

1. Classificação <i>INPE-COM.10/PE</i> <i>C.D.U.: 528.4</i>		2. Período <i>Julho/77</i>	4. Critério de Distribuição: interna ☐ externa ☒
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>OTIMIZAÇÃO EM GEODÉSIA</i>			
5. Relatório nº <i>INPE-1052-PE/060</i>	6. Data <i>Julho/77</i>	7. Revisado por <i>Denizar Blitzhow</i>	
8. Título e Sub-Título <i>A ELIPSE PADRÃO E SUA RELAÇÃO COM O COEFICIENTE DE RIGIDEZ</i>		9. Autorizado por <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
10. Setor <i>CEA/GED</i>	Código <i>425</i>	11. Nº de cópias <i>14</i>	
12. Autoria <i>HANS-ULRICH PILCHOWSKI</i>		14. Nº de páginas <i>36</i>	
13. Assinatura Responsável 		15. Preço	
16. Sumário/Notas <i>Os métodos de triangulação geodésica permitem o uso de diversas técnicas para minimizar os erros inerentes a cada método. Este trabalho apresenta a relação existente entre dois instrumentos utilizados nestas técnicas, isto é, como se relacionam a elipse padrão relativa e o coeficiente de rigidez de figuras.</i>			
17. Observações <i>Este trabalho foi parcialmente subvencionado pelo FNDCT através do convênio FINEP-271-CT.</i> <i>Este trabalho será apresentado na reunião da Sociedade Brasileira de Cartografia - Fortaleza, CE, 24 a 29 de Junho de 1977.</i>			

ÍNDICE

	Pag.
LISTA DE FIGURAS	<i>iv</i>
INTRODUÇÃO	1
I. ELIPSE E PODÁRIA PADRÃO	1
II. LEI DE PROPAGAÇÃO DOS COEFICIENTES DE PESO	6
III. ELIPSE PADRÃO RELATIVA PARA UM TRIÂNGULO	8
IV. COEFICIENTE DE RIGIDEZ PARA UM TRIÂNGULO	11
V. MATRIZ DOS COEFICIENTES DE PESO DE UM TRIÂNGULO	14
VI. RELAÇÃO ENTRE O COEFICIENTE DE RIGIDEZ E AS CURVAS PADRÃO <u>RE</u> LATIVA	28
CONCLUSÃO	31
BIBLIOGRAFIA	33

LISTA DE FIGURAS

	Pag.
FIG. I.1 - ELIPSE DE ERRO OBTIDA A PARTIR DO CORTE DE UMA SUPERFÍCIE GAUSSIANA	2
FIG. I.2 - ELIPSE DE ERRO, ELIPSE E PODÁRIA PADRÃO	5
FIG. III.1 - POSIÇÃO DA ELIPSE E PODÁRIA RELATIVA	9
FIG. III.2 - REDE GEODÉSICA COM UM TRIÂNGULO EM DESTAQUE	9

INTRODUÇÃO

A Geodésia utiliza diversos métodos para minimizar os erros de medidas. O presente trabalho mostra a relação existente entre dois instrumentos utilizados nestes métodos. Primeiro, os coeficiente de rigidez de figuras, já há muito conhecido e usado em geodésia; segundo, a elipse padrão relativa, não muito divulgada entre os geodestas até o presente. Esses dois instrumentos possibilitam uma visualização das tendências da propagação dos erros numa rede geodésica. Como a elipse padrão relativa não é um instrumento que possibilite a obtenção de todas as informações necessárias para isto, introduz-se também a curva pedal da elipse padrão relativa, isto é, a podária padrão relativa.

As principais utilidades da elipse padrão relativa e sua curva pedal são:

- a) Analisar, a partir de dados aproximados, o esquema de uma triangulação ou poligonação a ser realizada.
- b) Permitir ao geodesta tomar conhecimento das fraquezas e erros existentes em triangulações antigas.
- c) Introduzir melhorias nas redes antigas em função das falhas nelas descobertas, através deste instrumento.

Como a obtenção dos coeficientes de rigidez é bem mais simples que a das curvas padrão relativas é vantagem estabelecer uma relação entre elas, de modo a poder calcular as segundas em função das primeiras.

I. ELIPSE E PODÁRIA PADRÃO

É possível obter a elipse de erro a partir da função densidade de probabilidade $F(x_1, x_2)$ de uma distribuição normal, a qual se define por:

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \sqrt{1-\rho_{x_1 x_2}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \left(1-\rho_{x_1 x_2}^2 \right)} \cdot \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{x_1}^2} - 2 \left(\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} \right) \rho_{x_1 x_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{x_2}^2} \right] \right\} \quad (I.1)$$

Geometricamente, pode-se considerar $F(x_1, x_2)$ como um eixo natural ao plano $x_1 x_2$. Então $G[F(x_1, x_2), (x_1, x_2)] = 0$ representa uma superfície Gaussiana, no espaço tridimensional, como mostra a Fig. I.1.

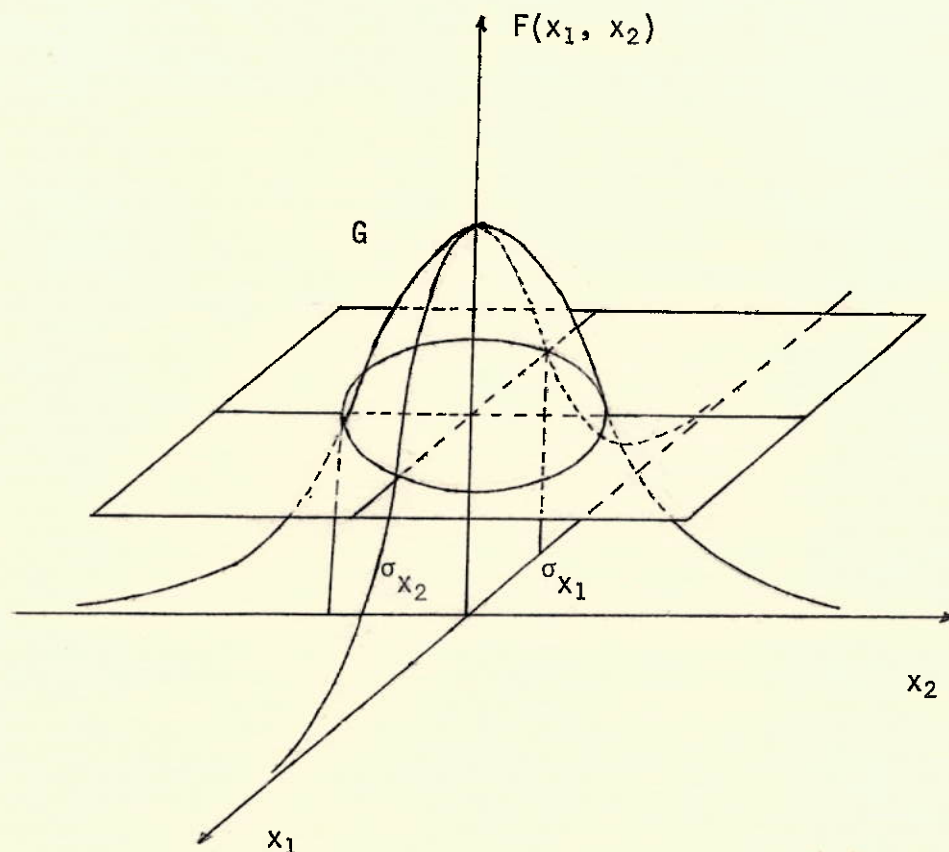


Fig. I.1 - Elipse de Erro Obtida a Partir do Corte de uma Superfície Gaussiana

σ_{x_1} e σ_{x_2} são os desvios padrões de distribuição nas regiões x_1 e x_2 respectivamente; $\sigma_{x_1}^2$ e $\sigma_{x_2}^2$ são suas variâncias; $\rho_{x_1 x_2}$ é o coeficiente de correlação entre elas; finalmente μ_1 e μ_2 são os valores médios das medidas em x_1 e x_2 , respectivamente. Para $\sigma_{x_1} \neq \sigma_{x_2}$, determina-se uma equação que representa uma família de elipses. Quando a superfície h é interceptada pelo plano que passa por seus pontos de inflexão, a função $F(x_1, x_2)$ torna-se constante. Donde,

$$c^2 = - \frac{1}{\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 - \sigma_{x_1 x_2}^2} \cdot \left[(x_1 - \mu_1)^2 \sigma_{x_2}^2 - (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) \sigma_{x_1 x_2} + (x_2 - \mu_2)^2 \sigma_{x_1}^2 \right] \quad (I.2)$$

representa uma família de elipses.

Busca-se do ajustamento as relações entre as variâncias e os coeficientes de peso Q_{xx} :

$$\begin{cases} \sigma_{x_i}^2 = Q_{x_i x_i} \sigma_0^2 \\ \sigma_{x_i x_j} = Q_{x_i x_j} \sigma_0^2 \end{cases} \quad p/i, j = 1, 2 \quad (I.3)$$

onde σ_0^2 é a variância da unidade de peso.

Substituindo as (I.3) nas (I.2), obtêm-se:

$$\frac{1}{(Q_{x_1x_1} Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_2}^2)} \cdot \left[(x_1 - \mu_1)^2 Q_{x_2x_2} - 2 (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) Q_{x_1x_2} + \right. \\ \left. + (x_2 - \mu_2)^2 Q_{x_1x_1} \right] = c^2 \sigma_0^2 \quad (I.4)$$

Daqui em diante é preferível trabalhar com a equação da elipse em função dos coeficientes de peso.

Como é possível obter mais de um conjunto x_1 , x_2 e c , para o qual a elipse tem as mesmas dimensões, diferindo apenas na localização de seu centro. fixa-se $c^2 = 1$ e encontra-se a equação da elipse, como segue:

$$\frac{1}{Q_{x_1x_1} Q_{x_2x_2} - Q_{x_1x_2}^2} \left[Q_{x_2x_2} x_1^2 - 2 Q_{x_1x_2} x_1 x_2 + Q_{x_1x_1} x_2^2 \right] = \sigma_0^2 \quad (I.5)$$

que neste trabalho é denominado de elipse de erro.

Chama-se elipse padrão a elipse de erro que tiver como eixos maior e menor os coeficientes de peso correspondentes às variâncias máxima e mínima, respectivamente. Ao efetuar-se a medida de um ponto geodésico, não é possível conhecer a priori a direção de maior erro. Deve-se então obter a elipse padrão através de uma rotação de eixos, tal que seus eixos se tornem máximos e mínimos, respectivamente.

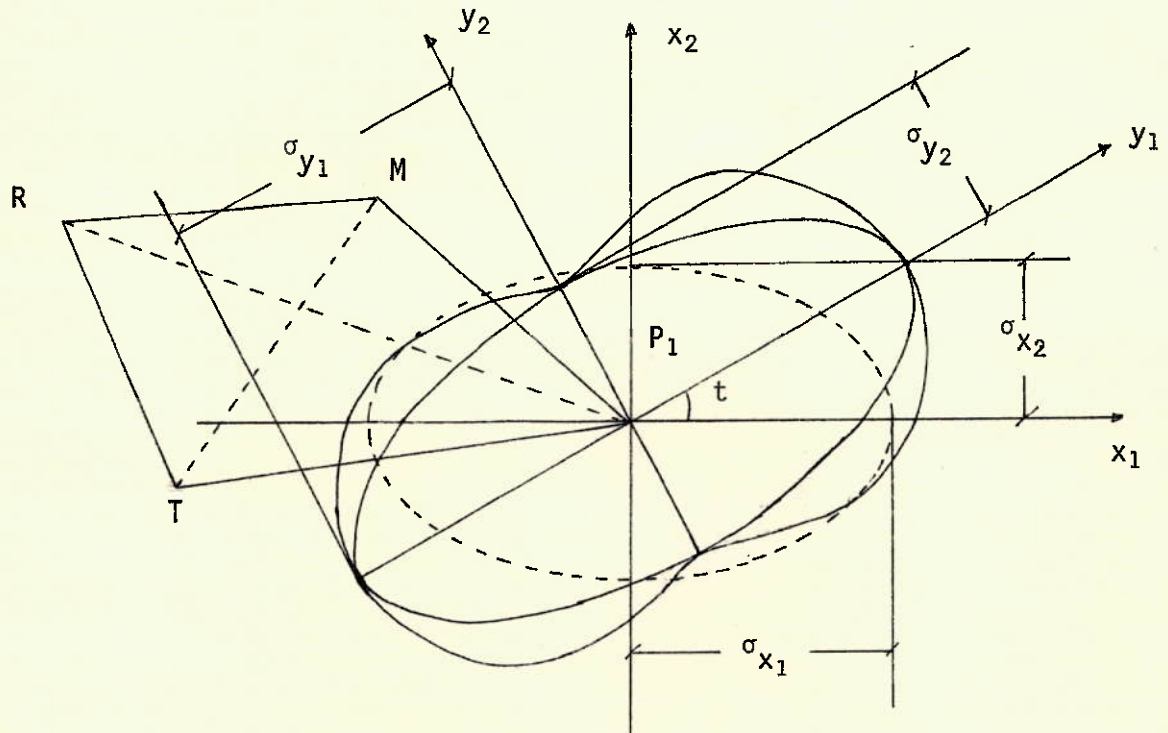


Fig. I.2 - Elipse de Erro, Elipse e Podária Padrão

Esta rotação é feita usando as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= x_1 \cos t - x_2 \sin t \\ Y_2 &= x_2 \cos t - x_1 \sin t \end{aligned} \right\} \quad (I.6)$$

Encontram-se então, as seguintes relações entre Q_{xx} e Q_{yy} em função do ângulo t :

$$\left. \begin{aligned} Q_{y_1 y_1} &= Q_{x_1 x_1} \cos^2 t + Q_{x_2 x_2} \sin^2 t + 2 Q_{x_1 x_2} \sin t \cos t \\ Q_{y_2 y_2} &= Q_{x_1 x_1} \sin^2 t + Q_{x_2 x_2} \cos^2 t - 2 Q_{x_1 x_2} \sin t \cos t \end{aligned} \right\} \quad (I.7)$$

Derivando estas expressões em função de t e igualando a zero, para cumprir com a condição de extremo; e, a seguir, obtendo as derivadas segundo encontram-se os Q_{yy} máximo e mínimo, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} Q_{y_1 y_1} &= \frac{1}{2} \left\{ Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} + \left[(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4 Q_{x_1 x_2}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ Q_{y_2 y_2} &= \frac{1}{2} \left\{ Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} - \left[(Q_{x_1 x_1} - Q_{x_2 x_2})^2 + 4 Q_{x_1 x_2}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

que são os eixos da elipse padrão.

Na otimização de medidas é muito útil conhecer não somente a elipse padrão mas, também, a curva pedal em relação a seu centro de simetria, a qual é denominada de podária padrão, e cuja equação é:

$$Q_{x_1 x_1} x_1^2 - 2 Q_{x_1 x_2} x_1 x_2 + Q_{x_2 x_2} x_2^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} (x_1^2 + x_2^2)^2 \quad (I.9)$$

II. LEI DE PROPAGAÇÃO DOS COEFICIENTES DE PESO

A partir do quadrado do desvio de uma distribuição normal (e não de uma distribuição geral), desenvolvendo em série por Taylor, obtém-se:

$$(x_i - \mu_i)^2 = g(\mu_i) + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial x_2} dx_2 + R_n \quad (II.1)$$

onde R_n são termos de ordem superior, que são negligenciáveis.

Pode-se assim obter a variância $\sigma_{x_i}^2$ de uma variável aleatória x_i , definida em um espaço amostral contínuo bidimensional S , que por definição é o segundo momento de desvio da distribuição, isto é,

$$\sigma_{x_i}^2 \equiv \langle (x_i - \mu_i)^2 \rangle, \quad (\text{Bjerhammar, 1973}):$$

$$\sigma_{x_i}^2 = \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \right]^2 \sigma_{y_1}^2 + \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \right]^2 \sigma_{y_2}^2 + 2 \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \sigma_{y_1 y_2} \quad (II.2)$$

Ao extrair a raiz quadrada de ambos os lados desta igualdade, resulta:

$$\sigma_{x_i} = \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \sigma_{y_1} + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \sigma_{y_2} \quad (II.3)$$

Então, utilizando as equações (I.3), resulta:

$$\sigma_{x_i} = Q_{x_i x_i}^{\frac{1}{2}} \sigma_0 \quad (II.4)$$

a qual substituída em (II.3), dá:

$$Q_{x_i x_i}^2 = \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} Q_{y_1 y_1}^2 + \frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} Q_{y_2 y_2}^2 \quad (II.5)$$

por analogia encontra-se:

$$Q_{x_i x_j}^2 = \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_1} \quad \frac{\partial(x_j - \mu_j)}{\partial y_1} \right]^{\frac{1}{2}} Q_{y_1 y_1}^2 + \left[\frac{\partial(x_i - \mu_i)}{\partial y_2} \quad \frac{\partial(x_j - \mu_j)}{\partial y_2} \right]^{\frac{1}{2}} Q_{y_2 y_2}^2 \quad (II.6)$$

III. ELIPSE PADRÃO RELATIVA PARA UM TRIÂNGULO

A elipse padrão relativa indica a precisão relativa entre pontes de uma triangulação ou uma poligonal, estendendo-se este conceito para um trajeto da triangulação ou poligonal. Neste caso a podária também é denominada podária padrão relativa.

As equações da elipse e podária padrão relativas são dadas pelas mesmas equações da elipse e podária padrão, com apenas uma diferença: os valores das coordenadas são substituídos pelos valores das diferenças entre coordenadas, e as variâncias e os coeficientes de peso são agora calculados em função destas diferenças.

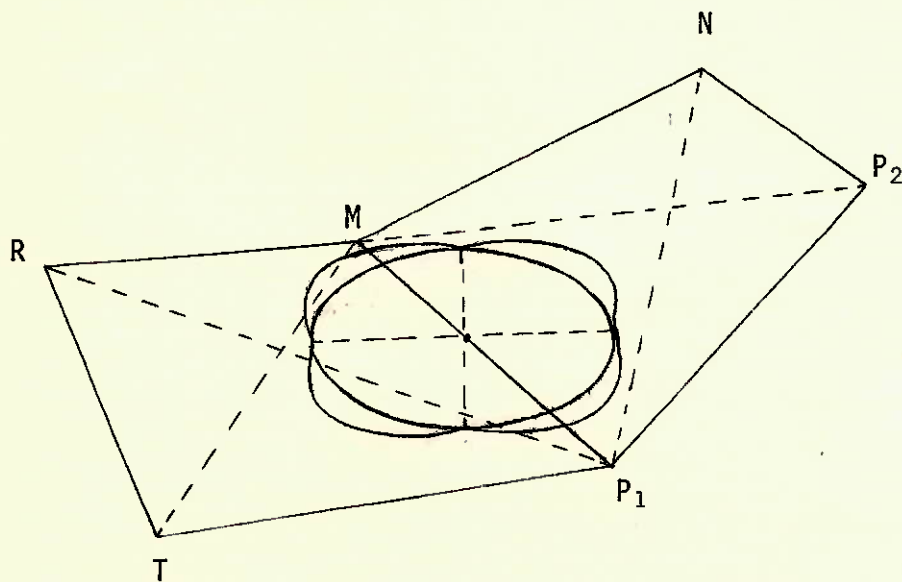


Fig. III.1 - Posição da Elipse e Podária Relativa

Seja um triângulo, componente de uma rede de triangulação, como mostra a Fig. III.2.

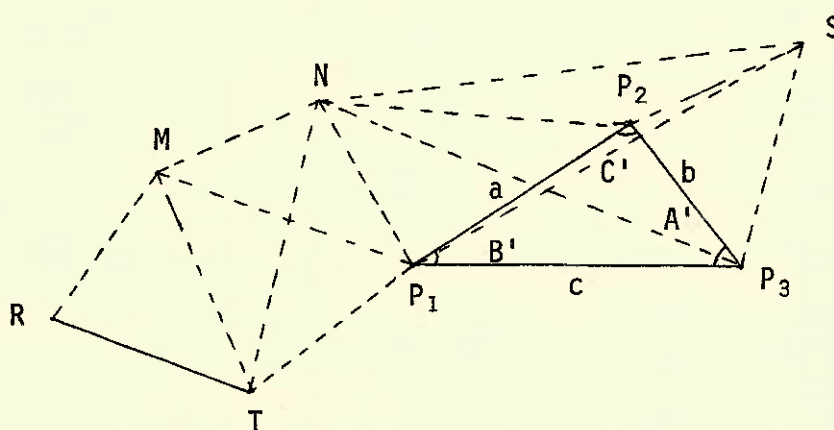


Fig. III.2 - Rede Geodésica com um Triângulo em Destaque

Desta figura pode-se deduzir, que:

$$a = \frac{c \cdot \sin A'}{\sin C'} \quad (\text{III.1})$$

onde C' pode ser substituído por $[180^\circ - (A' + B')]$, resultando:

$$a = \frac{c \cdot \sin A'}{\sin(A' + B')} \quad (\text{III.2})$$

Derivando parcialmente esta expressão e substituindo estas derivadas nas (II.5), obtêm-se:

$$\frac{1}{Q_{aa}^2} = a(\cotg A' \frac{1}{Q_{A'A'}^2} - \cotg B' \frac{1}{Q_{B'B'}^2}) \quad (\text{III.3})$$

Elevando esta expressão ao quadrado, obtêm-se o coeficiente de peso:

$$Q_{aa} = a^2(\cotg^2 A' Q_{A'A'} + \cotg^2 B' Q_{B'B'} - 2 \cotg A' \cotg B' Q_{A'B'}) \quad (\text{III.4})$$

Analogamente:

$$Q_{bb} = b^2(\cotg^2 B' Q_{B'B'} + \cotg^2 A' Q_{A'A'} - 2 \cotg B' \cotg A' Q_{A'B'}) \quad (\text{III.5})$$

E a partir das (III.4) e (III.5), obtêm-se:

$$Q_{ab} = -ab(\cotg^2 A' Q_{A'A'} + \cotg^2 B' Q_{B'B'} - 2 \cotg A' \cotg B' Q_{A'B'}) \quad (\text{III.6})$$

Equações análogas podem ser encontradas envolvendo o 1a do c.

Finalmente, a elipse padrão relativa em função dos lados a e b, para o triângulo considerado, é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{Q_{aa} Q_{bb} - Q_{ab}^2} (Q_{bb} x_2^2 - 2 Q_{ab} x_2 y_2 + Q_{aa} y_2^2) = \sigma_0^2 \quad (\text{III.7})$$

consequentemente, a podária padrão correspondente é representada pela equação:

$$Q_{aa} x_2^2 - 2 Q_{ab} x_2 y_2 + Q_{bb} y_2^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} (x_2^2 + y_2^2)^2 \quad (\text{III.8})$$

IV. COEFICIENTE DE RIGIDEZ PARA UM TRIÂNGULO

Os triângulos que constituem uma rede geodésica são triângulos esféricos. Ao transformar um triângulo esférico para um triângulo plano utilizando o teorema de Legendre encontra-se um ângulo do triângulo plano pela seguinte expressão:

$$A' = A - \frac{A+B+C-180^0}{3} \quad (\text{IV.1})$$

A expressão da propagação dos erros é dada por:

$$M_{A'} = \pm m \left[\left(\frac{\partial A'}{\partial A} \right)^2 + \left(\frac{\partial A'}{\partial B} \right)^2 + \left(\frac{\partial A'}{\partial C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.2})$$

onde $M_{A'}$ é o erro médio quadrático a posteriori e m o erro médio quadrático a priori.

Para ser possível calcular a (IV.2) deriva-se a (IV.1) parcialmente,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A'}{\partial A} &= \frac{2}{3} \\ \frac{\partial A'}{\partial B} &= -\frac{1}{3} \\ \frac{\partial A'}{\partial C} &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (IV.3)$$

Donde a (IV.1) fica:

$$M_{A'} = \pm m \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (IV.4)$$

Analogamente o erro médio quadrático de um lado, por exemplo do lado "a", é dado pela expressão:

$$M_a = \pm m \left[\left(\frac{\partial a}{\partial A} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (IV.5)$$

mas $a = c \cdot \frac{\sin A'}{\sin C'}$, A' e C' são funções de A , B e C o que implica em que a (IV.5), se torne:

$$M_a = \pm m \left\{ \left[\frac{\partial a}{\partial A'} \frac{\partial A'}{\partial A} + \frac{\partial a}{\partial C'} \frac{\partial C'}{\partial A} \right]^2 + \left[\frac{\partial a}{\partial A'} \frac{\partial A'}{\partial B} + \frac{\partial a}{\partial C'} \frac{\partial C'}{\partial B} \right]^2 + \left[\frac{\partial a}{\partial A'} \frac{\partial A'}{\partial C} + \frac{\partial a}{\partial C'} \frac{\partial C'}{\partial C} \right]^2 \right\} \quad (IV.6)$$

Substituindo os valores das derivadas parciais, obtêm-se:

$$M_a = \pm \operatorname{am} \left\{ \frac{2}{3} [\cotg^2 A' + \cotg A' \cotg B' + \cotg^2 B'] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.7})$$

onde m deverá ser expresso em partes do raio médio da terra. Então, m será:

$$m = m'' \operatorname{sen} 1'' \quad (\text{IV.8})$$

Desenvolvendo o $\log [\operatorname{sen}(x - \Delta x)]$ por Taylor, temos (Mattos, 1947):

$$\delta_{x_i} = \gamma \operatorname{sen} 1'' \cotg x_i \quad (\text{IV.9})$$

onde γ é o módulo dos logaritmos Neperianos e δ_{x_i} é a diferença tabular para o $\log \operatorname{sen} 1''$. Assim, obtêm-se finalmente

$$M_a'' = \pm \frac{m'' a}{\gamma} \left[\frac{2}{3} (\delta_A^2 + \delta_A \delta_{B'} + \delta_{B'}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.10})$$

Reescrevendo a (IV.10) de maneira mais conveniente para nosso objetivo, tem-se:

$$M_a'' = \pm \frac{a}{\gamma} m'' \sqrt{\frac{2}{3} R_a}$$

onde

$$R_a = (\delta_A^2 + \delta_A \delta_{B'} + \delta_{B'}^2) \quad (\text{IV.11})$$

é o coeficiente de rigidez do triângulo.

Quando o mesmo método é utilizado para um polígono plano qualquer, generaliza-se

$$R = \frac{D - C}{C} \sum_{a=1}^u R_a \quad (\text{IV.12})$$

onde u é o total de lados considerados, D representa o número de novas direções de cada figura e C o número de equações de condição.

V. MATRIZ DOS COEFICIENTES DE PESO DE UM TRIÂNGULO

A matriz dos coeficientes de peso é dada por:

$$[Q_x] = \frac{1}{\sigma_0^2} [\sigma_x] \quad (\text{V.1})$$

onde $[\sigma_x]$ é a matriz variância-co-variância.

Para obter a matriz dos coeficientes de peso de um triângulo plano em função de seus ângulos A' , B' e C' , é necessário linearizar as funções:

$$\left. \begin{aligned} A' &= A'_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ B' &= A'_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ C' &= A'_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.2})$$

Linearizando por Taylor, tem-se:

$$A'_i = f_i(x'_1, x'_2, x'_3) + (x_1 - x'_1) \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + (x_2 - x'_2) \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + (x_3 - x'_3) \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \quad (\text{V.3})$$

$p/i = 1, 2, 3$ e não levando em conta termos de ordem superior.

Donde

$$A_i = \beta_i + x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \quad (V.4)$$

onde

$$\beta_i = f_i(x_1^1, x_2^1, x_3^1) + x_1^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + x_3^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_3}$$

Mas $A_i^1 = A_i + E_i$, onde A_i são os ângulos não ajustados e os E_i as correções mais prováveis.

Pode-se obter os E_i como segue:

$$A_i + E_i = \beta_i + x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3}$$

$$E_i = \beta_i - A_i + x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3}$$

$$E_i = v_i + x_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \quad (V.5)$$

onde $\beta_i - A_i = v_i$.

Das equações (V.5) deduz-se as equações:

$$\xi_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} E_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} E_3 \quad (V.6)$$

A somatória $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} E_i E_j$ é representada da seguinte maneira [pEE], onde os "p" são os pesos adotados para as observações. Quando se procura obter [pEE] = mínimo, pode-se utilizar o método de Lagrange (Richardus, 1966):

$$\begin{aligned}
 F = [pEE] - 2 K_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} E_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} E_3 \right) - \\
 - 2 K_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} E_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} E_3 \right) - \\
 - 2 K_3 \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} E_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} E_3 \right) \quad (V.7)
 \end{aligned}$$

onde K_1 , K_2 e K_3 são coeficientes desconhecidos diferentes de zero. Isto implica que as seguintes expressões sejam nulas:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} E_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} E_3 &= 0 \\
 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} E_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} E_3 &= 0 \\
 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} E_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} E_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} E_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (V.8)$$

Nestes caso pode-se reescrever F da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 F = [pEE] - 2 E_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} K_3 \right) - \\
 - 2 E_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} K_3 \right) -
 \end{aligned}$$

$$- 2 E_3 \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} K_3 \right] \quad (V.9)$$

Para minimização de $[pEE]$, F deve ser derivada parcialmente em função dos E_i , isto é:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial E_1} &= 2 p_{11} E_1 - 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} K_1 - 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} K_2 - 2 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} K_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial E_2} &= 2 p_{22} E_2 - 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} K_1 - 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} K_2 - 2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} K_3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial E_3} &= 2 p_{33} E_3 - 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} K_1 - 2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} K_2 - 2 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} K_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (V.10)$$

Donde

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= q_{11} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} K_3 \right] \\ E_2 &= q_{22} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} K_3 \right] \\ E_3 &= q_{33} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} K_3 \right] \end{aligned} \right\} \quad (V.11)$$

nestas equações $q_{ii} = \frac{1}{p_{ii}}$.

Substituindo as (V.11) nas (V.6), resulta:

$$\begin{aligned}\xi_i &= q_{11} \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} K_3 \right) \\ q_{22} \frac{\partial f_i}{\partial x_2} &\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} K_3 \right) \\ q_{33} \frac{\partial f_i}{\partial x_3} &\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} K_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} K_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} K_3 \right)\end{aligned}\quad (V.12)$$

Efetuando as multiplicações indicadas (V.12) e transpondo os termos, pode-se obter:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] K_1 + \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right] K_2 + \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right] K_3 \\ \xi_2 &= \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] K_1 + \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] K_2 + \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right] K_3 \quad (V.13) \\ \xi_3 &= \left[q \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right] K_1 + \left[q \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right] K_2 + \left[q \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right] K_3\end{aligned}$$

onde, por exemplo:

$$\left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right] = q_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + q_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + q_{33} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \quad (V.14)$$

De acordo com a lei de propagação dos coeficientes de peso, é possível afirmar que a (V.14) é semelhante a $h_{x_i x_j}$. Donde os coeficientes desconhecidos K_i são obtidos a partir das $h_{x_i x_j}$ e das equações (III.13).

Portanto, são dados por:

$$\begin{aligned} K_1 &= \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] \xi_1 + \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \xi_2 + \left[q \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right] \xi_3 \\ K_2 &= \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right] \xi_1 + \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] \xi_2 + \left[q \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right] \xi_3 \\ K_3 &= \left[q \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right] \xi_1 + \left[q \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right] \xi_2 + \left[q \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right] \xi_3 \quad (V.15) \end{aligned}$$

Das (V.11) e das (V.13), conclui-se facilmente que,

$$[pEE] = K_1 \xi_1 + K_2 \xi_2 + K_3 \xi_3 \quad (V.16)$$

Aplicando a lei da propagação das variâncias sobre E_i e E_j se $f_i(x)$ for $(x_i - \mu_i)$, temos:

$$\sigma_{E_i E_j} = \frac{[pEE]}{\mu}$$

então:

$$Q_{E_i E_j} = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{[pEE]}{\mu} \quad (V.17)$$

Na sequência, aplica-se esta teoria para o caso de considerar a função F , como segue:

$$F = L_0 + L_1 A + L_2 B + L_3 C, \quad (V.18)$$

para $L_0 = a_0 + b_0 + c_0$ e onde os L_i são parâmetros arbitrários. Se um dos L_i for igual a 1 e os outros forem considerados nulos, pode-se escrever: $F = A$ para $i = 1$, por exemplo (uma vez que $\sigma_A^2 = Q_{AA}\sigma^2$, onde é necessário calcular Q_{AA}).

Mas,

$$A' + B' + C' = (A + E_{A'}) + (B + E_{B'}) + (C + E_{C'}). \quad (V.19)$$

Utilizando as (V.11) nas (V.19), resultam:

$$\left. \begin{aligned} E_{A'} &= q_{A'A'} \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} K_{C'} \right] \\ E_{B'} &= q_{B'B'} \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} K_{C'} \right] \\ E_{C'} &= q_{C'C'} \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} K_{C'} \right] \end{aligned} \right\} \quad (V.20)$$

Substituindo estas nas (V.19) e (V.18) sucessivamente, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 F = & L_0 + L_1 A' + L_1 q_{A'A'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} K_{C'} \right) + \\
 & + L_2 B' + L_2 q_{B'B'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} K_{C'} \right) + \\
 & + L_3 C' + L_3 q_{C'C'} \left(\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} K_{A'} + \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} K_{B'} + \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} K_{C'} \right) \quad (V.21)
 \end{aligned}$$

E aplicando as (V.12), encontra-se:

$$\xi_A = - \left(a_0 + q_{A'A'} \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] \right),$$

após sua substituição nas (V.13) pode-se escrever:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] K_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} \right] K_{B'} + \\
 & + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} \right] K_{C'} + \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] q_{A'A'} + a_0 = 0 \\
 & \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} \right] K_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] K_{B'} + \\
 & + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} \right] K_{C'} + \left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] q_{B'B'} + b_0 = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (V.22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} \right] K_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} \right] K_{B'} + \\ & + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] K_{C'} + \left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] q_{C'C'} + c_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (V.22)$$

Multiplicando cada uma destas por um coeficiente auxiliar S_i e somando-as com a (V.21), obtêm-se:

$$\begin{aligned} F = L_0 + L_1 A' + L_2 B' + L_3 C' + & \left(L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} + \right. \\ & + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} \left. \right) K_{A'} + \left(L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} + \right. \\ & + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} \left. \right) K_{B'} + \left(L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} + \right. \\ & + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \left. \right) K_{C'} + \left(\left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \right. \\ & + \left. \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} \right) K_{A'} + \left(\left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} \right) K_{B'} + \\
 & + \left(\left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \right. \\
 & + \left. \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} \right) K_{C'} + \left(\left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] q_{A'A'} + a_0 \right) S_{A'} + \\
 & + \left(\left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] q_{B'B'} + b_0 \right) S_{B'} + \left(\left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] q_{C'C'} + c_0 \right) S_{C'} \quad (V.23)
 \end{aligned}$$

Esta função é transformada de forma tal que dela resulta a função de observação mais uma constante. Os S_i são escolhidos de maneira que os K_i sejam todos nulos, disto resulta que:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{B'} + \\
 & + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{C'} + \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} L \right] = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (V.24)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \\
 & + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{C'} + \left[q \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} L \right] = 0 \\
 & \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{A'} + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{B'} + \\
 & + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} + \left[q \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} L \right] = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (V.24)$$

E então conclue-se que:

$$\begin{aligned}
 F = L_0 + L_1 A' + L_2 B' + L_3 C' + & \left(\left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] q_{A'A'} + a_0 \right) S_{A'} + \\
 + & \left(\left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] q_{B'B'} + b_0 \right) S_{B'} + \left(\left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] q_{C'C'} + c_0 \right) S_{C'} ,
 \end{aligned}$$

ou então:

$$F = (L_0 + a_0 S_{A'} + b_0 S_{B'} + c_0 S_{C'}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[L_1 + \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} \right] q_{A'A'} + \left[L_2 + \left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} \right] q_{B'B'} + \\
 & + \left[L_3 + \left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} \right] q_{C'C'} . \quad (V.25)
 \end{aligned}$$

Aplicando as regras da propagação das variâncias, tem-se:

$$Q_{FF} = \left[L_i + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right] S_i \right]^2 q_{ii} , \quad p/i = A', B', C' \quad (V.26)$$

a qual, transformada adequadamente, é escrita:

$$\begin{aligned}
 Q_{FF} &= q_{A'A'} L_1 L_1 + q_{B'B'} L_2 L_2 + q_{C'C'} L_3 L_3 + \\
 & + \left[L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{A'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} + \\
 & + \left[L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{B'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} + \\
 & + \left[L_1 q_{A'A'} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{C'}} + L_2 q_{B'B'} \frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{C'}} + L_3 q_{C'C'} \frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} . \quad (V.27)
 \end{aligned}$$

Substituindo a (V.24) na (V.27) temos, de acordo com a (V.25):

$$F = A = \left[L_1 + \left[\frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} \right] q_{A'A'} + \left[L_2 + \left[\frac{\partial f_{B'}}{\partial x_{B'}} \right] S_{B'} \right] q_{B'B'} + \left[L_3 + \left[\frac{\partial f_{C'}}{\partial x_{C'}} \right] S_{C'} \right] q_{C'C'} \quad (V.28)$$

onde

$$L_1 = 1 \text{ e } L_2 = L_3 = 0;$$

então, de acordo com a (V.24), tem-se:

$$\left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} \right] S_{A'} = - \left[q \frac{\partial f_{A'}}{\partial x_{A'}} L \right] \quad (V.29)$$

isto é,

$$3S_{A'} = -1 \rightarrow S_{A'} = -\frac{1}{3}$$

E conseqüentemente $[qLL] = q_{A'A'} L_1 L_1 = 1$, donde,

$$Q_{FF} = Q_{A'A'} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad (V.30)$$

e por analogia conclui-se que: $Q_{B'B'} = Q_{C'C'} = \frac{2}{3}$.

Ao voltar (V.26) e substituir Q_{FF} por Q_{FG} , onde G é referente a uma função linear análoga à função F , pode-se escrever:

$$Q_{FG} = \left\{ L_i + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right] S_i \right\} \cdot \left\{ m_j + \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right] S_j \right\} \cdot q_{ij} \quad (V.31)$$

para $i, j = A', B', C'$ e $i \neq j$.

Utilizando a mesma sequência seguida anteriormente para calcular Q_{FF} , tem-se:

$$S_{A'} = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad [q_{Lm}] = 0, \quad (V.32)$$

consequentemente:

$$Q_{FG} = Q_{AB} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Analogamente encontra-se

$$Q_{AC} = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad Q_{BC} = -\frac{1}{3}.$$

Pode-se finalmente escrever a matriz dos coeficientes de peso de um triângulo. Salienta-se que $Q_{ij} = Q_{ji}$.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (V.33)$$

VI. RELAÇÃO ENTRE O COEFICIENTE DE RIGIDEZ E AS CURVAS PADRÃO RELATIVA

Empregando os valores obtidos na (V.33) e nas (III.4), tem-se:

$$Q_{aa} = a^2 \left[\frac{2}{3} \cotg^2 A' + \frac{2}{3} \cotg^2 B' - 2 \left[-\frac{1}{3} \right] \cotg A' \cotg B' \right],$$

para generalizar a expressão, introduz-se o coeficiente de correlação ρ na mesma:

$$Q_{aa} = \frac{2a^2}{3\rho^2} (\cotg^2 A' + \cotg^2 B' + \cotg A' \cotg B') \quad , \quad (VI.1)$$

$$\left(Q_{aa} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{a}{\rho} \left[\frac{2}{3} (\cotg^2 A' + \cotg^2 B' + \cotg A' \cotg B') \right]^{\frac{1}{2}} \quad (VI.2)$$

Introduzindo a (VI.1) na (I.3), resulta:

$$\sigma_a^2 = \frac{2a^2\sigma^2}{3\rho^2} (\cotg^2 A' + \cotg^2 B' + \cotg A' \cotg B') \quad (VI.3)$$

Aplicando, sobre a equação acima, o mesmo método utilizado na obtenção da equação (IV.10), pode-se escrever a (VI.3) como segue:

$$\sigma_a^2 = \frac{2a^2\sigma^2}{3\rho^2\gamma^2} \left[\delta_{A'}^2 + \delta_{B'}^2 + \delta_{A'} \delta_{B'} \right] \quad (VI.4)$$

Voltando à (IV.12), dada por:

$$R_a = \frac{D - C}{C} \sum_{i=1}^n \left(\delta_{A_i}^2 + \delta_{B_i}^2 + \delta_{A_i} \delta_{B_i} \right) ,$$

e substituindo sua expressão, para um triângulo, verifica-se que:

$$R_a = \left(\delta_{A'}^2 + \delta_{B'}^2 + \delta_{A'} \delta_{B'} \right) ,$$

donde,

$$R_a = R_1 . \quad (VI.5)$$

O resultado acima, implica em:

$$\sigma_a^2 = \frac{2a^2\sigma^2}{3p^2\gamma^2} R_1 . \quad (VI.6)$$

Então, de acordo com a (VI.1), tem-se

$$Q_{aa} = \frac{2a^2}{3p^2\gamma^2} (\cotg^2 A' + \cotg^2 B' + \cotg A' \cotg B') , \quad (VI.7)$$

a qual é escrita da seguinte forma:

$$Q_{aa} = \frac{2a^2}{3p^2\gamma^2} R_a \quad \text{e} \quad Q_{bb} = \frac{2b^2}{3p^2\gamma^2} R_b \quad (VI.8)$$

Consequentemente, a equação da elipse padrão relativa, quando se substitui a (VI.7) pelas (VI.8) é escrita:

$$\frac{1}{\frac{2a^2}{3\rho^2\gamma^2} R_a + \frac{2b^2}{3\rho^2\gamma^2} R_b + \frac{4a^2b^2}{9\rho^4\gamma^4} R_a R_b} \left[\frac{2b^2}{3\rho^2\gamma^2} R_b x_1^2 - \right. \\ \left. - \frac{4ab}{3\rho^2\gamma^2} \sqrt{R_a R_b} x_1 x_2 + \frac{2a^2}{2\rho^2\gamma^2} R_a x_2^2 \right] = \sigma^2, \quad (VI.9)$$

isto é,

$$b^2 R_b x_1^2 - 2ab \sqrt{R_a R_b} x_1 x_2 + a^2 R_a x_2^2 = \frac{2a^2 b^2}{3\rho^2 \gamma^2} \sqrt{R_a R_b} \sigma^2, \quad (VI.10)$$

que é a equação da elipse padrão relativa em função do coeficiente de rigidez.

A partir da (VI.10) obtém-se:

$$a^2 R_a x_1^2 - 2ab \sqrt{R_a R_b} x_1 x_2 + b^2 R_b x_2^2 = \frac{3\rho^2 \gamma^2}{2\sigma^2} (x_1^2 + x_2^2)^2, \quad (VI.11)$$

que é a equação da podária padrão relativa em função dos coeficientes de rigidez de um triângulo.

As expressões (VI.10) e (VI.11) demonstram nitidamente que o já há muito conhecido coeficiente de rigidez está diretamente ligado à teoria da otimização e às curvas padrão.

CONCLUSÃO

Pode-se concluir, neste trabalho, que existe uma relação direta entre o coeficiente de rigidez e as curvas padrões. Porisso, torna-se possível, por intermédio desta relação, a obtenção da elipse padrão relativa e sua podária, a partir dos coeficientes de rigidez, que são de obtenção mais rápida e simples que os coeficientes de peso.

Conclue-se ainda que a elipse padrão pode ser relativa ou não, e que a orientação de seus eixos maior e menor indicam a maior ou menor propagação dos erros, respectivamente. Um aspecto importante, da elipse padrão, é ser possível obtê-la antes de terminados os trabalhos de campo. A obtenção gráfica da podária padrão mostra a tendência dos erros cometidos, indicando a existência de erros sistemáticos.

Como os coeficientes de peso estão diretamente relacionados aos pesos pode-se, através da elipse padrão relativa obter uma noção dos pesos a serem adotados para o cálculo das variâncias e co-variâncias.

BIBLIOGRAFIA

- GEMAEL, C. *Elipse e elipsóide dos erros*. Curitiba, I.G.U.F.P., 1974. 33 p.
- HELMERT, F.R. *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadraten*. 2.ed. Leipzig-Berlin, Tenbuer, 1907. p. 293-327.
- HIRVONEN, R.A. *Adjustment by leastsquares in geodesy and photogrametry*. Helsinki, 1970. p. 165-78.
- MATTOS, A.H. Rigidez das figuras. *Anais Hidrográficos*, 12: 35-45, 1945/46.
- PILCHOWSKI, H.U. *Tópicos de otimização aplicados à Geodésia*. Curitiba, I.G.U.F.P., 1976. 97 p.