aos projetos em andamento:

- a) Além das características organizacionais, cada projeto adota técnicas de engenharia de software que melhor se encaixa às suas necessidades. Outro fator importante com relação às técnicas utilizadas, consiste na melhoria. As técnicas adotadas costumam ser melhoradas e adaptadas para futura utilização. O ambiente, quando no apoio ao desenvolvimento de software, deve ter característica de alta flexibilidade para permitir a utilização e consolidação de uma determinada técnica, permitindo que ela possa então ser melhorada.
- b) No SICS/SCD1 conforme mencionado na seção anterior, foram adotados procedimentos para a garantia da qualidade. Estes procedimentos foram oriundos de muita discussão e negociação entre os grupos interessados envolvidos. É extremamente importante para uma organização (evitar desgastes e ganhar tempo) manter conceitos e definições já estabelecidas. O ambiente deve propiciar meios para que os projetos possam aproveitar os procedimentos já definidos e consolidados pelas equipes de desenvolvimento.
- c) Várias metodologias podem ser utilizadas nos projetos, fatores como o conhecimento da equipe e as ferramentas disponíveis influenciam na definição, cabe a cada projeto definir a sua. No SICS/SCD1 por exemplo, foram utilizados, a análise e o projeto estruturado, já no SICS/SCD2 a metodologia orientada a objetos foi considerada como uma alternativa viável. Nos projetos futuros, outras metodologias podem ser consideradas, ou até uma mistura entre elas. Cabe ao ambiente propiciar recursos para que a metodologia possa ser utilizada de forma eficiente no projeto.
- d) A padronização dos produtos sempre foi considerada como aspecto essencial para a qualidade do software. Como exemplo, é possível citar a padronização da documentação interna dos programas em escritos em FORTRAN para o SCD1. O ambiente deve pois, propiciar que padrões possam ser definidos, utilizados e disseminados para todos os participantes

do projeto. Padrões estes, definidos para todos os aspectos do desenvolvimento de software como a análise, projeto e codificação.

3.2.3 - Requisitos de Infra-estrutura

Os requisitos de Infra-estrutura referem-se aos aspectos computacionais (hardware e software) e de rede, presentes e disponíveis para as equipes de desenvolvimento.

- a) As equipes de desenvolvimento utilizaram para o desenvolvimento do SICS-SCD1 e SCD2 um ambiente centralizado baseado em arquitetura proprietária (VAX-VMS). Para desenvolverem seus produtos, os indivíduos utilizavam as contas neste ambiente VAX-VMS, que foi chamado de área controlada, e diretórios locais de responsabilidade do participante. Cabe ao ambiente, propiciar as mesmas facilidades como a segurança, com controle de acesso das áreas controladas e proporcionar que cada indivíduo seja responsável por sua área de trabalho de modo a permitir privacidade.
- b) Conforme visto na seção sobre o histórico do desenvolvimento, o ambiente de projeto estabelecido para o SICS/SCD1 foi dividido para permitir a integração entre as equipes participantes de um mesmo contexto. O novo ambiente deve ser estruturado para apoiar não só a produção de produtos finais, mas para garantir por exemplo, que produtos resultantes de prototipação, de testes e da integração possam ser armazenados e controlados.
- c) No SICS/SCD1 vários aspectos foram considerados no momento da especificação do ambiente de desenvolvimento, como a possibilidade de vários usuários estarem conectados de forma simultânea (multiprocessamento) e o tamanho da área de dados reservada para cada usuário. Estes aspectos de infra-estrutura foram levantados de forma detalhada e considera-se que o ambiente a ser especificado deve respeitá-los.

d) As plataformas computacionais que compõem a infra-estrutura para o desenvolvimento poderão ser as mais variadas possíveis, tendo por exemplo máquinas com arquitetura RISC (ex:SPARC) e SISC (ex:INTEL), executando sistemas operacionais como UNIX (nas mais variadas versões SOLARIS, LINUX, IBM-AIX) e máquinas com arquitetura INTEL executando sistema operacional para “desktop” como o WINDOWS. Além de diferentes sistemas operacionais e de arquiteturas de hardware, tem-se também uma variedade grande de protocolos de rede como TCP/IP, OSI/ISO e NETBEUI). Cabe ao ambiente operar em ambientes computacionais heterogêneos e através de redes de computadores diferentes.

3.2.4 – Requisitos para apoio ao Desenvolvimento e Gerenciamento

Os requisitos de desenvolvimento e gerenciamento categorizam as necessidades dos projetos com relação a facilidades que melhoram os aspectos de desenvolvimento como: facilidade de interação com o ambiente, facilidade de consulta às informações de projetos públicas e privadas, facilidades de encaminhamento de produtos, facilidades para geração da documentação e facilidades para acompanhamento dos projetos. São eles:

- a) Ambiente deverá propiciar meios para a adoção de mecanismos que tornam as atividades mais produtivas e trazendo como resultados produtos de alta qualidade e confiabilidade.
- b) O ambiente deverá propiciar várias facilidades aos participantes do projeto como:
 - a) Facilidade de geração de novos sistemas e versões em função das modificações de plataformas computacionais.
 - b) Facilidade para a geração da documentação de projeto ao longo do desenvolvimento.

- c) Facilidade para reutilização de partes do sistema, hoje já construídas e consolidadas.
- d) Facilidade para definir os produtos a serem entregues oficialmente
- e) Facilidade para definir, controlar e medir a qualidade dos produtos e dos processos.
- f) Facilidade para permitir uma melhor comunicação entre os membros da equipe, com relação às informações de projeto.
- g) Facilidade para permitir uma melhor forma de relatar problemas, propor soluções e acompanhar a implementação das soluções.
- h) Facilidades para definir e rastrear a implementação de requisitos do sistema.
- i) Facilidade para efetuar o planejamento e o acompanhamento das tarefas
- j) Facilidade para permitir a execução das tarefas pelos indivíduos de forma eficiente e limitada.
- k) Facilidades para controlar as partes de sistema desenvolvidas por terceiros, as consultorias externas, e componentes de software de terceiros.

3.2.5 - Requisitos para o Trabalho Cooperativo

Os requisitos do trabalho cooperativo refletem as necessidades das equipes de trabalhar de forma conjunta e integrada. Vários são os requisitos necessários:

- a) O elemento básico do relacionamento humano é a comunicação, seja ela na forma verbal ou escrita, os indivíduos se comunicam seja na forma assíncrona ou síncrona. Na forma assíncrona, por exemplo, o coordenador

de uma equipe pode anunciar uma reunião de emergência para os integrantes de seu grupo. Cabe ao ambiente prover serviços para a efetivação da comunicação assíncrona e síncrona entre os participantes do projeto.

- b) A autoria cooperativa consiste no desenvolvimento conjunto de um produto, por mais de um indivíduo. A grande parte das atividades do desenvolvimento de software são atividades desenvolvidas em conjunto. O ambiente deve, pois, propiciar recursos para permitir, por exemplo, que várias pessoas trabalhem simultaneamente no levantamento de “Use Case” durante a fase de levantamento de requisitos. Desenvolvedores poderão partilhar a utilização dos produtos e suas informações de forma rápida e segura, para todos que estiverem envolvidos no desenvolvimento em questão.
- c) O suporte à realização de reuniões. As reuniões podem envolver a participação de muitas pessoas para serem concretizadas, para isto diversas tarefas devem ser realizadas como o planejamento (preparação antecipada de um cronograma e distribuição de material a ser divulgado), o acompanhamento (a moderação) e o relato. Cabe ao ambiente facilitar a construção do planejamento das reuniões, facilitar o acompanhamento de preferência através da comunicação síncrona paralela e facilitar o fechamento e encerramento das sessões, com a geração de relatórios e encaminhamento a todos os interessados.
- d) A geração de idéias dentro dos projetos é de extrema importância, principalmente nas fases iniciais de definição de escopo e de planejamento. A técnica de “Brainstorming”, por exemplo, pode ser utilizada. Cabe, pois, ao ambiente prover mecanismos para suportar o estabelecimento e a divulgação das idéias.
- e) Um Vocabulário Comum - Em todo projeto, termos e definições são sempre utilizados, mas nem sempre são claramente detalhados e explicitados em

Fusao Z13

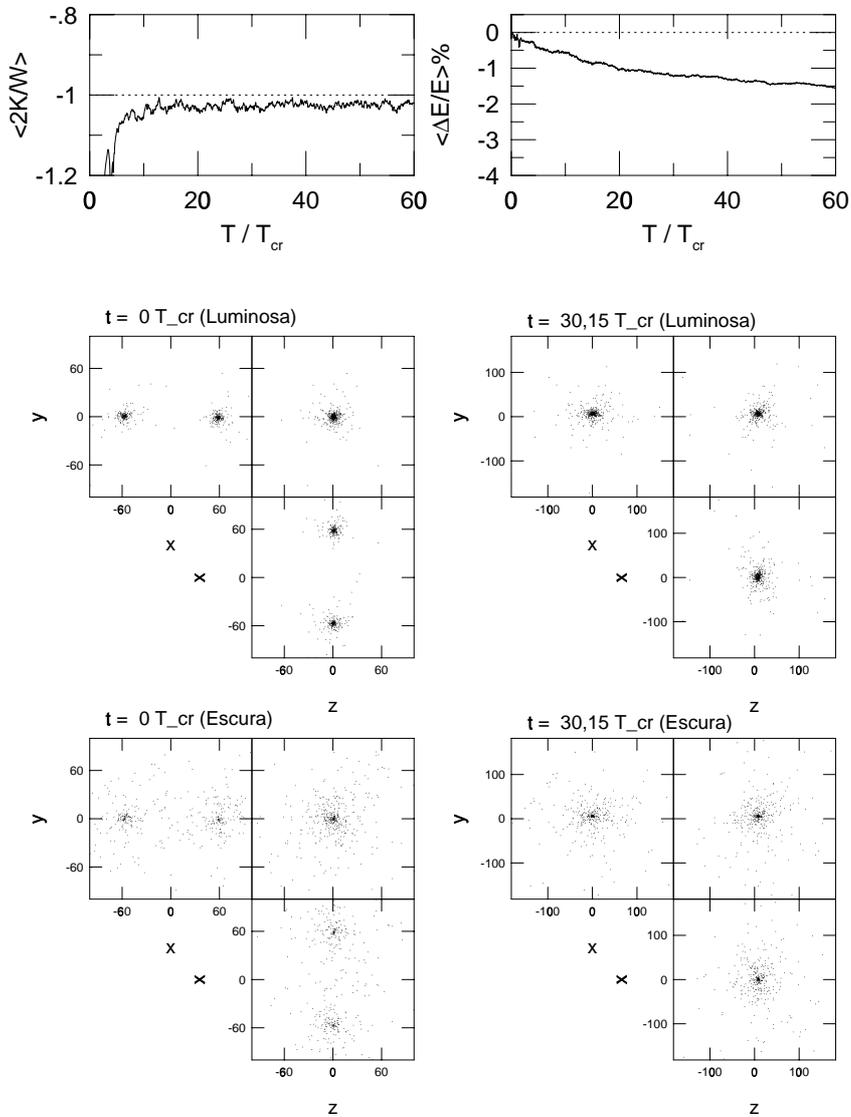


FIG. 3.2: O mesmo da figura anterior, mas para a fusão com duas componentes Z13, cujas componentes são apresentadas separadamente, como indicado na figura. Somente 425 partículas por componente são apresentadas, escolhidas randomicamente, no intuito de se manter a clareza da figura.

Os parâmetros característicos descritos acima foram então combinados para cada modelo final, de acordo com a seguinte constatação: dada a Eq.(1.8), sistemas virializados deverão respeitar:

$$\log r_e = 2 \log \sigma_0 - \log I_e + C_{vir}. \quad (3.4)$$

Como $\langle \mu_e \rangle = -2.5 \log I_e + c$, onde c é uma constante, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2} \log r_e = \log \sigma_0 + g_1 \langle \mu_e \rangle + K_{vir}, \quad (3.5)$$

onde $g_1 = 0, 2$, e $K_{vir} = 1/2(C_{vir} - 0, 4c)$ é uma constante. Por outro lado, a relação do PF obedece à (c.f. Eq. (1.10)):

$$\log r_e = A \log \sigma_0 + B \log I_e + C_{FP}, \quad (3.6)$$

ou

$$\frac{1}{2} \log r_e = \log \sigma_0 + g_2 \langle \mu_e \rangle + K_{FP}, \quad (3.7)$$

onde $g_2 = -0, 4B/A$, e $K_{FP} = C_{FP}/A$ é uma constante, com $A \sim 1, 53$, $B \sim -0, 79$ (Pahre, Djorgovski e de Carvalho 1998). Assim, notando que $g_2 \sim g_1 \equiv g = 0, 2$, podemos representar a relação obtida entre os três parâmetros característicos dos sistemas simulados projetando-os num gráfico cartesiano bidimensional combinando no eixo vertical a variável $y \equiv \log \sigma_0 + 0, 2 \langle \mu_e \rangle$ e no eixo horizontal a variável $x \equiv \log r_e$ ¹. Assim, a inclinação (que denominaremos de α) resultante da relação $y(x)$ para sistemas virializados homólogos será de $\alpha = 2$.

3.5.2 Resultados

Na Fig. 3.3 estão representados os parâmetros característicos no espaço do PF (calculados segundo o método descrito na seção anterior) dos objetos resultantes de fusão

¹Realizamos alguns testes para verificar o quanto a inclinação do ajuste da relação do PF encontrada para os sistemas simulados variava se utilizarmos um valor diferente de $g = 0, 2$. Verificamos que uma variação de até $\sim 20\%$ para mais ou para menos do valor de g não alterava significativamente os resultados.

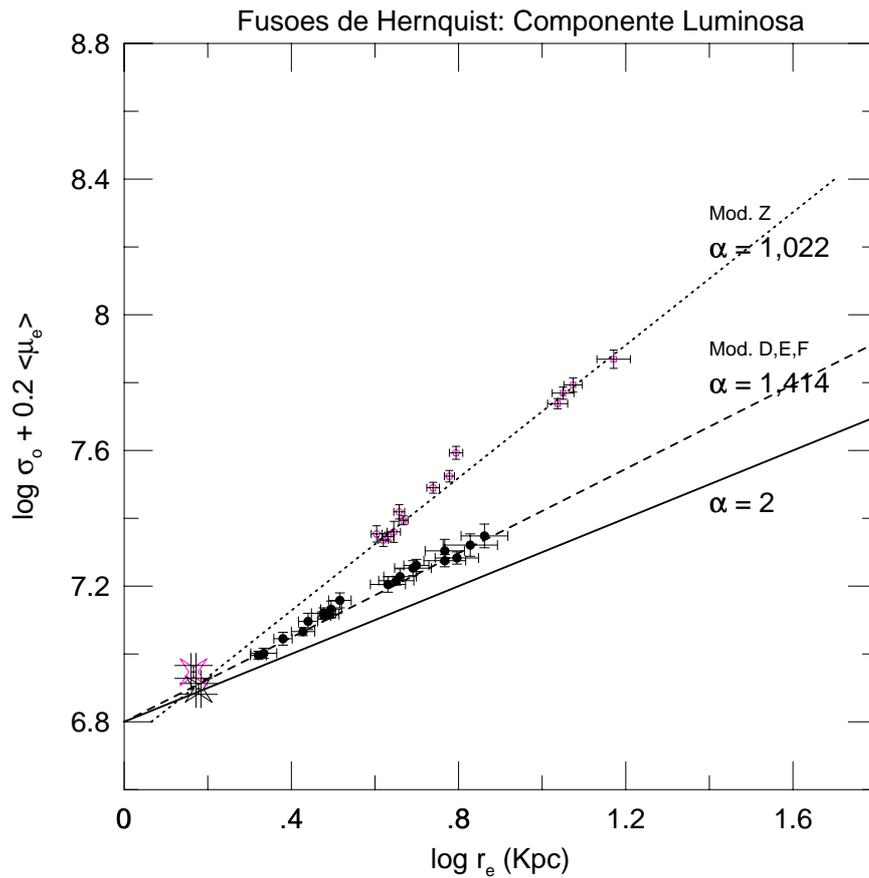


FIG. 3.3: Resultados das simulações de fusão em termos dos parâmetros do PF. No caso das simulações com duas componentes (modelos Z), somente a componente luminosa é apresentada. O símbolo estelar representa o progenitor.

dos modelos com uma (fusões D, E e F) e duas (fusões Z) componentes. No caso dos objetos com duas componentes, os dados apresentados na Fig. 3.3 são referentes à componente luminosa. Na Fig. 3.4 os dados representam a componente escura destes modelos e na Fig. 3.5, as duas componentes combinadas. Os valores das inclinações obtida por ajuste dos modelos são indicadas nas figuras. A linha contínua ($\alpha = 2$) representa a previsão do teorema do virial para sistemas homólogos.

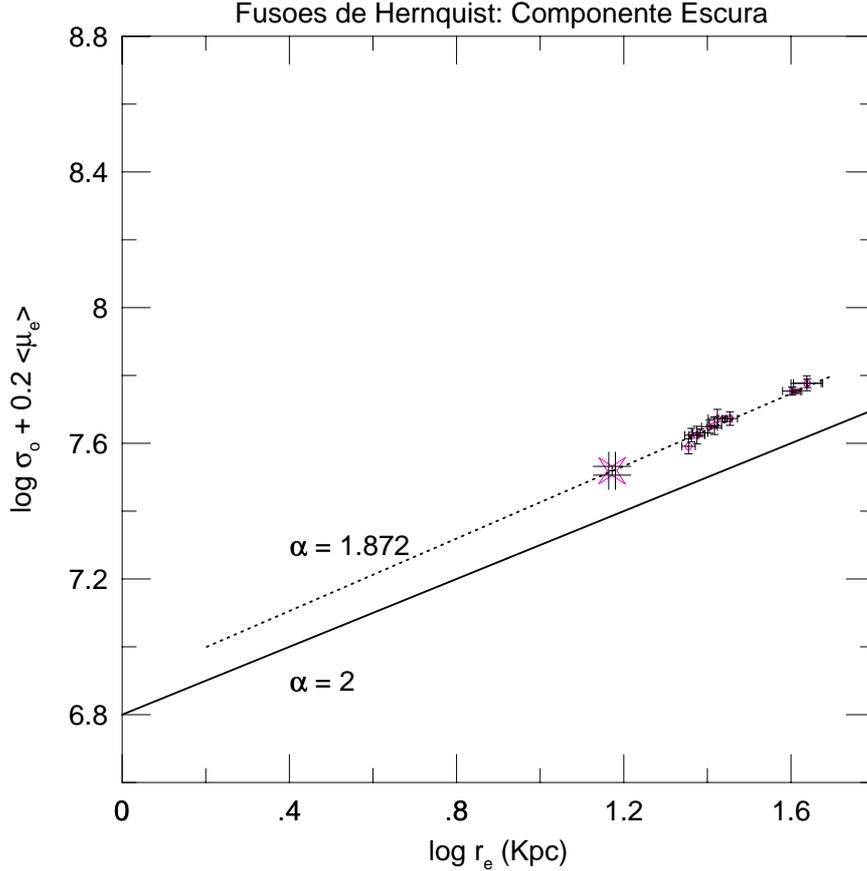


FIG. 3.4: Resultados das simulações de fusão em termos dos parâmetros do PF, apenas para a componente escura (modelos Z).

Na Tabela 3.4, apresentamos os resultados dos ajustes realizados nos dados discutidos acima. Incluímos o resultado do ajuste das simulações de CdCC95 para fins de comparação.

Observamos (Fig. 3.3), em primeiro lugar, que as fusões com uma componente também reproduzem razoavelmente a inclinação do PF das elípticas. Em segundo lugar, notamos que as relações de escala resultantes das fusões com modelos com duas componentes possuem uma inclinação diferente daquela esperada para sistemas homólogos, porém mais afastada da inclinação do PF das elípticas.

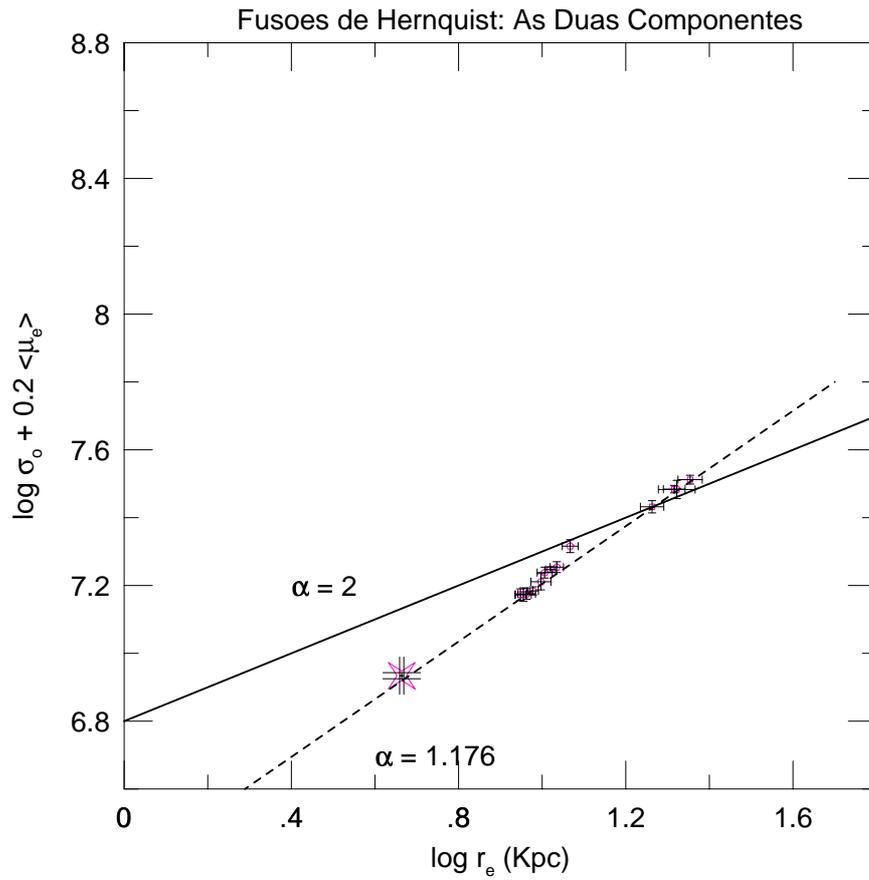


FIG. 3.5: Resultados das simulações de fusão em termos dos parâmetros do PF, medidos para ambas as componentes (modelos Z).

Notavelmente, o conjunto dos halos escuros (Fig. 3.4) forma uma relação compatível com a homologia. As duas componentes combinadas (Fig. 3.5) apresentam uma inclinação menos acentuada do que a inclinação resultante da componente luminosa dos modelos, mas ainda superior à inclinação do PF das elípticas.

TABELA 3.4: AJUSTE DA INCLINAÇÃO DO PF: FUSÕES

MODELO	$\alpha \pm d\alpha$
Uma componente:	
Fusões D, E, F	$\alpha = 1,414 \pm 0,132$
Fusões King (CdCC95)	$\alpha = 1,36 \pm 0,08$
Duas componentes (Modelos Z):	
○ comp. luminosa	$\alpha = 1,022 \pm 0,046$
● comp. escura	$\alpha = 1,872 \pm 0,152$
⊙ ambas componentes	$\alpha = 1,176 \pm 0,070$

3.6 Discussão

Mostramos que as fusões com uma componente também reproduzem o PF das elípticas. Este efeito parece ser, portanto, independente do modelo inicial (c.f. CdCC95), e mais intimamente relacionado ao mecanismo de fusão.

Para as fusões com duas componentes, a parte luminosa dos modelos também forma um conjunto que se desvia da homologia, mas parece severamente afetada pela presença do halo, uma vez que o desvio da homologia é ainda maior do que o apresentado se o sistema fosse composto apenas por uma componente.

Em particular, os halos compõem sistemas razoavelmente homólogos. Uma vez que a componente luminosa, dez vezes menor em massa do que a escura, pouco afeta dinamicamente o halo, o processo de fusão também não parece importante na determinação de uma não-homologia nos halos. De fato, na Fig. 2.1, apresentada no capítulo anterior, notamos que o raio efetivo da componente escura pouco sofre alterações nos momentos iniciais da relaxação. Estes efeitos combinados parecem indicar que o halo relaxa mais “suavemente”. No Capítulo 5 investigaremos em maiores detalhes este aspecto.

CAPÍTULO 4

COLAPSOS

O segundo grupo de simulações constitui os colapsos. Visamos com estas simulações testar a possibilidade de que sistemas não-homólogos poderiam também surgir a partir de processos de relaxação distintos das fusões. Por outro lado, investigações teóricas e numéricas de colapsos não-dissipativos puros de sistemas estelares sempre foram de interesse histórico especial (Polyachenko e Shukhman 1981, Hénon 1973, van Albada 1982, McGlynn 1984, Villumsen 1984, May e van Albada (1984), Merritt e Aguilar 1985, Aguilar e Merritt 1990, Londrillo et al. 1991). Estes estudos, no entanto, não focalizaram a questão do mecanismo de colapso no contexto do problema do PF, sendo, portanto, uma abordagem nova na literatura. Neste capítulo, apresentamos uma visão geral destas simulações.

4.1 Apresentação dos Modelos e das Condições Dinâmicas Iniciais

As simulações de colapso foram executadas a partir de três modelos iniciais distintos, que denominaremos de modelos K, A, e C. Estes modelos são apresentados resumidamente a seguir, e detalhes mais técnicos sobre estes modelos e o método de geração dos mesmos estão descritos nos Apêndices B e D.

Os progenitores dos modelos K foram construídos a partir de realizações aleatórias, com $N_{part} = 8192$ partículas, de modelos de King esféricos e isotrópicos, cujo campo de velocidades foi perturbado na forma:

$$(v_i)_{perturbado} = \sqrt{\beta}(v_i)_{equilibrio} \quad i = 1, \dots, N_{part} \quad (4.1)$$

onde o parâmetro β é uma constante arbitrária, fixada inicialmente, e variando entre $0 < \beta < 1$. A perturbação no campo de velocidades, como descrita acima, resulta num desvio do equilíbrio virial para o sistema considerado. Os modelos assim perturbados são portanto chamados de *progenitores dos colapsos K*.

Em outras palavras, um sistema em equilíbrio virial pode ser caracterizado por um parâmetro (a “razão virial”) dado por:

$$\beta_{equilibrio} \equiv \frac{2K}{|W|} = 1, \quad (4.2)$$

onde K e W são, respectivamente, as energias cinética e potencial totais do modelo de equilíbrio. Assim, para os modelos perturbados, a razão virial não será identicamente igual a 1, resultando em:

$$\beta_{perturbado} \equiv \frac{2K_{perturbado}}{|W|} = \frac{M\langle v^2 \rangle_{perturbado}}{|W|} = \frac{\beta M\langle v^2 \rangle_{equilíbrio}}{|W|} = \beta, \quad (4.3)$$

onde M é a massa total do modelo. Portanto, vemos mais claramente pela equação acima que o parâmetro β da Eq. (4.1) é uma medida direta do desvio do equilíbrio do modelo inicial¹. Logo, se $\beta = 0$ as partículas possuem velocidades iniciais nulas e o sistema irá colapsar a partir de um estado “congelado”. Se $\beta \rightarrow 1$ o sistema será apenas levemente perturbado de sua condição de equilíbrio.

Os modelos de King utilizados e que sofreram as perturbações descritas acima (formando os progenitores dos colapsos K), têm potencial central $W = 5$, massa total $M = 20$, e raio à meia-massa $r_h = 4$. Os detalhes técnicos de sua construção são descritos no Apêndice B.

Os modelos A são similares àqueles utilizados nas simulações de colapso de Aguilar e Merritt 1990. O modelo original deste grupo, a dar origem aos *progenitores dos colapsos A* (viz. aos modelos perturbados), foi construído como realizações aleatórias ($N_{part} = 16184$) de uma esfera de perfil de densidade $\rho \propto r^{-1}$. Cada partícula foi dotada de uma velocidade \vec{v}_i ($i = 1, \dots, N_{part}$) isotrópica, cujo módulo tem valor sorteado aleatoriamente de uma distribuição normal de média nula e dispersão $\langle v_{orig}^2 \rangle$ determinada por:

$$\langle v_{orig}^2 \rangle = \frac{|W|}{M}, \quad (4.4)$$

onde M é a massa total do modelo (adotamos massa inicial $M = 20$, igual a dos modelos K). Este modelo original foi portanto perturbado, de forma a dar origem aos progenitores dos colapsos A, a partir da mesma prescrição anterior:

$$(v_i)_{perturbado} = \sqrt{\beta}(v_i)_{orig} \quad i = 1, \dots, N_{part} \quad (4.5)$$

com $0 < \beta < 1$. As dimensões dos modelos A são semelhantes às dos modelos K: $R = 20$, o que implica $r_h \sim 14$. São, portanto, menos concentrados do que os modelos K.

¹Na literatura, β também é conhecido como “fator de colapso”.

Os modelos C originais ($N_{part} = 4096$) são também esfericamente simétricos, com distribuição de partículas uniforme $\bar{\rho}$, perturbada localmente por flutuações de amplitude seguindo um espectro em lei de potência (c.f. Coles e Lucchin 1995),

$$|\delta_k|^2 \equiv \left| \left(\frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right) \right|^2 \propto k^n,$$

onde exploramos os casos $n = 0$ (modelos C11-C20; espectro de “ruído branco”), $n = 1$ (modelos C01-C10; espectro de “Harisson-Zel’dovich”) e $n = 2$ (modelos C21-C30; espectro “partículas-em-caixas”). Estes modelos possuem um raio inicial maior do que os dos modelos K e A, $R = 100$, sem qualquer concentração central específica, porém com mesma massa inicial dos modelos anteriores, $M = 20$. Assim, os modelos C utilizam condições iniciais de interesse cosmológico, porém as evoluções destes modelos não representam “simulações cosmológicas” em si (i.e., evolução de pequenas flutuações de densidade num grande volume do universo primordial). Estes modelos visam apenas representar uma flutuação esfericamente simétrica que se destacou da expansão geral do universo. Os campos de velocidades dos modelos originais deste grupo foram gerados da mesma forma que o campo de velocidades do modelo A original. Os *progenitores dos colapsos C* foram formados também da mesma forma, i.e., através de perturbações definidas pelo parâmetro β . No caso dos modelos C, um fluxo de Hubble foi adicionado aos progenitores (i.e., após a definição dos β s), de forma que a componente radial das velocidades das partículas seguissem $v_r = Hd$, onde H é a constante de Hubble (adotada, nas unidades físicas, como $65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$), e d é a distância da partícula ao baricentro do sistema.

TABELA 4.1: COLAPSOS

Modelos K			Modelos A			Modelos C								
$\log \beta$	Ref.	N_{part}	$\log \beta$	Ref.	N_{part}	$n = 1$			$n = 0$			$n = 2$		
						$\log \beta$	Ref.	N_{part}	$\log \beta$	Ref.	N_{part}	$\log \beta$	Ref.	N_{part}
-4,00	K01	8192	-4,00	A01	16384	-3,75	C01	4096	-3,75	C11	4096	-3,75	C21	4096
-3,75	K02	8192	-3,50	A02	16384	-3,50	C02	4096	-3,50	C12	4096	-3,50	C22	4096
-3,50	K03	8192	-3,00	A03	16384	-3,25	C03	4096	-3,25	C13	4096	-3,25	C23	4096
-3,25	K04	8192	-2,50	A04	16384	-3,00	C04	4096	-3,00	C14	4096	-3,00	C24	4096
-3,00	K05	8192	-2,00	A05	16384	-2,50	C05	4096	-2,50	C15	4096	-2,50	C25	4096
-2,75	K06	8192	-1,50	A06	16384	-2,00	C06	4096	-2,00	C16	4096	-2,00	C26	4096
-2,50	K07	8192	-1,25	A07	16384	-1,50	C07	4096	-1,50	C17	4096	-1,50	C27	4096
-2,25	K08	8192	-1,00	A08	16384	-1,00	C08	4096	-1,00	C18	4096	-1,00	C28	4096
-2,00	K09	8192	-0,75	A09	16384	-0,90	C09	4096	-0,90	C19	4096	-0,90	C29	4096
-1,75	K10	8192	-0,50	A10	16384	-0,80	C10	4096	-0,80	C20	4096	-0,80	C30	4096
-1,50	K11	8192												
-1,25	K12	8192												
-1,00	K13	8192												
-0,75	K14	8192												
-0,50	K15	8192												
-0,25	K16	8192												
-0,01	K17	8192												

A partir da definição do parâmetro β como sendo a razão do virial dos progenitores, definimos uma grid de condições iniciais. Na Tabela 4.1 estão resumidas as simulações de colapso realizadas neste projeto. Daqui por diante, de forma geral, denominaremos de simulações “frias” aquelas cujas condições iniciais possuem $\beta \rightarrow 0$, e, da mesma forma, de “quentes” aquelas com $\beta \rightarrow 1$.

4.2 Visão Geral das Simulações

Nas Figs. 4.1, 4.2, e 4.3 mostramos o coeficiente virial $2K/W$ ao longo do tempo (painel superior esquerdo), a medida da conservação da energia total do sistema (painel superior direito), em termos percentuais, ao longo do tempo, e uma visualização da distribuição espacial das partículas, projetada nos planos xy , xz , yz , na condição inicial (painel inferior esquerdo) e final (painel inferior direito) para alguns exemplos de colapso.

Assim como no caso de fusões, vemos por estas figuras que de fato o coeficiente virial dos objetos finais tende a um valor constante próximo a -1 . A medida da conservação da energia total do sistema, em termos percentuais, ao longo do tempo, indica que erros numéricos inerentes ao código estão em níveis aceitáveis.

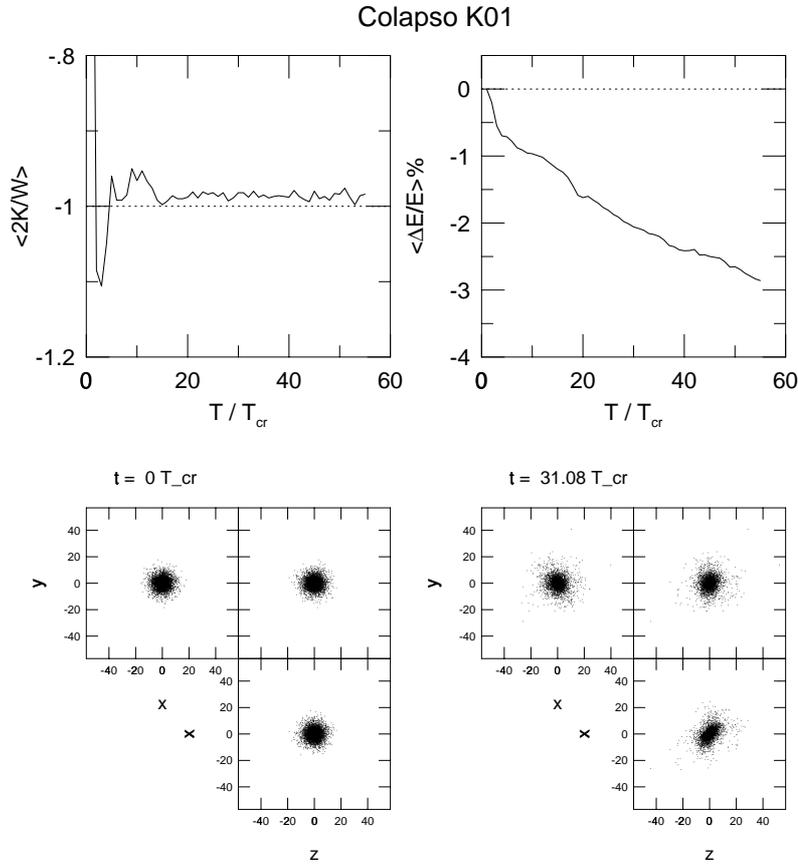


FIG. 4.1: Coeficiente virial $2K/W$ ao longo do tempo (painel superior esquerdo), medida da conservação da energia total do sistema (painel superior direito), em termos percentuais, ao longo do tempo, e uma visualização da distribuição espacial das partículas, projetada nos planos xy , xz , yz , na condição inicial (painel inferior esquerdo) e final (painel inferior direito) para o colapso K01.

Colapso A02

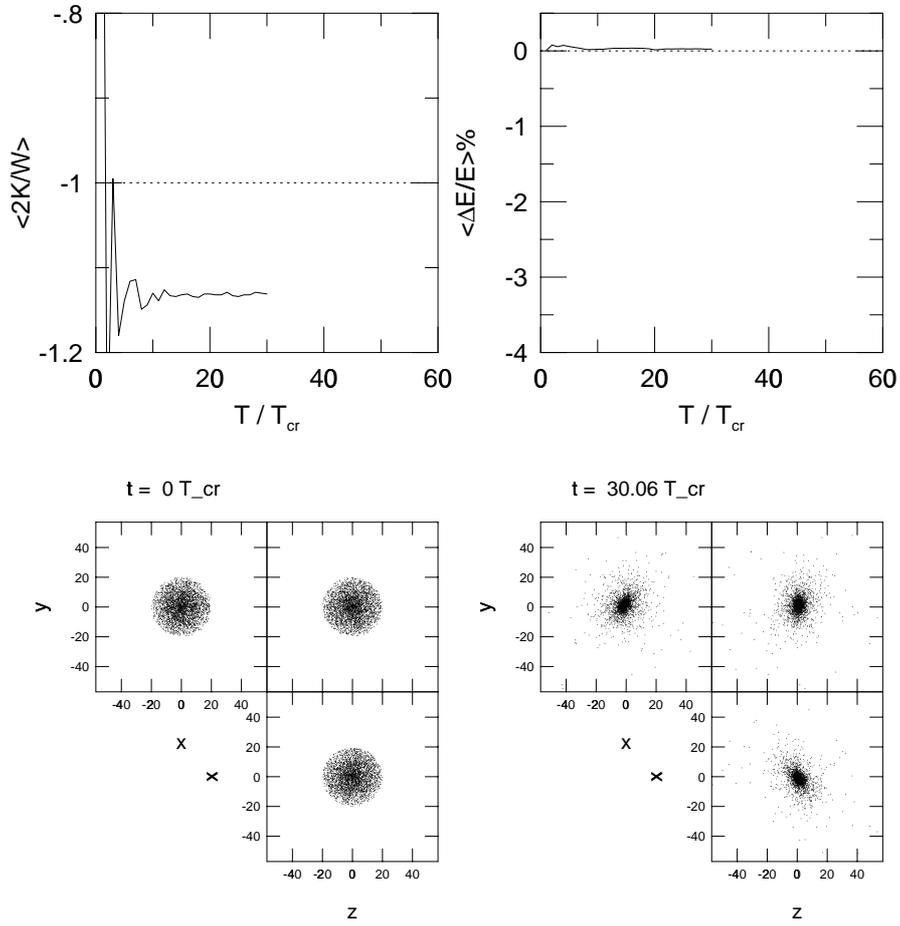


FIG. 4.2: O mesmo da figura anterior, mas para o colapso A02.

Colapso C03

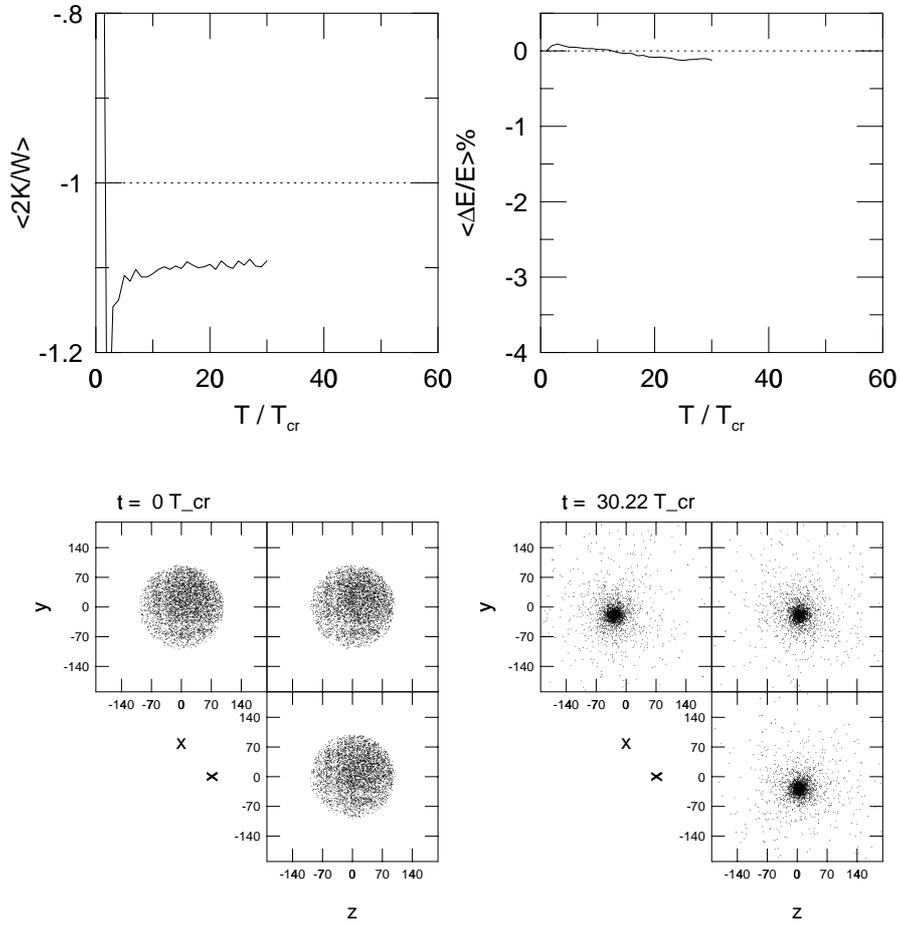


FIG. 4.3: O mesmo da figura anterior, mas para o colapso C03.

4.3 Os Produtos Finais no Espaço do Plano Fundamental: Resultados

Na Fig. 4.4, estão representados os objetos colapsados no espaço do PF. As variáveis características do PF (i.e., σ_0 , r_e , e μ_e) foram calculadas seguindo o procedimento descrito na Seção 3.5.1. Nesta figura, os modelos originais estão marcados por aréolas, donde pode ser traçado a partir de que condição de equilíbrio os modelos iniciais foram perturbados.

Vemos por esta figura que os modelos colapsados não reproduzem as características do PF (ilustradas pela linha tracejada curta na figura: é o ajuste para as *fusões* de CdCC95). Na Tabela 4.2, apresentamos os ajustes da inclinação das relações de escala obtidos. No caso dos modelos K, nenhum ajuste foi tentado pelas explicações que se seguem.

TABELA 4.2: AJUSTE DA INCLINAÇÃO DO PF: COLAPSOS

MODELO	$\alpha \pm d\alpha$
Colapsos K	-
Colapsos A	$\alpha = 1,900 \pm 0,310$
Colapsos C:	
n = 0 (todos)	$\alpha = 2,070 \pm 0,123$
n = 0 (só “frios”)	$\alpha = 1,917 \pm 0,275$
n = 1 (todos)	$\alpha = 2,223 \pm 0,171$
n = 1 (só “frios”)	$\alpha = 1,170 \pm 0,429$
n = 2 (todos)	$\alpha = 2,033 \pm 0,342$
n = 2 (só “frios”)	$\alpha = 1,676 \pm 0,369$

Os modelos K se aglomeram numa região pequena do espaço do PF, exceto os dois (ou três) colapsos mais “quentes” ($\log \beta > -0,75$), que se destacam deste “aglomerado”. Algo semelhante também ocorre nos colapsos do modelo A: os colapsos “frios” ($\log \beta < -1$) tendendo a se aglomerar, enquanto que os mais “quentes” se afastam. No caso dos modelos A, não obstante, podemos ajustar globalmente (linha pontilhada da figura) uma relação próxima daquela esperada para sistemas homólogos (linha sólida na figura).

Os modelos C, independentemente do índice espectral n , se aproximam todos de sistemas homólogos. Os modelos finais se assentam no espaço do PF de forma relativamente insensível ao índice espectral. Os modelos C mais “quentes” parecem

mais separados (destacados) do que os mais “frios” no espaço do PF. Nesta figura, apresentamos apenas o ajuste para todos os modelos C com $n = 1$ (linha tracejada longa) por questões de manter a clareza na figura.

No entanto, ocorre um efeito interessante. No caso dos modelos C de índice espectral $n = 1$, se removermos os modelos com condições iniciais mais “quentes” da análise, os modelos “frios” restantes apresentam uma relação inteiramente não-homóloga. O mesmo ocorre para os modelos com $n = 2$, porém a não-homologia neste caso é um pouco menos severa. Para os modelos C com $n = 0$, entretanto, a homologia se mantém íntegra tanto para os modelos mais “frios” separadamente quanto para todos os modelos considerados em conjunto.

4.4 Discussão

Encontramos que os modelos colapsados não seguem uma relação do tipo PF, ao contrário das simulações de fusão (c.f. Capítulo 3). Nossas investigações mostram que a relaxação gravitacional não-dissipativa de modelos iniciais arbitrários que sofreram colapsos simples e únicos é capaz de produzir objetos que, *de forma geral*, formam famílias homólogas.

Os objetos finais se encontram em localizações diferentes no espaço das variáveis do PF, dependendo do modelo inicial. Mesmo que os modelos iniciais tenham escala de tamanho ($R = 20$) igual, como no caso dos modelos K e A, os colapsos destes modelos ocupam regiões diferentes no espaço do PF, para mesmos fatores de colapso (β). A concentração central de massa dos modelos iniciais pode, portanto, ter uma influência determinante no assento final dos modelos no espaço do PF, para um mesmo conjunto de parâmetros dinâmicos e estruturais globais iniciais dos modelos (viz., β, R).

A homologia dos sistemas finais colapsados é apenas um aspecto geral destes objetos, uma vez que esta homologia pode ser quebrada numa análise mais detalhada. Se separarmos arbitrariamente os colapsos “quentes” ($\log \beta \gtrsim -1$) dos “frios” ($\log \beta \lesssim -1$), vemos que:

- Os modelos “frios” e “quentes” se comportam de forma distinta no espaço dos parâmetros do PF;
- O tipo de comportamento também depende do modelo inicial de colapso.

Os colapsos “frios” dos modelos K e A tendem a se *aglomerar*, sendo esta aglomeração bem mais evidente no caso dos modelos K do que os do A. Os colapsos C ten-

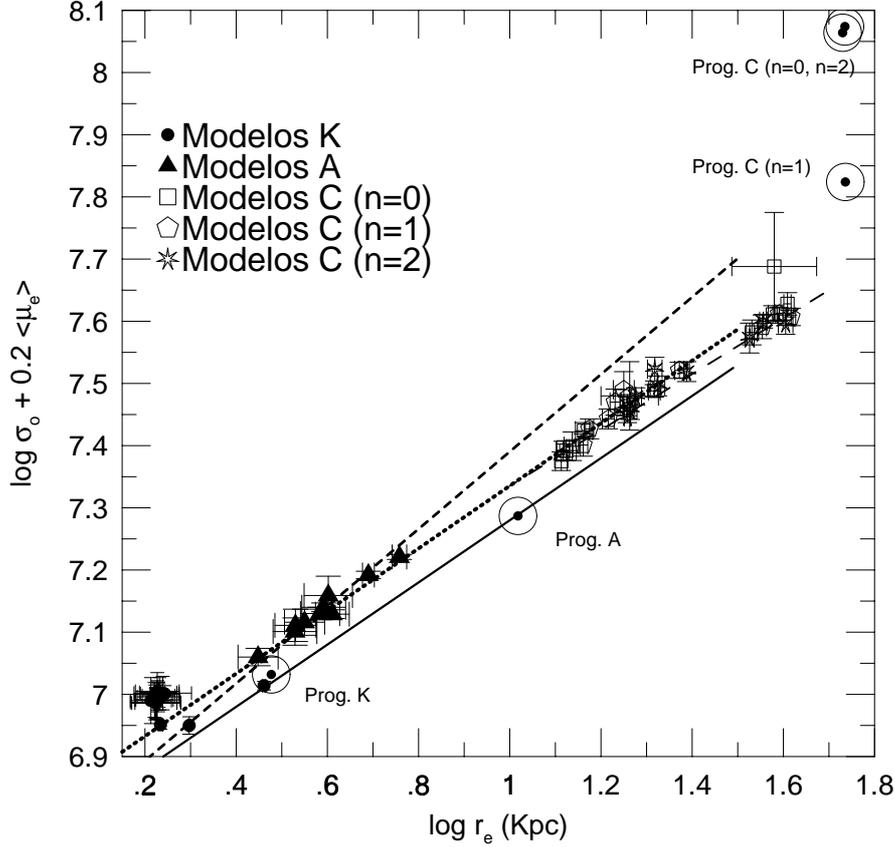


FIG. 4.4: Resultados das simulações de colapso em termos dos parâmetros do PF. A linha sólida representa o loco que define sistemas homólogos em equilíbrio. A linha tracejada curta representa o melhor ajuste para as *fusões* de modelos de King (CdCC95). A linha pontilhada ajusta os modelos A. A linha tracejada longa ajusta os modelos C com $n = 1$. Os pontos circundados por aréolas marcam os respectivos modelos originais, i.e., *antes* de sofrerem as perturbações definidas pelos β s.

dem a se *espalhar*, formando independentemente uma família não-homóloga para os casos de índice espectral $n = 1$ (não-homologia mais severa) e $n = 2$ (não-homologia menos severa), ambos compatíveis com um comportamento tipo-PF, considerando os erros estimados dos ajustes. Os modelos com índice $n = 0$ parecem inteiramente homólogos, mesmo para os casos “frios” considerados separadamente.

Os modelos K e A são esfericamente simétricos, com diferentes concentrações centrais de massa. Os modelos C também são esfericamente simétricos, mas não possuem concentração central distinta. Os colapsos do modelo C com índices espectrais $n = 1$ e $n = 2$ provavelmente foram o resultado não somente do colapso global do sistema como também da fusão de uma série de flutuações em várias escalas que tiveram a oportunidade de serem amplificadas ao longo do colapso, especialmente para os casos iniciais mais “quentes”, assim como devido à adição de um fluxo de Hubble às condições iniciais. Já os modelos C com $n = 0$ são praticamente sistemas homogêneos onde um pequeno “ruído” foi sobreposto, de forma que provavelmente não desenvolveram concentrações distintas de massa que puderam se fundir posteriormente; estes modelos provavelmente sofreram um colapso único principal.

Sugerimos que os colapsos mais “frios” devem representar modelos cujo processo de relaxação foi mais “violenta” e completa (no próximo capítulo estudaremos esta questão mais detalhadamente). Este tipo de colapso produziria objetos relativamente confinados no espaço do PF, dependendo da concentração central inicial de massa dos modelos. Já os mais “quentes” devem representar uma relaxação mais “doce”, i.e., mais próxima do processo de relaxação que deve ocorrer durante as fusões. Estes colapsos menos “violentos” têm a oportunidade de se assentarem numa região menos confinada do espaço do PF.

Em suma: colapsos numa forma global parecem produzir sistemas homólogos. Não-homologia pode surgir em menor ou maior grau se os objetos forem separados como função do fator de colapso inicial (“quente” *versus* “frio”).

A análise preliminar aqui apresentada não reflete um cenário inteiramente “realístico”, uma vez que os modelos são bastante simplificados. Porém o exercício se mostrou útil no sentido de trazer maiores indicações que de forma contrária seriam difíceis de serem obtidas em situações de maior complexidade.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DA DINÂMICA E ESTRUTURA GLOBAIS: COLAPSOS X FUSÕES

Vimos nos capítulos anteriores que podemos reproduzir - ou não - o PF. Há uma diferença sensível entre objetos resultantes de fusões com uma componente, fusões com duas componentes, ou colapsos (“quentes” \times “frios”). Neste capítulo, investigaremos as características dinâmicas e estruturais destes objetos finais. Estes estudos visam, portanto, complementar e aprofundar as indicações obtidas anteriormente de que apenas certas condições devem conduzir ao PF.

5.1 O Processo de Relaxação Gravitacional

5.1.1 Breve Revisão dos Processos de “Mistura de Fase” e de “Relaxação Violenta”

Na literatura, sugere-se que dois mecanismos distintos e importantes podem operar durante a relaxação gravitacional pura de um sistema estelar: a “mistura de fase” (“phase mixing”) e a “relaxação violenta”. Nesta seção, revemos estes conceitos brevemente. Nossa exposição é baseada no texto de Binney e Tremaine 1987 (de agora em diante, B&T87).

O exemplo que aqui exploraremos para o conceito de “mistura de fase” se baseia na evolução de um conjunto de N pêndulos simples independentes, de mesmo comprimento L . A evolução deste conjunto inteiro de pêndulos pode ser descrita pela equação de Boltzmann acolisional, de forma que a analogia aqui descrita vale inteiramente para sistemas estelares que obedecem a esta equação.

Inicialmente deslocamos todos os pêndulos de suas posições de equilíbrio. A distribuição dos ângulos θ que os comprimentos dos pêndulos fazem com a posição vertical é uniforme no intervalo $\theta_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\theta$, onde $\Delta\theta \ll \theta_0$. Fornecemos então uma pequena velocidade randômica aos pêndulos, de forma que seus momentos $p = L^2\dot{\theta}$ são uniformemente distribuídos no intervalo $\pm\Delta p$, e então os pêndulos oscilarão com determinadas energias. A evolução destes pêndulos pode ser vista, de forma esquemática, na Fig. 5.1 (adaptada da Fig. 4-18 de B&T87)¹, onde ilustramos o “espaço de fase” do sistema: o eixo horizontal representa a variável θ , e o vertical, a variável $\dot{\theta}$.

¹Figuras igualmente ilustrativas deste fenômeno também podem ser vistas em, e.g., Lynden-Bell 1967 (Fig.2), Tremaine 1998 (Fig. 1), e Merrit 1998 (Fig. 10).

Inicialmente, há um grupo compacto de pontos (cada ponto significando um pêndulo no tempo inicial), representado pela área mais escura da Fig. 5.1, painel esquerdo. Porém, à medida em que os pêndulos evoluem, esta área hachurada tenderá a se distorcer, pois os pêndulos mais energéticos (os que se movem em círculos de maiores raios na figura), oscilam mais lentamente. À medida em que o tempo vai passando, a área inicial hachurada irá se distorcer cada vez mais, tornando-se cada vez mais fina, até que, eventualmente, toda a área dinamicamente acessível ao sistema de pêndulos (formado pelo anel com raio interno correspondendo aos pêndulos de menor energia, e de raio externo correspondendo aos de maior energia) estará preenchida pelo fino padrão espiral mostrado na mesma figura (painel direito).

Este fenômeno é dito “mistura de fase”. Um observador tomando uma medida “coarse-grained” da densidade do espaço de fase, i.e., uma média do valor “fine-grained” da densidade do espaço de fase, $f(\theta, \dot{\theta}, t)$, computada num pequeno volume centrado em $(\theta, \dot{\theta})$, num dado tempo t suficientemente longo, encontrará que esta medida “coarse-grained” (que denominaremos $\bar{f}(\theta, \dot{\theta}, t) \equiv \bar{f}_t$) é aproximadamente constante em qualquer região no interior do anel delimitado pelas energias superior e inferior permitidas (c.f. painel direito da Fig. 5.1). Ou seja, o termo “mistura” vem desta constatação: inicialmente o sistema ocupava apenas uma região compacta do espaço de fase, mas posteriormente, o sistema preenche quase inteiramente a região do espaço de fase dinamicamente acessível. Assim, à medida em que o sistema evolui significativamente, notaremos que a densidade do espaço de fase “coarse-grained” tenderá a ser constante em toda região dinamicamente acessível ao sistema. Dizemos que o sistema atingiu um estado de “quase-equilíbrio”, num sentido “coarse-grained”², viz., um estado onde houve uma razoável mistura de fase.

Por outro lado, esta mesma medida “coarse-grained” da densidade do espaço de fase, computada agora no interior da área hachurada, representando a configuração *inicial* do sistema (c.f. painel esquerdo da Fig. 5.1), fornecerá $\bar{f}(\theta, \dot{\theta}, t_0) \equiv \bar{f}_{t_0} = f(\theta, \dot{\theta}, t_0)$. Em outras palavras, o valor “coarse-grained” e o valor “fine-grained” sempre coincidem *inicialmente*. Porém, posteriormente, o valor de \bar{f}_t tenderá a diminuir relativamente à \bar{f}_{t_0} , uma vez que dentro do volume utilizado para computar \bar{f}_t haverá bandas vazias e ocupadas (c.f. painel direito da Fig. 5.1), e estas regiões ocupadas terão a mesma densidade de fase que a banda hachurada inicial (c.f. painel esquerdo da Fig. 5.1), uma vez que a conservação da densidade do espaço de fase “fine-grained” é uma consequência da Eq. de Boltzmann acolisional. Ou seja, f obedece à Eq. de Boltzmann acolisional, mas não \bar{f} .

Já o mecanismo de “relaxação violenta” (proposto por Lynden-Bell 1967) muda a própria energia das estrelas. Ou seja, vimos acima que um sistema de estrelas acolisional pode atingir um grau avançado de mistura de fase, onde no exemplo exposto

²Evidentemente, o sistema ainda evolui em escalas cada vez mais finas, daí a razão do termo “quase”.

as estrelas mantinham suas energias constantes (viz., movendo-se num potencial gravitacional fixo). Mas se o potencial variar com o tempo e posição ($\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$), as energias por unidade de massa das estrelas irão mudar (c.f. B&T87, pág. 271):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\vec{x}(t)}. \quad (5.1)$$

A massa da estrela não aparece na equação acima, nem na equação de movimento, logo a relaxação violenta mudará a energia por unidade de massa de uma estrela numa dada posição e velocidade de uma forma que é independente da massa da estrela, ao contrário de uma relaxação colisional, onde a energia das partículas mais massivas é transferida para as menos massivas.

Assim, um sistema estelar relaxado apresentará também mistura de fase, mas, mantendo a analogia adotada anteriormente, a “espiral” da Fig. 5.1 não seria tão bem “comportada”: as estrelas não percorreriam curvas fechadas perfeitas como aquelas representadas naquela figura.

5.1.2 Evolução no Espaço Real e Espaço de Fase Projetados

Nesta seção, analisaremos qualitativamente a evolução dos modelos ao longo do tempo. Como não é possível uma visualização direta do espaço de fase 6-dimensional, estudamos a evolução dos modelos no espaço de configurações projetado (planos xy , xz , e yz) e no espaço de fase projetado, utilizando para tal as quantidades distância radial e velocidade na direção radial (com relação ao CM do sistema). Para ambos espaços mostramos “instantâneos” do sistema nos mesmos tempos dinâmicos, embora estes variem de modelo para modelo. Apresentamos um exemplo de colapso “frio”, um exemplo de colapso “quente”, e um exemplo de cada tipo de simulação de fusão. Cada par de figuras [espaço real - espaço de fase], para cada tipo de simulação, encontra-se nas Figs. [5.2-5.3], [5.4-5.5], (colapso “frio” e “quente”, respectivamente), Figs. [5.6-5.7] (fusão com uma componente) e Figs. [5.8-5.9] (fusão com duas componentes).

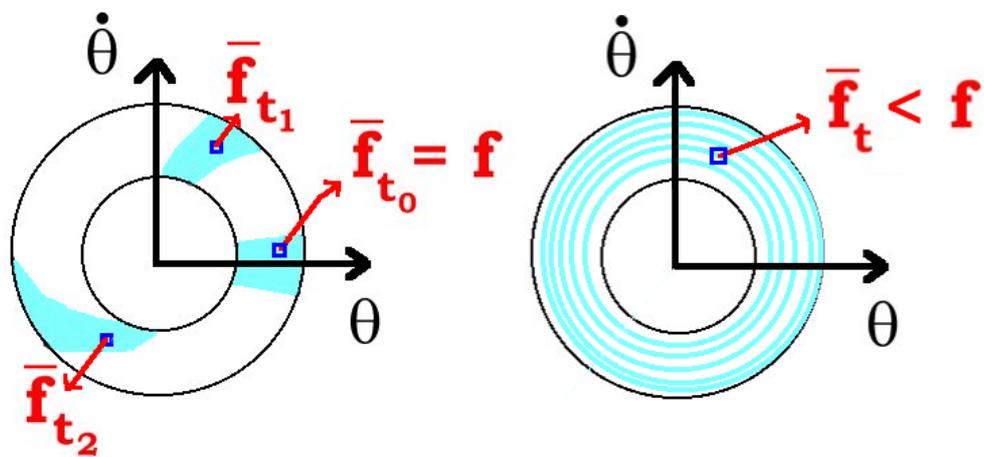


FIG. 5.1: Representação esquemática da evolução de um conjunto de pêndulos com mesmas propriedades dinâmicas. Painel esquerdo: espaço de fase nos tempos iniciais. Painel direito: espaço de fase após evolução significativa do sistema.

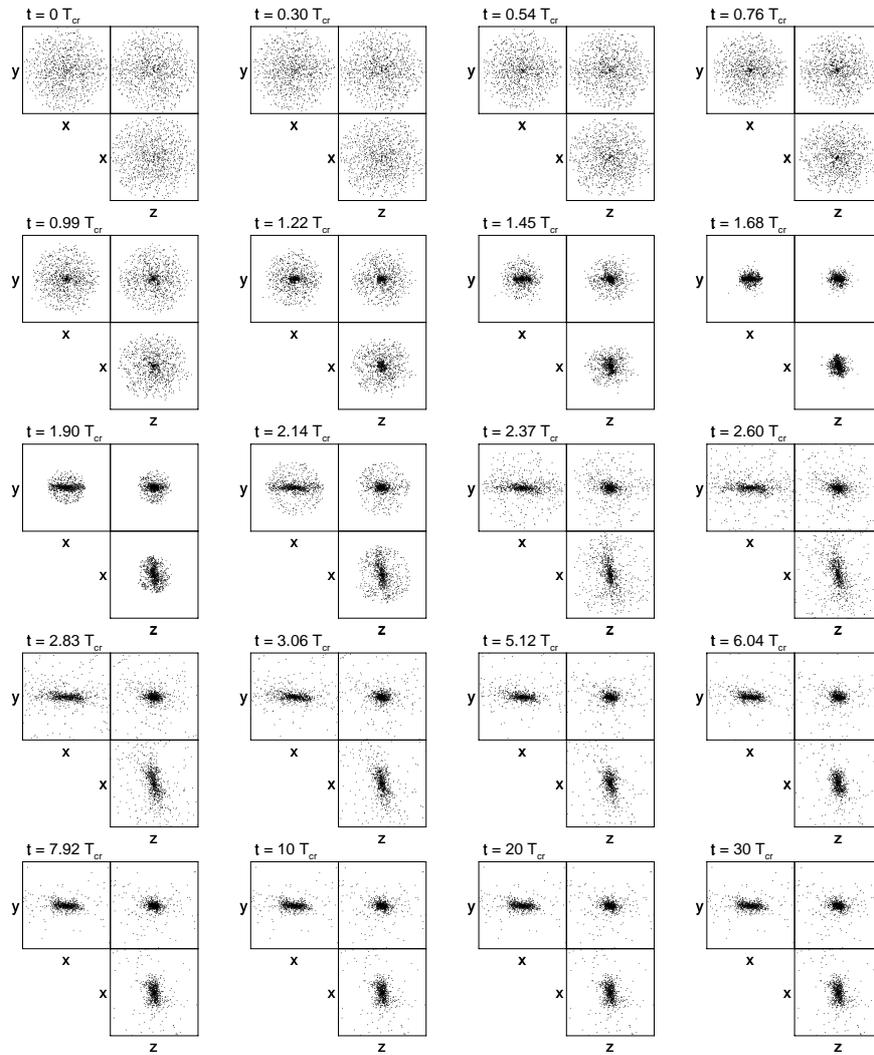


FIG. 5.2: Evolução no espaço de configurações projetado para um exemplo de colapso “frio” (K01).

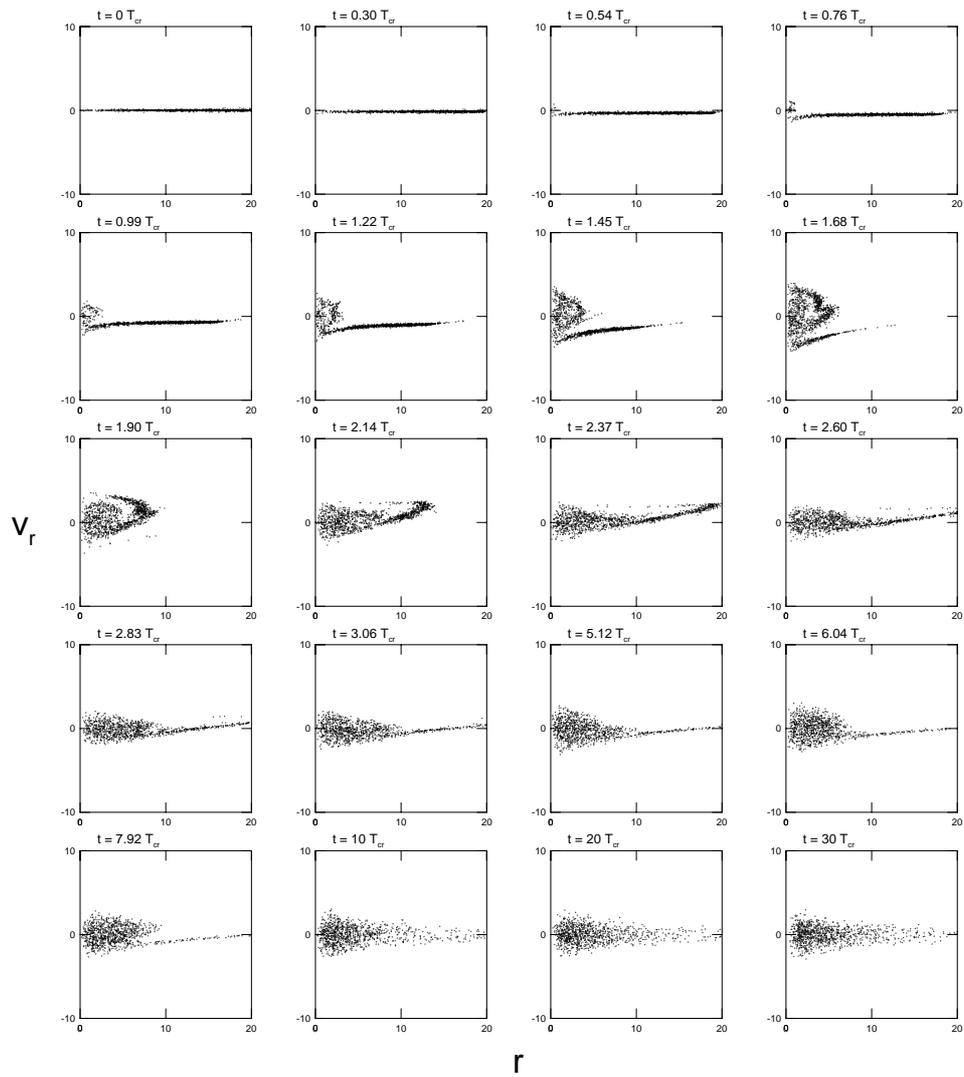


FIG. 5.3: Evolução no espaço de fase projetado para um exemplo de colapso “frio” (K01).

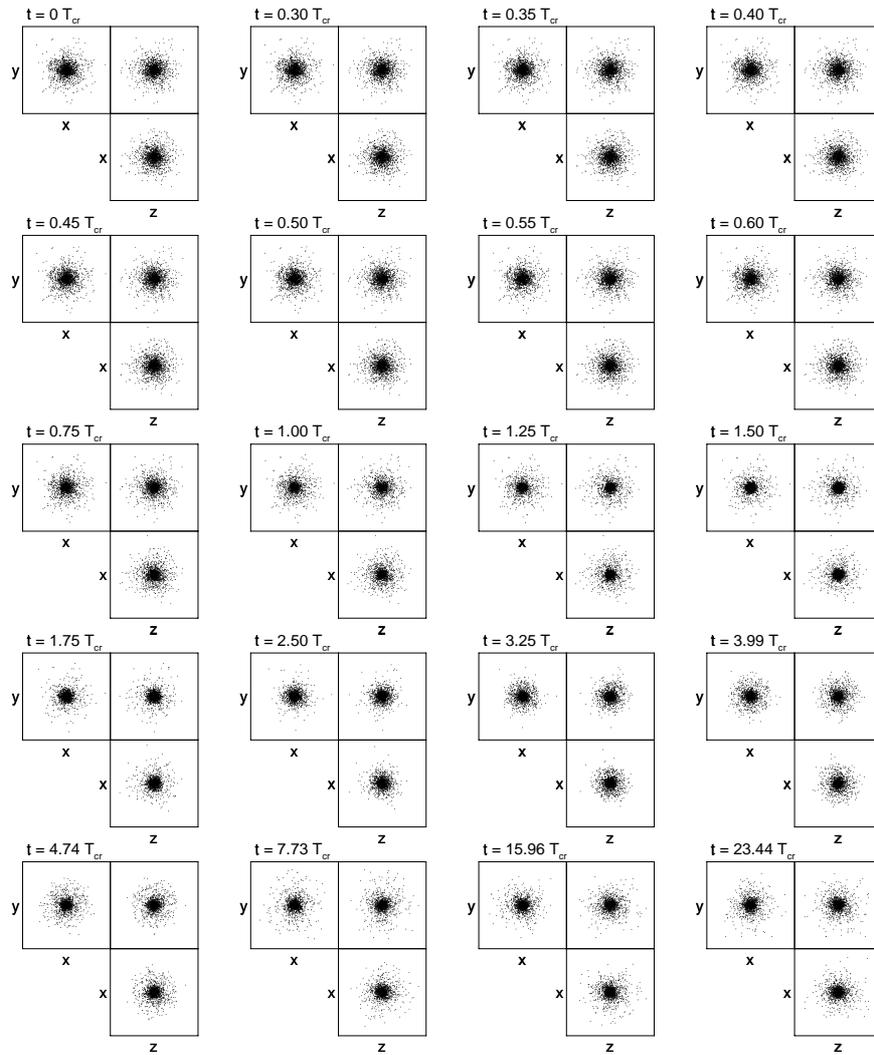


FIG. 5.4: Evolução no espaço de configurações projetado para um exemplo de colapso “quente” (K16).

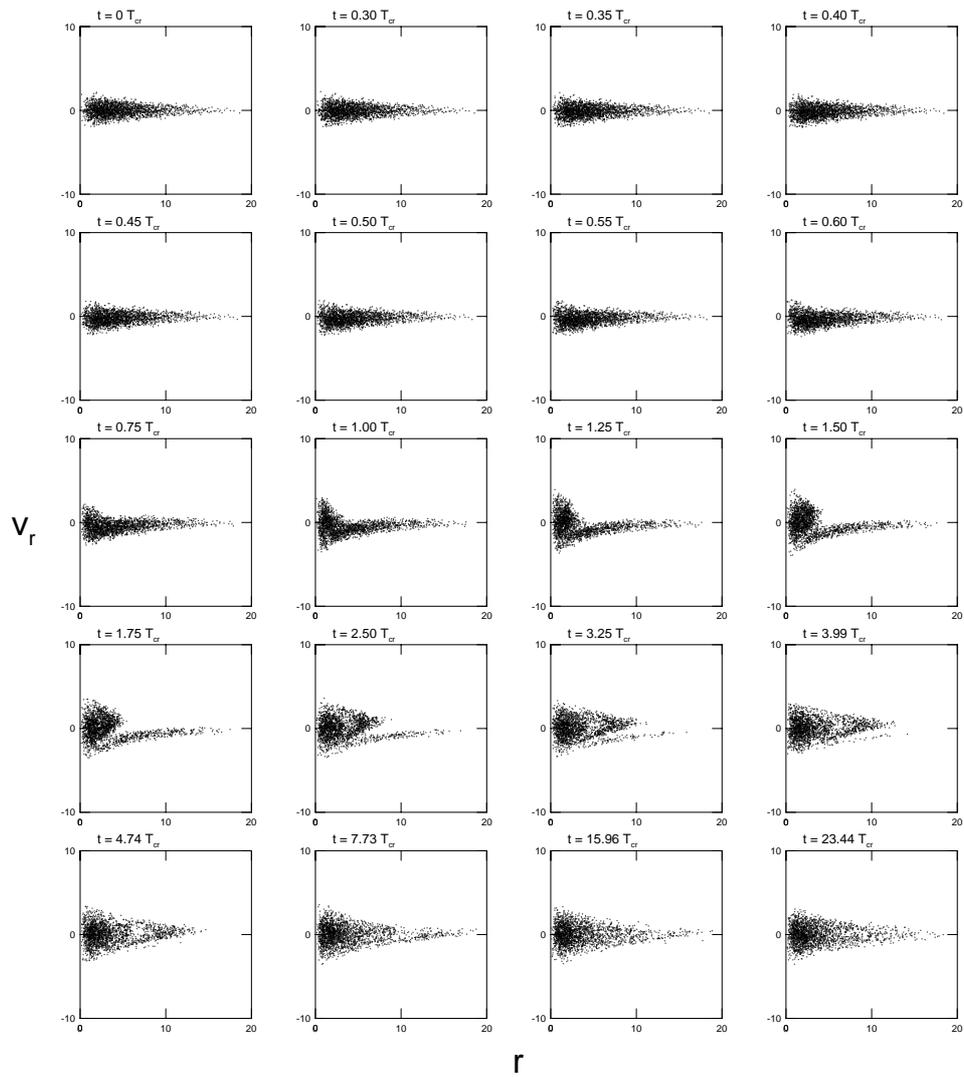


FIG. 5.5: Evolução no espaço de fase projetado para um exemplo de colapso “quente” (K16).

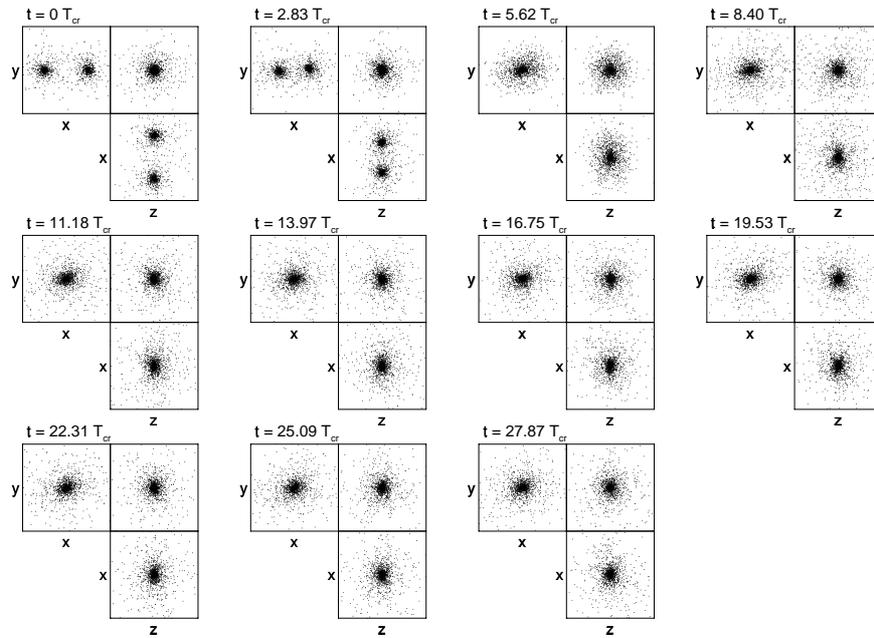


FIG. 5.6: Evolução no espaço de configurações projetado para um exemplo de fusão com uma componente (D02).

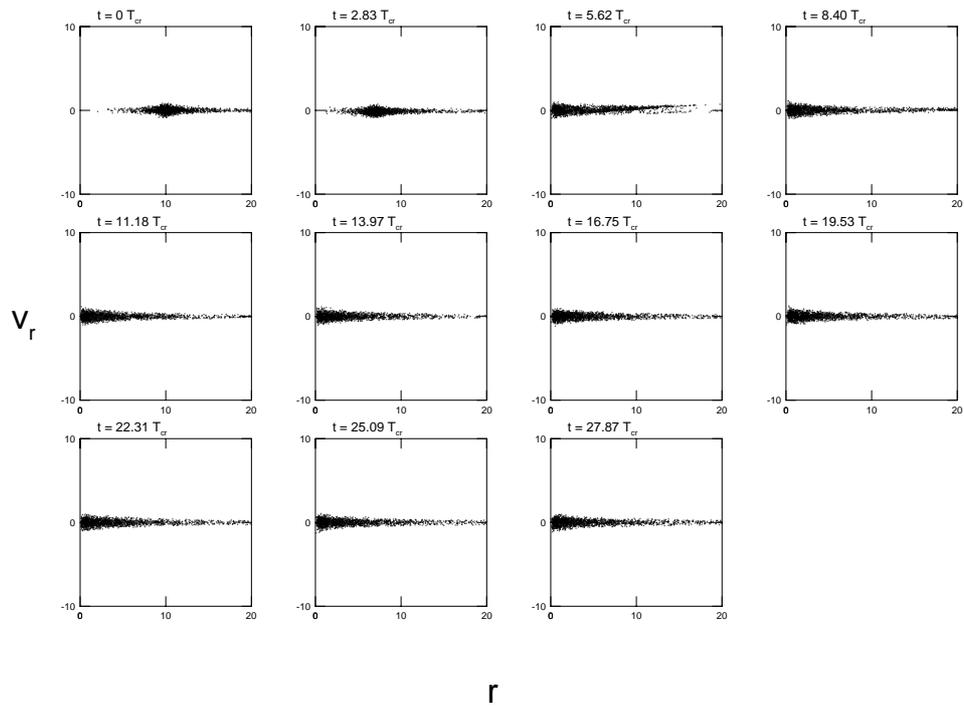


FIG. 5.7: Evolução no espaço de fase projetado para um exemplo de fusão com uma componente (D02).

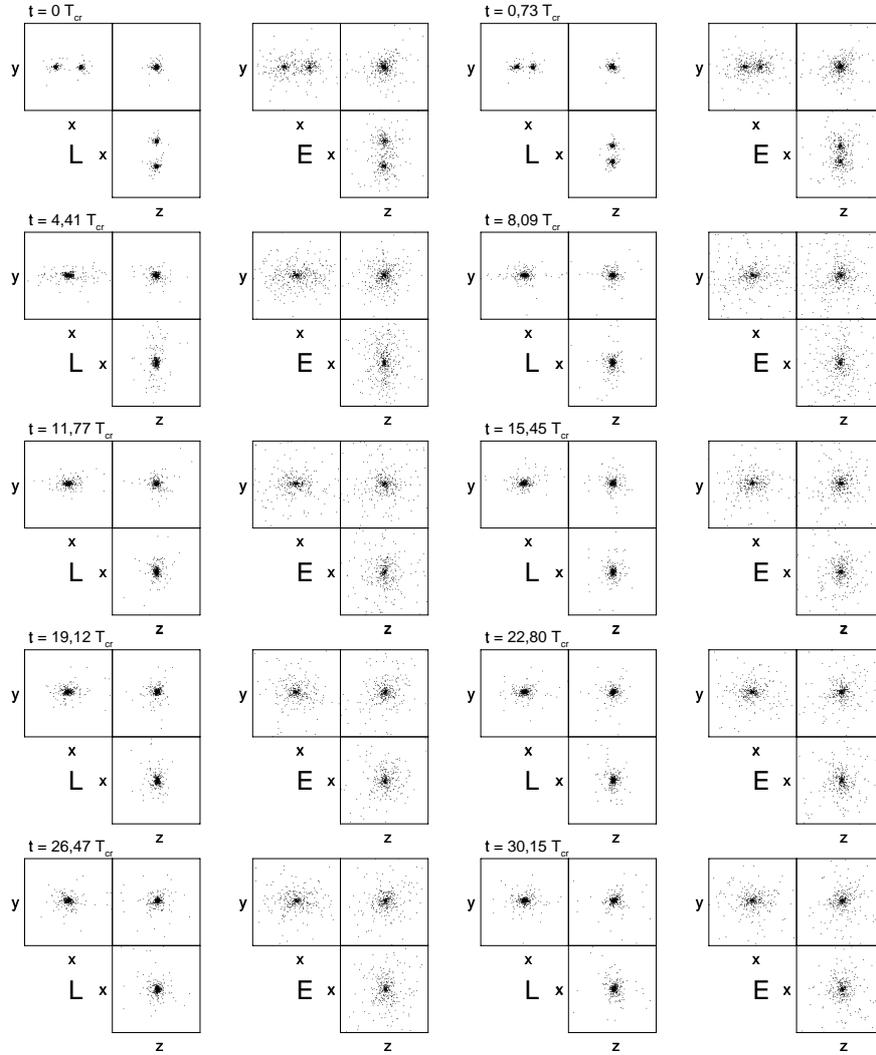


FIG. 5.8: Evolução no espaço de configurações projetado para um exemplo de fusão com duas componentes (Z13). As componentes são apresentadas em painéis separados, um ao lado do outro, formando pares indicados por “L” (componente luminosa) e “E” (componente escura). Somente 425 partículas, escolhidas randomicamente, são apresentadas por componente, por questões de clareza.

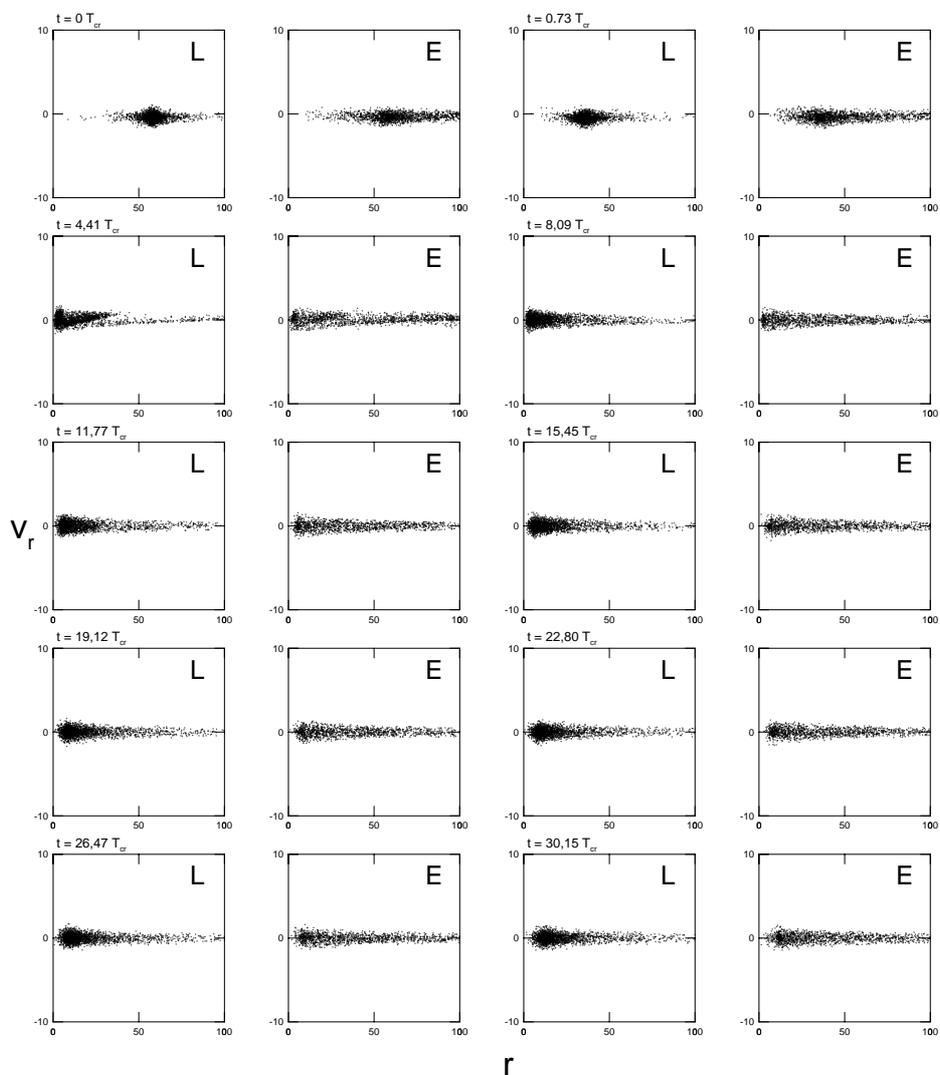


FIG. 5.9: Evolução no espaço de fase projetado para um exemplo de fusão com duas componentes (Z13). As componentes são apresentadas em painéis separados, um ao lado do outro, formando pares indicados por “L” (componente luminosa) e “E” (componente escura).

No caso de colapsos, entre $\sim 1,5 - 2 T_{cr}$, o sistema já colapsa ao seu raio mínimo, seguido de uma expansão, e posterior relaxação. Vemos que a mistura de fase se inicia na região central, na medida em que as partículas caem ao centro. Esta mistura é mais “intensa” para os colapsos mais “frios”. Os objetos finais colapsados a partir de condições iniciais “frias” têm uma forma alongada, e, visualmente, esta forma já parece estar se definindo desde os instantes iniciais, quando uma instabilidade ocorre. Os colapsos “quentes” preservam aproximadamente a forma esfericamente simétrica inicial. Ou seja, no caso de colapsos “frios”, a instabilidade de barra (e.g. Carpintero e Muzzio 1995) levará à deformação dos modelos inicialmente esféricos.

No caso de fusões, existe uma faixa de órbitas iniciais dos pares que expressa diferentes maneiras nas quais os objetos irão se fundir. No geral, as fusões apresentam uma evolução como no exemplo apresentado (D02): os objetos começam a se fundir e se acomodar dinamicamente após um certo tempo, que varia de fusão para fusão. No espaço de fase, em contraposição ao processo de relaxação dos colapsos apresentados acima, vemos que a “mistura” se dá de uma forma bem menos “dramática”. Para efeitos de comparação geral e qualitativa, as simulações de fusão estariam mais próximas as de colapso “quente” (c.f. comparação entre Figs. 5.5 e 5.7).

Nas Figs. 5.8-5.9, os instantâneos para a componente luminosa e para a componente escura são apresentados separadamente e lado a lado (exemplo mostrado, fusão Z13, de segunda geração). As mesmas características de relaxação das fusões com uma componente, vistas acima, parecem se repetir. Tanto a parte luminosa quanto a parte escura parecem objetos virializados em $\sim 30T_{cr}$ (Fig. 5.8). Ambas componentes apresentam ao final estruturas similares no espaço de fase projetado.

5.1.3 Densidade Máxima do Espaço de Fase

No intuito de complementar de forma mais quantitativa a análise “visual” que desenvolvemos na seção anterior, procuramos computar alguma quantidade que medisse razoavelmente o nível de a mistura de fase ou, em outras palavras, a eficiência da relaxação. Uma relaxação mais “eficiente” seria aquela no qual a região do espaço de fase dinamicamente acessível ao sistema está mais “finamente” - no sentido da Seção 5.1.1 - ocupada do que aquela resultante de uma relaxação menos eficiente. Uma quantidade útil neste sentido é a densidade “coarse-grained” *máxima* do espaço de fase do modelo inicial *versus* a mesma quantidade, mas do modelo final.

Pelo raciocínio da seção 5.1.1, pode-se deduzir que a densidade máxima do espaço de fase só possa permanecer a mesma ou diminuir com o tempo (c.f. a utilização deste método nas simulações de Villumsen 1984). Assim, o grau de mistura será medido pelo quanto a densidade máxima do espaço de fase diminui relativamente à sua condição inicial.

Na Fig. 5.10 apresentamos esta análise para os colapsos e as fusões de primeira geração). Utilizamos como medida da densidade do espaço de fase a quantidade ρ/σ^3 , onde ρ é a densidade de massa e σ a dispersão de velocidades. De uma inspeção dos painéis desta figura, podemos ver claramente que os colapsos mais “frios” apresentam um grau progressivamente maior de mistura: a densidade do espaço de fase final é cada vez menor do que a inicial, na medida em que o colapso é cada vez mais “frio”.

Por outro lado, nenhuma tendência clara como função das condições iniciais é encontrada para as fusões com uma componente. Os modelos D parecem ter um pouco mais de eficiência de mistura no espaço de fase do que os de King. Já os modelos Z (duas componentes) apresentam, para a parte luminosa, um razoável grau de mistura. O halo (parte escura) não se apresenta tão misturado como a parte luminosa. Em particular, há uma tendência da parte luminosa ter maior eficiência de mistura para energias orbitais iniciais menores ($\hat{E} \rightarrow 0$).

Parece evidente por estas figuras que o grau de eficiência de mistura é superior nos colapsos “frios”. Mais uma vez, as fusões no geral têm eficiência de mistura apenas comparável aos modelos mais “quentes” de colapso (exceto a componente luminosa, que pode apresentar grau de mistura similar aos colapsos “frios”).

5.1.4 O Plano $E \times L$

Num potencial gravitacional esférico $\Phi(r)$, a órbita de uma partícula estará confinada a um plano definido pelo seu momento angular, \vec{L} . As órbitas circulares são as que possuem maior momento angular por unidade de massa (L). Para uma dada energia por unidade de massa (E), dentre os vários L possíveis, haverá portanto um momento angular máximo, $L_{circ}(E)$, que corresponderá à órbita circular (este problema é análogo ao das órbitas iniciais dos modelos de fusão, c.f. Apêndice E). A curva $L_{circ}(E)$ é dada por:

$$E = \frac{1}{2}r \frac{d\Phi}{dr} + \Phi(r), \quad (5.2)$$

e

$$L_{circ}^2 = r^3 \frac{d\Phi}{dr}. \quad (5.3)$$

Assumindo que, ao final da relaxação, todas as órbitas acessíveis ao sistema gravitacional estejam preenchidas, em menor ou maior grau, dependendo da eficiência da relaxação, haverá uma região proibida no plano $[E, L]$, e uma região preenchida

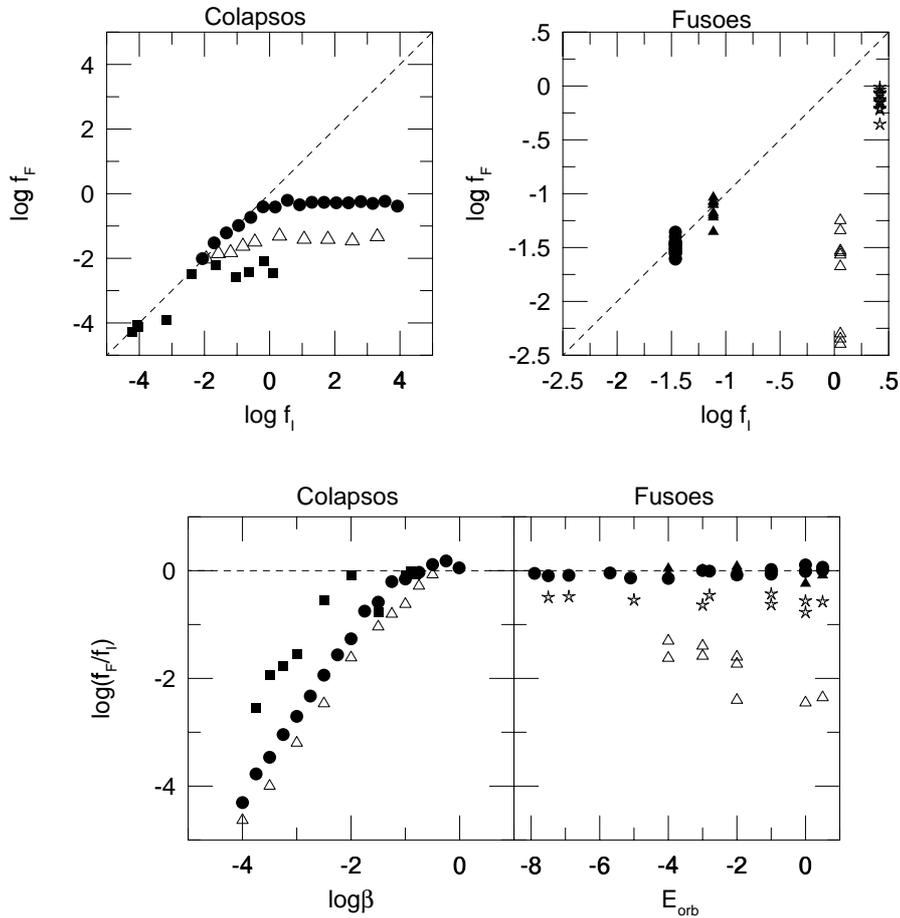


FIG. 5.10: Eficiência da mistura no espaço de fase através da medida da densidade máxima do espaço de fase inicial contra o valor final, para colapsos (esquerda) e fusões (direita). Nos painéis inferiores, são apresentadas as razões da densidade máxima do espaço de fase inicial e final contra as condições iniciais de colapso (esquerda) e de fusão (direita). Os símbolos são, para colapsos: quadrado: modelos C, círculos: modelos K, triângulos: modelos A; para fusões: círculos: modelos de CdCC95 (primeira geração), estrelas: modelos D, triângulos abertos: componente luminosa dos modelos Z de primeira geração, triângulos fechados: idem para a componente escura.

pelas órbitas das partículas do sistema. O limite entre as duas regiões será definido pela curva teórica $L_{circ}(E)$.

Evidentemente, a curva $L_{circ}(E)$ descrita pela Eq. (5.2) é aquela prevista para potenciais com simetria esférica. Os objetos simulados no geral não possuem esta simetria (veremos adiante que os modelos finais, principalmente aqueles resultantes de colapsos mais “frios”, apresentam desvios da simetria esférica, podendo ser triaxiais, prolatos, etc.). Uma vez que a derivada do potencial nestes casos cresce mais rapidamente ao longo do semi-eixo menor, a curva $L_{circ}(E)$ que delimitará melhor as duas regiões no plano $[E, L]$ será aquela parametrizada por E e L_{circ} resultantes do potencial e sua primeira derivadas calculados ao longo do semi-eixo menor.

Assim, computamos numericamente, para todos os modelos, a curva $L_{circ}(E)$ de acordo com o critério descrito acima (potencial e sua primeira derivada ao longo do semi-eixo menor). No caso dos modelos com duas componentes, o potencial utilizado para traçar a curva correspondente foi o potencial gravitacional total do sistema. O semi-eixo menor foi calculado da seguinte maneira: obtivemos as componentes do tensor de inércia, considerando 80% do total de partículas mais próximas ao centro. O tensor de inércia foi diagonalizado para achar as direções principais, e, assim, as coordenadas e velocidades foram transformadas para este sistema principal de eixos. Os resultados estão ilustrados nas Figs.: 5.11 (colapsos K), 5.12 (colapsos A), 5.13 (colapsos C), 5.14 (fusões de Hernquist com uma componente), 5.15 (fusões de Hernquist com duas componentes, parte luminosa), e 5.16 (fusões de Hernquist com duas componentes, parte escura). No caso de colapsos, o progenitor está apresentado num painel à esquerda de cada colapso. No caso de fusões, o modelo progenitor está apresentado no painel superior de cada figura.

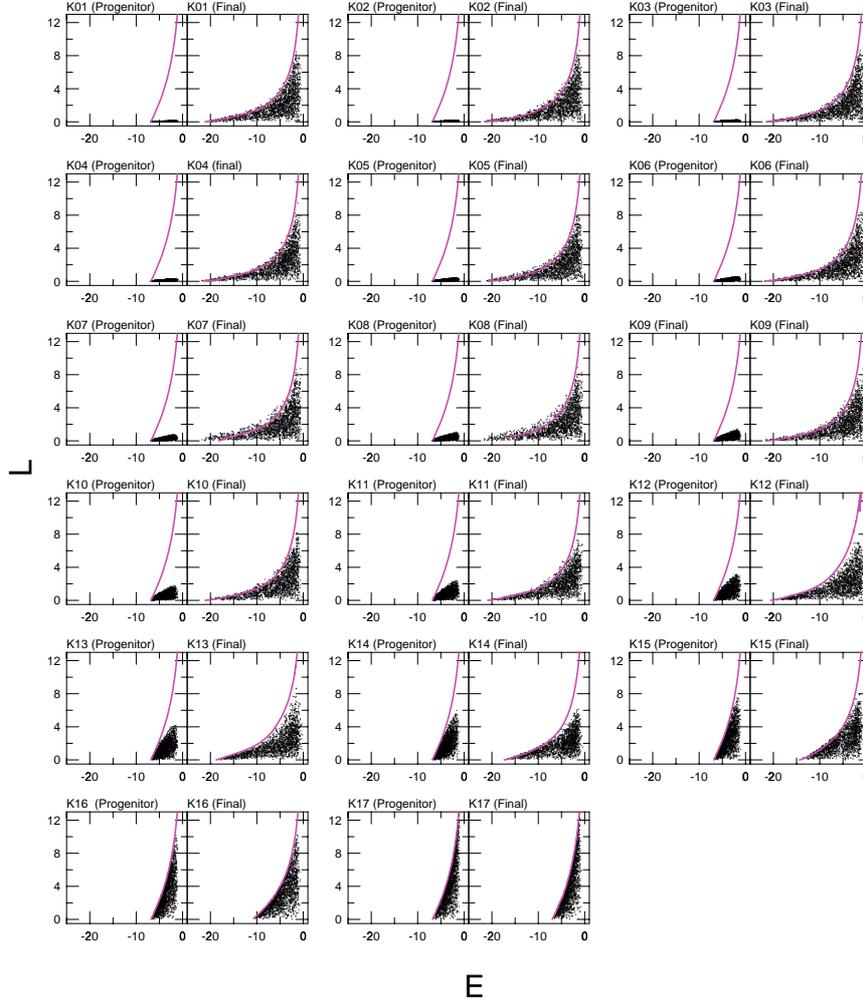
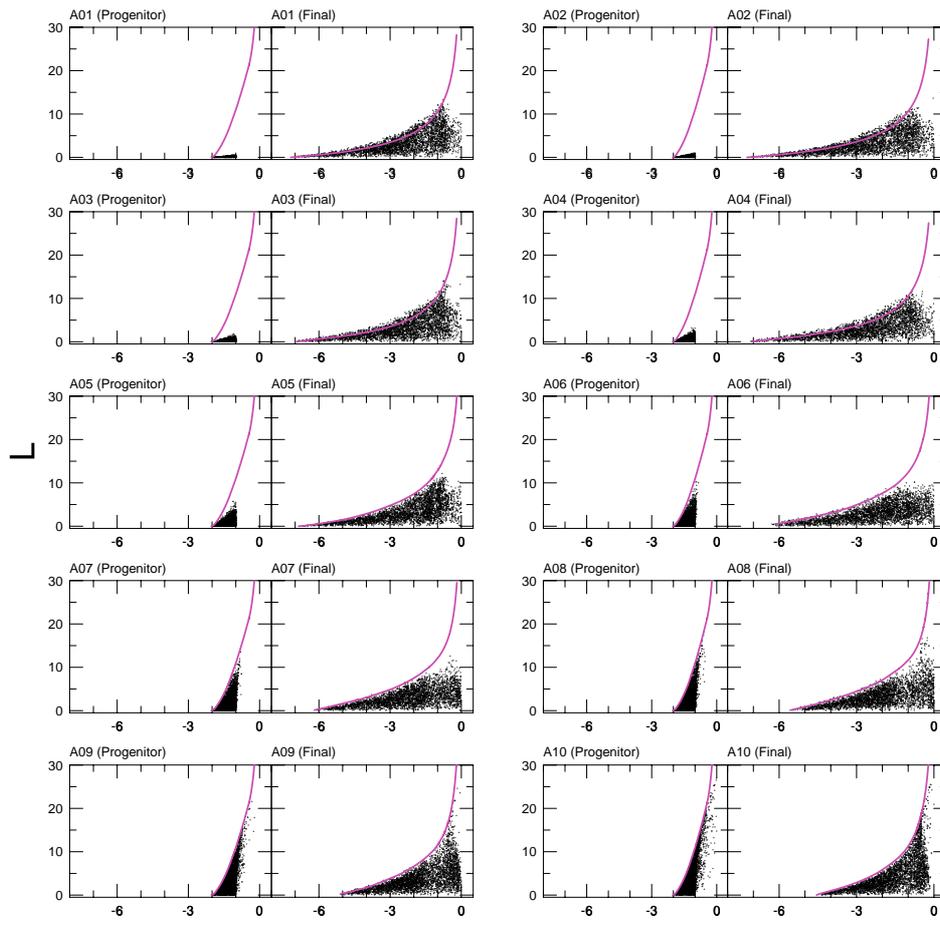


FIG. 5.11: Distribuição das partículas no plano $[E, L]$ para modelos de colapso K . Os progenitores correspondentes se encontram à esquerda de cada colapso. As curvas delimitam aproximadamente a região proibida no plano $E \times L$. Do painel superior esquerdo para baixo, os modelos são os de condições iniciais com $\log \beta \rightarrow 0$ (de “frios” para “quentes”). Por questões de clareza, apenas 25% das partículas de cada modelo são apresentadas, escolhidas aleatoriamente.



E

FIG. 5.12: O mesmo da figura anterior, mas para modelos de colapso A.

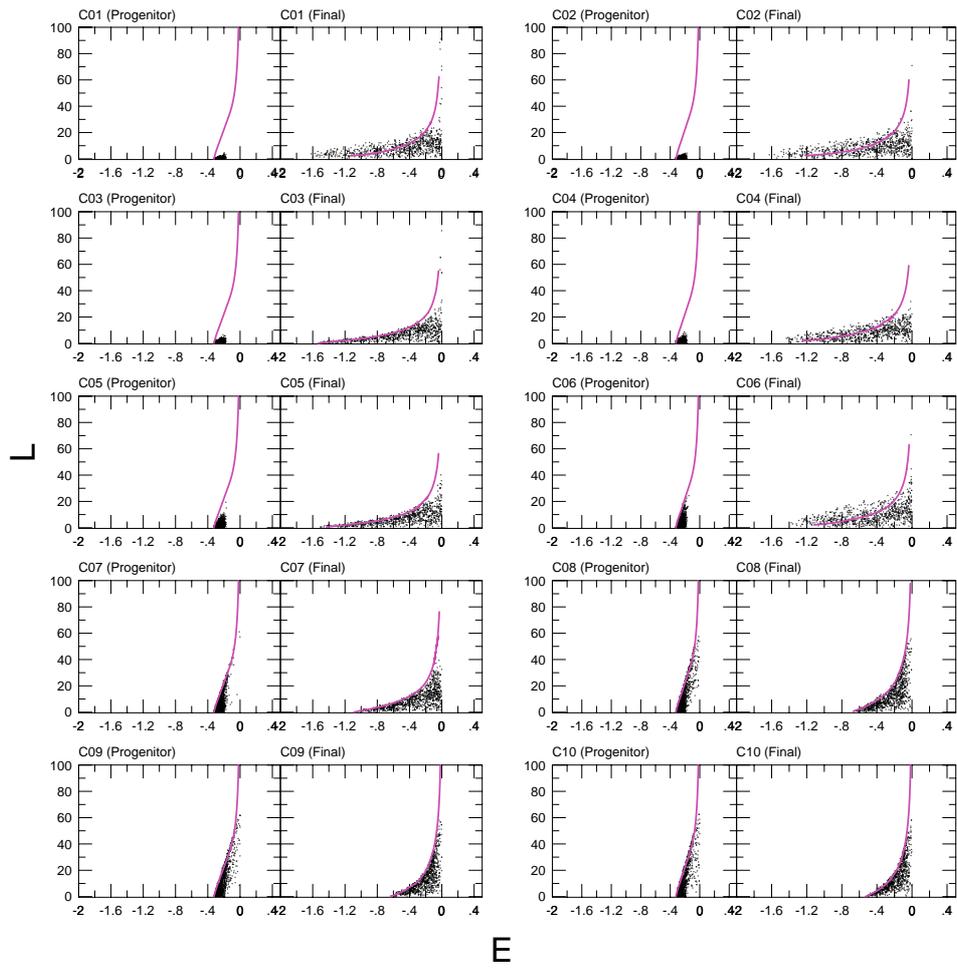


FIG. 5.13: O mesmo da figura anterior, mas para modelos de colapso C.

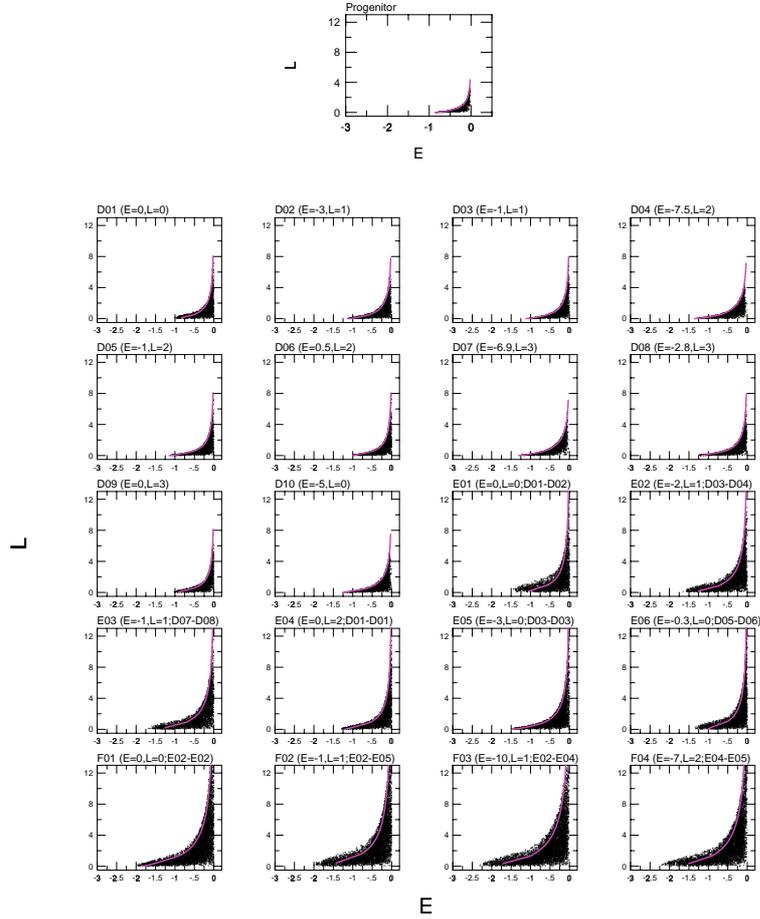


FIG. 5.14: Distribuição das partículas no plano $[E, L]$ para modelos de fusão de Hernquist com uma componente. Do painel superior esquerdo para baixo, os modelos são os de condições iniciais de gerações cada vez maiores (os valores de E_{orb} e L_{orb} estão indicados em cada painel; primeira geração: D; segunda: E; terceira: F). O modelo progenitor está apresentado no painel superior. As curvas delimitam aproximadamente a região proibida no plano $E \times L$. Por questões de clareza, apenas 25% das partículas de cada modelo são apresentadas, escolhidas aleatoriamente.

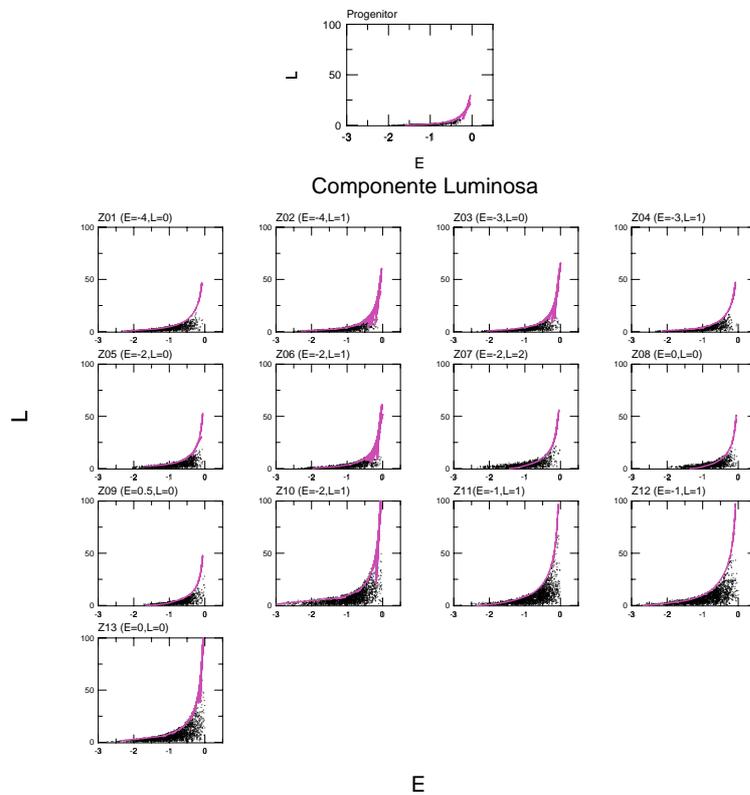


FIG. 5.15: Distribuição das partículas no plano $[E, L]$ para modelos de fusão de Hernquist com duas componentes (parte luminosa). Primeira geração: Z01-Z09; segunda: Z10-Z13. O modelo progenitor está apresentado no painel superior. As curvas delimitam aproximadamente a região proibida no plano $E \times L$. Por questões de clareza, apenas 25% das partículas de cada modelo são apresentadas, escolhidas aleatoriamente.

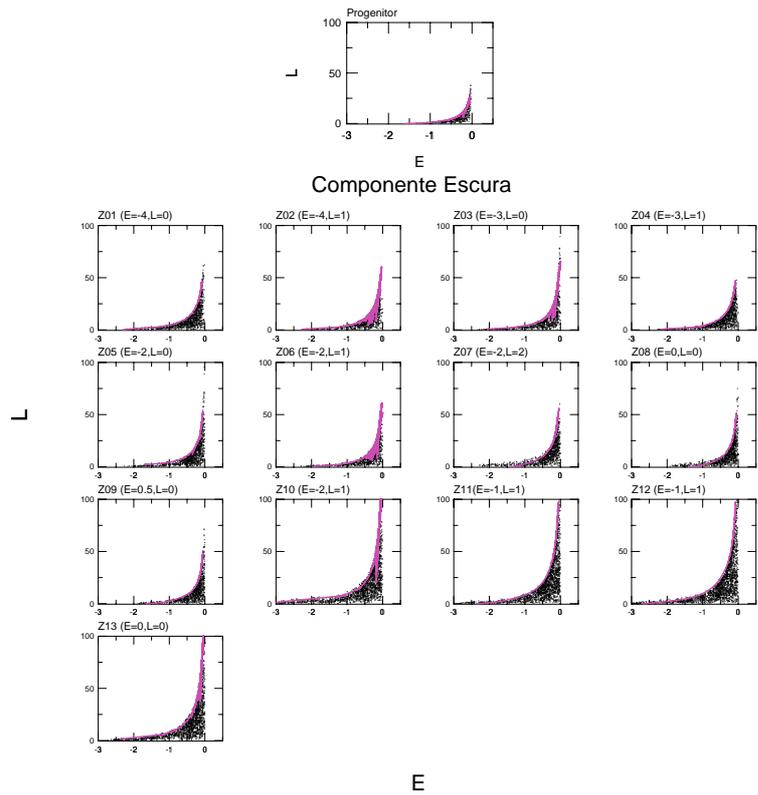


FIG. 5.16: O mesmo da figura anterior, mas para a componente escura.

Em alguns modelos, existem partículas ocupando órbitas na região “proibida” do plano $[E, L]$ (i.e., acima da curva computada $L_{circ}(E)$). A existência destas partículas nesta região se dá pelo efeito da curva $L_{circ}(E)$ ser uma aproximação, que pode falhar no caso em que o potencial gravitacional possui grande desvios de simetria em certas regiões do modelo.

Os sistemas finais apresentam um potencial central mais profundo do que o dos progenitores. A profundidade do potencial central pode ser caracterizada pela energia E_{min} tal que $L_{circ}(E_{min}) = 0$. Na Fig. 5.17 apresentamos o potencial central em função das condições iniciais dos modelos simulados. Os colapsos “frios” foram os que resultaram numa maior profundidade do potencial central. As fusões não parecem formar objetos com potencial central muito profundo. Em outras palavras, independentemente do modelo, os colapsos mais “frios” produzem órbitas com energias bastante negativas; estas órbitas vão se tornando cada vez menos acessíveis na medida em que os colapsos vão se tornando mais “quentes”. O mesmo efeito se nota na medida em que as fusões vão avançando em hierarquia, porém em menor intensidade.

Os progenitores ocupam apenas uma pequena fração da região dinamicamente acessível ao sistema. Após o colapso ou fusão, os estados inicialmente “vazios” são ocupados pelas partículas do modelo final de equilíbrio (c.f. planos $[E, L]$). O grau de uniformidade do preenchimento das partículas abaixo da curva $L_{circ}(E)$ traz algumas informações úteis. Primeiro, quanto mais uniforme é o preenchimento, mais eficiente foi a relaxação, no sentido de que as órbitas dinamicamente acessíveis às partículas do sistema, inicialmente não ocupadas, foram posteriormente preenchidas pelas partículas do modelo final de equilíbrio, tornando estas regiões do espaço de fase igualmente prováveis. Segundo, não-uniformidades, tais como “vazios” em certas regiões, podem nos indicar se há uma deficiência de uma determinada família de órbitas numa determinada parte do modelo.

Por exemplo, no geral, os modelos apresentam, em maior ou menor grau, um preenchimento pouco uniforme da região abaixo da “cauda” $E \rightarrow 0^-$, $L \rightarrow \infty$. Alguns modelos ocupam razoavelmente bem esta região (e.g. fusões D, E, F, e componente escura das fusões Z), que é composta na maior parte de partículas mais fracamente ligadas e com órbitas pouco excêntricas (mais próximas de órbitas circulares), nas regiões mais afastadas do sistema. Porém, outros modelos (e.g. colapsos A) parecem ter uma deficiência de partículas nesta região. Ainda abaixo da “cauda” $E \rightarrow 0^-$, porém agora com $L \rightarrow 0$, ocorre também uma certa deficiência de partículas em alguns dos modelos. Neste caso, trata-se de uma deficiência de órbitas muito excêntricas (viz. radiais) e pouco ligadas, nas regiões mais externas dos modelos (exemplos: colapsos K e A “quentes”, etc.).

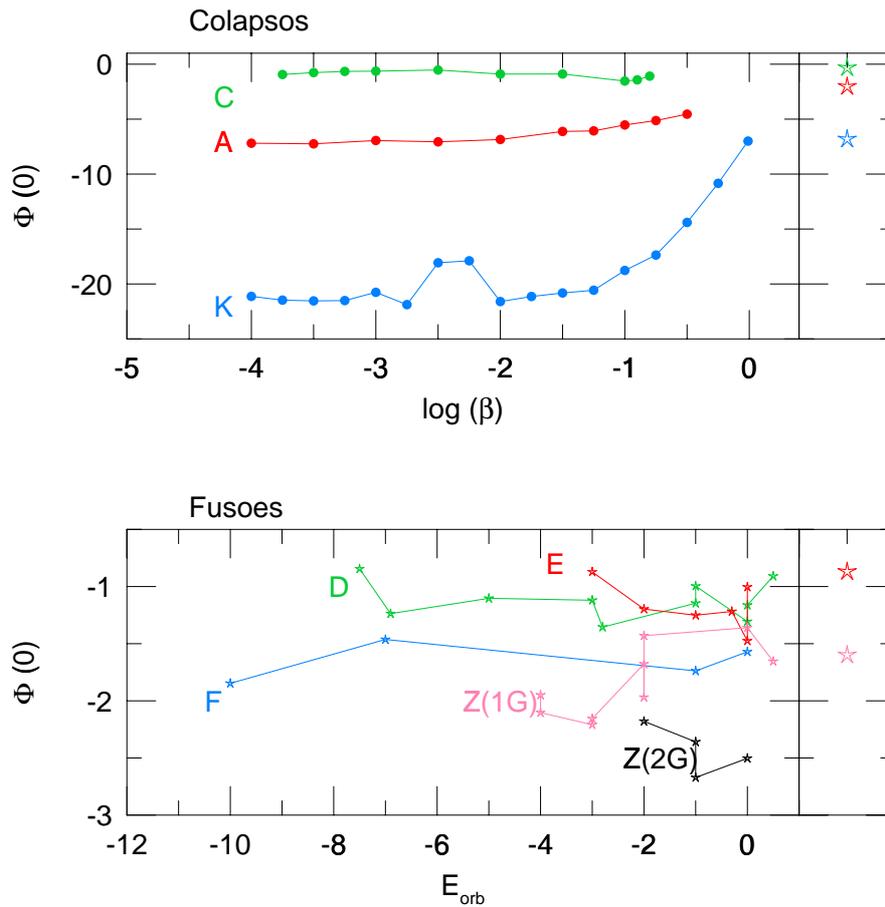


FIG. 5.17: Potencial gravitacional central dos modelos finais como função das condições iniciais. Nos painéis menores, à direita, estão indicados, com símbolos estelares, os valores do potencial central dos respectivos progenitores.

5.1.5 As Distribuições de $N(L)dL$ e $N(E)dE$

Nesta seção, incluímos um estudo um pouco mais detalhado das quantidades L e E , agora individualmente, através de suas distribuições $N(L)dL$ e $N(E)dE$, tanto para as regiões internas à r_h (raio à meia-massa) quanto para as regiões externas à r_h (utilizaremos a linha sólida para os histogramas que apresentam as medidas em $r < r_h$; e linha tracejada para as medidas em $r > r_h$).

Primeiramente, as componentes L_x , L_y e L_z do momento angular das partículas foram inspecionadas para cada modelo. Na Fig. 5.18 apresentamos, para cada tipo de modelo, apenas um exemplo destas distribuições, uma vez que se apresentam muito similares para um dado modelo. Há, não obstante, certas diferenças na distribuição destas componentes, dependendo do modelo, como pode ser verificado diretamente da figura. Como nas regiões centrais as partículas no geral se encontram mais ligadas (i.e., com energias mais negativas), os momentos angulares nesta região estão mais próximos de zero. As componentes se distribuem de forma relativamente isotrópica em torno do zero, em todos os casos, mas dependendo do modelo, o pico em torno do valor zero resulta ser mais ou menos estreito e acentuado.

Uma análise estatística mais detalhada confirma o que podemos constatar de uma análise puramente visual: as fusões com uma componente (exemplo: D05) possuem distribuições de L_x , L_y e L_z com muito maior concentração central de partículas de baixo momento angular, do que quaisquer outros modelos. Este efeito independe do momento angular orbital inicial dos pares que resultam na fusão. De fato, simulações anteriores [Hernquist 1993, CdCC95] já haviam demonstrado que o momento angular dos produtos de fusão é carregado sobretudo pelas partículas exteriores. No entanto, não parece ser o caso das fusões com duas componentes (exemplo: Z05). As razões físicas deste efeito não são conhecidas. Na Tabela 5.1, apresentamos as variâncias médias das distribuições de L_x , L_y e L_z .

TABELA 5.1: VARIANÇAS MÉDIAS DAS DISTRIBUIÇÕES DE L_x , L_y e L_z

$\langle var(L_x) \rangle$	$\langle var(L_y) \rangle$	$\langle var(L_z) \rangle$	$\langle var(total) \rangle$	Modelo
0.28	0.31	0.53	0.41	D, E, F
2.61	3.30	3.61	2.73	Z (lum.)

Na Fig. 5.19, apresentamos a distribuição do módulo dos momentos angulares por unidade de massa para todos os modelos, ordenados pela condição inicial do modelo (β ou energia orbital inicial), como indicado na figura. No caso de colapsos,

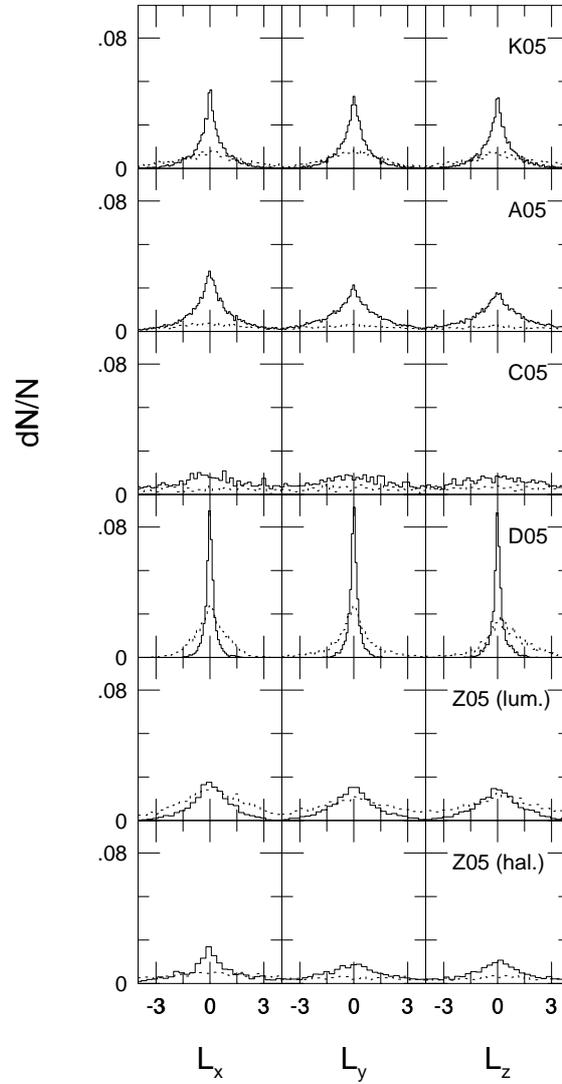


FIG. 5.18: Histogramas (normalizados pelo número total de partículas do sistema) ilustrando a distribuição das componentes L_x , L_y e L_z do momento angular das partículas (um exemplo para cada modelo). Linha sólida: medidas em $r < r_h$; linha tracejada: medidas em $r > r_h$.

não há diferenças muito significativas entre as distribuições, para um dado modelo, exceto entre os colapsos mais “quentes” e “frios”. Nos colapsos mais “quentes”, a distribuição em L é mais uniforme, seja para as partículas a $r < r_h$, seja para aquelas a $r > r_h$. Na medida em que o colapso é mais “frio”, a distribuição se modifica, no sentido de que as partículas mais centrais possuem predominantemente momentos angulares menores. Para o caso de fusões, não há diferenças muito claras, exceto no caso de fusões com duas componentes, onde a parte luminosa apresenta alguma mudança com a energia orbital, sendo significativamente diferente dos modelos de fusão com uma componente.

Na Fig. 5.20, apresentamos a distribuição das energias por unidade de massa individuais, com a mesma disposição da Fig. 5.19, apresentada anteriormente. A apresentação dos histogramas separadamente para as regiões externas e internas à r_e tem o objetivo de demonstrar mais claramente o fato de que as partículas das regiões mais internas dos modelos são de fato as partículas gravitacionalmente mais ligadas, enquanto que as que se encontram nas regiões mais externas são as mais fracamente ligadas ao sistema.

Concentrando-nos na distribuição total (histogramas levemente deslocados na figura), notamos primeiramente que há um crescimento característico na direção de $E \rightarrow 0^-$, em todas as distribuições, seguido de um declínio na contagem em $E \sim 0^-$. A componente luminosa dos modelos Z não apresentam este crescimento muito pronunciado, e, de fato, apresentam um decréscimo significativo na contagem de partículas na medida em que $E \rightarrow 0^-$. Este efeito é esperado, uma vez que a componente luminosa se encontra quase que inteiramente contida no interior do halo escuro, e portanto há um número bastante pequeno de partículas nas regiões externas, com energias $E \rightarrow 0^-$.

Alguns modelos podem apresentar um pico duplo na distribuição, como é o caso dos colapsos A, e este efeito não parece ocorrer nos outros modelos. O pico duplo caracteriza a formação de um core mais fortemente ligado e um envoltório extenso de partículas mais fracamente ligadas. Na medida em que a distância entre os picos aumenta, mais ligado é o core, e mais extenso é o envoltório: isto parece ocorrer na direção dos colapsos mais “quentes”. Nos colapsos intermediários, o pico duplo parece desaparecer, vindo resurgir, no entanto, no colapso mais “frio”, embora o pico secundário neste caso se apresente um pouco menos proeminente (mais largo e plano) do que nos outros casos.

Há diferenças sistemáticas na forma da distribuição das energias individuais das partículas, dependendo do modelo e das condições iniciais. A distribuição é truncada em energias cada vez menos negativas na medida em que o colapso é mais “quente”, como já observado anteriormente na análise do plano $[E, L]$. Além do mais, a distribuição pode se apresentar mais ou menos monótona e/ou ruidosa. Estudaremos na próxima seção estas distribuições de forma mais quantitativa.

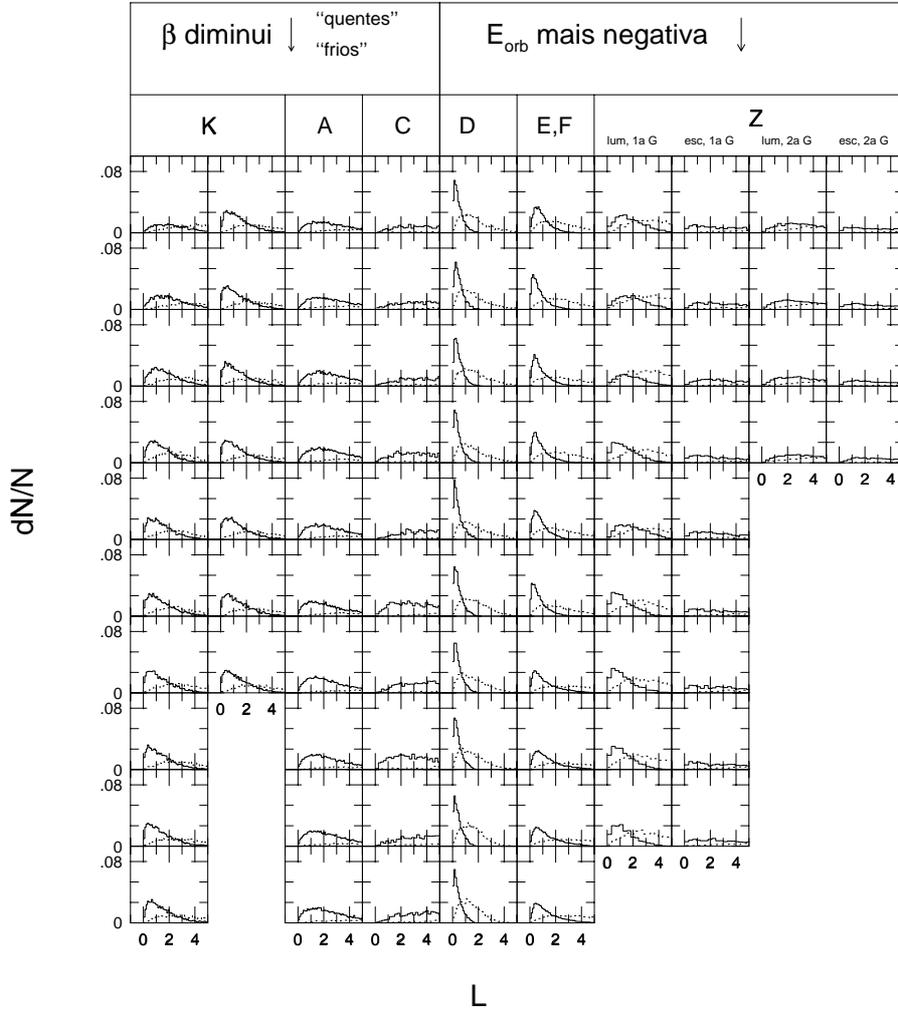


FIG. 5.19: Histogramas (normalizados pelo número total de partículas do sistema) ilustrando distribuição do módulo dos momentos angulares das partículas dos modelos simulados (linha sólida: medidas em $r < r_h$; linha tracejada: medidas em $r > r_h$). A ordenação dos painéis é tal que, para cada coluna de painéis: os modelos de colapso mais “quentes” são os superiores; os modelos de fusão com E_{orb} menos negativa são os superiores, tal como indicado na figura.

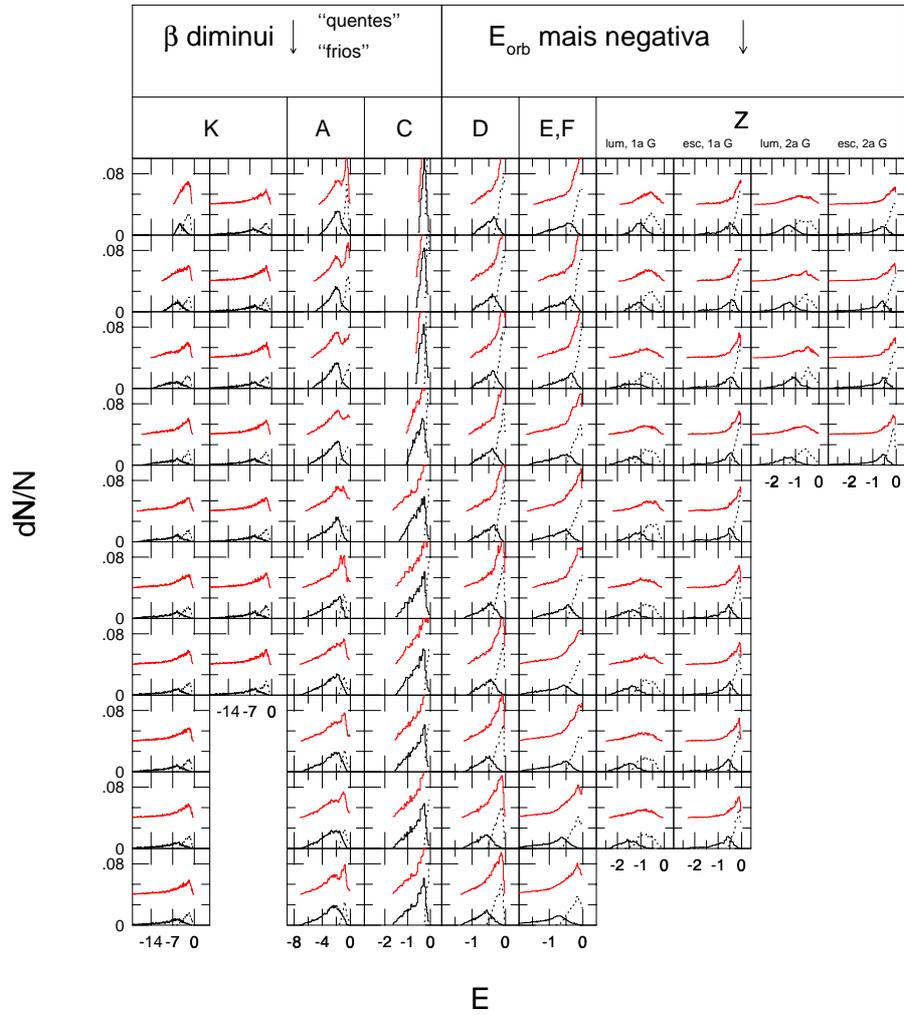


FIG. 5.20: O mesmo da figura anterior, mas para a distribuição das energias por unidade de massa das partículas dos modelos. Histogramas totais (i.e., sem diferenciação entre partículas a $r < r_h$ e a $r > r_h$) são apresentados com um deslocamento fixo de 0.04 acima do valor real, para uma melhor visualização dos histogramas.

5.1.6 A Distribuição $N(E)dE$ e a Lei de Maxwell-Boltzmann

A distribuição das energias individuais das partículas tem significado especial no que tange o estudo da mecânica estatística de sistemas gravitacionais. Pelo teorema de Jeans, qualquer função não-negativa das integrais de movimento da partícula num potencial estacionário pode, à princípio, servir como função de distribuição (viz. densidade do espaço de fase “fine-grained”) do sistema (c.f. B&T87). Em outras palavras, a condição para uma função $I[\vec{x}(t), \vec{v}(t)]$ ser uma integral do movimento é idêntica à condição para que I seja uma solução estacionária da Eq. de Boltzmann acolisional. No caso de sistemas esféricos, podemos assumir que a densidade do espaço de fase dependa apenas das integrais E e L . Se o sistema for isotrópico na dispersão de velocidades ($\overline{v_r^2} = \overline{v_\theta^2} = \overline{v_\phi^2}$), então podemos assumir um modelo simples onde $f(\vec{x}, \vec{v}) = f(E)$, i.e., função apenas da energia E . Assim, $f(E)d^3\vec{x}d^3\vec{v}$ pode ser interpretada com a probabilidade de se encontrar uma partícula num volume $d^3\vec{x}d^3\vec{v}$ do espaço de fase em torno de um ponto sobre a hipersuperfície definida pela energia E . Por outro lado, definimos $N(E)dE$ como o número total de partículas do sistema com energias entre E e $E + dE$, i.e., a fração da massa total do sistema que possui energia entre E e $E + dE$. A diferença entre as duas definições pode ser vista esquematicamente na Fig.5.21, onde tornamos a utilizar a analogia do sistema de pêndulos simples (c.f. Seção 5.1.1).

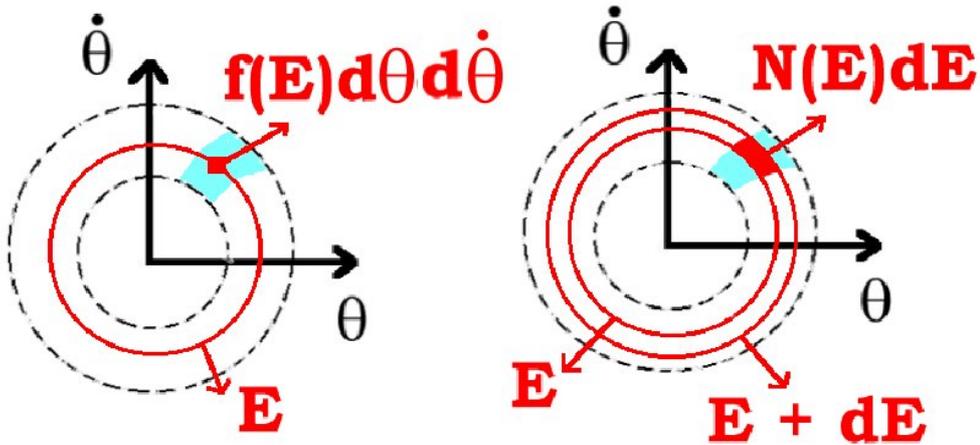


FIG. 5.21: Ilustração esquemática de $f(E)d\theta(d\theta/dt)$ e $N(E)dE$ (áreas mais escuras da figura) para o caso de um sistema de pêndulos simples num instante inicial de evolução (área hachurada mais clara). A região de energia permitida ao sistema está confinada no anel delimitado pelos círculos de raio maior e menor (linhas tracejadas). Os círculos intermediários mais escuros representam hipersuperfícies de mesma energia (no caso aqui representado, são curvas unidimensionais).

Binney 1982 argumenta que uma quantidade mais fundamental para compreendermos a estrutura e dinâmica dos sistemas estelares esferoidais seria a quantidade $N(E)$ ao invés de $f(E)$. Binney calcula a $f(E)_{deVauc}$, que gera de forma auto-consistente uma galáxia que segue a lei de de Vaucouleurs (de Vaucouleurs 1948), e mostra que o $N(E)_{deVauc}$, associado à $f(E)_{deVauc}$,³ pode ser muito bem aproximado à conhecida fórmula de Maxwell-Boltzmann da mecânica estatística, i.e., $N(E) \sim \exp(-\beta_E E)$, onde β_E tem unidades de inverso de energia por massa. A importância deste aspecto seria que uma relaxação mais eficiente levaria a uma distribuição suavizada de $N(E)$, onde a maior parte da massa de um sistema estelar relaxado típico seria composto por estrelas fracamente ligadas. De fato, como já mencionado, uma inspeção visual da Fig. 5.20 mostra que a distribuição de $N(E)$ tende a crescer de forma aproximadamente monótona para $E \rightarrow 0^-$.

Se aproximarmos os modelos finais simulados à sistemas esféricos e isotrópicos, o que não corresponderá estritamente à situação real, teremos não obstante uma base quantitativa simples de análise do comportamento de $N(E)$, o que é comumente assumido na literatura (e.g., van Albada 1982, Villumsen 1984, Londrillo et al. 1991). Para cada modelo, ajustamos a fórmula de Boltzmann na forma $\log N(E) = BE + \log A$, onde $B = \beta_E \log e$, e A é uma constante⁴. Para o ajuste, escolhemos o intervalo de energias mais monótono possível, ou seja, desprezamos as partículas após o último intervalo de energia onde a distribuição começa a diminuir significativamente (região de $E \rightarrow 0^-$). Assumimos que o erro em $N(E)$ é $\delta N(E) \sim \sqrt{N(E)}$. Os ajustes finais se mostraram muito bons no geral, com $\text{prob}(\chi^2) \sim 1$. Apresentamos quantidade β_E na Fig. 5.22 em função das condições iniciais dos modelos.

Em primeiro lugar, é notável que o intervalo de valores β_E resultantes de todos os modelos seja relativamente estreito. Calculamos a diferença fracional $\delta\beta_E \equiv (\beta_{Emax} - \beta_{Emin})/\beta_{Emin}$, onde β_{Emax} e β_{Emin} são o maior e menor valor de β_E apresentados, considerando *todos* os modelos finais (colapsos e fusões conjuntamente). O valor resultante foi de $\delta\beta_E \sim 0,58$. Esta mesma quantidade para os progenitores resultam em um valor maior, $\delta\beta_E \sim 1,27$. À título de comparação, uma vez que β_E tem unidades de inverso de energia por massa, comparamos a diferença fracional relativa aos dois valores mais extremos de $\bar{U} \equiv \frac{r_e}{M(<r_e)}$ apresentados pelos modelos finais. \bar{U} é uma medida do inverso da energia potencial do sistema, por massa. Obtivemos $\delta\bar{U} \sim 28,2$. Evidentemente, esta quantidade se refere à região mais central

³Pode-se demonstrar que $N(E)dE = f(E)g(E)dE$, onde $g(E)$ é o volume do espaço de fase de uma dada hipersuperfície de energia, também chamado de “densidade de estados” (e.g. B&T87, Binney 1982).

⁴Note que a lei de Maxwell-Boltzmann em sua forma padrão possui um sinal de menos na exponencial, indicando que estados de menor energia são os que possuem maior probabilidade de ocorrência. No caso gravitacional, como a energia é definida como negativa, omitimos o sinal negativo na exponencial, de forma que a lei de Maxwell-Boltzmann nesta forma continua prevendo que os estados onde a partícula está menos ligada ($E \rightarrow 0^-$) são os de maior probabilidade (c.f. Fig. 5.20).

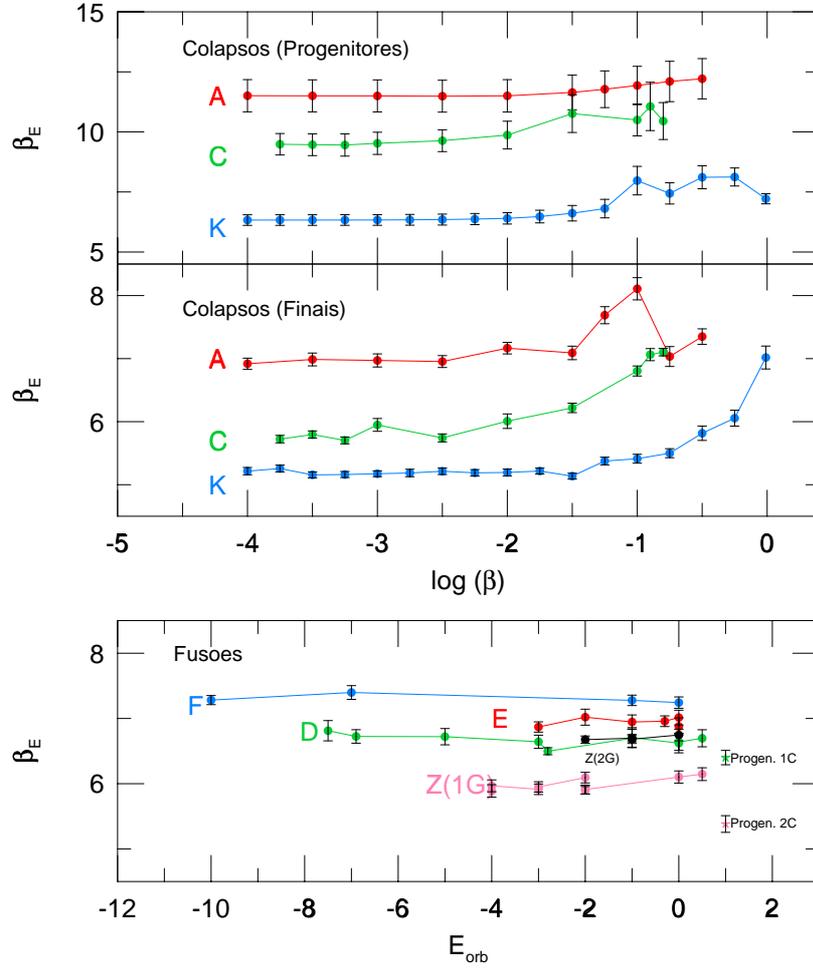


FIG. 5.22: Resultados do ajuste da lei Maxwell-Boltzmann para os modelos simulados: a quantidade β_E em função das condições iniciais dos modelos. Painel superior, acima: progenitores de colapsos; abaixo, modelos finais. Painel inferior: fusões, com progenitores indicados na figura.

do modelo, enquanto que β_E é uma quantidade global, de forma que a comparação aqui é apenas ilustrativa.

Em segundo lugar, notamos que os modelos de colapso apresentam uma tendência de β_E aumentar na medida em que a condição inicial é mais “quente”. Este efeito está presente tanto nos progenitores de colapso, quanto nos modelos finais, porém os modelos finais de colapso apresentam este efeito com bem mais intensidade. Este comportamento é um tanto acidentado para o caso dos modelos finais de colapso A, devido ao fato destes modelos não seguirem muito bem a lei de Maxwell-Boltzmann na região de $E \rightarrow 0^-$. No caso das fusões, os modelos possuem valores de β_E bastante similares, para uma dada geração, independente da energia orbital inicial dos pares. Na medida em que as fusões avançam em hierarquia, os valores de β_E aumentam. Os progenitores de fusão, ao contrário dos de colapso, possuem β_E menores do que os dos modelos finais de equilíbrio.

Um terceiro aspecto de interesse é o quanto o valor de β_E é preservado com referência ao progenitor de um dado modelo. Binney 1982 conjectura a possibilidade de que a distribuição fracional de massa $N(E)$ das galáxias possa ser razoavelmente bem preservada, em contraste ao valor “coarse-grained” de $f(E)$, que em geral não é preservado durante o processo de virialização. A importância deste aspecto se resume na possibilidade de traçarmos, a partir da distribuição $N(E)$ observada de uma galáxia, a configuração primordial da flutuação de matéria que a originou. Estudos anteriores (e.g. Gott 1973, White 1978), que na verdade serviram de motivação à conjectura de Binney, indicam que a distribuição $N(E)$ poderia ser relativamente bem conservada, mas somente *após a relaxação do sistema*.

As diferenças médias $\langle \Delta\beta_E \rangle \equiv \langle \beta_E(\text{progen.}) - \beta_E(\text{final}) \rangle$ obtidas dos nossos modelos foram seguintes (no caso de fusões o $\beta_E(\text{final})$ considerado foi a média dos valores resultantes de fusão de última geração):

- Colapsos K: $\langle \Delta\beta_E \rangle \sim 1, 39$;
- Colapsos A: $\langle \Delta\beta_E \rangle \sim 4, 49$;
- Colapsos C (n=1): $\langle \Delta\beta_E \rangle \sim 3, 08$;
- Fusões Hernquist (1 comp.): $\langle \Delta\beta_E \rangle \sim -0, 93$;
- Fusões Hernquist (2 comps.): $\langle \Delta\beta_E \rangle \sim -1, 34$;

Antes de discutirmos estes resultados, faremos uma pequena observação: Luwel e Servene 1983 estudaram detalhadamente a distribuição $N(E)dE$ de sistemas gravitacionais unidimensionais, e encontraram que, embora os sistemas finais de equilíbrio

sejam bem aproximados à lei de Maxwell Boltzmann, as distribuições $N(E)$ dos modelos estudados variam violentamente durante a relaxação, e ainda significativamente mesmo após ~ 10 “crossing times” do sistema. A amplitude da oscilação após a relaxação pode chegar até $\Delta_{max}N(E) \sim 25\%$ do valor médio (temporal) de um dado intervalo de energia. Assumindo um erro em $N(E)$ da ordem de $\delta N(E) \sim \sqrt{N(E)}$ (tal como assumido em nossa análise), verificamos que os resultados de Luwel e Servene 1983 indicam que $\Delta_{max}N(E)$ é da mesma ordem de $\delta N(E)$.

Embora nem sempre a generalização de um comportamento físico unidimensional para o equivalente tridimensional seja direta, acreditamos que o efeito acima descrito pode se reproduzir, pelo menos em mesma ordem de magnitude, em nossas simulações. Assim, nossos resultados podem ser considerados significativos, no sentido de que quaisquer modelos escolhidos para a medida de β_E após a relaxação seriam igualmente bons: flutuações temporais de $N(E)$ estarão imbutidas nas barras de erro calculadas (c.f. Fig. 5.22). Uma inspeção dos resultados acima cotados mostra portanto que as distribuições $N(E)$ dos modelos, quantificadas pelo fator β_E , não são bem preservadas *relativamente ao progenitor*.

5.1.7 Análise da Conservação das Energias Médias de Coleções de Partículas

Vimos nas seções anteriores que, ao longo da evolução do sistema, a energia individual das partículas não é, no geral, conservada, nem tampouco num sentido “coarse grained” (viz. via distribuição $N(E)$).

Kandrup et al. 1993 estudaram mais um aspecto referente à distribuição de energias das partículas de um sistema gravitacional resultante de encontros (sem formação de um objeto final único) e fusões de duas galáxias. Estes autores encontraram um efeito interessante que é a existência de um *sentido* “coarse-grained”, no qual, na média, a *ordenação* das energias das partículas se mantém aproximadamente inalterada, ainda que $N(E)$ varie substancialmente. Nesta seção, iremos nos concentrar nesta questão, e para isso faremos um breve resumo do método e dos resultados de Kandrup et al.

O método consiste no seguinte: as partículas são ordenadas de acordo com suas energias iniciais (em $t = 0$), e separadas em diferentes intervalos de energias. Cada intervalo de energia assim definido possui um número fixo de partículas (em geral, uma fração razoável do número total de partículas do sistema)⁵. A partição em intervalos de energia no estudo de Kandrup et al. foi realizada em dois níveis distintos: em 5 e 20 intervalos de energia. A média de energias, de cada um dos intervalos de

⁵Note que, nas distribuições $N(E)$ estudadas anteriormente, os intervalos usados são menores e fixos, enquanto que o número de partículas variava por intervalo.

energias, foi calculada para o instante inicial. As partículas foram então identificadas, formando 5 (ou 20) grupos que foram subsequentemente acompanhados, de forma que a média das energias de cada grupo de partículas foi calculada, para cada instante. As médias foram assim traçadas para os mesmos grupos de partículas, ao longo da evolução do sistema.

Os resultados mostraram que estas médias não se entrecruzam ao longo do tempo, apesar de $N(E)$ variar substancialmente no mesmo intervalo de tempo. Os dois níveis distintos de intervalos de energia indicam como o grau de ordenação varia com o grau de “coarse-graining” inicial. Os resultados mostraram que a ausência de intercruzamentos ocorre para *ambos* graus de partição (no caso de divisão em 20 intervalos, ou seja, quando se usou uma partição mais fina, alguns intercruzamentos ocorreram em alguns poucos casos, mas somente nos momentos de máxima compressão dos “cores” das galáxias originais, sem intercruzamentos posteriores, de forma que a ordenação final sempre se manteve intacta).

A importância deste resultado é a possível existência de um vínculo que restringe a evolução do sistema a um nível “mesoscópico”, viz., que não opera a nível das energias individuais, mas sim num nível que envolve coleções maiores de partículas. Este aspecto implica que a evolução do sistema em direção ao equilíbrio, no espaço de energias individuais das partículas, quando esta evolução é traçada a um nível “coarse-grained”, resulta numa evolução diferente daquela descrita por Lynden-Bell 1967. Lembramos que, segundo a teoria desenvolvida por Lynden-Bell, baseada em argumentos da mecânica estatística, supõe-se uma máxima eficiência da mistura das energias, de forma que até mesmo coleções maiores de partículas, tais como as estudadas por Kandrup et al., seriam afetadas. Em outras palavras, a teoria de Lynden-Bell supõe que as partículas inicialmente mais ligadas não seriam necessariamente as mais ligadas ao final do processo de relaxação, por exemplo. No entanto, Kandrup et al. mostram que não é isto que parece ocorrer, uma vez que a ordenação das energias se mantém bastante preservada.

Nesta seção, não procuraremos reproduzir inteiramente os resultados de Kandrup et al., que fizeram uma análise completa ao longo do tempo, mas estudaremos apenas os modelos finais (*com* os “escapers”) e os iniciais. No caso de fusões, as partículas de apenas uma das galáxias são investigadas, tanto inicialmente, quanto ao final do processo de fusão com a segunda galáxia (que não será analisada⁶). O método usado foi essencialmente o mesmo de Kandrup et al., descrito acima, mas apenas para estes dois momentos dos modelos, e utilizamos dois níveis distintos de partição: em 5 e 10 intervalos de energias. O primeiro intervalo é aquele que contém as partículas com energias mais negativas (mais ligadas), e o quinto (ou décimo, no caso de 10 partições), com energias menos negativas (menos ligadas). Os resultados a seguir

⁶Kandrup et al. considera uma “média” da média das energias por intervalo de energia de ambas galáxias.

são apresentados em função das condições iniciais dos modelos.

Encontramos que, para 10 partições (c.f. Fig. 5.23), os colapsos K preservam inteiramente a ordenação das energias médias por “bin”. Em particular, as energias médias por “bin” que mais se alteraram são as que correspondem aos intervalos de energias mais ligadas (“bins” 1, 2, 3, etc). O potencial central se torna mais profundo após o colapso, e as partículas inicialmente mais ligadas tendem a perder energia (tornarem-se ainda mais ligadas). Este efeito também é função do fator de colapso β . No caso dos colapsos A, a ordenação é levemente violada, pois ocorre um efeito interessante: as energias médias dos “bins” menos ligados tendem a convergir ao final do colapso. Nos “bins” mais ligados (c.f. “bins” 1 e 2), também ocorre uma convergência. Estes efeitos geram uma certa violação na ordenação das médias de energias, sobretudo entre “bins” menos ligados. Note que as médias convergem de forma a resultar em dois grupos bem distintos: “bins” mais ligados (1, 2, 3) e menos ligados (os outros). Estes dois grupos indicam a existência, respectivamente, de um “core” e de um halo, bem característicos, como já observamos anteriormente na análise da distribuição de $N(E)$. No geral, entretanto, podemos ainda afirmar que as partículas mais ligadas tendem a ficar mais ligadas ao final do colapso, e as menos ligadas tendem a permanecer menos ligadas. No caso de colapsos C, há uma razoável variedade de possibilidades, ocorrendo violação da ordenação em alguns casos, principalmente para os “bins” menos ligados. Lembramos que estes colapsos têm, em suas condições iniciais, um fluxo de Hubble associado às velocidades das partículas que, aliado ao fator de colapso inicial (β), irá favorecer em certas condições o crescimento das pequenas perturbações imbutidas inicialmente nos modelos. Este efeito deve adicionar uma certa complexidade na evolução das médias de energias, tal como vemos na figura.

Recorrendo-nos aos resultados para 5 partições (c.f. Fig. 5.24), vemos que os efeitos acima descritos são mantidos, mas há de fato uma maior preservação da ordenação das médias de energias. No geral, podemos afirmar que colapsos apresentam o mesmo comportamento descrito por Kandrup et al., embora em alguns casos, ocorra violação, até mesmo quando do uso de uma partição mais grosseira, embora esta violação seja de fato bem pequena.

No caso de fusões, iniciando pelos resultados para 10 partições (c.f. Fig. 5.25), encontramos que as fusões D preservam bem a ordenação das médias de energia por “bin”. As médias de energia variam em menor magnitude em comparação às médias obtidas para colapsos. No caso de fusões com duas componentes, a análise da parte luminosa mostra que *todas* as partículas tendem a perder energia, praticamente por um mesmo “fator”, tendendo a formar ao final uma convergência das médias de energia por “bin”. Já o halo apresenta alguns inter cruzamentos na ordenação (na maioria dos casos, para os dois primeiros “bins” mais ligados; num caso, o inter cruzamento se deu até o quarto “bin” mais ligado). Este efeito é interessante, pois mostra que existem casos onde as partículas inicialmente mais ligadas do halo acabam *não*

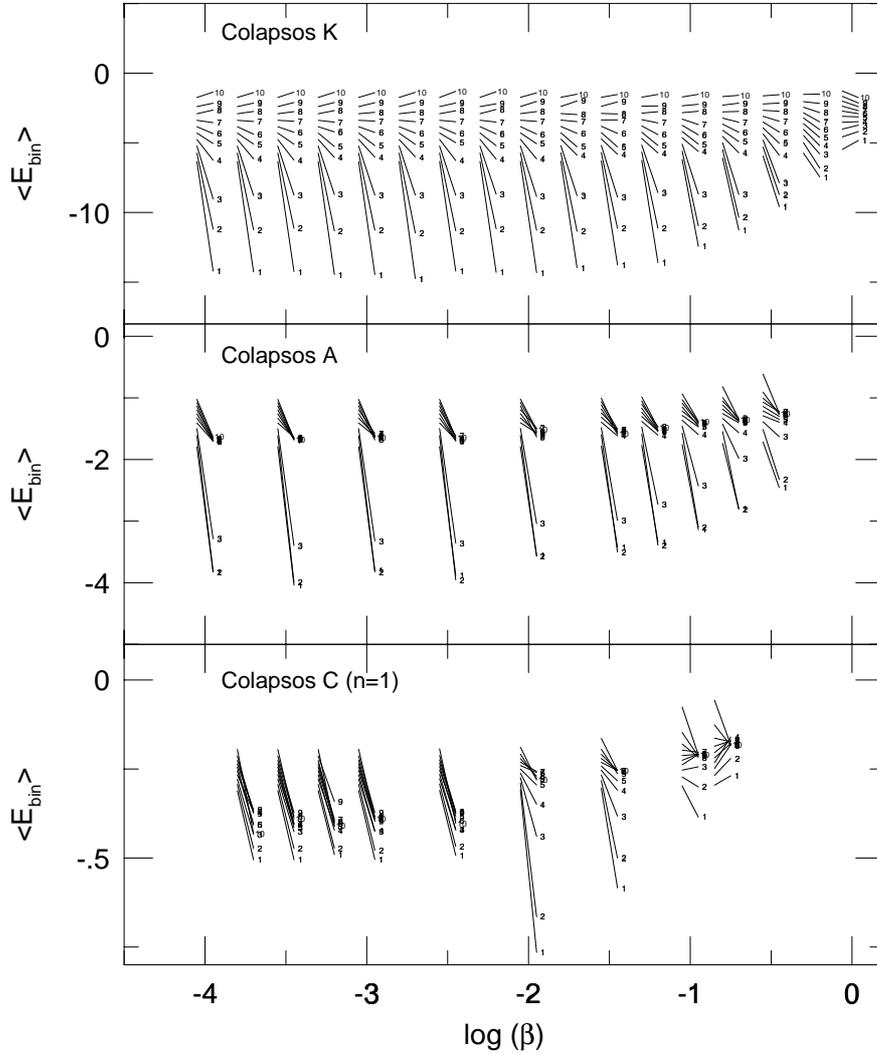


FIG. 5.23: Média das energias das partículas por “coleção” ou “bin” inicial, para cada um dos 10 intervalos de energias, para os modelos de colapso. Os valores iniciais e finais das médias estão conectados por um segmento de reta (extremo à esquerda da reta: valor da média inicial; extremo à direita: valor final), centralizado na condição inicial de cada modelo. Os “bins” estão indicados na figura: “bin” número 1 referente à coleção de partículas mais ligadas; e assim sucessivamente até o bin “10”, para as partículas menos ligadas.

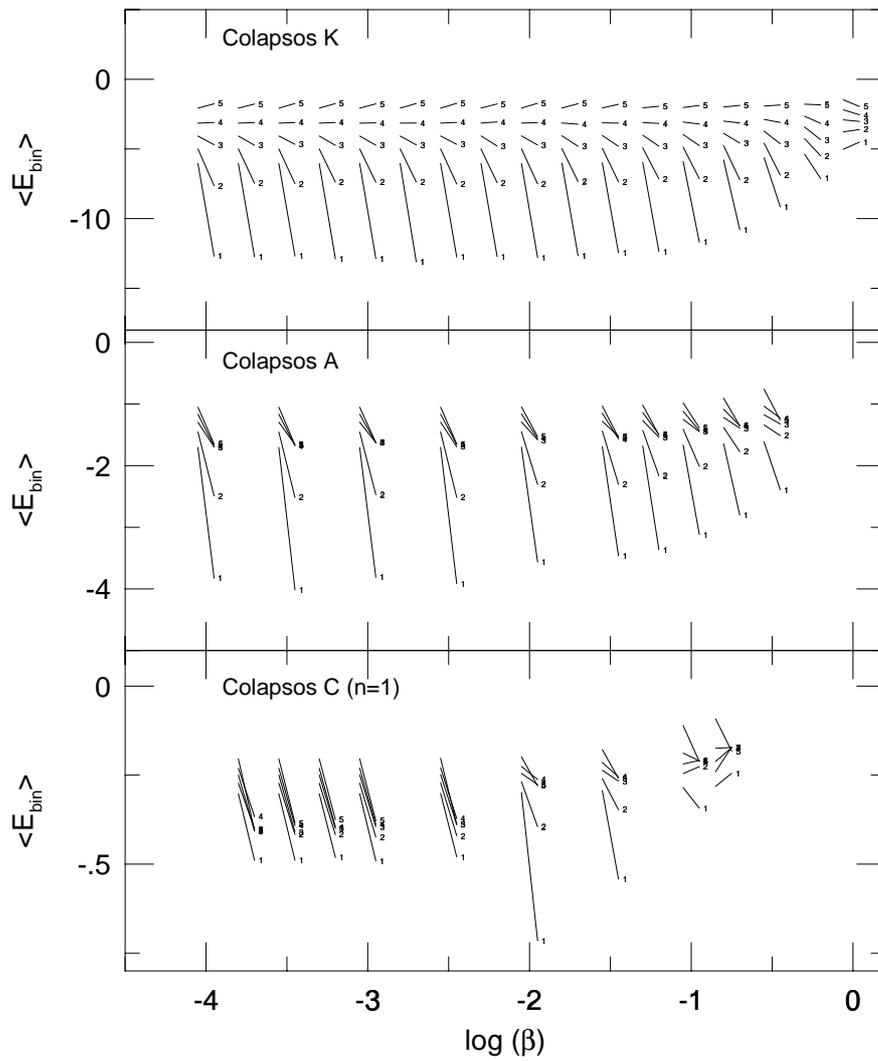


FIG. 5.24: O mesmo da figura anterior, mas utilizando 5 intervalos de energias.

sendo as mais ligadas ao final da evolução, na média (algumas das partículas da coleção inicialmente mais ligada podem ainda ser ao final as partículas mais ligadas do sistema, mas outras da coleção certamente ganharam energia, e elevaram a média acima daquela correspondente a outras coleções inicialmente menos ligadas).

Na Fig. 5.26, referente à partição em 5 intervalos, vemos que, para a parte luminosa, há uma certa preservação da ordenação, apesar da tendência das médias ainda convergirem, mas a violação persiste no caso dos halos escuros. A evolução das energias médias dos grupos de partículas luminosas destas simulações lembra o caso de colapsos, sobretudo para os grupos mais ligados. Isto sugere que, de alguma forma, o processo de relaxação destas fusões seja semelhante ao dos colapsos. De fato, como visto anteriormente, a eficiência de mistura da componente luminosa é similar a de colapsos (c.f. Seção 5.1.3). A razão principal deve ser o fato que, após a interação inicial, a componente luminosa deve encontrar o estado de equilíbrio dentro do potencial, mais profundo, de matéria escura. Isto deve ocorrer via um colapso parcial no potencial da matéria escura. Assim, a componente luminosa, mais central e mais ligada⁷, acaba tendo um comportamento semelhante às partículas mais ligadas (e também mais centrais) dos colapsos.

Embora não tenhamos avaliado o que ocorre com as médias ao longo da evolução, podemos dizer que, no geral, uma inspeção destas figuras mostra que a ordenação inicial das médias de energias dos vários grupos de partículas se mantém razoavelmente intacta, tal como nos resultados de Kandrups et al. No entanto, *há exceções claras*, onde a violação da ordenação das médias de energias por “bin” permanece, até mesmo quando o sistema é particionado mais grosseiramente.

5.2 Características Dinâmico-Estruturais dos Modelos Finais

5.2.1 Perfil de Densidade Superficial

Nesta seção, discutiremos brevemente os perfis de densidade superficial dos modelos simulados. Não procuramos fazer ajustes a modelos específicos, tendo nos limitado a uma comparação qualitativa com o perfil de de Vaucouleurs (também conhecido como “lei de $r^{1/4}$ ”). Alguns exemplos dos perfis de colapsos estão na Figs. 5.27, para fusões com uma componente, na Fig. 5.28, e para fusões com duas componentes, na Fig. 5.29 (somente a parte luminosa).

⁷Note que as médias das energias dos grupos de partículas luminosas possuem valores mais negativos do que aqueles correspondentes aos de partículas do halo escuro.

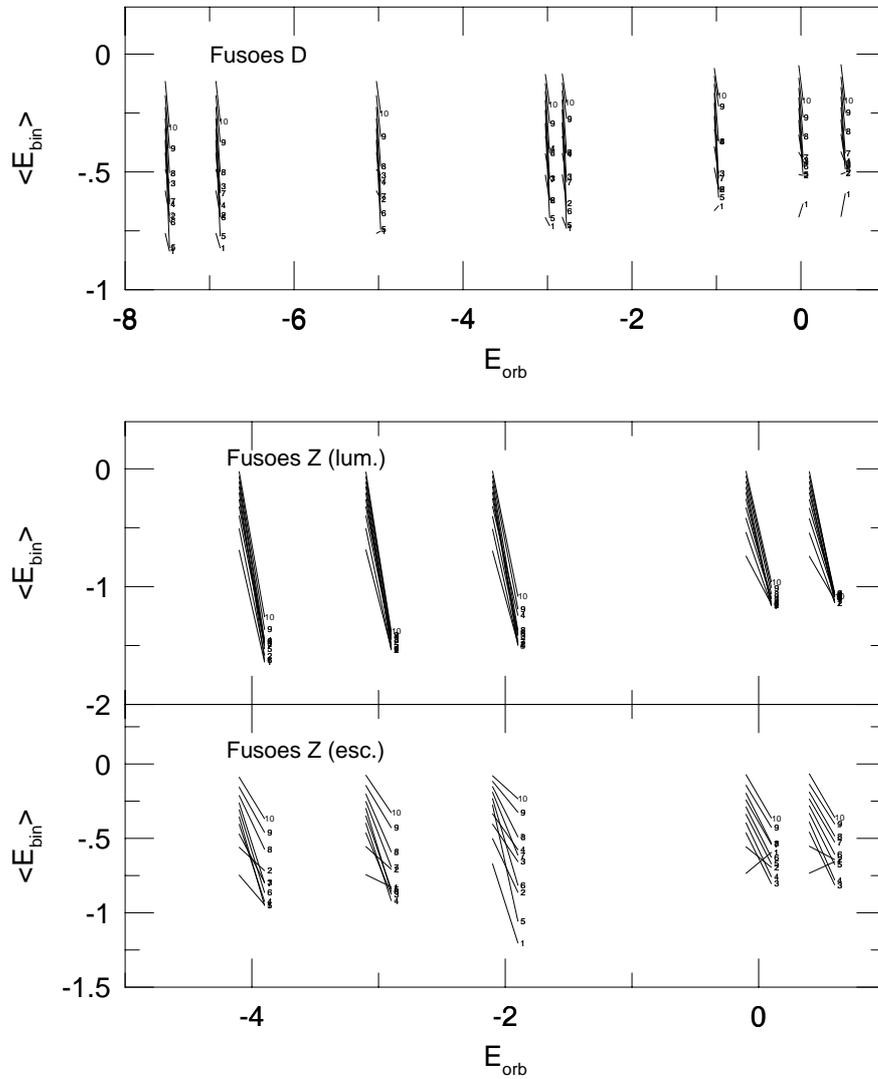


FIG. 5.25: O mesmo da figura anterior, mas para fusões, e utilizando 10 intervalos de energias. Apenas as fusões de primeira geração são apresentadas. No caso de fusões com a mesma energia orbital inicial dos pares, escolhemos apenas uma delas para a figura.

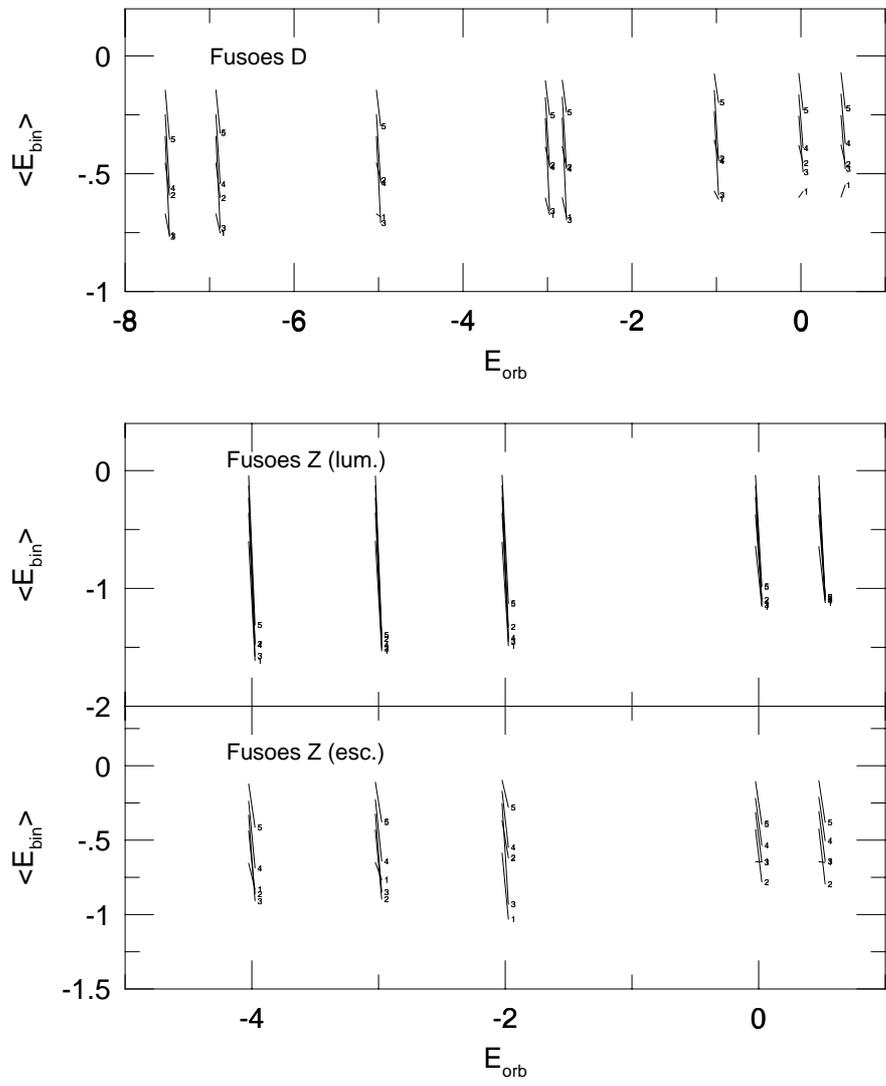


FIG. 5.26: O mesmo da figura anterior, mas utilizando 5 intervalos de energias.

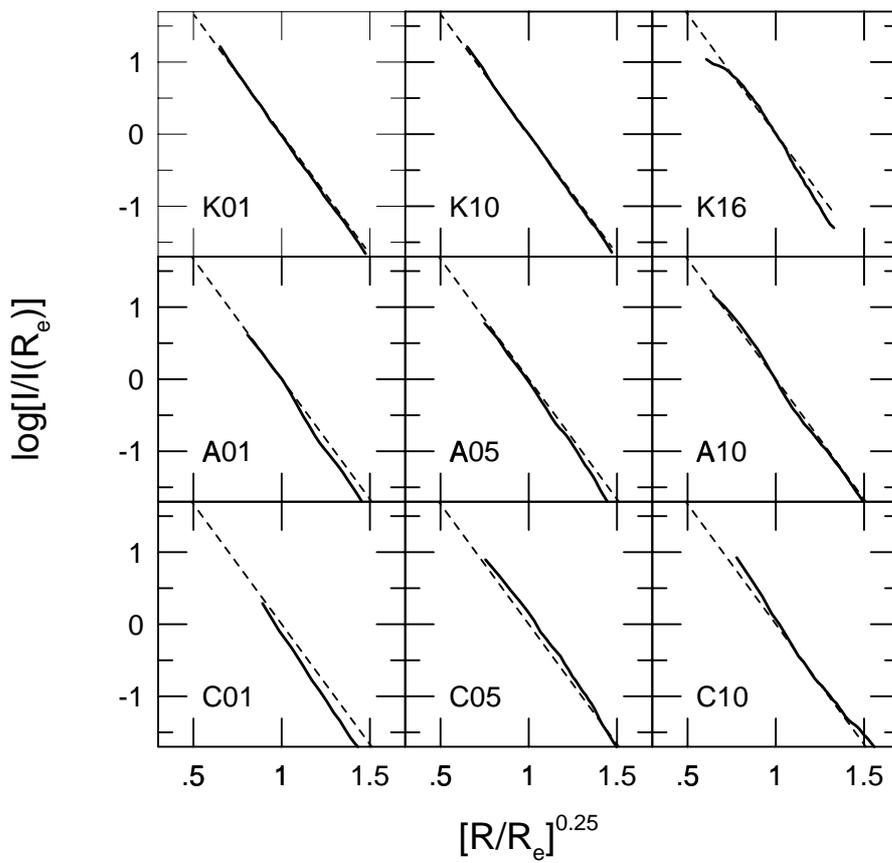


FIG. 5.27: Perfil de densidade superficial (linha cheia) para alguns exemplos de colapso, em comparação ao perfil de de Vaucouleurs (linha pontilhada).

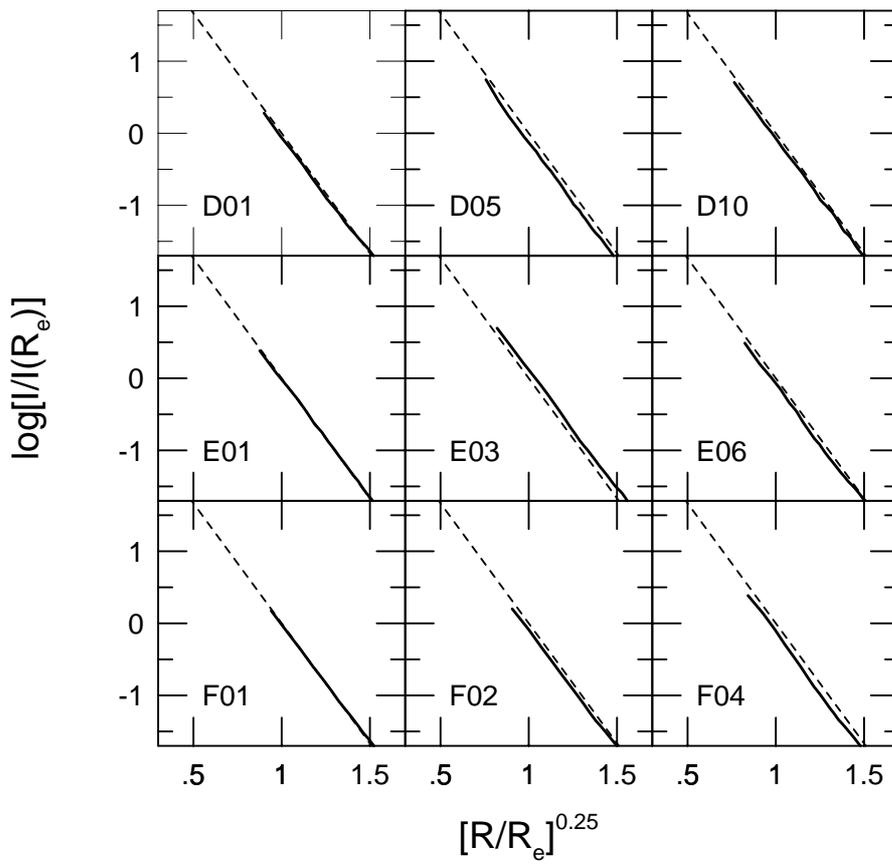


FIG. 5.28: O mesmo da figura anterior, para alguns exemplos de fusões com uma componente.

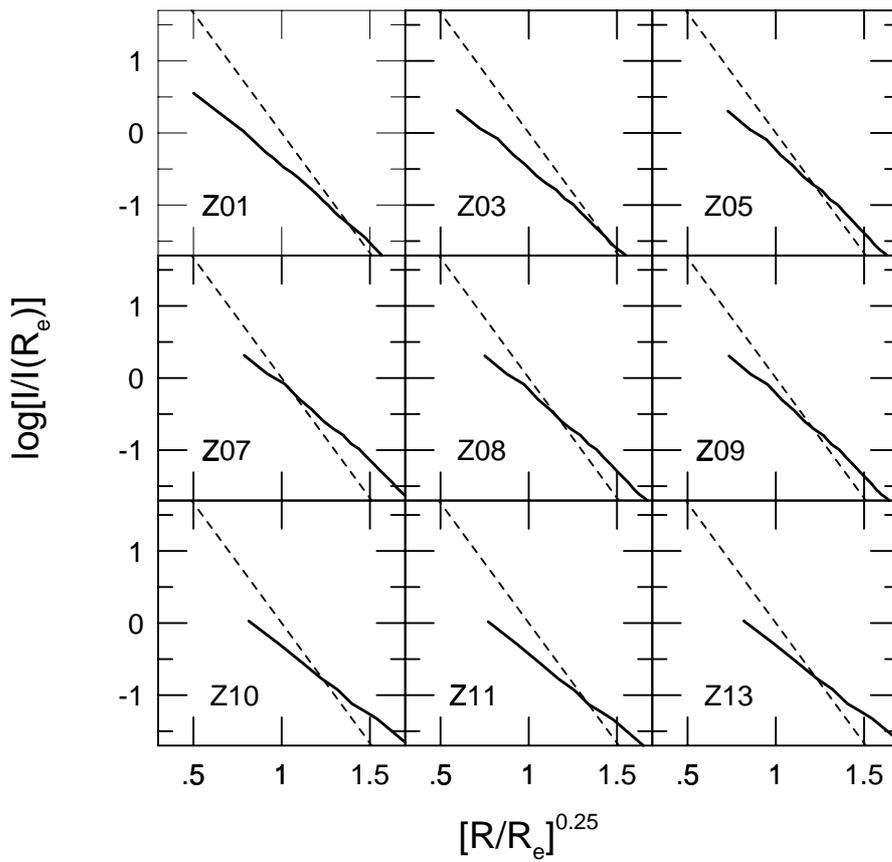


FIG. 5.29: O mesmo da figura anterior, para alguns exemplos de fusões com duas componentes. Somente a parte luminosa é apresentada.

No geral, os objetos colapsados seguem razoavelmente o perfil de de Vaucouleurs, porém há pequenos desvios evidentes. Dentre colapsos, os do modelo C são os que apresentaram concordância pior com o perfil de de Vaucouleurs. As fusões de Hernquist com uma componente parecem se ajustar melhor do que os colapsos. No caso de fusões de modelos de King, CdCC95 verificaram que estes se ajustam muito bem aos perfis de Sérsic ($r^{1/n}$, c.f. Caon et al. 1993), com $1,2 < n < 5$, havendo uma tendência de crescimento do índice n com o nível da hierarquia. Não procuramos verificar este efeito em nossas simulações, embora não pareça evidente numa inspeção visual da Fig. 5.27 que o índice n para fusões com uma componente seja muito diferente de ~ 4 .

Para as fusões de Hernquist com duas componentes, apresentamos apenas a componente luminosa, uma vez que é esta componente das galáxias elípticas que são aproximadas à lei de de Vaucouleurs. Podemos ver pela Fig. 5.29, para os exemplos apresentados, que a componente luminosa para estas simulações apresentam bem pouca concordância com a lei de de Vaucouleurs, e provavelmente se ajustam a uma lei de Sersic com $n > 4$.

Como proposto por Hjorth e Madsen 1991, um bom ajuste ao perfil de de Vaucouleurs seria obtido para modelos com potencial central suficientemente profundo. No geral, os modelos com uma componente que têm pior concordância com o perfil $r^{1/4}$ (e.g. modelos C) apresentam potenciais centrais que não são tão profundos quanto os outros que ajustam bem a este perfil. Mas há exceções a esta regra: e.g., os modelos de fusão com uma componente se ajustam bem, mas não apresentam potenciais centrais muito profundos.

Um ingrediente importante deve ser a necessidade de uma distribuição de $N(E)$ que se ajuste bem à lei de Maxwell-Boltzmann (c.f. Binney 1982), *na faixa mais ampla possível das energias ocupadas*. De fato, observamos que os modelos que têm concordância pior com o perfil de de Vaucouleurs (modelos Z, parte luminosa) apresentam uma distribuição $N(E)$ que se ajusta àquela lei apenas num intervalo pequeno das energias ocupadas.

5.2.2 Triaxialidade

Por fim, desejamos analisar a forma tridimensional global de cada modelo simulado. Para tal, obtivemos as componentes do tensor de inércia, considerando 80% do total de partículas mais próximas ao centro. Este percentual é um tanto arbitrário, porém o objetivo é nos limitarmos a uma análise da estrutura mais central dos modelos, onde estão associadas as quantidades relativas ao PF. O tensor de inércia foi diagonalizado para achar as direções principais, e, assim, as coordenadas e velocidades

foram transformadas e reescaladas para este sistema principal de eixos, de modo a “esferizar” a distribuição.

As Figs. 5.30, 5.31 e 5.32 mostram como as simulações se distribuem no “espaço de elipsóides” (de Zeeuw e Franx, M. 1991), para os colapsos, fusões com uma componente e fusões com duas componentes, respectivamente. Nestas figuras, o parâmetro de triaxialidade é definido por:

$$T = \frac{1 - (b/a)^2}{1 - (c/a)^2}, \quad (5.4)$$

onde a , b , e c são os semi-eixos principais da distribuição, com $a \geq b \geq c$.

Notamos que os colapsos A e K (c.f. Fig. 5.30, painel superior) com condições iniciais mais “frias” se encontram na região inferior da distribuição no “espaço de elipsóides”, e são triaxiais. Na medida em que o parâmetro inicial β aumenta, os modelos se tornam cada vez mais prolatos e, em seguida, esféricos para o caso das condições iniciais mais “quentes”. Objetos oblatos parecem ausentes. O colapsos C (painel inferior) são bem mais restritos: não produzem objetos muito alongados, e em geral são levemente triaxiais. Parece haver uma tendência dos modelos de índice $n = 0$ se mostrarem mais alongados do que os de outros índices.

Os modelos a partir de fusão com uma componente (c.f. Fig. 5.31) tendem a resultar objetos com razão axial b/a nunca abaixo de ~ 0.6 , e c/a nunca abaixo de ~ 0.4 , ao contrário dos colapsos A e K, que podem apresentar objetos bastante alongados. Isto significa que estas simulações não conseguiram produzir sistemas acima de elípticas do tipo $\sim E5^8$.

Uma outra constatação é que a primeira geração de fusões tende a produzir objetos do tipo prolato, a segunda geração, do tipo triaxial, e a terceira, do tipo oblato. Esta “segregação” é bastante interessante, uma vez há também uma sequência no espaço do PF, no sentido de que os objetos de geração cada vez maior são os que têm maiores r_e , e se desviam cada vez mais da relação de homologia. A utilização de uma grade muito mais ampla de condições iniciais (e.g., \hat{L}) seria necessária para descobrirmos se este seria algum viés introduzido pela grade restrita de condições iniciais utilizadas.

Os modelos de fusão com duas componentes produzem uma ampla faixa de possibilidades para a componente luminosa (Fig. 5.32, painel superior), com tendência a se tornarem triaxiais-oblatos. Por outro lado, os halos (Fig. 5.32, painel inferior) parecem ter uma tendência maior a se tornarem triaxiais-prolatos.

⁸As galáxias elípticas são denominadas pelo símbolo En onde $b/a = 1 - n/10$.

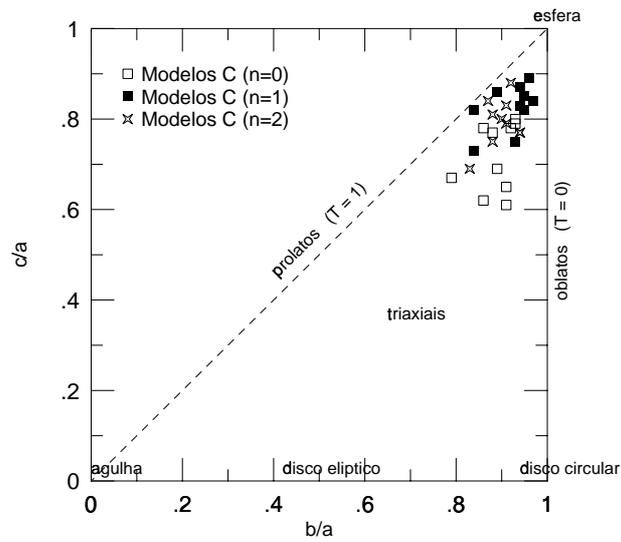
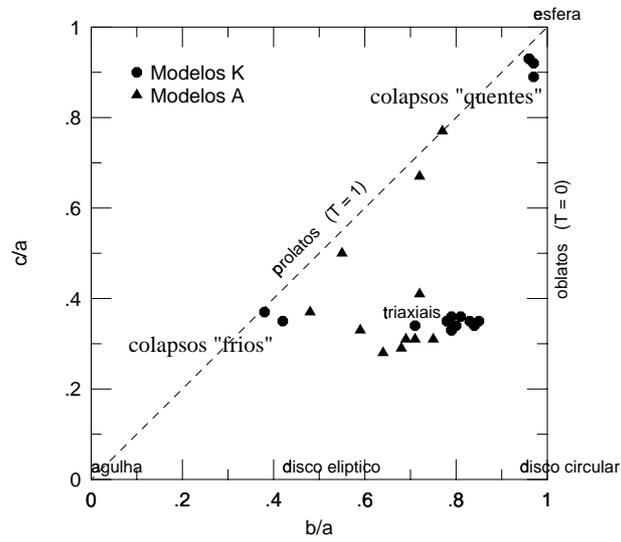


FIG. 5.30: Distribuição de triaxialidades dos colapsos. Painel superior: colapsos K e A. Painel inferior: Colapsos C.

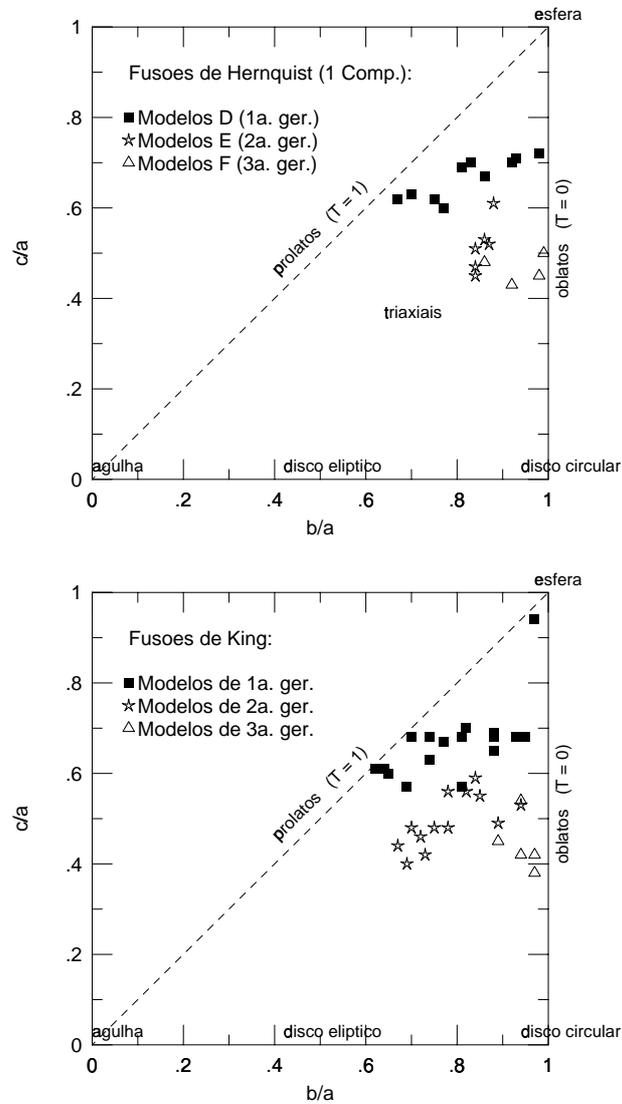


FIG. 5.31: Distribuição de triaxialidades das fusões com uma componente. Painel superior: fusões de Hernquist D, E e F. Painel inferior: fusões de King (CdCC95).

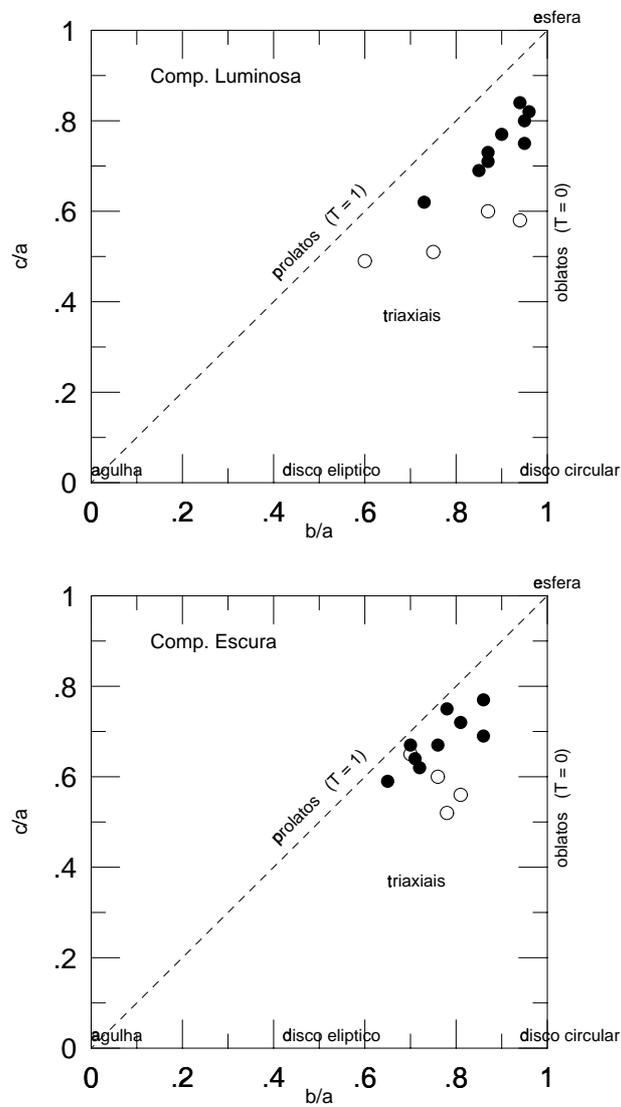


FIG. 5.32: Distribuição de triaxialidades das fusões com duas componentes (modelos Z). Painel superior: componente luminosa. Painel inferior: componente escura. Símbolos cheios representam simulações de primeira geração, enquanto que símbolos vazios representam as de segunda geração.

5.3 Discussão

Os estudos apresentados neste capítulo visam coletar, através de vários diagnósticos, informações sobre a história e o resultado da relaxação não-dissipativa de colapsos e fusões. Procuramos quantificar, através destes diagnósticos, as características dinâmico-estruturais dos modelos finais de equilíbrio, e relacionar estas características às condições iniciais dos modelos. Estes estudos indicaram que existem, de fato, diferenças entre colapsos e fusões. No entanto, não é de todo claro como estas diferenças poderiam se correlacionar com o fato destes modelos reproduzirem ou não um PF.

Resumimos abaixo os resultados mais importantes deste capítulo:

1. Evolução da relaxação: a “mistura” das partículas dos modelos de fusão, tanto no espaço de configurações quanto no de fase, se dá de uma forma pouco “dramática”, sendo mais próxima de um colapso “quente”, i.e., significativamente diferente da evolução de um modelo “frio” de colapso.
2. Eficiência da relaxação: os colapsos mais “frios” apresentam um grau progressivamente maior de mistura: a densidade do espaço de fase final é cada vez menor do que a inicial, na medida em que o colapso é cada vez mais “frio”. Por outro lado, nenhuma tendência clara é encontrada para as fusões com uma componente, que no geral têm eficiência de mistura apenas comparável aos modelos mais “quentes” de colapso. Uma exceção pare este caso é a componente luminosa dos modelos de fusão com duas componentes, que pode apresentar um grau mistura comparável ao dos colapsos.
3. A distribuição $N(E)dE$ e a relaxação: Os colapsos mais “frios” produzem órbitas bastante negativas; estas órbitas vão se tornando cada vez menos acessíveis na medida em que os colapsos vão se tornando mais “quentes”. O mesmo efeito se nota na medida em que as fusões vão avançando em hierarquia. Os modelos finais foram ajustados de forma satisfatória à lei de Maxwell-Boltzmann para intervalos bem definidos de energia. O intervalo de valores β_E resultantes de todos os modelos é relativamente estreito. As distribuições $N(E)$ dos modelos, quantificadas pelo fator β_E , não são bem preservadas relativamente aos progenitores, na maioria dos casos. As fusões são os modelos que melhor preservam $N(E)$.
4. Vínculos “mesoscópicos” e a relaxação: A ordenação inicial das médias de energias de coleções distintas de partículas se mantém razoavelmente intacta, tal como os resultados de Kandrup et al. Em particular, as fusões com uma componente de primeira geração (fusões D) mostram não somente preservação da ordenação, como das próprias médias de energias por “bin”.

No entanto, *há exceções claras*, onde a violação da ordenação das médias de energias por “bin” permanece, até mesmo quando o sistema é particionado mais grosseiramente, como é o caso dos halos escuros.

5. Os produtos da relaxação: Os colapsos com condições iniciais mais “frias” se encontram na região inferior da distribuição no “espaço de elipsóides”, e são triaxiais. Na medida em que o parâmetro inicial β aumenta, os modelos se tornam cada vez mais prolatos e, em seguida, esféricos para o caso das condições iniciais mais “quentes”. Fusões e colapsos C não conseguiram produzir objetos tão alongados quanto os colapsos K e A “frios”. No geral todos os modelos são similares ao perfil de de Vaucouleurs, exceto a componente luminosa dos modelos de fusão, que apresentam uma inclinação menor do que a prevista pela lei $r^{1/4}$.

Um aspecto importante de discussão concerne as implicações astrofísicas de nossos resultados. Lembramos que colapsos *dissipativos* (c.f. Larson 1976, Carlberg 1984) são modelos capazes de dar conta de gradientes de metalicidade em galáxias, e que fusões tenderiam a misturar os gradientes. White 1980 estudou este aspecto em suas simulações de fusão não-dissipativa de modelos estelares esféricos, e encontrou que o efeito de mistura de populações é razoavelmente moderado (a diferença de população entre o centro e a periferia do modelo final difere em $\sim 20\%$ daquela relativa às galáxias progenitoras). No entanto, White reconhece a limitação de seus resultados, não somente com respeito ao número pequeno de partículas usadas (500), como também quanto ao fato de que uma fusão real de galáxias deve envolver mecanismos muito mais complexos, como fluxo de gás, formação estelar induzida pela própria fusão, etc. Por outro lado, Mihos e Hernquist 1994 investigam exatamente um destes aspectos, utilizando, como progenitores de fusão, discos, com gradientes iniciais típicos de discos. Utilizando técnicas de síntese populacional e modelos de metalicidade, concluem que a mistura populacional é razoavelmente moderada, de forma que os gradientes de metalicidade dos modelos finais é similar aos dos progenitores.

Nossos resultados indicam que a relaxação gravitacional, seja ela razoavelmente “violenta” (como em colapsos “frios”) ou mais “suave” (como em fusões ou colapsos “quentes”), não é capaz de destruir essencialmente as ordenações das médias de energias de coleções inteiras de partículas, ainda que haja uma alteração razoável em suas distribuições de energia ($N(E)dE$), ou mistura significativa no espaço de fase. Assim, de forma geral, as partículas mais ligadas inicialmente tendem a ser as mais ligadas ao final da evolução, e assim por diante, tanto em colapsos, quanto em fusões. Embora tenhamos encontrado algumas excessões (principalmente no halo escuro), no geral, nossos resultados são compatíveis com os de Kandrup et al. Embora não tenhamos realizado um estudo detalhado de como populações estelares poderiam se misturar relativamente a uma população inicial pre-determinada, nossos resultados

parecem compatíveis com um cenário onde as populações estelares não se misturariam severamente ao final da evolução. O halo escuro provavelmente também não alteraria significativamente este cenário, uma vez que a parte luminosa preserva razoavelmente as ordenações das médias de energias das coleções de partículas, tendo, sob este aspecto, um comportamento similar ao de colapsos puros.

CAPÍTULO 6

A NÃO HOMOLOGIA SISTEMÁTICA DOS PRODUTOS DE FUSÃO

Vimos nos capítulos anteriores que os modelos produzidos por fusão são não-homólogos, e que os modelos produzidos por colapsos são, no geral, homólogos. A origem desta não-homologia não se mostra claramente a partir das análises desenvolvidas até então, apesar de termos identificado certas diferenças dinâmico-estruturais entre modelos de fusão e colapso. Assim, iremos neste capítulo revisar e explorar nossas análises anteriores mais detalhadamente, e procurar entender por que surge uma não-homologia nos produtos de fusão.

6.1 O Equilíbrio das Regiões Centrais

A nossa análise do PF pressupõe o equilíbrio *global* dos produtos de fusão, o que, como já discutimos no Capítulo 2, é obviamente verdadeiro. No entanto, os observáveis com os quais o PF é descrito se referem sobretudo à região *central* ($r \leq r_e$) das galáxias, e não necessariamente à sua estrutura global. A esperada correlação entre as três quantidades observacionais que definem o PF é fundamentada na hipótese de que, uma vez estando o sistema como um todo em equilíbrio virial, a região central do sistema a qual se referem estas medidas também deverá estar. É conveniente então reexaminarmos a questão a partir das condições de equilíbrio da região central propriamente dita.

Analisaremos a condição de equilíbrio da região central, a partir do coeficiente virial *local*, $(2K/W)_{r \leq r_e}$, onde K e W são, respectivamente, as energias cinética e potencial total das partículas na região central, $r \leq r_e$. Lembremos que, para este caso, W contém a contribuição da energia potencial própria das partículas em $r \leq r_e$ (W_{ee}) e a energia potencial de interação com as partículas externas (W_{ex}), isto é, $W = W_{ee} + W_{ex}$. Notemos de passagem que, embora essencial, este segundo termo é frequentemente desprezado nas análises (e.g., McLaughlin 2000 Aceves e Perea 1999).

De fato, uma extensão deste problema aos modelos com duas componentes não pode ser desprezada, uma vez que a presença do halo deverá alterar sobremaneira a equação virial em sua forma mais estrita, que é a que temos considerado até então nesta tese (c.f. Eq. (1.1)). Tendo em vista a importância desta questão, aliada aos nossos resultados anteriores (c.f. Capítulo 3), onde verificamos que as partes luminosas centrais dos modelos com duas componentes desviam-se de forma significativa

tanto das previsões do teorema do virial para sistemas homólogos quanto do PF das elípticas, dedicaremos um capítulo desta tese (c.f. Capítulo 7) exclusivamente para abordar esta questão. Assim, analisaremos nesta seção apenas os modelos com uma componente, embora retornemos à análise destas simulações em outras seções deste capítulo.

Na Fig. 6.1, apresentamos a quantidade $\epsilon_{vir} \equiv 2K/W + 1$, calculado na região central ($r \leq r_e$) para todos os modelos simulados finais com uma componente¹, como função do raio efetivo. Uma região inteiramente virializada seria dada portanto por $\epsilon_{vir} = 0$. No painel de cima desta figura, são apresentados os resultados para os colapsos, e no de baixo, para as fusões de Hernquist a uma componente. Os resultados mostram que os valores centrais não diferem significativamente de 0 (desviam-se, no máximo, em $\sim 8\%$). Estas regiões centrais parecem obedecer aproximadamente ao teorema do virial em sua forma mais estrita. Estes resultados estão livres de efeitos de projeção, e mostram que os modelos estão centralmente em equilíbrio virial.

Evidentemente, podemos nos indagar por que as regiões centrais destes modelos não obedecem *exatamente* ao teorema do virial, havendo essencialmente um excesso em $\sim 8\%$ do valor previsto. Uma explicação provável seria que haveria uma necessidade de incluirmos o *termo de pressão* ao teorema do virial (c.f. B&T87). Em outras palavras, o teorema do virial para sistemas estacionários, numa forma mais geral, deve levar em conta dois termos: o potencial de interação das regiões externas à examinada e o termo de pressão. O primeiro foi considerado nesta análise, como já explicado acima, e será revisitado mais profundamente no Capítulo 7, para o caso de sistemas com duas componentes. Podemos, entretanto, inferir que se o percentual encontrado acima ($\sim 8\%$) fosse inteiramente corrigido pelo termo de pressão, este é exatamente o fator que estamos desprezando em nossas análises.

6.2 Revisitando os Produtos Finais no Espaço do PF

6.2.1 Recapitulação dos Resultados para Fenda de Dimensões $[0, 2 r_e \times 0, 2 r_e]$

Observamos anteriormente que as fusões de Hernquist com uma componente reproduzem razoavelmente a inclinação do PF das elípticas. Este é um resultado importante. De fato, CdCC95 já haviam mostrado que modelos de King com diferentes potenciais centrais - portanto com diferentes graus de concentração, c - reproduzem igualmente a inclinação do PF. Os modelos de Hernquist, por outro lado, diferem

¹No caso dos colapsos C, iremos nos limitar aos modelos com $n = 1$, que representam o desvio mais significativo da homologia para os casos mais “frios”, segundo os resultados obtidos anteriormente (c.f. Capítulo 4).

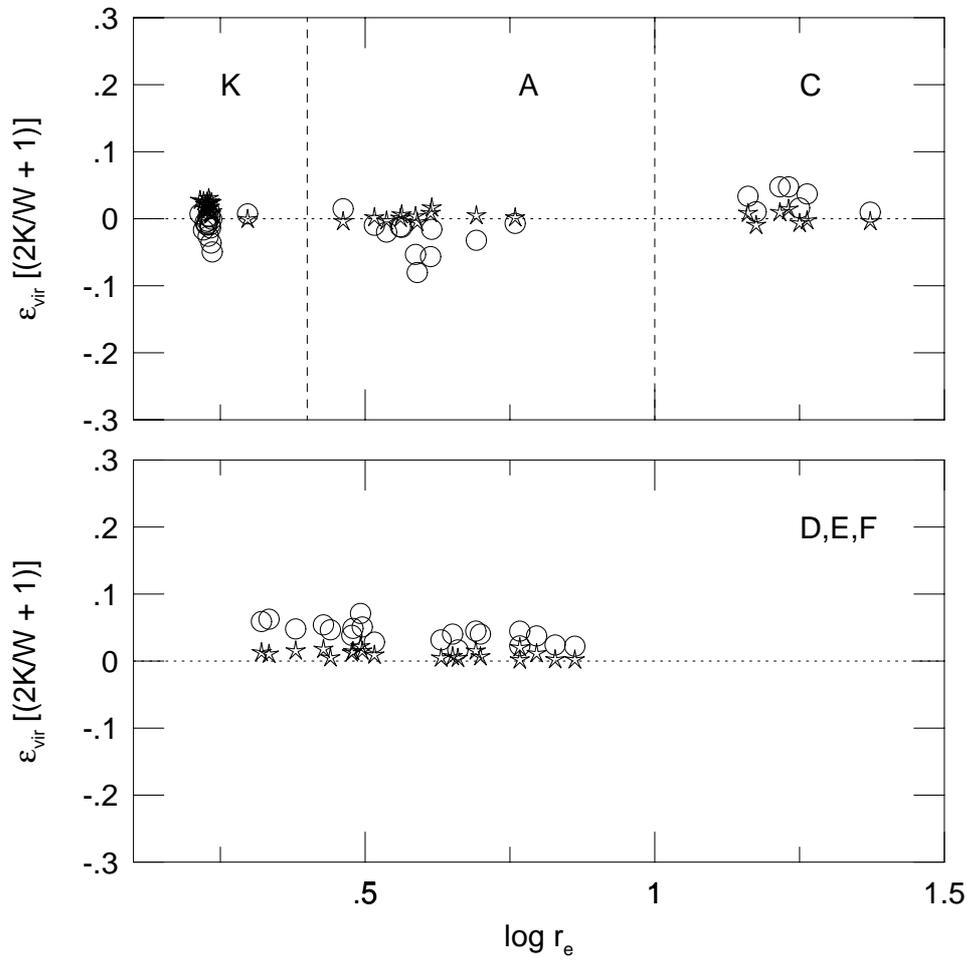


FIG. 6.1: Coeficiente virial local no interior de uma esfera de raio r_e (símbolo: círculo aberto), para cada modelo simulado final, e o coeficiente virial para os modelos como um todo (símbolo: estrela). No painel de cima, são apresentados estes resultados para os colapsos, e no de baixo, para as fusões de Hernquist a uma componente (modelos D, E e F).

radicalmente dos modelos de King, pois centralmente apresentam lei de potência para o perfil de densidade de massa ($\rho(r) \sim r^{-4}$ para $r \rightarrow 0$). Portanto, este efeito parece ser independente do modelo inicial para fusão. Vimos também que os modelos colapsados, ao contrário, não reproduzem no geral as características do PF.

6.2.2 O Desvio de Homologia Visto Através dos Coeficientes C_r, C_v

Vimos no Capítulo 1 (seção 1.2.1) como o PF pode ser entendido como um desvio sistemático da homologia, refletida na expressão do teorema do virial a partir das quantidades observadas, através dos coeficientes estruturais e cinemáticos C_r, C_v e C_{vir} , definidos pelas Eqs. (1.4), (1.5) e (1.9), respectivamente. Isto é possível porque, naturalmente, nossas simulações assumem que a razão massa luminosidade (M/L) das galáxias é constante, independente de sua massa.

Na Fig. 6.2 apresentamos uma visão geral do espaço dos coeficientes estruturais e cinemáticos para todos os modelos simulados, incluindo os progenitores, como indicado na figura. Na Figs. 6.3 (colapsos) e 6.4 (fusões) apresentamos estes coeficientes como função das condições iniciais. Notemos que no caso dos modelos com duas componentes, o raio gravitacional envolvido na equação que define C_r (c.f. Eqs. (1.3) e (1.4)) é calculado a partir da energia potencial gravitacional *total*, ou seja, considerando as duas componentes juntas, sem distinção. O mesmo se aplica para $\langle v^2 \rangle$ (c.f. Eq. (1.5)), i.e., é calculado a partir da energia cinética total. Entretanto, σ_0^2 e r_e são os valores da parte visível.

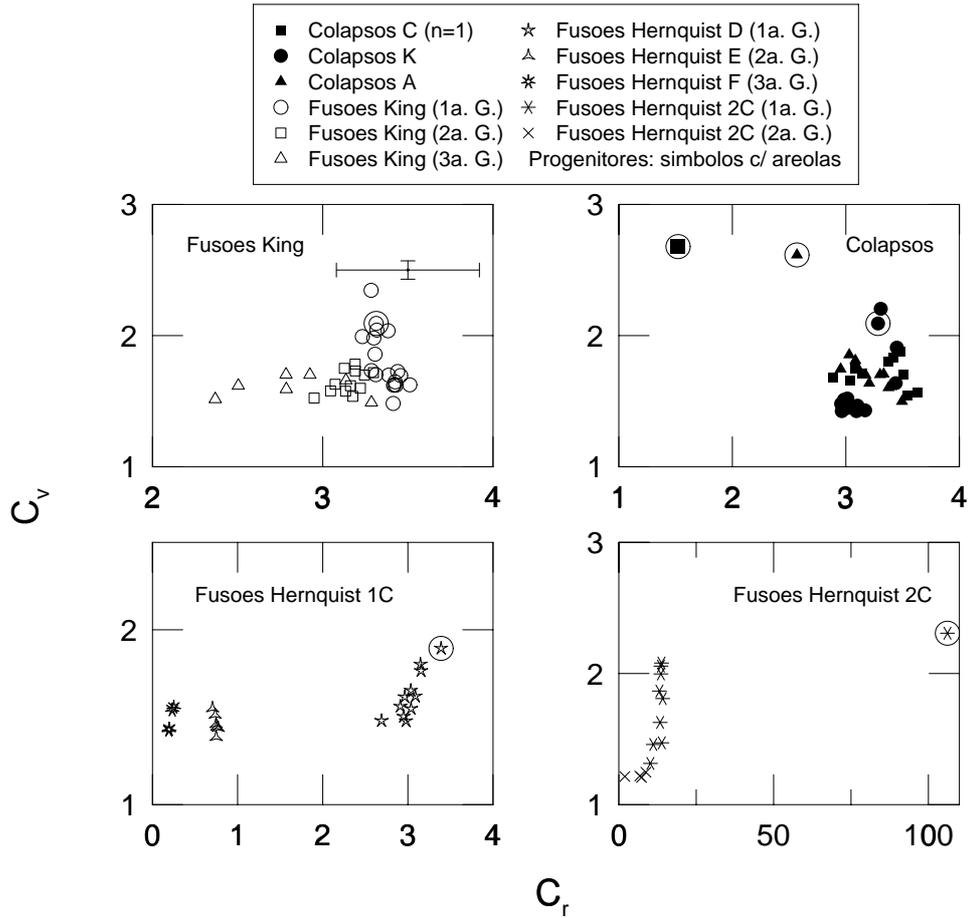


FIG. 6.2: Espaço dos parâmetros $C_r \times C_v$ para todas as simulações. As barras de erro combinadas de todos os modelos está representada no painel superior esquerdo. Os símbolos cercados por areólas apontam os progenitores (no caso de fusões) ou os modelos iniciais não-perturbados (no caso de colapsos).

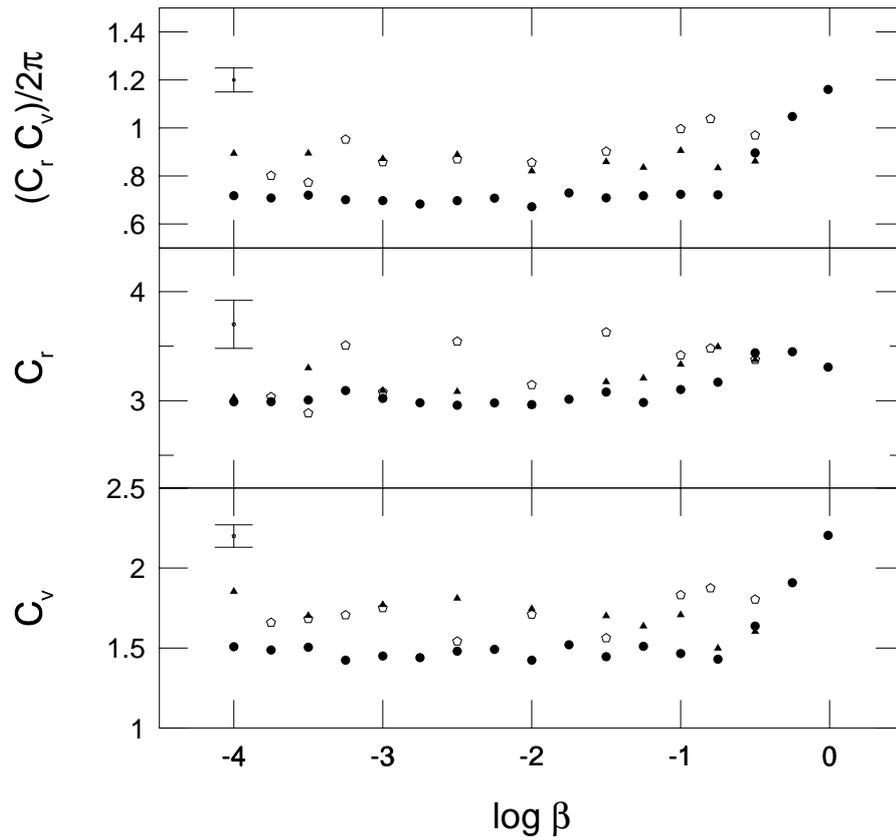


FIG. 6.3: Espaço dos parâmetros C_r e C_v para todas as simulações de colapsos em função das condições iniciais. Círculos cheios: modelos K; triângulos: modelos A; e círculos vazios: modelos C ($n = 1$).

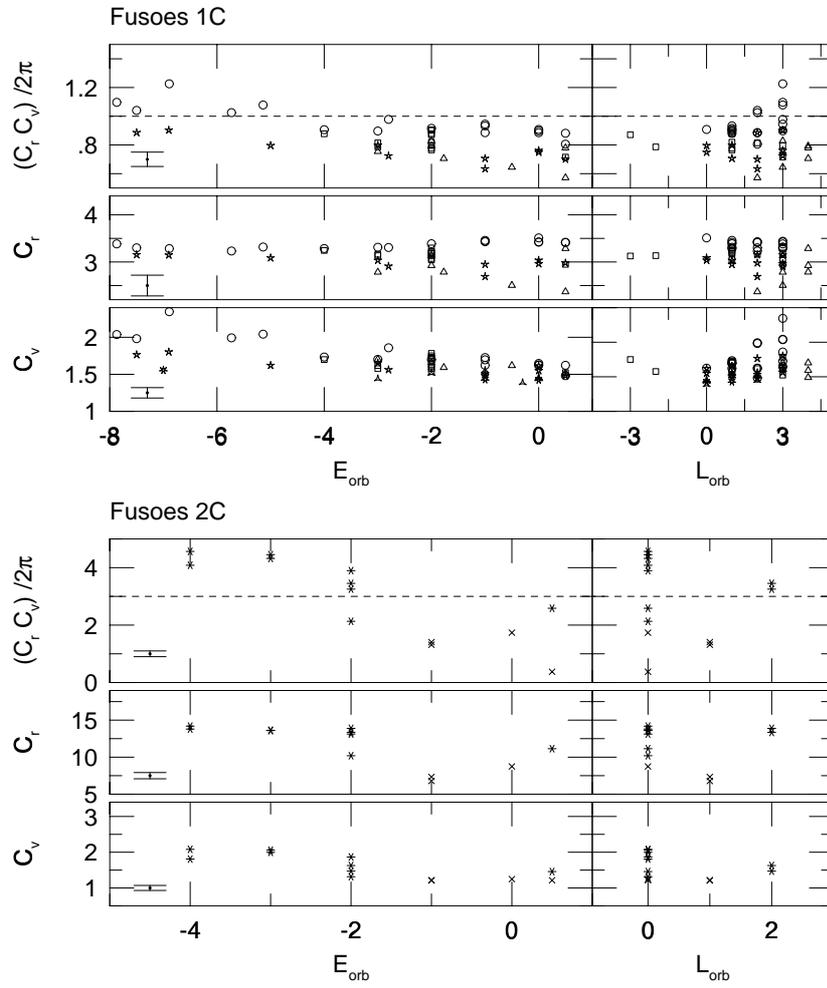


FIG. 6.4: Espaço dos parâmetros C_r e C_v para todas as simulações de fusões em função das condições iniciais. Os símbolos são os mesmos da Fig. 6.2.

No caso dos colapsos, encontramos que de fato os modelos K e A são aproximadamente homólogos entre si, uma vez que os coeficientes viriais C_r e C_v não variam consideravelmente. Quaisquer não-homologias presentes são devidas à presença dos colapsos mais “quentes”. Por outro lado, os modelos C ($n = 1$) podem ser também interpretados como objetos homólogos no geral, porém os coeficientes viriais apresentam um certo ruído ao considerarmos a família de colapsos mais “frios”, o que é compatível com o já visto anteriormente a partir do espaço dos parâmetros do PF.

Os coeficientes C_r e C_v diferem de forma sistemática entre os produtos de fusão com uma componente, e, ainda, torna-se aparente, neste caso, a não-homologia central como função da energia orbital inicial do par, em concordância com os resultados de CdCC95. Estes resultados são também condizentes com os derivados a partir do espaço do PF. As fusões com duas componentes apresentam grande desvio de homologia, tal como já verificado anteriormente. O desvio de homologia como função da energia orbital inicial do par também ocorre no mesmo sentido dos modelos com uma componente.

Em sua análise acerca das correlações resultantes do PF para galáxias elípticas *reais*, Bender, Burstein e Faber 1992 consideram a possibilidade de que o PF seria produzido pela variação sistemática da razão M/L ($M/L \propto M^{1/6}$, c.f. discussão do Capítulo 1). Estes autores partem da hipótese de que as galáxias elípticas - desde as anãs até as gigantes - seriam bem representadas por modelos de King de índices de concentração, $\log r_t/r_c$ (c.f. Apêndice B), variando entre ~ 1 (anãs) até $\sim 2,5$ (gigantes). Disto resultam coeficientes estruturais $C_{vir} \equiv \frac{C_r C_v}{2\pi}$ que variam por pequenos fatores ($\lesssim 1,3$), o que seria insuficiente para explicar o grande intervalo em que as correlações são observadas. Por outro lado, como se pode observar nas Figs. 6.2-6.4, os produtos de fusões possuem coeficientes estruturais variando por fatores maiores (~ 2), o que equivale exatamente ao intervalo de variação da razão M/L pretendida por Bender, Burstein e Faber 1992. Como já mencionamos anteriormente (c.f. Capítulo 5), as fusões não-dissipativas de CdCC95 são bem representados por modelos de Sersic não-homólogos (devido à variações do índice n do modelo de Sersic). Além disso, vários trabalhos recentes vêm demonstrando que as galáxias elípticas são, igualmente, melhor representadas por este modelo (Caon et al. 1993, Graham e Colless 1997, Lima Neto et al. 1999).

6.2.3 Resultados para Fenda de Dimensões Superiores à $[0, 2 r_e \times 0, 2 r_e]$

Para entendermos se o efeito do tamanho da fenda é significativo no que tange os resultados anteriores, obtivemos as medidas do PF, para alguns exemplos de modelos, utilizando diferentes dimensões da fenda (L_{fenda}): $[2 r_e \times 2 r_e]$, $[10 r_e \times 10 r_e]$, $[100 r_e \times 100 r_e]$. Os outros parâmetros foram mantidos os mesmos. Na Fig. 6.5, resumimos esta análise apresentando $\log(L_{fenda}/r_e)$ *versus* inclinação do PF (que

denominamos α , c.f. Capítulo 3). Nesta figura, a linha pontilhada significa homologia entre os sistemas e a linha tracejada indica o valor de α para o FP observado das galáxias elípticas (e.g. Pahre, Djorgovski e de Carvalho 1995).

Vemos por esta figura que os colapsos se mantêm razoavelmente homólogos tanto central como globalmente. As fusões a uma componente (King e Hernquist), no limite de grandes larguras de fenda, tendem a um mesmo valor de α , compatíveis, porém de forma ainda marginal, com o esperado para homologia. Para fusões com duas componentes, analisamos apenas a componente luminosa. Estes modelos não atingem o valor esperado para homologia nem mesmo no limite onde a dispersão de velocidades é medida praticamente para o sistema luminoso inteiro.

Estes resultados demonstram que a não-homologia *observada* nas fusões com uma e duas componentes deve ser de origem central, como já notado por CdCC95, uma vez que o efeito de aumentar a fenda é no sentido dos modelos se aproximarem da homologia. Porém, ressaltamos que ainda ao se utilizar uma fenda que engloba praticamente o sistema inteiro, os modelos resultantes de fusão não recuperam inteiramente a inclinação prevista pelo teorema do virial para sistemas homólogos. Esta discrepância continua sendo bastante clara em particular no caso das fusões com duas componentes (parte luminosa).

6.2.4 Utilizando a Dispersão de Velocidades Tri-Dimensional

As Figs. 6.3-6.4 sugerem que, pelo menos no caso de fusões, desvios de homologia cinemática - traduzidos pelo coeficiente C_v - seriam os mais significativos. Isto parece ser corroborado pela discussão acima à respeito do efeito sobre a homologia devido ao tamanho da fenda utilizada na medida de dispersão central de velocidades. Assim, à medida em que os efeitos da região central projetada são “diluídos” em fendas maiores, a homologia entre os produtos finais pode ser recuperada em parte.

Para examinar a importância dos efeitos de projeção na inclinação projetada do PF das nossas simulações, realizamos o seguinte teste (mantendo as mesmas variáveis anteriores: raio efetivo e brilho superficial efetivo): examinar as correlações do PF, substituindo σ_0 pela dispersão de velocidades tridimensional no interior de r_e :

$$\sigma_{3D} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle v^2 \rangle_{r < r_e}^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

Procuramos com isto isolar o efeito da fenda sobre os resultados anteriores do PF, usando agora uma quantidade efetivamente representativa da dispersão de velocidades central ($r \leq r_e$).

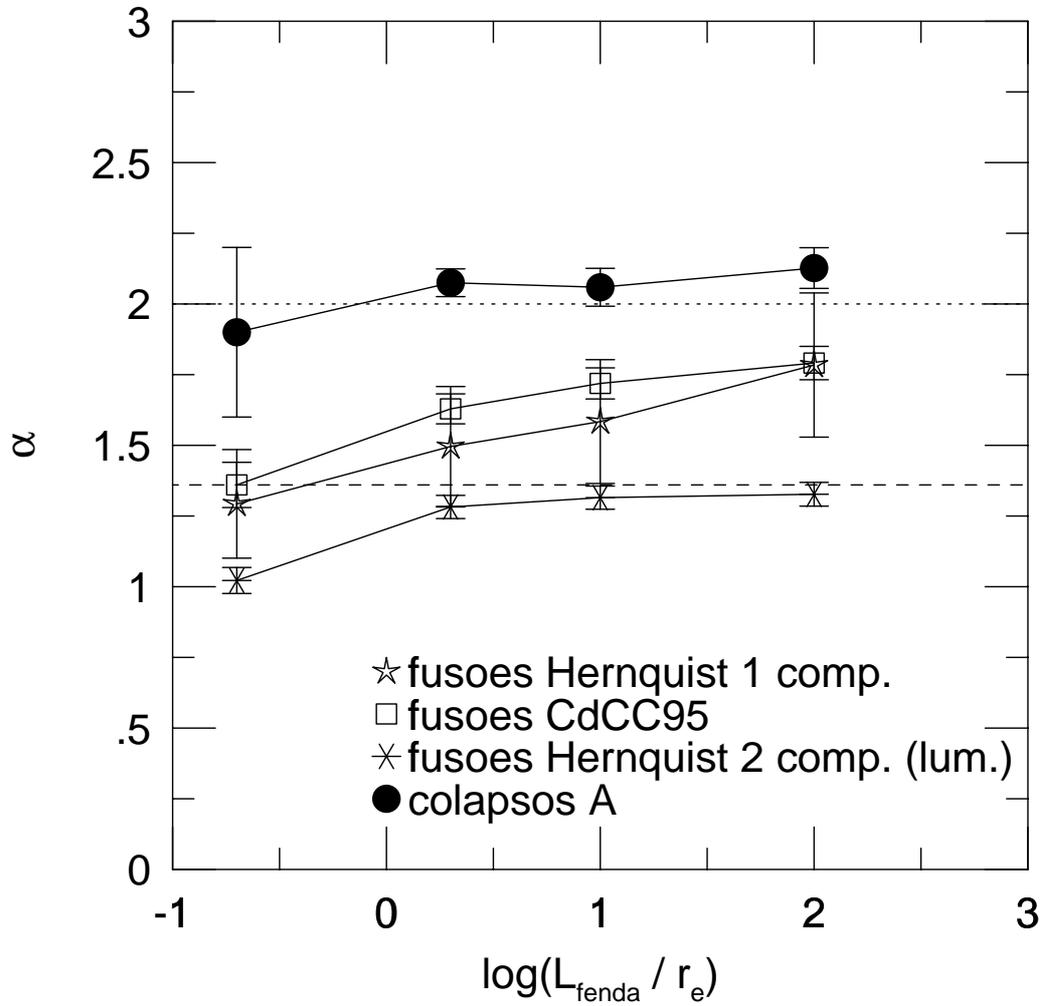


FIG. 6.5: Valores das inclinações (α) das relações de escala dos modelos simulados, resultantes do uso de diversas fendas para a medida da dispersão de velocidades central. A linha pontilhada marca o valor previsto pelo teorema do virial aplicado à sistemas homólogos. A linha tracejada aponta o valor de α do PF das galáxias elípticas (c.f. Pahre, Djorgovski e de Carvalho 1998).

Os resultados de ajuste mostram que a inclinação do FP para os modelos A é agora de $2,404 \pm 0,403$, e para os modelos C ($n = 1$), de $2,324 \pm 0,158$. Um ajuste conjunto destes modelos fornece $2,084 \pm 0,044$. Os modelos K novamente não foram ajustados pelo fato de formarem um aglomerado coeso de pontos. Para fusões com uma componente, o ajuste nos fornece de $1,597 \pm 0,106$, o que melhora marginalmente a condição no sentido de se aproximar da homologia, porém ainda definindo um PF, este ligeiramente menos inclinado do que o observado das elípticas. Ou seja, os colapsos parecem ser de fato objetos homólogos, porém ainda resta uma não-homologia nas fusões ao usarmos o σ_{3D} ao invés do σ_0 . No entanto, ressaltamos que com este teste estabelecemos que *embora a fenda pareça acentuar o desvio de homologia*, o resultado final é que os modelos continuam reproduzindo um PF similar ao de elípticas. Algo similar ocorre para os modelos com duas componentes: o novo ajuste para a parte luminosa é de $1,204 \pm 0,058$. Na Tabela 6.1, resumimos estes resultados.

TABELA 6.1: AJUSTE DA INCLINAÇÃO DO PF: UTILIZANDO A DISPERSÃO DE VELOCIDADES 3D

MODELO	$\alpha \pm d\alpha$
Colapsos A	$\alpha = 2,404 \pm 0,403$
Colapsos C ($n = 1$)	$\alpha = 2,324 \pm 0,158$
Fusões D, E, F	$\alpha = 1,597 \pm 0,106$
Fusões Z (comp. luminosa)	$\alpha = 1,204 \pm 0,058$

6.2.5 O Efeito da Fenda

A seção anterior mostra evidências de que a fenda pode acentuar a não-homologia, embora de forma pouco significativa. Nesta seção procuramos entender este fato.

Reproduzimos a Fig. 6.1, apresentada no início deste capítulo, sobrepondo aos resultados de ϵ_{vir} daquela figura, os resultados derivados, ao invés da medida direta (tridimensional) das velocidades para o cálculo da energia cinética K , o valor de $K = \frac{1}{2}M(r < r_e)\sigma_0^2$ (fenda com dimensões $0,2 r_e$). O resultado se encontra na Fig. 6.6.

Vemos que o valor de σ_0 não é satisfatoriamente representativo para se calcular o $(2K/W)_{r < r_e}$, pois a energia cinética assim derivada (viz. partindo do σ_0) resulta num valor de $(2K/W)_{r < r_e}$ que se desvia do resultado esperado ($\epsilon_{vir} \sim 0$). No caso das fusões, este efeito parece ter dependência com o raio efetivo. Isto é compatível com

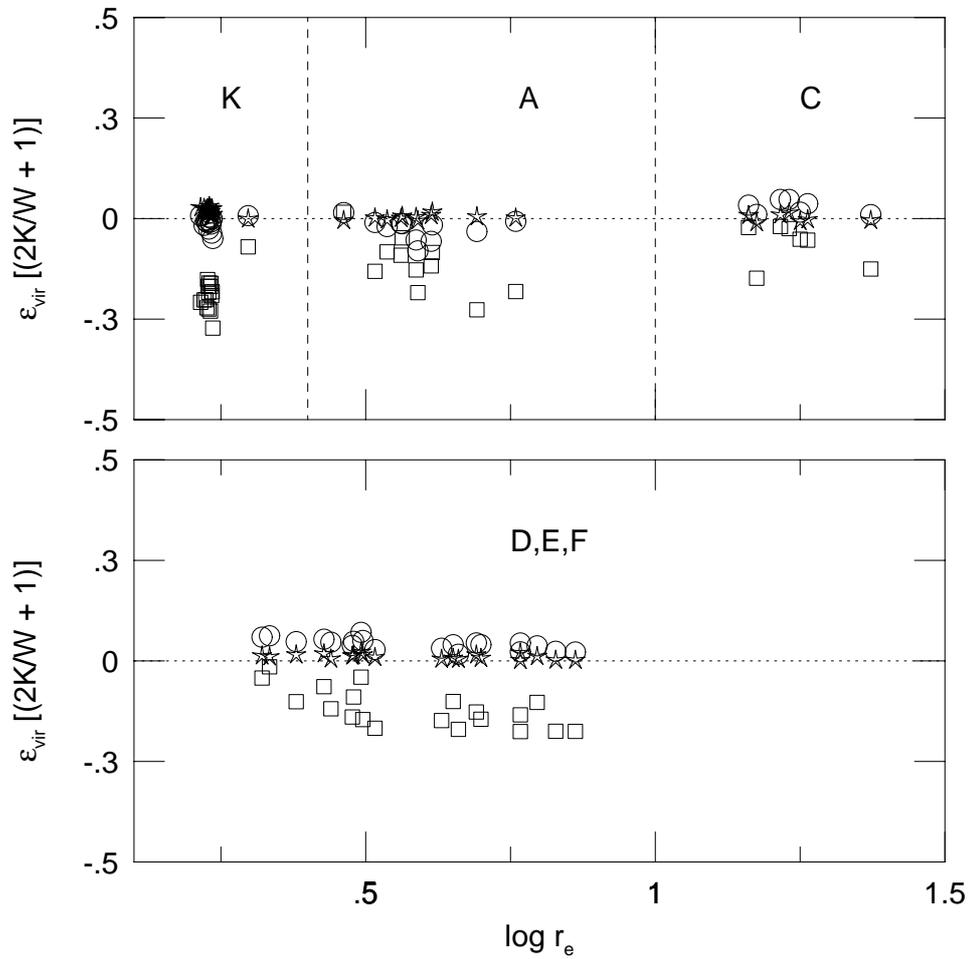


FIG. 6.6: Medida do coeficiente virial local como função do r_e , usando, ao invés da medida direta das velocidades para o cálculo da energia cinética K (círculos), o valor de σ_0 das velocidades dentro da fenda com dimensões $0, 2 r_e$ (quadrados). Os símbolos estelares marcam o coeficiente virial do sistema inteiro.

a pequena diferença entre a inclinação do FP utilizando o σ_0 ($\alpha = 1,414 \pm 0,132$) e aquele utilizando o σ_{3D} ($\alpha = 1,597 \pm 0,106$), tal como encontrado na seção anterior. Assim, objetos menos concentrados (r_e maior) produzem um σ_0 que desvia mais do σ_{3D} . Ao utilizarmos para o cômputo de σ_0 todas as partículas que se encontram projetadas na fenda, estamos na verdade utilizando um paralelepípedo projetado no sistema, varrendo-o de um lado ao outro, passando pela região central. Se o sistema for muito concentrado ao centro, de forma a ter um r_e pequeno, o paralelepípedo será bastante estreito (a fenda é uma fração do r_e , logo, função do r_e). Se o sistema for mais diluído, de forma a ter um r_e grande, o paralelepípedo será maior. No primeiro caso, o número de partículas além de r_e contribuindo para o cômputo de σ_0 - portanto espúrias - será menor do que no segundo caso, efeito que se acentua se os objetos forem intrinsecamente não-homólogos.

Nos colapsos, o efeito resultante de se utilizar o σ_0 para a medida de $(2K/W)_{r < r_e}$ parece ser menos problemático, pois o $(2K/W)_{r < r_e}$ medido assim não varia significativamente com o r_e (exceto, talvez, para os modelos A e C, de acordo com uma inspeção da Fig. 6.6). Decerto que se desviam dos valores esperados, porém o coeficiente virial local resultante é aproximadamente constante e não deverá afetar severamente as relações de homologia deduzidas das análises anteriores.

Concluimos portanto que há de fato uma diferença, no sentido de acentuar a não-homologia dos modelos de fusão, resultante do efeito de se medir a dispersão central de velocidades através de uma fenda e tomar esta medida como representativa da região central. Porém, como visto anteriormente, esta diferença não é suficiente para explicar inteiramente a não-homologia destes modelos.

6.3 Revisitando os Produtos Finais no Espaço κ

Bender, Burstein e Faber 1992 introduziram o conceito do “espaço- κ ” cujas coordenadas são definidas a partir de uma transformação ortogonal das variáveis originais do PF: σ_0 , I_e e r_e . A transformação escolhida é tal que as coordenadas transformadas, κ_1 , κ_2 e κ_3 , têm significado físico simples, e, ainda, é tal que o PF é visto inteiramente de perfil no plano projetado $\kappa_1 \times \kappa_3$, e visto aproximadamente “de cima” (“face-on”) no plano projetado $\kappa_1 \times \kappa_2$. Burstein et al. 1997 (de agora em diante, BBFN97) estudaram extensivamente sistemas estelares auto-gravitantes, desde aglomerados globulares até aglomerados de galáxias, utilizando o espaço- κ , e concluíram que estes objetos compõem como um todo um “Meta-Plano” fundamental (de agora em diante, MPF). Analisaremos o MPF mais profundamente no Capítulo 7.

As coordenadas κ são definidas por:

$$\kappa_1 \equiv (\log \sigma_0^2 + \log r_e)/\sqrt{2} \quad (6.2)$$

$$\kappa_2 \equiv (\log \sigma_0^2 + 2 \log I_e - \log r_e)/\sqrt{6} \quad (6.3)$$

$$\kappa_3 \equiv (\log \sigma_0^2 - \log I_e - \log r_e)/\sqrt{3} \quad (6.4)$$

Inserindo as Eqs.(1.2), (1.4), (1.5) e (1.6) nas relações acima, pode-se mostrar que:

$$\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\log M - \log C_r C_v) \quad (6.5)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\log 2\pi - \log C_r C_v + \log \frac{M}{L} + 3 \log I_e) \quad (6.6)$$

$$\kappa_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\log 2\pi - \log C_r C_v + \log \frac{M}{L}) \quad (6.7)$$

Assim, Bender, Burstein e Faber 1992 encontram que o PF das elípticas do aglomerado de Virgo segue no espaço- κ a relação:

$$\kappa_3 = 0, 15\kappa_1 + 0, 36. \quad (6.8)$$

Mais uma vez, temos duas interpretações básicas para este resultado: se assumirmos que os coeficientes estruturais e cinemáticos C_r e C_v são constantes entre as galáxias, encontramos das relações acima que $\kappa_1 \propto \log M$ e $\kappa_3 \propto \log(M/L)$, de forma que recuperamos $M/L \propto M^{0,15}$, que é uma das interpretações já discutidas na Introdução. Por outro lado, podemos admitir a possibilidade de que a explicação para o PF seria que a razão M/L é constante e que os coeficientes C_r e C_v é que variam entre as galáxias de diferentes massas.

Há ainda alguns aspectos peculiares que devemos ter em mente ao estudarmos os sistemas estelares no espaço- κ . Por exemplo, sistemas homólogos (C_r e C_v constantes) e com razões M/L constantes terão sua variável κ_3 constante, de forma que objetos virializados apresentando este comportamento seriam bem ajustados no plano $\kappa_1 \times \kappa_3$ por uma reta horizontal, paralela à κ_1 (este é o caso de sistemas homólogos

virializados, com inclinação $\alpha = 2$ no espaço das variáveis do PF). Sistemas com mesma massa M e com mesma razão M/L , porém admitindo variação dos coeficientes C_r e C_v , apresentarão a relação $\kappa_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa_1 + C \sim 0,82\kappa_1 + C$ onde C é uma constante, independente dos coeficientes C_r e C_v . Evidentemente, se neste caso os coeficientes viriais forem também constantes, todos os sistemas se degenerariam num único ponto no plano $\kappa_1 \times \kappa_3$. Na Tabela 6.2 resumimos estas possibilidades.

TABELA 6.2: ASPECTOS DOS SISTEMAS ESTELARES NO PLANO $\kappa_1 \times \kappa_3$

M/L	C_r, C_v	M	κ_3	Interpretação
$\propto M^{0,15}$	constante	variável	$0,15\kappa_1 + 0,36$	PF: M/L variável, homólogos
constante	variável	variável	$0,15\kappa_1 + 0,36$	PF: não-homólogos, M/L cte.
constante	constante	variável	constante	Reta horizontal paralela à κ_1 : homólogos, M/L cte.
constante	variável	constante	$\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa_1 + cte$	Inclinação de $\sim 0,82$: não-homólogos, M/L cte., M cte.
constante	constante	constante	constante	Ponto: homólogos, M/L cte., M cte.

Na Fig. 6.7 apresentamos os modelos simulados no espaço- κ . Os dados de BBFN97 para galáxias elípticas do aglomerado de Virgo e de Coma são apresentados na mesma figura. A linha reta no plano $\kappa_1 \times \kappa_3$ representa a relação (6.8), que é o PF visto no espaço- κ . Note, entretanto, que as relações de escala dos colapsos e fusões não se apresentarão perfeitamente de perfil no plano $\kappa_1 \times \kappa_3$, sendo portanto projeções neste plano.

No plano $\kappa_1 \times \kappa_3$, as simulações parecem “estratificadas” em alinhamentos distintos. Isto pode ser visto mais claramente para o caso de fusões com duas componentes, onde as duas gerações se encontram distintamente separadas em dois alinhamentos inclinados. As outras simulações apresentam o mesmo comportamento: na Fig. 6.8 apresentamos uma ampliação da figura anterior, mostrando as fusões de Hernquist com uma e duas componentes. Estes alinhamentos distintos ocorrem naturalmente em nossas simulações por pelo menos duas razões:

1. Devido ao fato do eixo κ_1 representar massa, e um objeto de uma dada geração n terá massa maior por um fator 2^n relativamente ao progenitor. Logo, gerações diferentes terão valores de κ_1 diferentes, e se destacarão discretamente como função de κ_1 .
2. Os alinhamentos se formam porque os objetos são não-homólogos, com M/L constante e M constante (c.f. Tabela 6.2, quarta linha). Alguns aspectos neste caso são observados:
 - a. Os alinhamentos são mais “perfeitos” na primeira geração e vão se tornando mais “tortuosos” nas gerações seguintes, na medida em que os objetos são resultantes de fusões anteriores onde a perda de massa por “escapers”

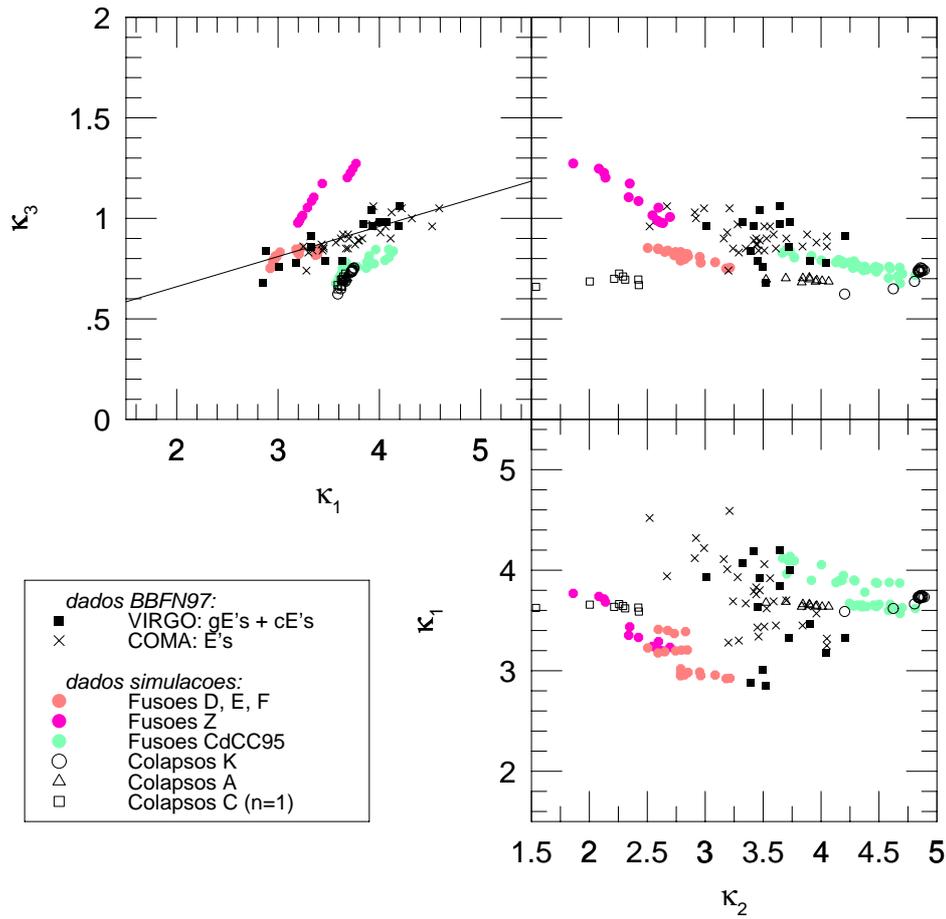


FIG. 6.7: Resultado das simulações no espaço- κ . A linha reta apresenta o ajuste para as galáxias elípticas de Virgo, segundo Bender, Burstein e Faber 1992.

variou de objeto para objeto, resultando em sistemas de massas ligeiramente diferentes.

b. A amplitude do alinhamento está correlacionada com as energias orbitais iniciais dos modelos, tal que quanto mais negativa a energia orbital, menor será o κ_1 e κ_3 do modelo. Isto é condizente com o que encontramos anteriormente, ou seja, de que a não-homologia é função da energia orbital inicial dos pares.

c. A inclinação destes alinhamentos distintos é de $\sim 0,84$, compatível como previsto acima ($\sim 0,82$).

Retornando à Fig. 6.7, notamos que os colapsos ficam bastante confinados numa região limitada de κ_1 e κ_3 e apenas se separam em κ_2 . Isto também é natural tendo em vista que estes objetos tem mesma massa, mesmo M/L e são aproximadamente homólogos (c.f. Tabela 6.2, quinta linha). Notamos, de passagem, que no plano $\kappa_1 \times \kappa_2$, os colapsos K estão próximos das fusões de King de CdCC95, e os colapsos C ($n = 1$) parecem mais próximos das fusões de Hernquist.

A análise das simulações no espaço- κ portanto nos revela vários aspectos que ficam ocultos quando as simulações são vistas apenas no espaço dos parâmetros do PF. Primeiro, notamos que o ajuste das fusões no plano $\kappa_1 \times \kappa_3$ fica prejudicado pois nossa amostragem em massa (κ_1) é bastante limitada: os colapsos possuem massa única, com pequenas diferenças devido aos “escapers”; as fusões com uma componente possuem três gerações e conseqüentemente uma amostragem em três escalas de massas distintas (também com pequenas diferenças devido aos “escapers”); e o pior caso é o das fusões com duas componentes, onde apenas duas gerações - e conseqüentemente duas escalas de massa - estão representadas. Segundo, a partir da visualização das simulações no espaço- κ , é possível extraírmos uma prescrição natural para o espalhamento em torno no PF (definido no plano $\kappa_1 \times \kappa_3$): estaria correlacionado à própria energia orbital inicial dos pares.

Apesar da nossa sub-amostragem tanto em massa quanto em energias orbitais, um “ajuste” bastante grosseiro pode ser tentado para as fusões no plano $\kappa_1 \times \kappa_3$. Primeiro, identificamos a fusão de primeira geração com menor par $[\kappa_1, \kappa_3]$ e a fusão de terceira geração (ou de segunda no caso das fusões com duas componentes) também de menor par $[\kappa_1, \kappa_3]$, e traçamos uma reta ligando estes dois pontos. A inclinação desta reta nos fornece um “ajuste” (c.f. Fig. 6.8). Evidentemente, não sabemos como seria preenchido o espaço entre a primeira e última geração aqui simuladas caso tivéssemos uma maior amostragem em massa. Porém parece natural considerarmos que este universo de simulações que estão faltando preencheria basicamente o espaço acima desta reta, e o espalhamento seria preenchido até uma certa altura em κ_3 , paralelo à esta reta. Esta consideração é razoável, embora um pouco frágil, uma vez que as energias orbitais mínimas usadas na primeira geração

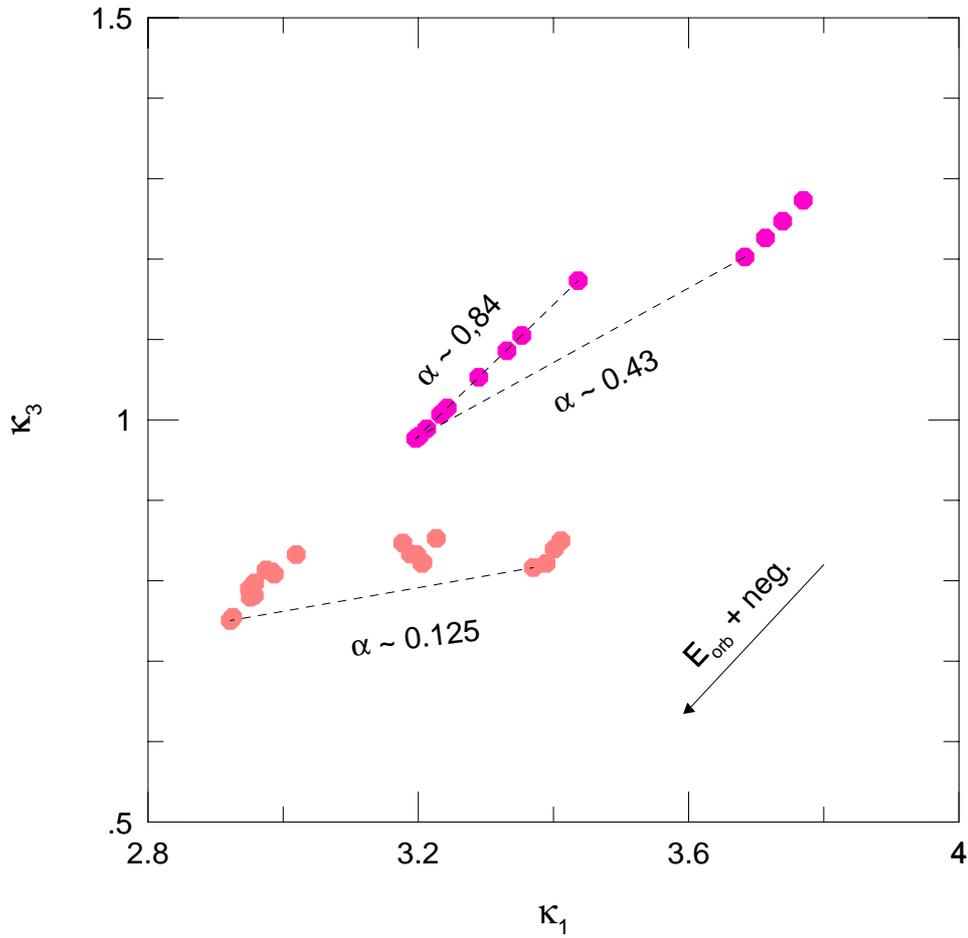


FIG. 6.8: Ampliação da figura anterior para o plano-projetado $\kappa_1 \times \kappa_3$, onde apresentamos apenas as fusões de Hernquist com uma e duas componentes. A inclinação dos “filamentos” é indicada, assim como a direção onde a energia orbital inicial é mais negativa.

($E_{orb,min} = -7,5$ para o modelo D04) e terceira geração ($E_{orb,min} = -10$ para o modelo F03) diferem em $\sim 25\%$. Estas considerações ficam é claro mais debilitadas para o caso das fusões com duas componentes (onde as energias mínimas da primeira e segunda gerações diferem em $\sim 50\%$).

Como não temos como checar as considerações acima feitas diretamente a não ser realizando mais simulações, reunimos aqui apenas os resultados qualitativos destes “ajustes” (c.f. Fig. 6.8), assumindo que nossas considerações são aproximadamente válidas. Assim, obtivemos que simulações de fusão com uma componente seguem uma inclinação similar à das elípticas: $\kappa_3 \sim 0,125\kappa_1 + C$. Já as fusões com duas componentes se desviam desta relação, com $\kappa_3 \sim 0,43\kappa_1 + C$. Não oferecemos até então maiores explicações sobre esta significativa inclinação da relação de escalas das fusões com duas componentes relativamente ao PF. Já comentamos que é necessário revermos as condições de equilíbrio virial no caso onde o sistema é composto por duas componentes. Como já também comentado, isto será visto com mais profundidade no Capítulo 7. Aqui comentamos apenas de passagem que a inclinação $\kappa_3/\kappa_1 \sim 0,43$ obtida acima pode ser compreendida, ou melhor, é compatível com a análise a ser abordada naquele capítulo.

6.4 O Efeito de Maré sobre a Não-Homologia Central

Verificamos anteriormente que a não-homologia central dos produtos de fusão tem uma dependência com a energia orbital inicial do par. Vimos também que uma comparação entre colapsos e fusões demonstra que suas propriedades dinâmico-estruturais assim como suas histórias em direção à relaxação podem ser variadas e não fornecem informações claras e diretas de como esta não-homologia surge. Por outro lado, não é completamente descartável a possibilidade de que o *efeito de maré* possa contribuir seletivamente, no sentido de resultar numa não-homologia cinemático-estrutural como função da energia orbital inicial dos pares. De fato, as perturbações de maré mais intensas se dão no caso de encontros rápidos, o que qualitativamente apontam na direção de que as fusões com energias orbitais mais negativas serão as mais profundamente afetadas por este mecanismo (e.g. Gnedin, Hernquist e Ostriker 1997). Alguns testes preliminares foram desenvolvidos neste sentido, que discutiremos a seguir.

Já comentamos que a fusão de sistemas estelares ocorre devido à transferência da energia orbital do par para os sistemas estelares como um todo. O mecanismo pelo qual isto se dá são as interações de maré que levam a um aumento da energia interna dos sistemas, às custas da energia orbital. A questão que procuramos levantar, no que tange a relação deste mecanismo com a não-homologia central dos modelos finais, é se a energia cinética interior a um dado raio r (i.e., $K_{tot}(< r)$) é similar ou

não entre os modelos finais de equilíbrio.

Esperamos, em primeiro lugar, que sistemas não-homólogos tenham $K_{tot}(< r)$ diferentes. Em outras palavras, se o efeito de maré provoca a não-homologia, estamos supondo que *a transferência da energia orbital para as partículas dos par inicial seria feita de acordo com a distância da partícula ao centro da galáxia a qual pertence*. Assim, dependendo da energia orbital do par, a transferência de energia orbital para as partículas dos sistemas em questão seria *seletiva* (i.e., função da distância da partícula ao centro da galáxia a qual pertence), e isto se refletiria em $K_{tot}(< r)$ diferentes, com dependência com a energia orbital inicial do par.

A Fig. 6.9 mostra como $K_{tot}(< r)$ varia com r , para cada modelo final das simulações de CdCC95 (todas as gerações foram incluídas nesta figura). De fato, parece haver uma diferença sistemática de $K_{tot}(< r)$ com E_{orb} , no sentido correto de corroborar nossa conjectura. Como, por esta figura apenas, fica difícil compararmos as regiões internas e externas dos modelos, procuramos quantificar melhor o efeito acima a partir da razão das energias cinéticas totais das partes externas e internas, i.e., $K_{tot}(r > xr_h)/K_{tot}(r < xr_h)$ a três raios distintos ($x = 0, 2r_h, 0, 5r_h, \text{ e } 1r_h$) em função das condições iniciais. Os resultados se encontram na Fig. 6.10.

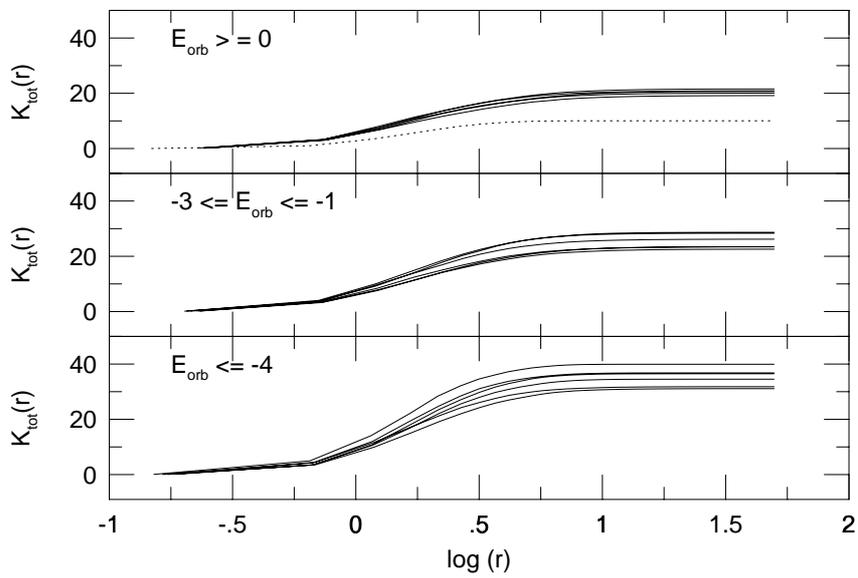


FIG. 6.9: Variação de $K_{tot}(< r)$ com r , para cada modelo final das simulações de CdCC95 (todas as gerações foram incluídas nesta figura). O progenitor é a linha pontilhada.

Vemos que, no geral, independentemente da fração do raio efetivo utilizada para o cálculo das energias cinéticas, os colapsos não apresentam qualquer tendência com a condição inicial (β); o caso mais claro sendo o dos colapsos A, e o mais “ruidoso”, o dos colapsos C. Em particular, no caso dos colapsos K ocorre uma sequência onde a razão das energias cinéticas é similar ao do progenitor para os casos mais “quentes”, vai decaindo, e atinge aproximadamente um mesmo valor para os casos mais “frios”.

Por outro lado, as fusões apresentam um comportamento sistemático com a condição inicial: quanto mais negativa a E_{orb} , maior é a energia cinética das regiões externas relativamente às internas. Este efeito é qualitativamente compatível com a idéia de que as perturbações de maré mais intensas se dão no caso de encontros rápidos (E_{orb} mais negativas). Em outras palavras, as regiões mais externas se “aquecem” relativamente às internas, e este efeito é maior dependendo da energia orbital do par. De fato, este comportamento é menos marcante na medida em que o raio da região interna vai aumentando. Em $r \sim 0,5r_h$, há uma transição, para praticamente todos os modelos, onde a energia cinética na região interna é da ordem da externa. A partir deste raio, o valor da energia cinética na região interna ultrapassa o da externa, e os valores das razões das energias cinéticas vão se tornando razoavelmente similares, independentes da condição inicial dos modelos. No geral, as fusões de hierarquias superiores tendem a apresentar as razões das energias cinéticas menores do que fusões de primeira geração com mesma energia orbital inicial (há poucas exceções a este comportamento).

Como base comparativa, avaliamos as mesmas quantidades acima para um conjunto de modelos de King *homólogos*, de diferentes massas, como função da *massa total* do modelo (painel inferior direito da Fig. 6.10). O objetivo é compararmos modelos que sabemos, por construção, serem homólogos. Note que variações em M e r_h mudam o valor do parâmetro σ do modelo de King por um fator $(M/r_h)^{\frac{1}{2}}$. Logo, para a geração deste conjunto de modelos homólogos, impusemos a mesma razão M/r_h e o mesmo potencial central ($W_0 = 5$; c.f. Apêndice B) do progenitor das fusões. Os resultados mostram que *não* há uma variação significativa das razões de energias cinéticas como função da massa do modelo, como pode ser visto claramente pela figura.

TABELA 6.3: DIFERENÇAS FRACIONAIS DE K_x

K_x	Fusões de King	Fusões de Hernquist	King Homólogos
0.2	79%	46%	16%
0.5	48%	33%	5%
1.0	23%	28%	4%

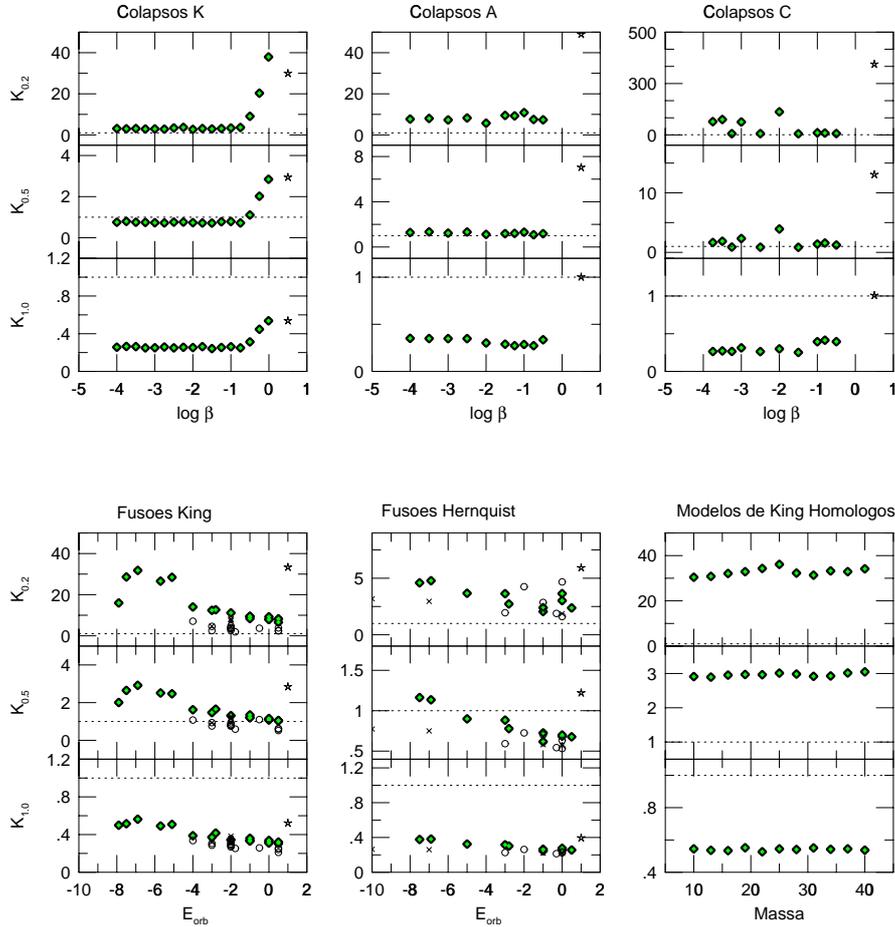


FIG. 6.10: Razão das energias cinéticas nas regiões externas e internas a três raios r distintos: $0.2r_h$, $0.5r_h$, e $1r_h$ [notação da figura: $K_x \equiv K_{tot}(r > xr_h)/K_{tot}(r < xr_h)$], em função das condições iniciais. O símbolo estelar aponta o progenitor (no caso de fusões) ou o modelo inicial não-perturbado (no caso de colapsos). A linha pontilhada nos painéis indica $K_{tot}(r > xr_h)/K_{tot}(r < xr_h) = 1$. No caso de fusões, os símbolos são: diamantes para primeira geração, círculos para segunda geração, e “x” para terceira geração. No painel inferior direito, apresentamos as mesmas razões de energias cinéticas para modelos de King homogêneos, em função da massa total dos modelos.

As diferenças fracionais entre o maior e menor valor das razões de energias cinéticas [$\delta\mathcal{K} \equiv (\mathcal{K}_{\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\nabla} - \mathcal{K}_{\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\nabla})/\mathcal{K}_{\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\nabla}$] destes modelos de King homólogos, para cada um dos três raios usados, foram computadas e se encontram na Tabela 6.3. Estes valores podem ser comparados aos de fusões de mesma energia orbital inicial, porém de massas diferentes (gerações diferentes). Os resultados para as fusões de King e de Hernquist, fixando a energia orbital em -3 , também se encontram na Tabela 6.3. Os resultados mostram que para uma mesma energia orbital inicial, porém de hierarquias (ou massas) diferentes, pode haver um espalhamento significativo das razões de energias cinéticas, principalmente para os casos onde o raio da região interna é pequeno ($r = 0, 2r_h$), isto é, este espalhamento é maior do que aquele indicado pelos modelos de King homólogos de diferentes massas.

Por fim, como já visto anteriormente (c.f. Capítulo 5), a não-homologia sistemática dos produtos de fusão pode ser quantificada através dos coeficientes cinemático-estruturais C_r e C_v , que variam sistematicamente com a energia orbital inicial do par. Logo, é natural que os mesmos resultados acima devam se reproduzir como função destes coeficientes. De fato, quando isto é levando em conta, os resultados mostram a mesma tendência, como pode ser visto na Fig. 6.11. Note que os maiores valores de C_r , C_v , etc., correspondem à energias orbitais iniciais dos pares mais *negativas*.

6.5 Discussão

Vimos que uma pequena fração da não-homologia central nas fusões com uma componente pode ser devida a um efeito da fenda para a medida da dispersão de velocidades central projetada, porém este efeito não é suficiente para explicar a não-homologia dos modelos, que persiste mesmo com o uso da dispersão de velocidades tridimensional.

Uma análise dos modelos no espaço- κ tornou mais clara a necessidade de uma maior amostragem em massa e energias orbitais iniciais para nossas simulações. Em particular, nesta tese apenas testamos a homologia de colapsos como função do modelo inicial e do fator de colapso inicial. Não verificamos a homologia dos colapsos como função da massa, de forma a obtermos uma indicação se colapsos de *massas diferentes* são também homólogos. Por outro lado, vimos que os colapsos simples de mesma massa tendem a aglomerar as simulações, enquanto que fusões de mesma massa já produzem objetos não-homólogos com características (viz. inclinação do PF) similares às das galáxias elípticas. Assim, seria improvável que simulações de colapso de diferentes massas, caso se apresentem não-homólogas, também reproduzam exatamente um PF.

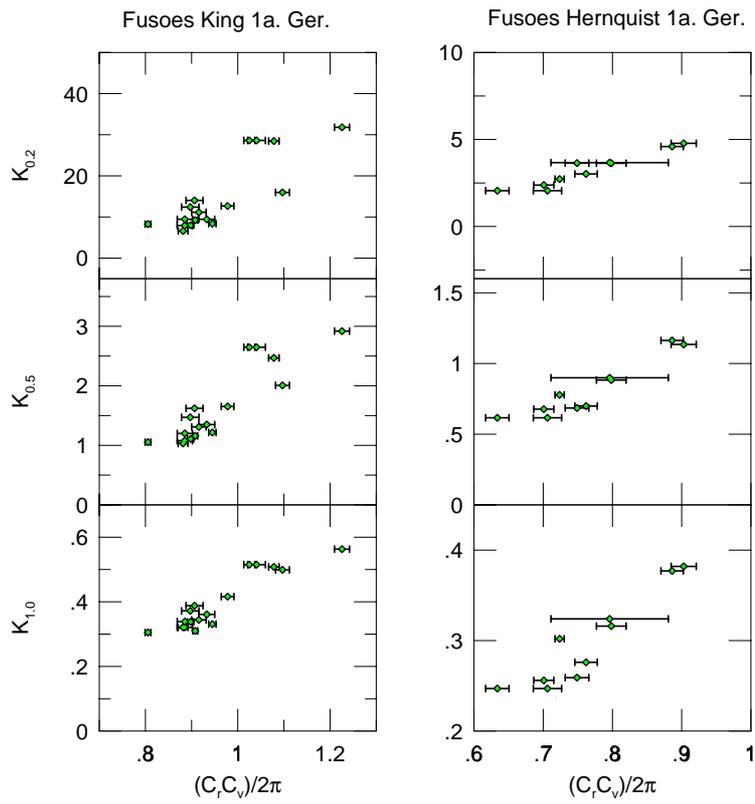


FIG. 6.11: O mesmo da figura anterior, mas em função dos coeficientes estruturais e cinmáticos, para as fusões de primeira geração e uma componente.

Uma análise de caráter preliminar acerca do efeito de maré produziu resultados que vão no sentido correto para uma explicação puramente dinâmica para a não-homologia. A transferência da energia orbital para as partículas dos pares iniciais parece ser conduzida de acordo com a distância da partícula ao centro da galáxia a qual pertence, e quanto mais negativa é a energia orbital, mais seletiva (viz., função do raio) parece ser esta transferência, resultando numa não-homologia cinemático-estrutural.

CAPÍTULO 7

DINÂMICA DE SISTEMAS ESTELARES NA PRESENÇA DE HALOS MASSIVOS

7.1 Motivação

A partir de conceitos físicos bastante fundamentais, espera-se que o estado de equilíbrio de sistemas estelares auto-gravitantes, estacionários numa média temporal, sejam bem descritos pelo teorema do virial (c.f. Seção 1.2). De fato, as galáxias elípticas, como já visto, representam uma família bastante homogênea, expressa pelo PF. Uma vez que se acredita que tais galáxias representam sistemas em equilíbrio, suas propriedades físicas devem refletir suas condições de virialização. No entanto, devemos notar que as galáxias elípticas, tais como quaisquer estruturas colapsadas, são provavelmente envolvidas por halos massivos de matéria escura. As relações do PF, por outro lado, surgem da componente observada (i.e., *bariônica*) destes sistemas. Parece portanto natural se indagar como o estado de equilíbrio da componente bariônica *sob* a influência de seu halo massivo modificaria o teorema do virial simples a uma componente.

De fato, tentativas de se construir modelos a duas componentes podem ser encontrados na literatura recente. Por exemplo, os estudos de Ciotti, Lanzoni e Renzini 1996 indicam que a inclinação do PF poderia ser explicada por halos massivos extensos de matéria escura envolvendo a matéria luminosa das galáxias mas com o seguinte “chute”: um ajuste fino não-realístico das distribuições de matéria luminosa-escura seria necessário para explicar o pequeno espalhamento nas correlações do PF. Por outro lado, resultados preliminares de Kritsuk 1997 sugerem que o PF das elípticas e, também, o desvio observado das galáxias esferoidais anãs daquele, pode seguir da condição de equilíbrio derivada de um modelo a duas componentes.

Na tentativa de visualizar as propriedades físicas dos sistemas estelares virializados em várias escalas num cenário integrado (o espaço κ , introduzido no capítulo anterior, c.f. Bender, Burstein e Faber 1992), Burstein et al. 1997 (BBFN97) concluíram que os aglomerados globulares, as galáxias, grupos de galáxias, e aglomerados de galáxias, também apresentam tendências sistemáticas em suas propriedades observacionais, povoando o que aqueles autores denominaram de “metaplano fundamental cósmico” (MPF) em seu espaço de parâmetros. Este metaplano, também inclinado relativamente à expectativa dada pelo teorema do virial simples, foi interpretado como uma combinação de inclinações do tipo PF associadas aos vários sistemas estelares. possivelmente refletindo suas diferentes populações estelares e histórias de

dissipação. No entanto, sob esta interpretação, um mecanismo de ajuste fino para a variação de M/L com M , para cada sistema estelar, também precisaria ser invocado a fim de preservar a aparência espetacular do metaplano (veja também Schaeffer et al. 1993). Da mesma forma, a análise daqueles autores tornou evidente uma “zona de exclusão” (ZOE) onde nenhum sistema estelar poderia ser encontrado. Este fato traz a questão de quais os processos de formação gerariam tal tendência e os mecanismos responsáveis para a produção do próprio metaplano.

Neste Capítulo, estudamos estas questões com a hipótese de que os sistemas estelares auto-gravitantes no universo são envolvidos por halos escuros. Como consequência, o teorema do virial estrito precisa ser substituído por uma nova equação de equilíbrio que leva explicitamente em consideração o potencial gravitacional produzido pelo halo massivo que envolve a componente luminosa. Com esta consideração, apresentamos um modelo alternativo que naturalmente explicaria algumas das questões levantadas acima.

7.2 A Hipótese do Teorema do Virial a Duas Componentes (2-VT)

O teorema do virial escalar para a componente bariônica de um sistema estelar (componente-2), em equilíbrio estável envolvida por seu halo de matéria escura (componente-1), pode ser prontamente deduzido da equação de Jeans assumindo que, em adição ao seu auto-potencial, também está sujeita ao potencial externo produzido pela matéria escura (e.g. Binney e Tremaine 1987; ver também Limber 1959, Spitzer 1969, Smith 1980). Neste caso, um novo termo é adicionado à energia potencial gravitacional do sistema devido à interação dos dois componentes. Assumindo simetria esférica, podemos escrever a energia gravitacional da componente luminosa, W_2 , como (a dedução que nos leva à equação a seguir se encontra no Apêndice G):

$$W_2 = -G \int_0^\infty \frac{\rho_2(r)M_2(r)}{r} dV - G \int_0^\infty \frac{\rho_2(r)M_1(r)}{r} dV, \quad (7.1)$$

onde $M_\mu(r)$ é a massa total da componente- μ , no interior do raio r . Se assumirmos ainda que o halo de matéria escura - componente-1 - é mais extenso do que a componente bariônica, tendo um perfil de densidade não muito acentuado dentro da região interior que contém a componente luminosa, então podemos aproximar a segunda integral, que fornece a energia de interação, por:

$$W_{21} \equiv -G \int_0^\infty \frac{\rho_2(r)M_1(r)}{r} dV \sim -\frac{4\pi}{3} \rho_{0,1} G \int_0^\infty \frac{\rho_2(r)r^3}{r} dV =$$

$$- \frac{4\pi}{3} \rho_{0,1} G M_2 \langle r_2^2 \rangle, \quad (7.2)$$

onde $\rho_{0,1}$ é a densidade média do halo de matéria escura dentro da região contendo a componente luminosa, e

$$\langle r_2^2 \rangle \equiv \frac{\int r^2 \rho_2(r) dV}{\int \rho_2(r) dV}. \quad (7.3)$$

Logo, o teorema do virial para a componente bariônica colapsada, $2K_2 + W_2 = 0$, pode ser escrito como (viz., “teorema do virial a duas componentes”, de agora em diante, “2-VT”):

$$\langle v_2^2 \rangle = \frac{G M_2}{r_{G,2}} + \frac{4\pi}{3} G \rho_{0,1} \langle r_2^2 \rangle, \quad (7.4)$$

onde $r_{G,2}$ é o raio gravitacional da segunda componente.

Vemos que na presença de um halo de matéria escura extenso o teorema do virial adquire um termo extra no lado direito da equação, que dá conta da interação com o halo de matéria escura extenso (também conhecido como “efeito Limber”). Como veremos na próxima seção, este termo é essencial para compreendermos as tendências sistemáticas das propriedades observadas dos sistemas estelares que discutimos anteriormente.

7.3 Versões do 2-VT

7.3.1 O 2-VT Expresso em Termos das Variáveis do PF

Em termos das quantidades observacionais, o teorema do virial a duas componentes é escrito como:

$$\sigma_0^2 = C^* (I_e r_e + b r_e^2) \quad \text{onde} \quad C^* = \frac{C_r C_v}{2\pi G} \left(\frac{M}{L} \right)_2 \quad (7.5)$$

e

$$b = \frac{2}{3} \frac{R}{C_r} \left(\frac{M}{L} \right)_2^{-1} \rho_{0,1} \quad \text{com} \quad R = \frac{\langle r_2^2 \rangle}{r_e^2}. \quad (7.6)$$

Note que nestas equações todos os coeficientes estruturais assim como M/L se referem à componente bariônica. O parâmetro b tem dimensão de uma densidade de luminosidade, enquanto que C^* tem dimensão de uma quantidade menos intuitiva (i.e., GM/L).

A Eq.(7.6) é especialmente interessante, uma vez que relaciona o parâmetro b à densidade central do halo de matéria escura. Analisamos numericamente os vários modelos de equilíbrio (especificamente, os modelos de Jaffe, King and Sersic, c.f. Binney e Tremaine 1987, Ciotti 1991, Ciotti e Lanzoni 1997) e encontramos que $C_r C_v \sim 0.2$, enquanto que R/C_r varia significativamente, dependendo dos modelos: $R/C_r \sim 10 - 25$ para os modelos de King e Jaffe, e $\sim 10 - 60$ para os modelos de Sersic. Adotamos $R/C_r \sim 20$ como um valor típico. É importante ressaltar que para as galáxias esta aproximação pode introduzir um fator 2 de diferença no parâmetro b .

7.3.2 O 2-VT Expresso em Termos das Variáveis do Espaço- κ

No sistema de coordenadas κ (c.f. capítulo anterior), o PF é visto de perfil, projetado no plano (κ_1, κ_3) , e o 2-VT (Eq. (5)) pode ser expresso como:

$$\kappa_3 = \frac{\log C^*}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \log(1 + b10^\omega), \quad (7.7)$$

onde

$$\omega \equiv (\kappa_1 - \sqrt{3}\kappa_2)/\sqrt{2} = -\log I_e/r_e, \quad (7.8)$$

isto é, ω mede a densidade de luminosidade central dos sistemas estelares.

Das Eqs. (7.7) e (7.8), vemos que o 2-VT define uma superfície no espaço κ cujas características principais podem ser melhor visualizadas a partir da curva definida por sua intersecção com o plano (κ_3, ω) , perpendicular ao plano (κ_1, κ_2) . Uma breve análise da Eq. (7.7) mostra que a curva intercepta o eixo κ_3 em $\log C^*/\sqrt{3}$. Se não houvesse halo escuro, $b = 0$, o que recupera o teorema do virial usual a uma componente, $\kappa_3 = cte$. A partida desta linha horizontal num dado ω depende do termo $b10^\omega$ e portanto da densidade do halo escuro. Para $b10^\omega \gg 1$, a curva tende a uma linha reta com inclinação fixa de $1/\sqrt{6}$, interceptando o eixo κ_3 em $\log(C^*b)/\sqrt{3}$. Isto é, o 2-VT prevê uma *inclinação fixa assintótica, característica*, relativamente ao teorema do virial a uma componente. Note que, dentro de um fator que depende dos coeficientes estruturais da componente bariônica, o valor da densidade central média do halo de matéria escura é dado por este intercepto.

7.4 Aplicações do Teorema do Virial a Duas Componentes

7.4.1 Dados Observacionais

Na Figura 7.1 (painel a), apresentamos os dados no espaço κ , projetado no plano (κ_1, κ_3) para sistemas estelares auto-gravitantes abrangendo todas as escalas de virialização, desde aglomerados globulares, até aglomerados ricos de galáxias, usando os dados apresentados por BBFN97. As curvas do 2-VT, dadas por $C^* = 8.28$ e $b = 200$, são mostradas na linha pontilhada para vários intervalos dos parâmetros κ . Esta figura mostra a grande compatibilidade do “metaplano cósmico” com as previsões teóricas do 2-VT - especificamente, a *inclinação fixa assintótica relativamente ao teorema do virial estrito*.

Estabelecemos a relação do 2-VT (Eq. (7.7)) assumindo duas diferentes hipóteses acerca da relação de massa-luminosidade da componente bariônica: (a) que seu valor é aproximadamente o mesmo daquele encontrado para aglomerados globulares, o que parece razoável, uma vez que estes sistemas são muito bem descritos pelo teorema do virial a uma componente, isto é, $b10^{\omega_{glob\ clust}} \ll 1$ (ver Bellazzini 1998); e (b) a partir do ajuste do valor do intercepto em κ_3 (isto é, $(M/L)_2$), para um valor máximo ainda fornecendo um ajuste razoável para grupos e aglomerados de galáxias. Ao fazer isto, tentamos levar em conta a presença da massa bariônica não-estelar e também dos halos escuros excedentes das galáxias nestes sistemas.

(a)

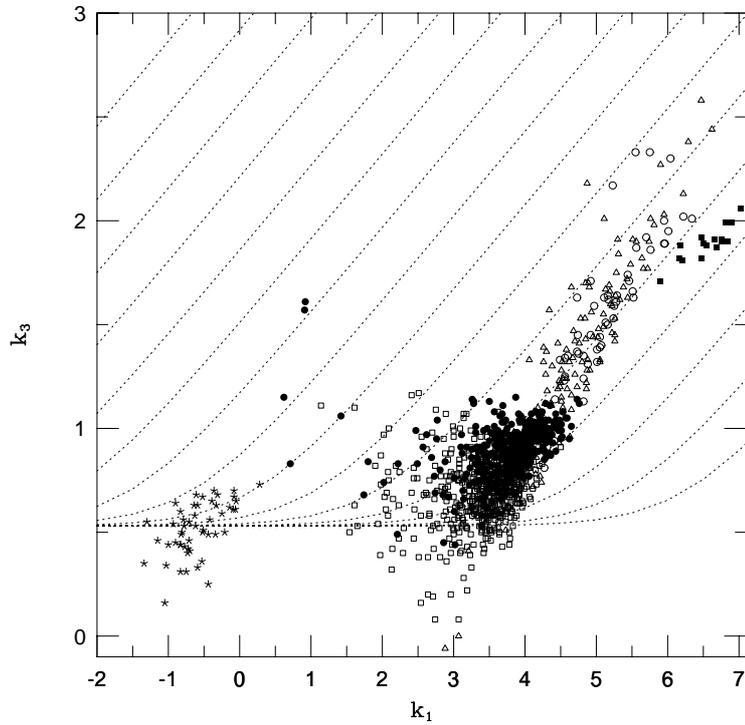


FIG. 7.1: Projeção no espaço κ dos dados apresentados por BBFN97. Os símbolos são os que seguem: círculo aberto - grupos dominados por galáxias elípticas; círculo fechado - galáxias elípticas; quadrado aberto - galáxias espirais; quadrado fechado - aglomerados de galáxias; estrela - aglomerados globulares; triângulo aberto - grupos dominados por galáxias espirais. O painel (a) mostra $\kappa_1 \times \kappa_3$, onde as linhas pontilhadas indicam a variação de κ_2 de -2.5 a 5.0. Para ambas as projeções, o modelo do 2-VT é vinculado por $C^* = 8.28$ and $b = 200$.

(b)

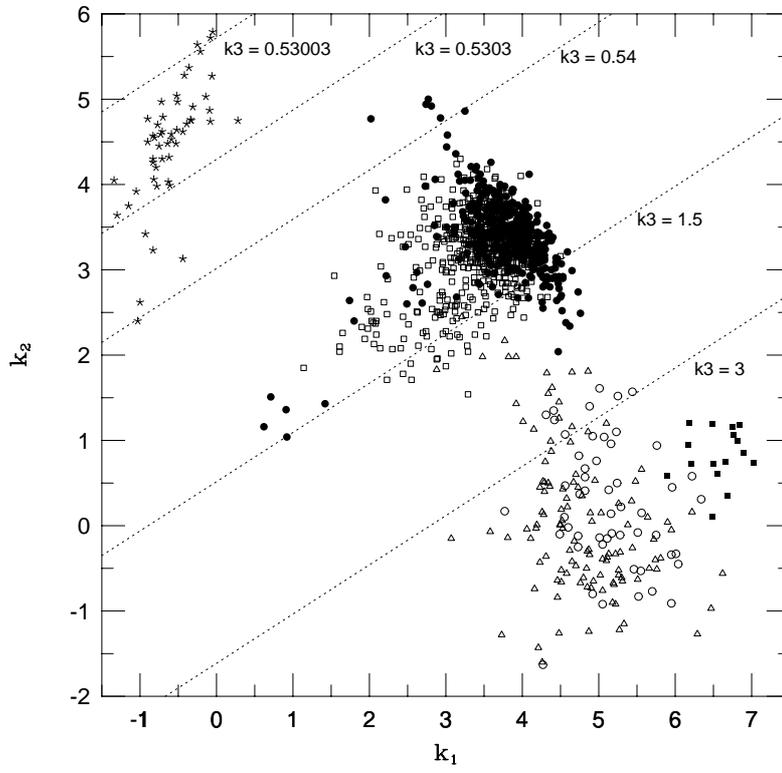


FIG. 7.1: CONTINUAÇÃO. O painel (b) apresenta a projeção $\kappa_1 \times \kappa_2$, onde as linhas pontilhadas representam os diferentes valores de κ_3 , tal como indicado.

Encontramos para caso (a) $(M/L)_2 \sim 1.6$ ($C^* = 8.28$), um valor que concorda razoavelmente bem com o valor para aglomerados globulares (e.g. Pryor e Meylan 1993). para caso (b), $C^* = 39.2$, fornece $(M/L)_2 \sim 7.4$. As densidades centrais dos halos de matéria escura foram estimados após o ajuste do parâmetro b . Para as galáxias (elípticas), encontramos que $\rho_{0,1} \sim 2.3 \times 10^{-2} M_\odot/pc^3$ ($b = 200$), enquanto que para elípticas dominadas por grupos e aglomerados de galáxias, $\rho_{0,1} \sim 5.8 \times 10^{-6} M_\odot/pc^3$ ($b = 0.20$, para caso (a) e $b = 0.004$, para caso (b)). Os valores correspondentes para as galáxias espirais e para grupos dominados por espirais são cerca de um fator 2 – 3 menor devido ao fato de que estes sistemas aparecem levemente deslocados na direção de maiores valores de ω .

Na Figura 7.1 (painel b), claramente vemos que os pontos não preenchem o espaço continuamente. Ao contrário, estão arrançados em certas bandas definidas por valores específicos de κ_3 , que estão relacionados a valores específicos de ω através da Eq.(7.7). O parâmetro ω rege a densidade de luminosidade nestes sistemas, e portanto está associado às suas histórias de dissipação e à época em que o colapso ocorreu (i.e. o espectro de flutuação de densidade). Logo, no contexto de um cenário de aglomeração hierárquica, sistemas menores colapsam antes e são mais concentrados, apresentando maiores densidades de luminosidade (ω mais negativo); enquanto que objetos maiores, que colapsaram depois, apresentam menores densidades de luminosidade (ω mais positivo). O espalhamento na direção perpendicular a ω provavelmente reflete uma mudança em massa que produz as bandas vistas na Figura 7.1 (painel b). Os hiatos entre diferentes objetos no plano (κ_1, κ_2) foram percebidos pela primeira vez por BBFN97, mas agora quantificamos esta característica através do parâmetro ω .

7.4.2 Dados das Simulações

Na Fig. 7.2, re-apresentamos as simulações de fusão no espaço κ , tal como já vistas no capítulo anterior (c.f. Fig. 6.7), adicionando as curvas preditas pelo 2VT. Naquele capítulo, havíamos comentado de passagem que uma possível inclinação para as relações resultantes das fusões com duas componentes era de $\sim 0,43$. Esta inclinação é compatível com o valor assintótico previsto pelo 2-VT (viz. $1/\sqrt{6} \sim 0,408$). Assim, a interpretação oferecida nos capítulos anteriores de que estes objetos seriam bastante não-homólogos residia na suposição de que eles obedeciam ao teorema do virial em sua versão mais estrita. No entanto, vemos que é necessário re-interpretarmos este resultado.

A partes luminosas das simulações de Hernquist com duas componentes, tal como definidas pelo nosso modelo (e.g., razão de massa halo/massa luminosa de 10, etc.), obedecem às previsões do 2-VT na região assintótica. Este fato pode explicar razoavelmente a razão por que estas simulações reproduzem uma inclinação que se

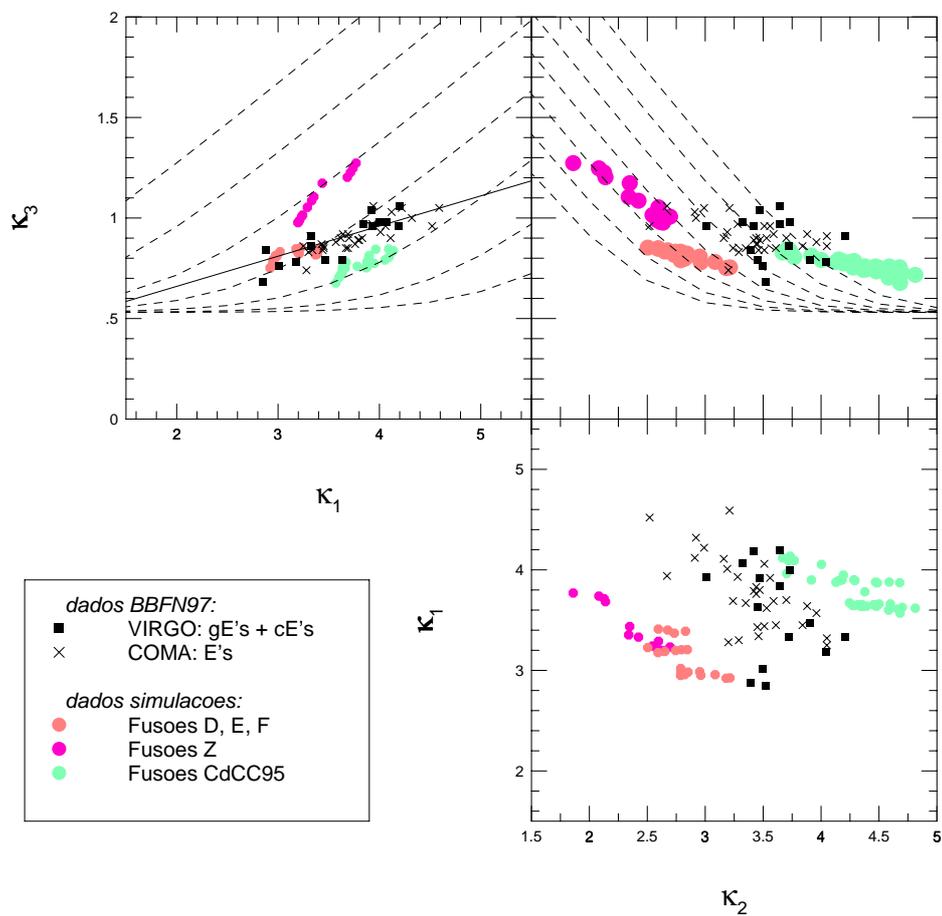


FIG. 7.2: Resultado das simulações no espaço- κ . A linha reta apresenta o ajuste para as galáxias elípticas de Virgo, segundo Bender, Burstein e Faber 1992. As linhas pontilhadas foram reproduzidas da mesma forma que as da figura anterior.

desvia significativamente daquela definida pelo PF: para reproduzirem uma inclinação menor, estes modelos precisariam de um valor menor para a densidade do halo escuro, suficientemente ajustada para que os modelos resultassem na região curva do 2-VT, de menor inclinação.

7.5 Discussão

Neste capítulo, desenvolvemos a hipótese do “teorema do virial com duas componentes”, sob a motivação de que sistemas estelares em equilíbrio e auto-gravitantes em geral possuem um halo de matéria escura extenso. Encontramos uma boa compatibilidade desta hipótese com as propriedades observadas de uma grande faixa de sistemas estelares. Particularmente, mostramos que o “metaplano cósmico”, primeiramente discutido por BBFN97 como um conjunto de planos fundamentais inter-relacionados, segue razoavelmente a superfície curva definida pelo 2-VT.

As partes luminosas dos produtos de fusão aqui simulados também seguem razoavelmente o 2-VT em sua região assintótica. Numa comparação com os dados observacionais, vemos que: (i) possíveis contrapartidas observacionais dos objetos a duas componentes aqui simulados estariam deslocadas para altos valores de κ_1 ; ou (ii) dado que os objetos simulados possuem valores limites de κ que estão inteiramente contidos nos limites do espalhamento dos dados observacionais (c.f. comparação Figs. 7.1 e 7.2), os modelos também poderiam representar um sub-conjunto de galáxias naquela região.

Nossa análise reforça a idéia de que as relações do PF podem surgir como uma correção dos parâmetros observados (luminosos) devida a presença da matéria escura que envolve estes sistemas. Esta hipótese, portanto, pode ser considerada uma possível explicação para o PF, evitando ajustes finos de quaisquer tipos (e.g., razão M/L variando com a massa, etc.), porém inclui uma pequena curvatura na correlação do PF. Entretanto, dada a escala de aglomeração apresentada pelas galáxias elípticas, o espalhamento do PF deveria ser conhecido com muito maior precisão para confirmarmos a presença desta curvatura.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta tese, procuramos investigar em maiores detalhes os resultados encontrados por CdCC95 e nos propusemos a responder três questões essenciais: (1) os resultados de CdCC95 são dependentes dos modelos utilizados para as fusões? (2) o PF surge naturalmente da relaxação gravitacional? (3) qual a importância da presença de um halo escuro nas relações de escala da componente luminosa?

Sobre o primeiro ponto questionado, mostramos que as fusões de Hernquist com uma componente também reproduzem o PF das elípticas. Este efeito parece ser, portanto, independente do modelo inicial.

O segundo ponto aborda questões ainda mais amplas. A não-homologia central *não* parece surgir naturalmente do mecanismo de relaxação gravitacional apenas: colapsos (de mesma massa), no geral, formam objetos homólogos. O mecanismo de fusão parece ser o ingrediente mais importante para produzir não-homologia. De fato, simulações mais “frias” de colapso, no caso onde os modelos iniciais possuem pequenas flutuações (e.g. modelos C, $n = 1$), também reproduzem objetos não-homólogos (embora com inclinação diferente da do PF das elípticas). As pequenas flutuações iniciais destes modelos provavelmente se amplificaram e se fundiram sucessivamente ao longo da evolução do sistema, reproduzindo um mini-universo de fusões.

Para melhor entendermos os dois pontos acima, uma série de diagnósticos foi desenvolvida no Capítulo 5. Os estudos apresentados naquele capítulo mostram que existem, de fato, algumas diferenças na estrutura e dinâmica dos modelos simulados. Evidenciamos uma certa complexidade do mecanismo de relaxação como função dos modelos e condições dinâmicas iniciais. Assim, não é de todo claro como estas diferenças poderiam se correlacionar com o fato destes modelos reproduzirem ou não um PF. No Capítulo 6, revisitamos e exploramos as análises anteriores mais detalhadamente. Estudamos a possibilidade de que o efeito de maré seja um mecanismo físico importante para a produção de não-homologia. Nossos resultados mostram uma tendência de que as partículas ao longo da fusão ganham energia seletivamente, tal como previsto por um modelo de maré simples, e este efeito é função da energia orbital inicial dos pares ou, alternativamente, dos coeficientes cinemático-estruturais dos modelos finais de equilíbrio.

Sobre a terceira questão, encontramos que a presença do halo pode ser significativa no que tange a condição de equilíbrio, e, conseqüentemente, as relações de escala da parte luminosa. Para analisar em maiores detalhes este efeito, estudamos uma formulação do teorema do virial que leva em conta a presença do halo. Encontramos

uma boa compatibilidade desta hipótese com as propriedades observadas de uma grande faixa de sistemas estelares, onde mostramos que o “metaplano cósmico” segue razoavelmente a superfície curva definida pelo 2-VT. As partes luminosas dos produtos de fusão também seguem razoavelmente o 2-VT em sua região assintótica. O 2-VT prevê a existência de uma curvatura no PF, mas o espalhamento do PF das elípticas deveria ser conhecido com muito maior precisão para confirmarmos a presença desta curvatura.

Resumindo, a presente tese propõe duas hipóteses para a existência do PF: (i) a dinâmica de fusões leva naturalmente ao PF, e a maré parece ser um mecanismo plausível para este efeito; e (ii) o 2-VT também explica naturalmente as relações de escala das elípticas (incluindo as dos sistemas estelares auto-gravitantes em geral), porém prevê uma curvatura que não é atualmente observada.

Na verdade, podemos supor que ambos mecanismos sugeridos nesta tese podem ter operando concomitantemente, em diferentes graus, na formação de galáxias e objetos auto-gravitantes em geral; no entanto, as hipóteses aqui apresentadas se baseiam em modelos simplificados. Existem vários aspectos que não foram abordados nesta tese e que podem ser explorados futuramente.

Primeiro, há uma necessidade natural de ampliarmos e refinarmos as simulações de fusão em termos de vários aspectos, tais como: as condições iniciais (\hat{E} , \hat{L}), as massas iniciais, as razões de massa do halo/massa luminosa dos modelos com duas componentes, a massa da partícula de matéria escura, os modelos iniciais em si (e.g., presença de buraco negro central, etc.), a adição do efeito de fricção dinâmica, e assim por diante.

Em particular, as condições dinâmico-estruturais iniciais dos modelos de fusão com duas componentes, tal como definidas no presente trabalho, resultaram em objetos finais (parte luminosa) que não reproduzem o PF das elípticas. Há uma necessidade de se esclarecer melhor este resultado, e certamente este fato justifica a investigação futura de simulações que envolvam condições diferentes e mais refinadas, como as descritas acima. Em adição, verificamos que há uma grande similaridade entre o processo de relaxação de colapsos e o da componente luminosa inserida no halo escuro (c.f. Capítulo 5). O grau de eficiência de mistura no espaço de fase da componente luminosa é bastante similar ao de colapsos. A análise das médias de energias de coleções fixas de partículas, determinadas inicialmente pela ordenação de suas energias individuais, mostra que as partículas que compõem o material luminoso tendem a perder energia de forma qualitativamente similar aos colapsos.

Estes resultados fornecem algumas indicações pouco discutidas na literatura. De fato, sabe-se que os halos têm papel bastante importante na dinâmica de fusões, principalmente em escalas maiores ($> 10 - 100$ kpc): a fricção dinâmica dos halos desaceleram as galáxias (o material luminoso), levando a diferentes evoluções orbitais

e escalas de tempo para fusão (e.g. Mihos 1999). No entanto, o desconhecimento da estrutura detalhada dos halos em galáxias leva à incertezas bastante importantes no que concerne o modelamento das fusões, e conseqüentemente a compreensão de como as galáxias foram formadas. Embora não tenhamos incluído o efeito de fricção dinâmica em nossas simulações, o resultado de que *a parte luminosa das fusões não se comporta como as fusões com uma componente apenas* parece indicar algo de fundamental. O material luminoso segue um processo de relaxação bem mais eficiente do que fusões com uma componente. Estas indicações mostram a necessidade de investigarmos as características dinâmico-estruturais de objetos finais (parte luminosa) resultantes de fusões *no interior de um halo escuro em comum*.

Segundo, sentimos a necessidade de um estudo mais detalhado que envolva uma comparação bem mais minuciosa de nossos modelos finais de equilíbrio com modelos baseados na hipótese da relaxação violenta, em seus vários refinamentos, como por exemplo, o proposto por Hjorth e Madsen 1991 (c.f. também Hjorth e Madsen 1993 e Hjorth e Madsen 1995). Naquele trabalho, pressupõe-se que a relaxação ocorra de forma inteiramente eficiente em uma região limitada do sistema estelar. Esta teoria leva à construção de uma função de distribuição que é a base de modelos que seguem bem a lei de de Vaucouleurs, desde que o potencial gravitacional central seja suficientemente profundo. Vimos nesta tese que os potenciais centrais dos produtos finais de fusão com uma componente são bem menos profundos do que os de colapsos. Embora não tenhamos feito ajustes à lei de de Vaucouleurs (tendo nos limitado a uma comparação qualitativa), vimos que, não obstante os potenciais centrais não muito profundos destas fusões, estes objetos têm perfis bastante próximos ao da lei $r^{1/4}$.

Já a parte luminosa das fusões com duas componentes se desviam significativamente da lei de de Vaucouleurs. Notamos que estes objetos em particular seguem bem a lei de Maxwell-Boltzmann, mas numa faixa de energias bem menor do que as dos outros modelos. Como já discutido anteriormente, Binney 1982 mostra que há uma relação entre um bom ajuste à lei de de Vaucouleurs e um bom ajuste geral à lei de Maxwell-Boltzmann. Nossos resultados parecem indicar que esta correlação deve ser de fato consistente, desde que a faixa de energias no qual a lei de Maxwell-Boltzmann é ajustada seja a mais ampla possível.

Enfim, a presente tese aborda assuntos bastante amplos, que merecem, não obstante, ser investigados individualmente, com maiores detalhes. Indubitavelmente, estudos das relações de escala de objetos resultantes de simulações cosmológicas podem também fornecer vínculos importantes ao estudos aqui apresentados.

APÊNDICE A

O TERMO DE CORREÇÃO DE QUADRUPOLO

Vimos que uma das vantagens do “tree-code” reside em não calcular a força “exata” exercida por um conjunto de partículas suficientemente distantes da partícula que está sendo analisada, mas apenas assumir um cálculo aproximado neste caso. A versão do código utilizada nesta tese leva em conta a correção de quadrupolo para o cálculo da força exercida por um dado conjunto distante de partículas. Neste Apêndice revemos de forma sucinta esta correção.

O potencial gravitacional pode ser expresso da forma

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (\text{A.1})$$

somente quando a distribuição de massa possui simetria esférica. Se assumirmos, portanto, a Eq.(A.1) para uma distribuição arbitrária, que é certamente o caso que encontraremos nas simulações, o potencial calculado conterà um erro que será significativo se a distribuição de massa desviar-se suficientemente da simetria esférica.

O potencial gravitacional para uma distribuição de massa arbitrária é dado pela expressão:

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'. \quad (\text{A.2})$$

Porém, se a partícula estiver suficientemente longe da distribuição de massa, i.e., $\vec{r} \gg \vec{r}'$, podemos expressar o potencial como uma expansão em multipolo, tomando para isto a série de Taylor em torno de $\vec{r}' = 0$ para o termo $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \equiv \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \sum_k \frac{x^k x'^k}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l (3x'^k x'^l - r'^2 \delta_k^l) \frac{x^k x^l}{r^5} + \dots \quad (\text{A.4})$$

onde δ_k^l é o Delta de Kronecker ($\delta_k^l \equiv 1$ se $k = l$, e $\delta_k^l \equiv 0$ para qualquer outro caso).

O potencial dado pela integral (A.2) pode portanto ser escrito como:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{D} - \frac{G}{2} \sum_{kl} Q^{kl} \frac{x^k x^l}{r^5} + \dots \quad (\text{A.5})$$

onde definimos as seguintes quantidades: a massa total (M), o dipolo (\vec{D}), e o quadrupolo (Q^{kl}), respectivamente:

$$M \equiv \int \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}', \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{D} \equiv \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}', \quad (\text{A.7})$$

$$Q^{kl} \equiv \int (3x'^k x'^l - r'^2 \delta_k^l) \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}'. \quad (\text{A.8})$$

Escolhendo a origem das coordenadas como coincidente com o centro de massa da distribuição, o dipolo vai a zero. Incluindo a correção de quadrupolo para uma distribuição arbitrária de massa¹, o erro cometido será da ordem de $\sim 1/r^7$.

¹Com simetria esférica, o termo de quadrupolo vai a zero.

APÊNDICE B

GERAÇÃO DOS MODELOS DE KING

Partindo dos teoremas de Jeans (c.f. Binney e Tremaine 1987, B&T87), aplicados a sistemas esféricos, e levando em consideração os modelos mais simples, onde a função de distribuição (FD) do espaço de fase depende apenas da energia, pode-se construir modelos auto-consistentes que representem uma galáxia em equilíbrio. A partir da FD, pode-se obter a distribuição de densidade correspondente do modelo por integração da FD em todo o espaço de velocidades. Um modelo simples é o dos politropos, que obedecem a relação:

$$\rho = c_n \Psi^n \quad (\Psi > 0); \quad (\text{B.1})$$

onde ρ é a densidade, Ψ é o potencial gravitacional relativo (c.f. B&T87):

$$\Psi \equiv -\Phi + \Phi_0, \quad (\text{B.2})$$

sujeito à condição de contorno: $\Psi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \Phi_0$; e c_n é uma constante¹. Para $n = \infty$, obtêm-se o caso particular da esfera isotérmica. Neste caso, no entanto, o modelo não seguirá (B.1) mas sim a forma:

$$\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2}, \quad (\text{B.3})$$

onde σ^2 é uma quantidade que tem o mesmo papel que $\frac{k_B T}{m}$ no caso de uma esfera de gás politrópico.

Aplicando a Eq. de Poisson para o modelo definido por (B.3), uma solução para a distribuição de densidade como função do raio será:

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}, \quad (\text{B.4})$$

denominada “esfera isotérmica singular”. Para remediar a singularidade central deste modelo, impomos condições de contorno na origem: $\rho(0) \equiv \rho_1 e^{\Psi(0)/\sigma^2}$ finito

¹O índice n deve obedecer $n > 1/2$. Pode-se demonstrar que a distribuição de densidade de um politropo *estelar* de índice n é idêntica àquela de uma esfera de *gás* politrópico com índice politrópico γ , obedecendo à relação $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$.

e $(d\rho/dr)_0 = 0$ (i.e., $\Psi(0)$ é finito e $\Psi'(0) = 0$). Definindo novas variáveis adimensionais: $\tilde{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_0}$ e $\tilde{r} \equiv \frac{r}{r_0}$. O “raio do core” (ou “raio de King”), r_c , é definido por:

$$r_c \equiv \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}}, \quad (\text{B.5})$$

que é o raio no qual a densidade projetada da esfera isotérmica cai aproximadamente à metade de seu valor central (usaremos esta quantidade adiante). Aplicando novamente a Eq. de Poisson, mas agora utilizando estas novas variáveis, e eliminando a densidade, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left[\tilde{r}^2 \frac{d(\psi/\sigma^2)}{d\tilde{r}} \right] = -9\tilde{r}^2 e^{\psi/\sigma^2}, \quad (\text{B.6})$$

onde $\psi \equiv \Psi(r) - \Psi(0)$. A solução numérica desta equação diferencial fornecerá, portanto, a função $\psi(r)/\sigma^2$. Assim, o perfil de densidade fica inteiramente determinado (c.f. Eq.(B.3)).

Entretanto, além do problema da singularidade da esfera isotérmica, remediado acima, há um outro problema: a massa total deste modelo é infinita ($M(r)$ é divergente), o que limita a utilização da esfera isotérmica. Uma solução é construir modelos finitos e que se desviem do modelo da esfera isotérmica apenas longe do centro, uma vez que os perfis de brilho superficial das galáxias elípticas são bem ajustados por este modelo, até alguns poucos r_0 's. Os modelos de King são o resultado da manipulação da DF do modelo isotérmico para atingir este objetivo (detalhes em B&T87). A densidade resultante deste modelo é dada por:

$$\rho_K(r) = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} g\left(\frac{\Psi}{\sigma^2}\right), \quad (\text{B.7})$$

onde a função $g(u)$ é:

$$g(u) \equiv \text{erf}(\sqrt{u}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2u}{3}\right) \sqrt{u} e^{-u}, \quad (\text{B.8})$$

onde $\text{erf}(x)$ é a função erro. Escrevendo a Eq. de Poisson para este modelo, similarmente ao que foi feito para a esfera isotérmica, nos fornece:

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left[\tilde{r}^2 \frac{d(\Psi/\sigma^2)}{d\tilde{r}} \right] = -9\tilde{r}^2 e^{\Psi/\sigma^2} g\left(\frac{\Psi}{\sigma^2}\right). \quad (\text{B.9})$$

Novamente temos, portanto, uma equação diferencial cujas soluções são parametrizadas pela função $\Psi(r)/\sigma^2$. As condições de contorno são:

$$\frac{d\Psi}{dr}(r = 0) = 0; \quad (\text{B.10})$$

e (c.f. Eq.(B.2)):

$$\Psi(r = 0) = -\Phi(r = 0) + \Phi_0. \quad (\text{B.11})$$

Ψ decresce ($d^2\Psi/dr^2 < 0$) para distâncias cada vez mais afastadas do centro, até que em um dado raio r_t , $\Psi(r = r_t) = 0$, e a densidade se anula. Assim, temos que (c.f. Eq.(B.2)):

$$\Psi(r = r_t) = 0 = -\Phi(r = r_t) + \Phi_0 \rightarrow \Phi(r = r_t) = \Phi_0, \quad (\text{B.12})$$

o que implica (c.f. Eq.(B.11)):

$$\Psi(r = 0) = -\Phi(r = 0) + \Phi(r = r_t), \quad (\text{B.13})$$

onde

$$\Phi(r = r_t) = -\frac{GM(r < r_t)}{r_t}. \quad (\text{B.14})$$

O valor r_t é conhecido como o “raio de maré” (“tidal radius”), pois como vimos é o raio no qual a densidade vai a zero.

Assim, o modelo de King fica inteiramente especificado, uma vez definido $\Psi(r = 0)$, σ e a densidade central ρ_1 (c.f. Eq.B.7)). Para gerar numericamente este modelo, especificamos estas quantidades e utilizamos o método Runge-Kutta (e.g., Press et al. 1989) para integrar a Eq. de Poisson (B.9).

De posse do perfil de densidade, e tendo especificado o número de partículas do modelo, podemos amostrar as posições e velocidades das partículas da seguinte forma: primeiro computamos um conjunto $[r_*(n)]$: o raio da casca esférica contendo n estrelas. A posição de cada estrela, portanto, pode ser especificada sorteando as variáveis aleatórias ϕ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) para cada componente (x,y,z) no intervalo

$[-1, \dots, 1]$. Assim, a partícula i terá posição $x_\alpha^i = r_\star(i)\phi_\alpha/r$ (com normalização inicial do modelo em $r \leq 1$). Por fim, a faixa de velocidades na qual uma estrela i pode ter num determinado raio r será $v_\star^i = [0, \dots, \sqrt{2\Phi(r)}]$, que também pode ser amostrado aleatoriamente.

Uma quantidade útil é o índice de concentração dos modelos de King, c , definido por:

$$c \equiv \log_{10}(r_t/r_0). \tag{B.15}$$

Assim, os modelos de King podem ser também gerados de forma prática por uma sequência parametrizada em termos do c (c.f. detalhes em B&T87).

Para a geração dos modelos de K deste trabalho, adotamos as seguintes quantidades para os modelos King antes de serem perturbados (c.f. Capítulo 4): $W_0 \equiv \Psi(r = 0)/\sigma^2 = 5$ ($c = 1,04$, c.f. Figura 4-10 de B&T87), $r_c = 2$.

APÊNDICE C

GERAÇÃO DOS MODELOS DE HERNQUIST

Hernquist 1990 propõe um modelo para galáxias elípticas que se aproxima razoavelmente da lei $r^{1/4}$, com a vantagem de que várias quantidades de interesse físico deriváveis do modelo podem ser expressas analiticamente.

O perfil de densidade de massa de Hernquist é dado por:

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi} \frac{a}{r(r+a)^3}, \quad (\text{C.1})$$

onde M é a massa total e a é uma escala de comprimento. A distribuição de massa acumulativa correspondente é:

$$M(r) = M \frac{r^2}{(r+a)^2}. \quad (\text{C.2})$$

Resolvendo para r , obtemos:

$$r = \frac{a \sqrt{\frac{M(r)}{M}}}{1 - \sqrt{\frac{M(r)}{M}}}, \quad (\text{C.3})$$

ou

$$r = \frac{a \sqrt{\mu_r}}{1 - \sqrt{\mu_r}}, \quad (\text{C.4})$$

onde definimos $\mu_r \equiv M(r)/M$. O potencial gravitacional, obtido por integração da Eq. de Poisson, é dado por:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r+a} \quad (\text{C.5})$$

Para gerarmos modelos de Hernquist com duas componentes, o seguinte procedimento é seguido. Primeiro, assumimos que cada componente segue individualmente o perfil de Hernquist, mas com diferentes escalas de tamanho e de massa. Assumimos

para a componente luminosa que $M = a = 1$, enquanto que para o halo (componente escura), estas quantidades são parâmetros livres. Neste caso, escolhemos $M_{halo} = 10$. Geramos um número randômico entre 0 e 1 e associamos este número a μ_r , resolvendo então a equação (C.4) para r .

A amostragem das velocidades é feita da seguinte maneira: Primeiro, o potencial para um dado r amostrado (como descrito anteriormente) é calculado via Eq.(C.5). Escolhemos uma velocidade v_{max} da partícula assumindo:

$$\frac{1}{2}v_{max}^2 = \Phi \rightarrow v_{max} = \sqrt{2|\Phi|}. \quad (C.6)$$

Em seguida, obtemos um valor de velocidade randomicamente amostrado, v_u , com $0 \leq v_u \leq v_{max}$.

No entanto, este valor de velocidade v_u somente será aceito dependendo do seguinte teste: A Fórmula de Eddington (c.f. Binney e Tremaine 1987, pág 237, B&T87), dada por:

$$f(\bar{E}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \frac{d}{d\bar{E}} \int_0^{\bar{E}} \frac{d\rho}{d\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{\bar{E} - \Psi}}, \quad (C.7)$$

é utilizada para obtermos, numericamente, a função de distribuição no espaço de fase, $f(\bar{E})$, dados o perfil de densidade, ρ , o potencial relativo, Ψ , e a energia relativa, \bar{E} (c.f. B&T87). Neste caso, calculamos duas funções de distribuição: (1) a distribuição $f_{max}(\bar{E})$, usando $v = 0$ na computação do valor de \bar{E} , e (2) a distribuição $f_0(\bar{E})$, com $v = v_u$ na computação do valor de \bar{E} . Se $f_0 > \alpha f_{max}$, onde α é um número randômico entre 0 e 1, então a velocidade v_u é aceita (c.f. método da rejeição, Press et al. 1989).

O procedimento descrito neste Apêndice é realizado $N/2$ vezes, para cada componente, onde N é o número total de partículas¹.

¹As primeiras $N/2$ partículas são consideradas da componente luminosa e as outras $N/2$, da componente escura. Esta ordenação é, evidentemente, sempre mantida pelo simulador.

APÊNDICE D

GERAÇÃO DOS MODELOS COM FLUTUAÇÕES DE ESPECTRO DO TIPO $\Delta_k \sim k^n$

Seguimos o método descrito por Carpintero e Muzzio 1995 para a obtenção das condições iniciais das partículas dos modelos C. Neste Apêndice, faremos uma descrição detalhada deste método.

Desejamos que os modelos C representem não uma simulação cosmológica em si, mas apenas uma flutuação esfericamente simétrica de matéria que se destacou da expansão geral do universo. Nesta esfera, assumimos que a formação estelar ocorreu em rápida escala de tempo, de forma que, como nos modelos anteriores, estamos representando um sistema que irá evoluir por dinâmica estelar pura. A diferença é que os modelos C levam consigo “traços” de relevância cosmológica, como veremos a seguir.

Imaginemos inicialmente um cubo de lado L , com densidade $\rho(\vec{x})$. Esta pode ser escrita como:

$$\rho(\vec{x}) = \rho_m [1 + \Delta(\vec{x})], \quad (\text{D.1})$$

onde ρ_m é a densidade média do cubo, e $\Delta(\vec{x})$ é o contraste local de densidade. Este pode ser representado por uma superposição de ondas planas (e.g., Gleason et al. 1997), com fases randômicas (estamos assumindo que as flutuações de densidade são originárias de um processo gaussiano):

$$\Delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k} \neq 0} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (\text{D.2})$$

onde \vec{k} é o vetor número de onda, com $k = |\vec{k}|$. Excluimos o termo correspondente a $\vec{k} = (0, 0, 0)$ da série de Fourier acima porque este representa uma flutuação de comprimento de onda infinito, ou seja, representa, no espaço “real”, densidade constante, e esta já se encontra incluída no primeiro termo da Eq.(D.1). As quantidades $\delta_{\vec{k}}$ são determinadas pelas equações (transformadas inversas de Fourier):

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{L^3} \int_{vol} \Delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (\text{D.3})$$

O espectro de potência $P(k)$ das flutuações de densidade $\Delta(\vec{x})$ é a função $P(k) \equiv |\delta_{\vec{k}}|^2$. Esta quantidade fornece o “peso” da amplitude que cada onda plana deve ter para que o somatório (D.2) represente o mais fielmente possível as flutuações de densidade do meio.

Por outro lado, devemos salientar que, como estamos considerando uma região finita (não estamos representando o universo inteiro), somente modos com números de ondas

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{2\pi n_x}{L}, \frac{2\pi n_y}{L}, \frac{2\pi n_z}{L} \right), \quad (\text{D.4})$$

onde n_x , n_y , e n_z são inteiros, podem ser representados. Ou seja, apenas os modos

$$\vec{k} = (n_x, n_y, n_z)k_f, \quad (\text{D.5})$$

onde k_f é o número de onda fundamental, podem ser representados, uma vez que ondas confinadas podem apenas oscilar nestas determinadas frequências, ou “modos normais” de oscilação. Uma outra consequência do fato de estarmos trabalhando com uma região finita é que teremos um número de onda mínimo efetivo, k_{min} , representável, i.e., $k_{min} \equiv 2\pi/L = k_f$.

Ainda, devemos apontar um outro problema, de origem numérica, devido ao fato de termos também um número limitado de partículas para representar o sistema, ou, alternativamente, uma resolução mínima de escala representável. Assim, não podemos representar a densidade de forma contínua como na Eq.(D.1), sendo na realidade uma função discreta da posição, avaliada portanto numa dada malha, com certo espaçamento. A consequência deste fato é que existirá também um número de comprimento de onda mínimo ($\lambda_{min} = 2\pi/k_{max}$) representável.

Para entendermos este fato, tomemos o seguinte cenário simplificado: imaginemos que estamos tratando do caso unidimensional, i.e., temos uma distribuição discreta de flutuações de densidade $\Delta(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) ao longo de um segmento de reta de tamanho unitário, $L = 1$. Assim, espaçamento da malha é dado por um valor $l = L/(N - 1)$ fixo. Se tivéssemos apenas $N_{ini} = 2$ pontos na malha, com valores $\Delta(x_0) = 8$ e $\Delta(x_1) = -3$, por exemplo, com apenas estes dois pontos e suas dadas amplitudes poderíamos representar para $\Delta(x_0, x_1)$ uma função senoidal contínua $\Delta(x_{cont})$. Isto é, com apenas *dois* valores de amplitude, passamos *um* senóide de comprimento unitário $\lambda_0 \equiv \lambda(N_{ini} = 2) = 1$. Senóides de λ s menores do que o definido acima não poderiam ser representados neste caso. Porém se dobrássemos o número de pontos inicial da malha ($N = 2N_{ini} = 4$), poderíamos representar *duas* ondas e não apenas uma como no caso anterior. Uma delas teria $\lambda = \lambda_0$ e a outra

teria $\lambda = 0.5\lambda_0$. Portanto, dado N , temos um comprimento de onda mínimo λ_{min} representável. Assim, dado um número N razoavelmente grande de pontos na malha, temos que $l \sim L/N$, ou, $N \sim L/l \sim 1/l$ (pois L é unitário). Este número de pontos irá portanto permitir representarmos $N/2$ ondas de comprimento até $\lambda_{min} \equiv \frac{1}{N/2}\lambda_0$. Como $\lambda_0 = 1$, $\lambda_{min} = 2\pi/k_{max} = \frac{1}{N/2} = 2l \rightarrow k_{max} = \pi/l \equiv k_N$, onde k_N é chamado de *número de onda de Niquist*.

Sem perda de generalidade, podemos estender o raciocínio acima para qualquer dimensão. Assim, na verdade, a série de Fourier (D.2) é uma representação que leva em conta apenas uma amostra discreta de ondas planas, com $\vec{k}_{min} = \vec{k}_f \leq \vec{k} \leq \vec{k}_N = \vec{k}_{max}$.

Agora, iremos assumir que o espectro de potência das flutuações de densidade seguem uma lei de potência do tipo:

$$P(k) = |\delta_k|^2 = A^2 k^n, \quad (D.6)$$

onde A é uma constante a ser definida. A escolha de A é feita da seguinte maneira: vimos que existirá um k_{max} representável. A amplitude de $P(k_{max}) = P(k_N)$ poderá ser fixada assumindo que o modo k_N representa o limite de ruído branco do sistema. Ou seja, se gerarmos um sistema com N partículas através de um processo Poissoniano, o espectro de potência das flutuações de densidade deste sistema é o espectro de ruído branco, dado por:

$$P_{RB}(k) = \frac{1}{N}. \quad (D.7)$$

Então, temos que, em nosso cubo, a amplitude do espectro de potência das flutuações de densidade para o modo de maior k representável (i.e., para o k de Niquist) será fixado como:

$$P(k_N) = P_{RB}(k) = \frac{1}{N}. \quad (D.8)$$

Assim,

$$A^2 = \frac{1}{N k_N^n} = \frac{1}{N} \left(\frac{l}{\pi} \right)^n. \quad (D.9)$$

Por outro lado, estamos considerando que as ondas planas em (D.2) possuem fases distribuídas randomicamente. Assim, precisamos explicitar no argumento da expo-

nencial daquela equação uma função randômica, $\phi_{\vec{k}}$, representando o ângulo de fase para cada onda, e para isto basta que

$$\delta_{\vec{k}} = |\delta_{\vec{k}}| e^{i\phi_{\vec{k}}}, \quad (\text{D.10})$$

ou

$$\delta_{\vec{k}} = Ak^{n/2} e^{i\phi_{\vec{k}}}. \quad (\text{D.11})$$

Notemos, por fim, que, no espaço de uma dimensão:

1. Dado que a malha no espaço “real” está particionada em ν nós;
2. Dado que $\Delta(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, \nu - 1$) é sempre uma função real;

então temos que o par de Fourier, δ_{k_j} (com j definido como $j = -\nu/2 + 1, \dots, \nu/2$), será uma função, complexa, com a propriedade: $\delta_j = (\delta_{-j})^*$, onde o asterisco denota o valor conjugado do número complexo em questão (Carpintero e Muzzio 1995). Para três dimensões, teremos a mesma lei, i.e.:

$$\delta_{ijk} = (\delta_{-i, -j, -k})^*, \quad -\nu/2 + 1 \leq i, j, k \leq \nu/2. \quad (\text{D.12})$$

Tendo em mãos as definições acima, podemos agora gerar numericamente o espectro, da seguinte forma:

1. Determine o tamanho da partição l da malha;
2. Determine o número de nós ν da malha;
3. Determine o expoente n da lei de potência;
4. Determine o número de partículas N ;
5. Compute o valor de A via Eq.(D.9);
6. Compute os números de onda via Eq.(D.4), para os modos $0 \leq n_x, n_y, n_z \leq \nu/2$, e lembrando que $L = l\nu$;
7. Use um gerador de números randômicos para obter $\phi_{\vec{k}}$ no intervalo $[0, 2\pi]$;
8. Compute os $\delta_{\vec{k}}$ via Eq.(D.11);

9. Note que neste ponto teremos o espectro correspondente aos modos positivos, ou seja, apenas os de um octante do espaço \vec{k} . Para obter o espectro completo, basta utilizar a lei de simetria dada pela Eq.(D.12).

Após a obtenção do espectro completo, basta calcularmos a anti-transformada de Fourier dos coeficientes $\delta_{\vec{k}}$ computados acima para se obter o conjunto $\{\Delta(\vec{x})\}$, e, conseqüentemente, a densidade discreta $\rho_{disc}(\vec{x})$, via Eq.(D.1). Obtemos a densidade contínua por interpolação simples. De posse da função $\rho(\vec{x})$, precisamos agora distribuir as partículas. Para tal, utilizamos a *técnica de rejeição*, que se encontra descrita em detalhes em Press et al. 1989.

APÊNDICE E

CONDIÇÕES INICIAIS PARA FUSÃO DE DOIS MODELOS GALÁCTICOS

Partindo do problema gravitacional de dois corpos. A Fig.E.1 ilustra as posições dos dois sistemas de massas M_1 e M_2 , com distâncias \vec{R}_1 e \vec{R}_2 ao referencial de origem O , e com distância do centro de massa (CM) ao referencial O dado pelo vetor \vec{R}_{CM} . No referencial relativo ao CM , estes dois sistemas, em órbita kepleriana, tem energia e momento angular orbitais dados por:

$$E_{tot} = E_{orb} + E_{CM}, \quad (\text{E.1})$$

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{orb} + \vec{L}_{CM}, \quad (\text{E.2})$$

onde

$$E_{orb} \equiv \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2} - \frac{GM_1 M_2}{|\vec{r}|}, \quad (\text{E.3})$$

$$E_{CM} \equiv \frac{M \vec{V}_{CM}^2}{2}, \quad (\text{E.4})$$

$$\vec{L}_{orb} \equiv M_1(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + M_2(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2), \quad (\text{E.5})$$

$$\vec{L}_{CM} \equiv M(\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}). \quad (\text{E.6})$$

Em nossa análise trataremos apenas a parte orbital. Definindo μ como a massa reduzida do sistema:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (\text{E.7})$$

temos que:

$$E_{orb} = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{GM_1 M_2}{r}, \quad (\text{E.8})$$

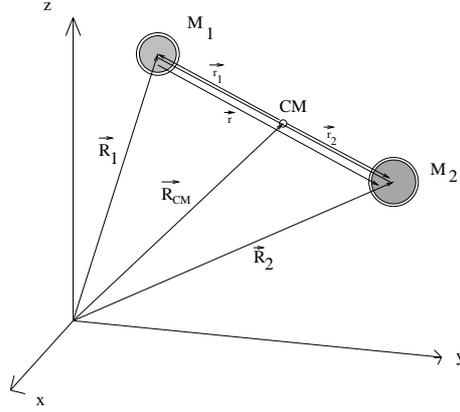


FIG. E.1: Ilustração das posições dos dois sistemas de massas M_1 e M_2 , com relação ao referencial de origem O e ao referencial definido pelo CM.

e

$$\vec{L}_{orb} = \mu(\vec{r} \times \vec{v}), \quad (\text{E.9})$$

com $r \equiv |\vec{r}|$.

Como o momento angular \vec{L} é uma constante do movimento, a órbita se dá num plano perpendicular à L_{orb} . Neste plano, podemos definir um sistema polar com $\vec{r} \equiv \vec{r}(r, \phi)$, de modo que:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\phi \hat{\phi}, \quad (\text{E.10})$$

sendo $v_r = dr/dt$ e $v_\phi = r d\phi/dt$, e \hat{r} e $\hat{\phi}$ os vetores unitários respectivos. Assim, temos que:

$$E_{orb} = \frac{1}{2} \mu (v_r^2 + v_\phi^2) - \frac{GM_1 M_2}{r}, \quad (\text{E.11})$$

$$\vec{L}_{orb} = \mu r v_\phi \hat{k}, \quad (\text{E.12})$$

com o vetor unitário \hat{k} perpendicular ao plano orbital.

Estas equações podem ser combinadas para obtermos as equações de v_r e v_ϕ . Porém, antes iremos normalizar a energia orbital em termos da energia de ligação das componentes. Isto é interessante porque, como vimos, a condição de fusão depende não

só dos valores de E_{orb} e L_{orb} , mas também da energia de ligação dos sistemas individuais. Isto justifica a normalização da energia orbital em termos das energias de ligação dos componentes. Esta normalização pode ser feita seguindo os mesmos passos sugeridos por Binney e Tremaine (1987: BT87, cap.7). Supondo que os componentes estejam em equilíbrio, obedecendo ao teorema do virial, então:

$$E_i = K_i + W_i, \quad (\text{E.13})$$

e

$$2K_i + W_i = 0, \quad (\text{E.14})$$

com $i = 1, 2$, onde a energia cinética total do sistema é:

$$K_i = \frac{M_i \langle v_i^2 \rangle}{2}, \quad (\text{E.15})$$

e a energia potencial gravitacional total do sistema é:

$$W_i = -\gamma_i \frac{GM_i}{r_{hi}}. \quad (\text{E.16})$$

$\langle v_i^2 \rangle$ é a dispersão de velocidades estelares interna da componente i e r_{hi} o seu raio a meia-massa. O fator γ_i depende da distribuição de massa da componente. Combinando as Eqs.(E.13,14) acima, temos que:

$$E_i = -K_i = \frac{W_i}{2} = -E_{Bi}, \quad (\text{E.17})$$

onde E_B é definida como a energia de ligação do sistema.

Escolhemos fazer a normalização pela média geométrica das energias de ligação, i.e.,

$$\bar{E} = \sqrt{E_{B1}E_{B2}} = \frac{\sqrt{M_1M_2}\sqrt{\langle v_1^2 \rangle \langle v_2^2 \rangle}}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma_1\gamma_2}G\frac{M_1M_2}{\sqrt{r_{h1}r_{h2}}}. \quad (\text{E.18})$$

Definindo as seguintes quantidades:

$$\overline{\langle v^2 \rangle} \equiv \sqrt{\langle v_1^2 \rangle \langle v_2^2 \rangle}, \quad (\text{E.19})$$

$$\bar{r}_h \equiv \sqrt{r_{h1}r_{h2}}, \quad (\text{E.20})$$

$$\bar{\gamma} \equiv \sqrt{\gamma_1\gamma_2}, \quad (\text{E.21})$$

$$u \equiv \frac{v}{\langle v^2 \rangle^{1/2}}, \quad (\text{E.22})$$

e

$$x \equiv \frac{r}{\bar{r}_h}, \quad (\text{E.23})$$

obtemos que

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu M} \overline{\langle v^2 \rangle} = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}\frac{G\mu M}{\bar{r}_h}. \quad (\text{E.24})$$

Portanto, a normalização da energia orbital será dada por:

$$\hat{E}' \equiv \frac{E_{orb}}{\bar{E}}. \quad (\text{E.25})$$

Obtemos, portanto:

$$\hat{E}' = \sqrt{\frac{\mu}{M}} \left(u^2 - \frac{A}{x} \right), \quad (\text{E.26})$$

com o parâmetro adimensional definido por:

$$A \equiv \frac{2GM}{\bar{r}_h \overline{\langle v^2 \rangle}} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \sqrt{\frac{M}{\mu}} \sim \frac{5}{2} \sqrt{\frac{M}{\mu}}, \quad (\text{E.27})$$

onde fizemos uso da constatação de que, para maioria dos perfis de densidade de massa de sistemas esfericamente simétricos, $\bar{\gamma} \sim 2/5$ (Spitzer 1969).

Efetuada as transformações das variáveis (E.22,23) na expressão do momento angular orbital, Eq.(E.12), obteremos:

$$L_{orb} = \sqrt{\frac{\mu}{M}} \sqrt{L_1 L_2} (x u_\phi). \quad (\text{E.28})$$

Ou seja, a transformação de variáveis acima nos leva, automaticamente, a uma normalização do momento orbital na forma:

$$\hat{L}' \equiv \frac{L_{orb}}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (\text{E.29})$$

onde

$$L_i \equiv M_i r_{hi} \langle v_i^2 \rangle^{1/2}, \quad (\text{E.30})$$

de modo que:

$$\bar{L} \equiv \sqrt{L_1 L_2} = \mu M \bar{r}_h \langle v^2 \rangle^{1/2}. \quad (\text{E.31})$$

Assim,

$$\hat{L}' = \sqrt{\frac{\mu}{M}} x u_\phi. \quad (\text{E.32})$$

As Eqs.(E.26,32) simplificam se usarmos, no lugar de \hat{E}' e \hat{L}' :

$$\hat{E} \equiv \sqrt{\frac{M}{\mu}} \hat{E}', \quad (\text{E.33})$$

e

$$\hat{L} \equiv \sqrt{\frac{M}{\mu}} \hat{L}', \quad (\text{E.34})$$

de modo que:

$$\hat{E} = u^2 - \frac{A}{x}, \quad (\text{E.35})$$

e

$$\hat{L} = x u_\phi. \quad (\text{E.36})$$

Assim, podemos definir uma grade de órbitas iniciais para os experimentos numéricos. A Fig. E.2 (painel inferior direito) é uma adaptação da figura 7-9 de B&T87, que pode ser utilizada como uma referência para a escolha dos valores iniciais de $[\hat{E}, \hat{L}]$ que irão gerar uma fusão. A posição inicial dos sistemas pode ser então computada da seguinte forma: notemos que, dado $[\hat{E}, \hat{L}]$, de (E.35,36), temos:

$$u_r^2 = -\hat{L}^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + A \left(\frac{1}{x}\right) + \hat{E}, \quad (\text{E.37})$$

e

$$u_\phi = \hat{L} \left(\frac{1}{x}\right). \quad (\text{E.38})$$

Para órbitas fechadas, impusemos inicialmente que $u_r = 0$ (escolhendo o apoastro), de forma que, inserindo em (E.37), temos as soluções:

$$x^\pm = \frac{2\hat{L}^2}{A} \frac{1}{1 \pm e}, \quad (\text{E.39})$$

onde a excentricidade da órbita é dada por

$$e \equiv \left(1 + \frac{4\hat{L}^2\hat{E}}{A^2}\right)^{1/2}. \quad (\text{E.40})$$

Escolhendo a solução para o periastro (o valor da menor distância entre os dois sistemas), temos:

$$r_{min} = r_h x^+ = \frac{2\hat{L}^2}{A} \frac{1}{1 + e}. \quad (\text{E.41})$$

Para órbitas parabólicas e hiperbólicas, a condição inicial imposta foi que os bari-centros dos sistemas estivessem a $4r_h$ de distância um do outro (r_h é o raio à meia-massa).

Os outros painéis da Fig. E.2 mostram as condições iniciais escolhidas para as várias fusões.

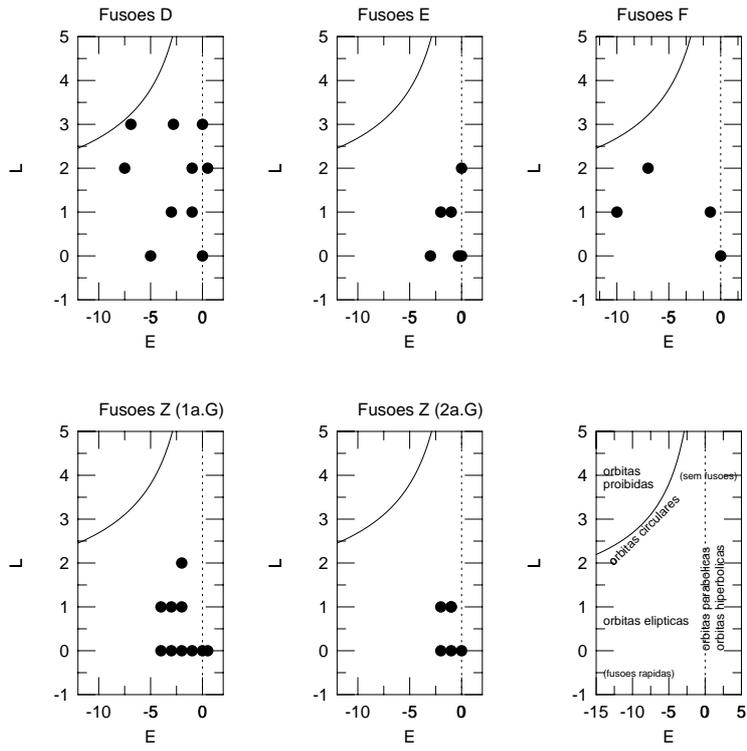


FIG. E.2: Os cinco primeiros painéis de cima para baixo mostram as condições iniciais para fusão no plano E-L, para cada modelo e geração. O painel inferior direito mostra as regiões proibidas e as regiões permitidas das órbitas dos pares.

APÊNDICE F

SISTEMA COM “ESCAPERS” E O COEFICIENTE VIRIAL $2K/W$

O efeito do número de “escapers” sobre o coeficiente $2K/W$, medido considerando todas as partículas, e não somente o conjunto que compõe o sistema em equilíbrio, pode ser entendido em detalhes, uma vez que se trata de um problema extremamente simples.

Imaginemos que algumas partículas estejam distribuídas no “infinito”, “infinitamente” separadas, tal que podemos assumir que a energia total inicial (E_i) deste conjunto de partículas seja igual a zero, assim como as energias potencial gravitacional total inicial (W_i) e cinética total inicial (K_i), i.e.,

$$E_i = K_i = W_i = 0. \tag{F.1}$$

Dado que pequenas perturbações farão com que estas partículas eventualmente se aglomerem num conjunto final em equilíbrio, suas energias: total final (E_f), potencial gravitacional total final (W_f), e cinética total final (K_f) obedecerão às condições:

$$E_f = K_f + W_f \quad (\textit{sistema conservativo}) \tag{F.2}$$

e

$$2K_f + W_f = 0 \quad (\textit{teorema do virial}), \tag{F.3}$$

de forma que a combinação das equações acima nos fornece:

$$E_f = \frac{1}{2}W_f = -K_f. \tag{F.4}$$

Ou seja, o sistema se acomoda de tal forma que sua energia total final é sempre a metade da sua energia potencial gravitacional final, que por sua vez é igual (em módulo) à energia cinética total final. Este resultado é independente da forma como o sistema entrou em equilíbrio (forças gravitacionais são conservativas) e de detalhes dinâmicos internos, como a distribuição das órbitas das partículas do sistema (o sistema obedece ao teorema do virial), como afirmam as equações que foram utilizadas acima.

No entanto, vamos considerar alguns detalhes desta questão, que passam um tanto despercebidas à primeira vista, pois estamos assumindo que o sistema partiu das condições $E_i = K_i = W_i = 0$. Recolocando a questão acima de uma outra forma, podemos dizer que o ganho em energia *pelo sistema final, isto é, removido os “escapers”*, foi de

$$\Delta E = E_f - E_i = E_f, \quad (\text{F.5})$$

onde os ganhos em energia cinética e potencial foram de

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f, \quad (\text{F.6})$$

e

$$\Delta W = W_f - W_i = W_f, \quad (\text{F.7})$$

respectivamente, ou ainda,

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta W = -\Delta K. \quad (\text{F.8})$$

Isto significa que metade da energia potencial gravitacional necessária para trazer o sistema de partículas do “infinito” à configuração final foi absorvida pelo sistema, sendo exatamente o ganho de energia cinética que o sistema adquiriu devido ao colapso. Ou seja, estamos apenas reafirmando o que já foi colocado anteriormente, mas explicitando os ganhos de energia do sistema em equilíbrio final. No caso particular em que $E_i = K_i = W_i = 0$, estes ganhos são inteiramente os próprios valores finais das energias do sistema em equilíbrio.

Evidentemente, como a energia total, *de todo o conjunto de partículas*, precisa ser conservada, os “escapers” precisam carregar a outra metade do ganho em energia potencial gravitacional, já que o colapso é não-dissipativo, e não há como se livrar desta energia de outra maneira (e.g., por radiação).

As condições iniciais do colapso descrito acima são idealizadas. Nas simulações, os modelos evoluem a partir de configurações onde as partículas já estão aglutinadas de alguma forma, embora fora do equilíbrio. Nas simulações, os “escapers” carregam apenas uma pequena fração (até $\sim 10\%$) da massa do sistema inicial. Assim, $\Delta E/E_i \gtrsim -0,1$, de forma que os “escapers” não carregam tanta energia quanto no caso idealizado.

Portanto, ao medirmos o coeficiente virial $2K/W$, considerando todo o conjunto de partículas, teremos:

$$\frac{2K}{W} = \frac{2(K_f + K_e)}{W_f + W_e}, \quad (\text{F.9})$$

onde K_e e W_e são as energias cinética e potencial do conjunto de “escapers”. Como $K_e = K_i - K_f = -\Delta K$, e $W_e = W_i - W_f = -\Delta W$, temos que

$$\frac{2K}{W} = \frac{2(K_f - \Delta K)}{W_f - \Delta W}, \quad (\text{F.10})$$

ou seja, o coeficiente virial, medido para todo o conjunto de partículas, se distingirá do valor -1 , obtido para o sistema em equilíbrio (i.e., removido de “escapers”), por fatores que valem exatamente o quanto de energia cinética e potencial foi absorvida pelos “escapers”, como não poderia deixar de ser.

Ilustramos este efeito na Fig. F.1, onde o valor de $\epsilon_{vir} \equiv |2K/W + 1|$ (quantidade obtida para todo o sistema de partículas, i.e., incluindo os “escapers”) é apresentado como função da fração de “escapers”: quanto mais “escapers” presentes após a relaxação, maior é o desvio de ϵ_{vir} do valor 0. O exemplo desta figura foi obtido para as fusões de Hernquist com uma componente (modelos D, E, F), mas é válido, evidentemente, para qualquer caso.

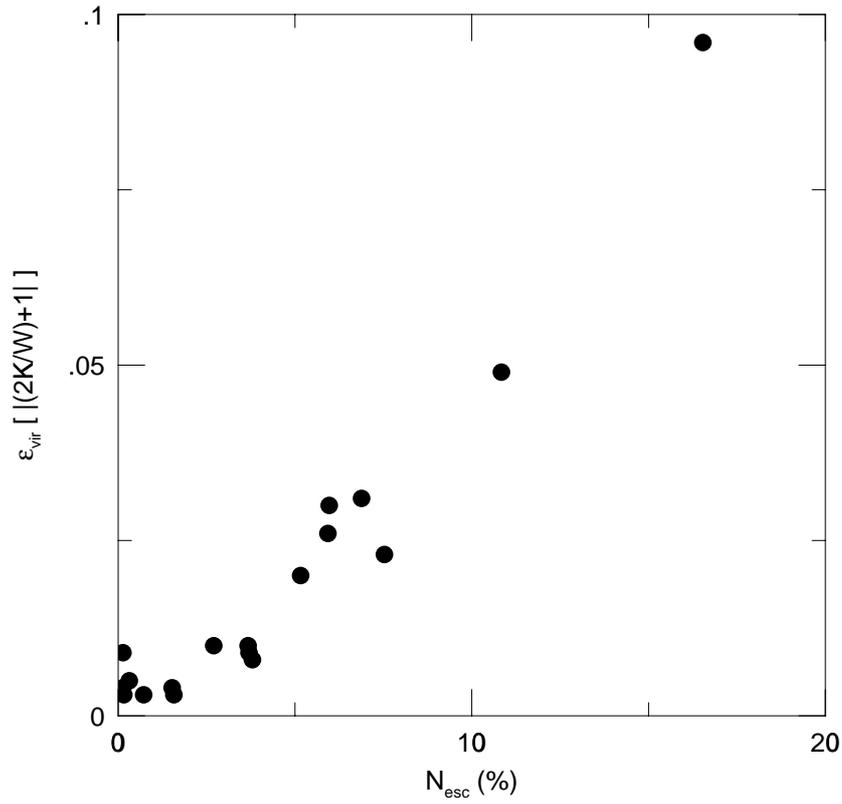


FIG. F.1: Valor de $\epsilon_{vir} \equiv |2K/W + 1|$ (quantidade obtida para todo o sistema de partículas, i.e., incluindo os “escapers”), apresentado como função da fração de “escapers”. Esta figura é um exemplo obtido para as fusões de Hernquist com uma componente (modelos D, E, F).

APÊNDICE G

DEDUÇÃO DETALHADA DO TEOREMA DO VIRIAL A DUAS COMPONENTES

O Teorema do Virial tensorial estrito (a uma componente) pode ser obtido (c.f. Binney e Tremaine 1987, Capítulo 4, de agora em diante, B&T) partindo primeiramente da Equação de Boltzmann acolisional, multiplicando-a pelas componentes de velocidade v_j e integrando-a para todas as velocidades. Esta operação resulta nas Equações de Jeans. Em seguida, estas equações são multiplicadas pelas componentes de posição x_k e integradas para todas as posições, o que nos leva a uma equação tensorial, viz., o teorema do virial.

Seguiremos esta prescrição para o caso em que o sistema é composto por duas espécies ou componentes acolisionais. Neste caso, podemos escrever diretamente as equações de Jeans para cada componente μ (c.f. equação (4.24-a) de B&T):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\mu \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}[\rho_\mu(\bar{v}_i \bar{v}_j)] + \rho_\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{G.1})$$

com

$$\Phi = \Phi_\mu + \Phi_{ext}, \quad (\text{G.2})$$

$$\Phi_\mu \equiv -G \int \frac{\rho_\mu(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3 \vec{x}', \quad (\text{G.3})$$

Φ_μ é o potencial gravitacional gerado pela componente μ , Φ_{ext} é o potencial gravitacional externo, gerado por outra(s) espécie(s). ρ_μ é a densidade de matéria da componente μ . As velocidades médias das partículas do sistema são definidas como na equação (4-20) de B&T, viz.,

$$\bar{v}_i \equiv \frac{1}{\rho_\mu} \int f v_i d^3 \vec{v}, \quad (\text{G.4})$$

onde f é a densidade do espaço de fase, i.e., $f \equiv f(\vec{x}, \vec{v}, t)$.

A Eq. (G.1) deve ser então multiplicada por x_k e integrada para todas as posições para obtermos a equação virial a duas componentes. Assim,

$$\int x_k \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\mu \bar{v}_j) d^3 \vec{x} + \int x_k \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho_\mu (\bar{v}_i \bar{v}_j)] d^3 \vec{x} + \int x_k \rho_\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \vec{x} = 0. \quad (\text{G.5})$$

Analisemos cada um dos termos acima. O primeiro termo do lado esquerdo da Eq. (G.5) pode ser escrito como:

$$\int x_k \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\mu \bar{v}_j) d^3 \vec{x} = \frac{d}{dt} \int \rho_\mu x_k \bar{v}_j d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.6})$$

Para desenvolvermos o segundo termo da Eq. (G.5), utilizemos uma consequência do teorema da divergência (ou de Gauss). Lembremos este teorema. Dada a função vetorial arbitrária $\vec{F}(\vec{x})$, temos que (e.g. B&T, pág 649):

$$\int_{vol} \nabla \cdot \vec{F} d^3 \vec{x} = \int_{sup} \vec{F} \cdot d^2 \vec{S}. \quad (\text{G.7})$$

Se utilizarmos a equação acima para uma função arbitrária $\vec{h} \equiv g\vec{F}$, onde g é um escalar, temos que, dado que $\nabla \cdot h = g\nabla \cdot \vec{F} + (\vec{F} \cdot \nabla)g$,

$$\int_{vol} g\nabla \cdot \vec{F} d^3 \vec{x} = \int_{sup} g\vec{F} \cdot d^2 \vec{S} - \int_{vol} (\vec{F} \cdot \nabla)g d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.8})$$

Chamemos então:

$$g \equiv x_k; \quad (\text{G.9})$$

$$F_i \equiv \rho_\mu (\bar{v}_i \bar{v}_j). \quad (\text{G.10})$$

Assim, aplicando (G.9), (G.10) à Eq.(G.8), encontramos:

$$\int_{vol} x_k \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho_\mu (\bar{v}_i \bar{v}_j)] d^3 \vec{x} = \int_{sup} x_k \rho_\mu (\bar{v}_i \bar{v}_j) dS_i - \int_{vol} \rho_\mu (\bar{v}_i \bar{v}_j) \frac{\partial x_k}{\partial x_i} d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.11})$$

Assumimos que o primeiro termo à direita da equação acima vai a zero, uma vez que a densidade vai diminuindo até ir a zero na superfície que envolve todo o sistema.

Nesta situação, as componentes $(\overline{v_i v_j})dS_i$ são nulas. Por outro lado, identificamos que $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}$, onde o Delta de Kronecker $\delta_{ki} \equiv 1$ se $k = i$, e $\delta_{ki} \equiv 0$ para qualquer outro caso. Logo, a Eq. (G.11) pode ser escrita como:

$$\int x_k \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho_\mu (\overline{v_i v_j})] d^3 \vec{x} = - \int \delta_{ki} \rho_\mu \overline{v_i v_j} d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.12})$$

Ainda, podemos definir o tensor de energia cinética K^μ da componente μ como:

$$K_{jk}^\mu \equiv \frac{1}{2} \int \rho_\mu \overline{v_j v_k} d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.13})$$

Assim, assumindo a simetria do tensor K_{jk}^μ (c.f. B&T, pág 212), a Eq.(G.12) pode ser escrita como:

$$\int x_k \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho_\mu (\overline{v_i^\mu v_j^\mu})] d^3 \vec{x} = -2K_{kj}^\mu = -2K_{jk}^\mu \quad (\text{G.14})$$

Agora, retornemos à Eq. (G.5), onde analisaremos o último termo do lado esquerdo. Dada a Eq. (G.2), temos que este termo pode ser expandido como:

$$\int x_k \rho_\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \vec{x} = \int x_k \rho_\mu \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_j} d^3 \vec{x} + \int x_k \rho_\mu \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial x_j} d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.15})$$

Definindo o tensor de energia potencial gravitacional $W^{\mu\mu}$ gerado pela componente μ (c.f. B&T, pág 67) como:

$$W_{jk}^{\mu\mu} \equiv - \int \rho_\mu x_j \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_k} d^3 \vec{x}; \quad (\text{G.16})$$

então podemos escrever para o primeiro termo do lado direito da Eq. (G.15), assumindo a simetria do tensor ($W_{jk}^{\mu\mu} = W_{kj}^{\mu\mu}$, c.f. B&T, pág 68),

$$-W_{kj}^{\mu\mu} \equiv \int \rho_\mu x_k \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_j} d^3 \vec{x} = -W_{jk}^{\mu\mu}. \quad (\text{G.17})$$

Definindo agora o tensor de energia potencial gravitacional de interação $W^{\mu-ext}$, entre a componente externa e a componente μ , como:

$$W_{kj}^{\mu-ext} \equiv - \int \rho_\mu x_k \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial x_j} d^3 \vec{x}; \quad (\text{G.18})$$

notamos então que o segundo termo da Eq. (G.15) também pode ser reescrito em termos de $W^{\mu-ext}$, porém tal tensor não é simétrico: $W_{kj}^{\mu-ext} \neq W_{jk}^{\mu-ext}$.

Inserindo as Eqs. (G.6), (G.14), (G.17), e (G.18) em (G.5), tomando o cuidado para renomear os índices “mudos” (“dummy”), obtemos então:

$$\frac{d}{dt} \int \rho_\mu x_k \bar{v}_j d^3 \vec{x} = 2K_{kj}^\mu + W_{kj}^{\mu\mu} + W_{jk}^{\mu-ext}. \quad (\text{G.19})$$

Agora, definimos o tensor momento de inércia I_{jk}^μ da componente μ como:

$$I_{jk}^\mu \equiv \int \rho_\mu x_j x_k d^3 \vec{x} \quad (\text{G.20})$$

Derivando o tensor I_{jk}^μ em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt} I_{jk}^\mu = \int \frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} x_j x_k d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.21})$$

Usando a equação de continuidade,

$$\frac{\partial \rho_\mu}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_\mu \bar{v}_i)}{\partial x_i}, \quad (\text{G.22})$$

na equação anterior, obtemos:

$$\frac{d}{dt} I_{jk}^\mu = - \int \frac{\partial(\rho_\mu \bar{v}_i)}{\partial x_i} x_j x_k d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.23})$$

Usemos novamente o teorema da divergência. Chamemos:

$$g \equiv x_j x_k; \quad (\text{G.24})$$

$$F_i \equiv \rho_\mu \bar{v}_i. \quad (\text{G.25})$$

Assim, aplicando (G.25), (G.26) e (G.8) à Eq.(G.24), encontramos:

$$\int_{vol} \frac{\partial(\rho_\mu \bar{v}_i)}{\partial x_i} x_j x_k d^3 \vec{x} = \int_{sup} x_j x_k \rho_\mu \bar{v}_i dS_i - \int_{vol} \rho_\mu \bar{v}_i \frac{\partial(x_j x_k)}{\partial x_i} d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.26})$$

Pelas mesmas razões argumentadas anteriormente, o primeiro termo do lado direito da equação acima vai a zero. Assim, fazendo uso dos deltas de Kronecker, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt} I_{jk}^\mu = - \int \rho_\mu \bar{v}_i (x_j \delta_{ki} + x_k \delta_{ji}) d^3 \vec{x} = - \int \rho_\mu (\bar{v}_k x_j + \bar{v}_j x_k) d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.27})$$

Por outro lado, o termo do lado esquerdo da Eq.(G.20) pode ser re-escrito como:

$$\frac{d}{dt} \int \rho_\mu x_k \bar{v}_j d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho_\mu (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} I_{jk}^\mu. \quad (\text{G.28})$$

Retornando, portanto, à Eq.(G.20), e dada a óbvia simetria do tensor I_{jk}^μ (c.f. Eq. (G.21)), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} I_{kj}^\mu = 2K_{kj}^\mu + W_{kj}^{\mu\mu} + W_{jk}^{\mu-ext}. \quad (\text{G.29})$$

Assumindo que para o sistema composto pela espécie μ o tensor I_{kj}^μ é independente do tempo, então obtemos o teorema do virial tensorial a duas componentes:

$$2K_{kj}^\mu + W_{kj}^{\mu\mu} + W_{jk}^{\mu-ext} = 0. \quad (\text{G.30})$$

A versão escalar da Eq.(G.30) pode ser obtida tomando o traço ($\text{tr}[A] \equiv \sum_{j=1}^3 A_{jj}$) dos tensores desta equação.

Deduziremos agora a equação (7.1), que foi admitida na breve dedução do teorema do virial a duas componentes apresentada no Capítulo 7. Para tal, renomeemos: $V_{jk}^{\mu-ext} \equiv W_{kj}^{\mu\mu} + W_{jk}^{\mu-ext}$. Notemos que este tensor pode ser re-escrito como:

$$V_{jk}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (W_{jk}^{\mu\nu} + W_{kj}^{\mu\nu}); \quad (\text{G.31})$$

com (c.f. G.18):

$$W_{jk}^{\mu\nu} \equiv - \int \rho_\mu x_j \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_k} d^3 \vec{x}. \quad (\text{G.32})$$

Assim, usando (G.3) e (G.31), e lembrando que:

$$\nabla_{\vec{x}} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \right) = \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3}; \quad (\text{G.33})$$

então aplicando estas equações em (G.32) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (W_{jk}^{\mu\nu} + W_{kj}^{\mu\nu}) = \\ -\frac{G}{2} \int \int \rho_{\mu}(\vec{x}) \rho_{\nu}(\vec{x}') \frac{[x_j(x'_k - x_k) + x_k(x'_j - x_j)]}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3 \vec{x}' d^3 \vec{x} \end{aligned} \quad (\text{G.34})$$

Tomemos o traço da equação tensorial acima:

$$\begin{aligned} \bar{V}^{\mu\nu} \equiv \text{tr}[V_{jk}^{\mu\nu}] \equiv \sum_{j=1}^3 V_{jj}^{\mu\nu} = \\ -\frac{G}{2} \int \int \rho_{\mu}(\vec{x}) \rho_{\nu}(\vec{x}') \sum_{j=1}^3 \frac{[2x_j(x'_j - x_j)]}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3 \vec{x}' d^3 \vec{x}, \end{aligned} \quad (\text{G.35})$$

ou, identificando o vetor $\vec{x} \equiv \vec{r} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, temos:

$$\bar{V}^{\mu\nu} = G \int \int \rho_{\mu}(\vec{r}) \rho_{\nu}(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{r}. \quad (\text{G.36})$$

Agora, assumindo simetria esférica do sistema, a equação anterior pode ser integrada da seguinte forma: chamemos a integral $\bar{I}_{\nu}(\vec{r})$ de

$$\bar{I}_{\nu}(\vec{r}) \equiv \int \rho_{\nu}(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} d^3 \vec{r}'. \quad (\text{G.37})$$

Então,

$$\bar{I}_{\nu}(\vec{r}) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho_{\nu}(\vec{r}') r'^2 dr' \int_0^{\pi} \frac{rr' \cos \theta - r^2}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{3/2}} \sin \theta d\theta \quad (\text{G.38})$$

Agora chamemos a integral \bar{J} de

$$\bar{J} \equiv \int_0^\pi \frac{rr' \cos \theta - r^2}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{3/2}} \sin \theta d\theta; \quad (\text{G.39})$$

e, fazendo a substituição de variáveis $u = \cos \theta$, temos:

$$\bar{J} = \int_{-1}^{+1} \frac{rr'u - r^2}{[r^2 + r'^2 - 2rr'u]^{3/2}} du. \quad (\text{G.40})$$

Ainda, chamando

$$x \equiv r^2 + r'^2 - 2rr'u, \quad (\text{G.41})$$

temos que

$$u = \frac{r^2 + r'^2 - x}{2rr'}, \quad (\text{G.42})$$

de forma que

$$du = \frac{-dx}{2rr'}. \quad (\text{G.43})$$

Ainda,

$$rr'u - r^2 = \frac{r^2 + r'^2 - x - 2r^2}{2} = \frac{r'^2 - r^2 - x}{2}. \quad (\text{G.44})$$

Substituindo (G.44), (G.43) e (G.41) em (G.40), e notando os limites de integração

$$u = -1 \rightarrow x = r^2 + r'^2 + 2rr' = (r + r')^2,$$

$$u = +1 \rightarrow x = r^2 + r'^2 - 2rr' = (r - r')^2,$$

obtemos:

$$\bar{J} = -\frac{1}{4rr'} \int_{(r+r')^2}^{(r-r')^2} \frac{r'^2 - r^2 - x}{x^{3/2}} dx. \quad (\text{G.45})$$

Desmembrando:

$$\bar{J} = -\frac{1}{4rr'} \left(\int_{(r+r')^2}^{(r-r')^2} \frac{r'^2 - r^2}{x^{3/2}} dx - \int_{(r+r')^2}^{(r-r')^2} \frac{1}{x^{1/2}} dx \right). \quad (\text{G.46})$$

$$\bar{J} = -\frac{1}{4rr'} \left[-2(r'^2 - r^2) \frac{1}{x^{1/2}} \Big|_{(r+r')^2}^{(r-r')^2} - 2x^{1/2} \Big|_{(r+r')^2}^{(r-r')^2} \right]. \quad (\text{G.47})$$

Com pouca álgebra, temos que:

$$\bar{J} = \frac{1}{2rr'} \left(\frac{r'^2 - r^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - 2r'|\vec{r} - \vec{r}'| \right). \quad (\text{G.48})$$

Deste ponto, analisemos portanto as duas condições $\bar{J}(r' < r)$ e $\bar{J}(r' > r)$:

$$\bar{J}(r' < r) = \frac{1}{2rr'} \left(\frac{(r' - r)(r' + r)}{-(r' - r)} - 2r' + r - r' \right) = \frac{2}{r}. \quad (\text{G.49})$$

$$\bar{J}(r' > r) = \frac{1}{2rr'} \left(\frac{(r' - r)(r' + r)}{r' - r} - 2r' + r' - r \right) = 0. \quad (\text{G.50})$$

Lembrando, portanto, da definição de \bar{J} (Eq. (G.40)), e inserindo o resultado (G.50) em (G.39), obtemos:

$$\bar{I}_\nu(\vec{r}) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho_\nu(\vec{r}') \vec{r}'^2 d\vec{r}'. \quad (\text{G.51})$$

Definindo a massa da componente ν no interior de \vec{r} como

$$M_\nu(\vec{r}) \equiv 4\pi \int_0^r \rho_\nu(\vec{r}') \vec{r}'^2 d\vec{r}', \quad (\text{G.52})$$

então:

$$\bar{I}_\nu(\vec{r}) = \frac{M_\nu(\vec{r})}{r}. \quad (\text{G.53})$$

Finalmente, lembrando da definição de \bar{I}_ν (Eq. (G.38)), e inserindo a última equação acima em (G.37), obtemos:

$$\bar{V}^{\mu\nu} = -G \int \rho_\mu \frac{M_\nu(\vec{r})}{r} d^3\vec{r}, \quad (\text{G.54})$$

que é precisamente a Eq. (7.1) utilizada anteriormente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aceves, H.; Perea, J. On two mass estimators for clusters of galaxies. **A&A**, v. 345, p. 439-447, May 1999.
- Aguilar, L. A.; Merritt, D. The structure and dynamics of galaxies formed by cold dissipationless collapse. **ApJ**, v. 354, p. 33-51, May 1990.
- Aguilar, L. A. (UNAM, México, 1998). Comunicação pessoal.
- Antonov, V. A. On the problem of stability in stellar systems. In: **The dynamics of galaxies and star clusters**, Omarov, G. B. ed. Nauka, Alma Ata, 1973, p. 139.
- Aragon-Salamanca, A.; Ellis, R.; Couch, W.; Carter, D., Evidence for systematic evolution in the properties of galaxies in distant clusters. **MNRAS**, v. 262, p. 764-794, June 1993
- Barnes, J.; Hut, P. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. **Nature**, v.324, p. 446-449, Dec. 1986.
- Barnes et al. Dynamical instabilities in spherical stellar systems. **ApJ**, v. 300, p. 112-131, Jan. 1986b.
- Barnes, J.; Hut, P. Error analysis of a tree code. **ApJS**, v. 70, p. 389-417, June 1989.
- Bekki, K., The fundamental plane and merger scenario. I. Star formation history of galaxy mergers and origin of the fundamental plane. **ApJ**, v. 496, p. 713-727, Mar. 1998.
- Bellazzini, M. The fundamental straight line of galactic globular clusters. **New Astronomy**, v. 3, p. 219-230, Mar. 1998.
- Bender, R.; Burstein, D.; Faber, S. M. Dynamically hot galaxies. I - Structural properties. **ApJ**, v. 399, p. 462-477, Nov. 1992.
- Bender, R.; Saglia, R. P. Elliptical galaxies: detailed structure, scaling relations and formation. In: Galaxy dynamics, conference 8-12 Aug 1998. **Proceedings**. San Francisco: ASP, Ago. 1999 (ASP Conference Series vol. 182). p. 108.
- Bender, R.; Ziegler, B., The redshift evolution of the stellar populations in elliptical galaxies. **ApJL**, v. 463, p. L51-L54, June 1996.
- Bertschinger, E. Disponível em: <<http://arcturus.mit.edu/cosmics/>>. Acesso em: 1999.
- Bertschinger, E., Simulations of structure formation in the universe. **ARA&A**, v. 36, p. 599-654, 1998.

- Binney, J., The phase space structure of R to the 1/4th galaxies - Are these galaxies 'isothermal' after all? **MNRAS**, v. 200, p. 951-964, Sep. 1982.
- Binney, J.; Tremaine, S. **Galactic dynamics**. Princeton: Princeton Univ. Press, 1987.
- Bower, R. G.; Lucey, J. R.; Ellis, R. S. Precision photometry of early type galaxies in the Coma and Virgo clusters - a test of the universality of the colour / magnitude relation - part two - analysis **MNRAS**, v. 254, p. 601-610, Feb. 1992.
- Bruzual, A. G.; Charlot, S. Spectral evolution of stellar populations using isochrone synthesis. **ApJ**, v. 405, p. 538-553, Mar. 1993.
- Burstein, D.; Bender, R., Faber; S. M.; Nolthenius, R. Global relationships among the physical properties of stellar systems. **AJ**, v. 114, p. 1365, Oct. 1997.
- Busarello, G.; Capaccioli, M.; Capozziello, S.; Longo, G.; Puddu, E. The relation between the virial theorem and the fundamental plane of elliptical galaxies. **A&A**, v. 320, p. 415-420, Apr. 1997.
- Caon, N.; Capaccioli, M.; D'Onofrio, M. On the shape of the light profiles of early-type galaxies. **MNRAS**, v. 265, p. 1013-1020, Dec. 1993.
- Capelato, H. V.; de Carvalho, R. R.; Carlberg, R. G. Mergers of dissipationless systems: clues about the fundamental plane. **ApJ**, v. 451, p. 525-530, Oct. 1995.
- Capelato, H.V.; de Carvalho, R.R.; Carlberg, R.G. The fundamental plane of ellipticals: the role of nonhomology. In: Galaxy Scaling Relations, conference Dec. 1997. **Proceedings**. Florianópolis: Springer-Verlag, 1997. p. 331.
- Carlberg, R. G. Dissipative formation of an elliptical galaxy. **ApJ**, v. 286, p. 403-415, Nov. 1984.
- Carpintero, D. D.; Muzzio, J. C. Radial orbit instability in a Hubble-expanding universe. **ApJ**, v. 440, p. 5-21, Feb. 1995.
- Chandrasekhar, S. **Principles of stellar dynamics**. New York: Dover, 1942.
- Ciotti, L. Stellar systems following the $R^{1/m}$ luminosity law. **A&A**, v. 249, p. 99-106, Sep. 1991.
- Ciotti, L.; Lanzoni, B.; Renzini, A. The tilt of the fundamental plane of elliptical galaxies - I. Exploring dynamical and structural effects. **MNRAS**, v. 282, p. 1-12, Sep. 1996.
- Ciotti, L.; Lanzoni, B. Stellar systems following the $R^{1/m}$ luminosity law. II. Anisotropy, velocity profiles, and the fundamental plane of elliptical galaxies. **A&A**, v. 321, p. 724-732, May 1997.

- Cole, S.; Lacey, C. G. The structure of dark matter haloes in hierarchical clustering models. **MNRAS**, v. 281, p. 716-730, July 1996.
- Coles, P.; Lucchin, F. **Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure**. Chichester: Wiley, 1995.
- Dantas, C. C.; Ribeiro, L. B. R.; Capelato, H. V.; de Carvalho, R. R. The two-component virial theorem and the physical properties of stellar systems. **ApJ**, v. 528, p. L5-L8, Jan. 2000.
- de Carvalho, R. R.; Djorgovski, S. Systematic differences between the field and cluster elliptical galaxies. **ApJ**, v. 389, p. L49-L53, Apr. 1992.
- de La Rosa, I. G.; de Carvalho, R. R.; Zepf, S. **The fundamental plane of elliptical galaxies in compact groups**. Preprint, astro-ph/0104324. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 2001.
- de Vaucouleurs, G. Recherches sur les nebuleuses extragalactiques, **Ann. d'Astrophys.**, v. 11, p. 247-255, 1948.
- de Zeeuw, T.; Franx, M. Structure and dynamics of elliptical galaxies. **ARA&A**, v. 29, p. 239-279, 1991.
- de Zeeuw, T. **Dynamics of triaxial galaxies**. Preprint astro-ph/9510145. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 1998.
- Djorgovski, S. G.; Davis, M. Fundamental properties of elliptical galaxies. **ApJ**, v. 313, p. 59-68, Feb. 1987.
- Djorgovski, S. G. The universality of distance-indicator relations. In: Moriond Astrophysics Workshop, Starbursts and galaxy evolution. **Proceedings**. Gif sur Yvette: Editions Frontières, 1988, p. 549.
- Djorgovski, S. G.; de Carvalho, R. R. Optical properties of early type galaxies. In: Windows on Galaxies. **Proceeding**. Dordrecht: Kluwer, 1990, p. 9.
- Djorgovski, S. G.; Santiago, B. X. The meaning and the implications of the fundamental plane. In: Structure, Dynamics and Chemical Evolution of Elliptical Galaxies, Proc. ESO/EIPC Workshop. **Proceedings**. Garching: ESO, 1993, p. 59.
- Dressler, A.; Lynden-Bell, D.; Burstein, D.; Davies, R.L.; Faber, S.; Terlevich, R.J.; Wegner, G. Spectroscopy and photometry of elliptical galaxies. I - A new distance estimator. **ApJ**, v. 313, p. 42-58, Feb. 1987.
- Dubinski, J. **Cold dark matter halos**. Dissertação (Mestrado em Astrofísica) - Universidade de Toronto, Canadá, 1988.

- Evstigneeva, E. A. et al. **Effect of the environment on the fundamental plane of elliptical galaxies.** Preprint astro-ph/0007215. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 2000.
- Forbes, D. A.; Ponman, T. J.; Brown, R. J. N. **Dependence of the fundamental plane scatter on galaxy age.** Preprint astro-ph 9809319. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 1998.
- Forbes, D. A.; Ponman, T. J. **On microlensing event rates and optical depth toward the galactic center.** Preprint astro-ph/9906368. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 1999.
- Funato, Y.; Makino, J.; Ebisuzaki, T. Violent relaxation is not a relaxation process. **PASJ**, v. 44, p. 613-621, Dec. 1992.
- Gerhardt et al., **A relationship between nuclear black hole mass and galaxy velocity dispersion.** Preprint astro-ph/0006289. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 2000.
- Gibbons, R. A.; Fruchter, A. S.; Bothun, G. D. Deviations from the fundamental plane and the peculiar velocities of clusters. **AJ**, v. 121, p. 649-661, Feb. 2001.
- Gleason, A., **Who is Fourier?** A mathematical adventure. Japanese Language Services Staff (editores), Transnational College of LEX, 1997.
- Gnedin, O. Y.; Hernquist, L.; Ostriker, J. P. **Tidal shocking by extended mass distributions.** Preprint, astro-ph/9709161. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 1997.
- Gott III, J. R. Dynamics of rotating stellar systems: collapse and violent relaxation. **ApJ**, v. 186, p. 481-500, Dec. 1973.
- Graham, A.; Colless, M. Some effects of galaxy structure and dynamics on the fundamental plane. **MNRAS**, v. 287, p. 221-229, May 1997.
- Hénon, M. Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems. **A&A**, v. 24, p. 229-240, Apr. 1973.
- Hernquist, L. Performance characteristics of tree codes. **ApJS**, v. 64, p. 715-734, Aug. 1987.
- Hernquist, L. An analytical model for spherical galaxies and bulges. **ApJ**, v. 356, p. 359-364, June 1990.
- Hernquist, L. Structure of merger remnants. II - Progenitors with rotating bulges. **ApJ**, v. 409, p. 548-562, June 1993.
- Hjorth, J.; Madsen, J. Small deviations from the $R^{1/4}$ law, the fundamental plane, and phase densities of elliptical galaxies. **ApJ**, v. 445, p. 55-61, May 1995.

- Hjorth, J.; Madsen, J. Violent relaxation and the $R \propto t^{1/4}$ law. **MNRAS**, v. 253, p. 703-709, Dec. 1991
- Hjorth, J.; Madsen, J. Statistical Mechanics of Galaxies. **MNRAS**, v. 265, p. 237-240, Nov. 1993.
- Hoffman, Y.; Shlosman, I.; Shaviv, G. Collapse and violent relaxation of a spherical protogalaxy **MNRAS**, v. 189, p. 737-749, Dec. 1979.
- Hoffman, Y.; Ribak, E. Constrained realizations of Gaussian fields - A simple algorithm. **ApJ**, v. 380, p. L5-L8, Oct. 1991.
- Huss, A.; Jain, B.; Steinmetz, M. How Universal Are the Density Profiles of Dark Halos? **ApJ**, v. 517, p. 64-69, May 1999.
- Kandrup, H. E.; Mahon, M. E.; Smith, H. Energy and phase space mixing for self-gravitating systems of stars. **A&A**, v. 271, p. 440-450, Apr. 1993.
- King, I. R. The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models. **AJ**, v. 71, p. 64-70, Feb. 1966.
- Kormendy, J.; Djorgovsky, S. Surface photometry and the structure of elliptical galaxies. **ARA&A**, v. 27, p. 235-279, 1989.
- Kritsuk, A.G. On the fundamental properties of dynamically hot galaxies. **MNRAS**, v. 284, p. 327-334, Jan. 1997.
- Larson, R. B. Models for the formation of disc galaxies. **MNRAS**, v. 176, p. 31-52, July 1976.
- Lightman, A. P.; Shapiro, S. L. Globular Clusters. **Rev. Mod. Phys.**, v. 50, p. 437-500, 1978.
- Lima Neto, G. B.; Gerbal, D.; Márquez, I. The specific entropy of elliptical galaxies: an explanation for profile-shape distance indicators? **MNRAS**, v. 309, p. 481-495, Oct. 1999.
- Limber, D.N. Effects of intracluster gas and dust upon the virial theorem. **ApJ**, v. 130, p. 414-420, Sep. 1959.
- Londrillo et al. Dissipationless galaxy formation revisited. **MNRAS**, v. 250, p. 54-68, May 1991.
- Luwel, M.; Servene, G. On the energy distribution function for a one-dimensional gravitational system. **MNRAS**, v. 203, p. 15P-18P, Apr. 1983.
- Lynden-Bell, D. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. **MNRAS**, v. 136, p. 101-110, 1967.

- Madsen, J. On the applicability of the statistical mechanical theories of violent relaxation. **ApJ**, v. 316, p. 497-501, May 1987.
- May, A.; van Albada, T. S. Dynamical constraints during violent relaxation and their effects on the final state **MNRAS**, v. 209, p. 15-23, July 1984.
- Maoz, D. Detectability of high-redshift elliptical galaxies in the hubble deep field. **ApJL**, v. 490, p. L135-L139, Dec. 1997.
- McGlynn, T. A. Dissipationless collapse of galaxies and initial conditions. **ApJ**, v. 281, p. 13-30, June 1984.
- McLaughlin, D. E. **Binding energy and the fundamental plane of globular clusters**. Preprint/astro-ph 0002086. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 2000.
- McMillan, S. L. W.; Aarseth, S. J. An $O(N \log N)$ integration scheme for collisional stellar systems **ApJ**, v. 414, p. 200-212, Sep. 1993.
- Merritt, D; Aguilar, L. A., A numerical study of the stability of spherical galaxies **MNRAS**, v. 217, p. 787-804, Dec. 1985.
- Merritt, D. Chaos and elliptical galaxies. In: The nature of elliptical. **Proceedings**. Stromlo: Kluwer, 1996, p. 26.
- Merritt, D. **Elliptical galaxy dynamics**. Preprint astro-ph/9810371. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 1998.
- Mihos, J. C.; Hernquist, L. Induced population gradients in galaxy merger remnants. **ApJ**, v. 427, p. 112-124, May 1994.
- Mihos, C. **Dynamics of mergers**. Preprint astro-ph/9903115. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 1999.
- Navarro, J. F.; Frenk, C. S.; White S. D. M. The structure of cold dark matter halos. **ApJ**, v. 462, p. 563-570, May 1996.
- Pahre, M. A.; Djorgovski, S. G.; de Carvalho, R. R. The near-infrared fundamental plane of elliptical galaxies. **ApJL**, v. 453, p. L17-L20, Nov. 1995.
- Pahre, M. A.; Djorgovski, S. G.; de Carvalho, R. R. A Tolman surface brightness test for universal expansion and the evolution of elliptical galaxies in distant clusters. **ApJ**, v. 456, p. 79-83, Jan. 1996.
- Pahre, M. A.; Djorgovski, S. G.; de Carvalho, R. R. Near-infrared imaging of early-type galaxies. III. The near-infrared fundamental plane. **AJ**, v. 116, p. 1591-1605, Oct. 1998.

- Palmer, P. L. **Galactic dynamics and N-body simulations**. Greece: Springer-Verlag, 1993. 418 p.
- Palmer, P. L. **Stability of collisionless stellar systems**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. 349 p.
- Polyachenko, V. L.; Shukhman, I. G. General models of collisionless spherically symmetric stellar systems - a stability analysis. **Soviet Astronomy**, v. 25, p. 533-540, Oct. 1981.
- Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; Flannery, W. T, **Numerical recipes - the art of scientific computing**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
- Pryor, C.; Meylan, G. Velocity dispersions for galactic globular clusters. In: Structure and dynamics of globular clusters. **Proceedings**. Dordrecht: ASP, 1993, p. 357.
- Renzini, A.; Ciotti, L. Transverse dissections of the fundamental planes of elliptical galaxies and clusters of galaxies. **ApJ**, v. 416, p. L49-53, Oct. 1993.
- Salvador-Solé, E.; Solanes, J. M.; Manrique, A. Merger versus accretion and the structure of dark matter halos. **ApJ**, v. 499, p. 542-550, May 1998.
- Sandage, A. Star formation rates, galaxy morphology, and the Hubble sequence. **A&A**, v. 161, p. 89-101, June 1985.
- Sanders, H. **The fundamental plane of elliptical galaxies with modified Newtonian dynamics**. Preprint astro-ph/9907326. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 1999.
- Schaeffer, R.; Maurogordato, S.; Cappi, A.; Bernardeau, F. The fundamental plane of galaxy clusters. **MNRAS**, v. 263, p. L21-L24, July 1993.
- Schade, D.; Carlberg, R. G.; Yee, H. K. C.; López-Cruz, O. Evolution of cluster and field elliptical galaxies at $0.2 < Z < 0.6$ in the CNOC cluster survey. **ApJL**, v. 464, p. 63-68, June 1996.
- Schweitzer et al. Correlations between line strengths and fine structure in elliptical galaxies. **ApJL**, v. 364, p. L33-L36, Dec. 1990.
- Scodeggio, M., Gavazzi, G.; Belsole, E.; Pierini, D.; Boselli, A. The tilt of the fundamental plane of early-type galaxies: wavelength dependence. **MNRAS**, v. 301, p. 1001-1018, Dec. 1998.
- Shier, L. M.; Fischer, J. Stellar kinematics of merging galaxies: clues to the origins of elliptical galaxies. **ApJ**, v. 497, p. 163-170, Apr. 1998.

- Shu, F. H. On the statistical mechanics of violent relaxation. **ApJ**, v. 225, p. 83-94, Oct. 1978.
- Siopis et al. **Dynamics of cuspy triaxial galaxies with a supermassive black hole**. Preprint astro-ph/0010326. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 2000.
- Smith Jr., H. Application of the virial theorem to clusters of galaxies with unseen mass. **ApJ**, v. 241, p. 63-66, Oct. 1980.
- Spergel, D. N.; Steinhardt, P. J. Observational evidence for self-interacting cold dark matter. **Phys. Rev. Lett.**, v. 84, p. 3760-3763, 2000.
- Spitzer, L. Equipartition and the Formation of Compact Nuclei in Spherical Stellar Systems. **ApJ**, v. 158, p. L139-L142, Dec. 1969.
- Sygnnet, J. F. et al. Stability of gravitational systems and gravothermal catastrophe in astrophysics. **ApJ**, v. 276, p. 737-745, Jan. 1984.
- Tinsley, B. Stellar evolution in elliptical galaxies. **ApJ**, v. 178, p. 319-336, Dec. 1972.
- Tremaine, S. **The geometry of phase mixing**. Preprint astro-ph/9812146. Disponível em: <<http://br.arXiv.org/>>. Acesso em: 1998.
- van Albada, T. S. Dissipationless galaxy formation and the R to the 1/4-power law. **MNRAS**, v. 201, p. 939-955, Dec. 1982.
- Villumsen, J. V. Violent relaxation and dissipationless collapse. **ApJ**, v. 284, p. 75-89, Sep. 1984.
- White, S.D.M. Simulations of merging galaxies. **MNRAS**, v. 184, p. 185-203, July 1978.
- White, S.D.M. Mixing processes in galaxy mergers. **MNRAS**, v. 191, p. 1P-4P, Apr. 1980.
- White, S. D. M. **Violent relaxation in hierarchical clustering**. MPA preprint no. 930, 1996.
- White, S. D. M. **The physical origin of galaxy scaling relations**. MPA preprint no. 1010, 1997.
- Worthey, G. Comprehensive stellar population models and the disentanglement of age and metallicity effects. **ApJS**, v. 95, p. 107-149, Nov. 1994.