MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO
AUTHORIZATION FOR PUBLICATION

PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

TRANSFORMADAS INTEGRAIS
TRANSFORMADAS DE FOURIER
TRANSFORMADAS DE LAPLACE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

Volker W.G.H. Kirchhoff
Director CEA

AUTOR RESPONSAVEL / RESPONSIBLE AUTHOR

René A. Medrano-B

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

- [ ] INTERNA / INTERNAL
- [x] EXTERNA / EXTERNAL
- [ ] RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

Ricardo Galvao

CDU/UDC

517.44

DATA / DATE

Abril, 1989

PUBLICAÇÃO Nº / PUBLICATION NO

INPE-4807-MD/40

ORIGEM / ORIGIN

DAE

PROJETO / PROJECT

IONO

Nº DE PAG. / NO OF PAGES

103

ULTIMA PAG. / LAST PAGE

98

VERSÃO / VERSION

Nº DE MAPAS / NO OF MAPS

TÍTULO/TITLE

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA VI:
TRANSFORMADAS INTEGRAIS

AUTORES/AUTHORSHIP

René A. Medrano-B.

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

Neste trabalho apresenta-se um estudo das transformadas integrais que têm como raiz comum a Transformada de Fourier. Entre estas são estudadas de maneira conjunta as transformadas de Fourier, Fourier-Seno, Fourier-Cosseno e Laplace. Aproveitando os resultados que aparecem, estudam-se também a função delta e suas representações n-dimensionais em coordenadas curvilíneas. O estudo é organizado de maneira a chegar primeiro à definição de cada transformada partindo da transformada de Fourier. Logo são estudadas as suas propriedades, definindo uma transformada integral genérica, para logo chegar a resultados específicos. O teorema da Convolução é tratado de maneira semelhante. Conclui-se o trabalho com um breve estudo das transformadas de Fourier finitas e um Apêndice que contém alguns métodos especiais de integração. Exemplos esclarecedores são desenvolvidos nas várias seções do trabalho. Este trabalho é baseado em notas de aula do curso de Métodos Matemáticos da Física que o autor ministra nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

OBSERVAÇÕES / REMARKS

ÍNDICE

Pág.

RESUMO

ABSTRACT

LISTA DE FIGURAS

6.1 - Introdução 1

6.2 - Transformada de Fourier 2

6.3 - Função Delta de Dirac 10

6.3.1 - Propriedades da Função Delta 12

6.4 - Transformada de Fourier-Seno e Fourier-Cosseno . 18

6.5 - Transformada de Fourier em N Dimensões 21

6.6 - Função Delta em N Dimensões 27

6.6.1 - A Função Delta em Coordenadas Curvilíneas 30

6.7 - Transformada de Laplace 31

6.8 - Propriedades Gerais das Transformadas do tipo Fourier 38

6.8.1 - Translação 40

6.8.2 - Transformadas de $e^{-\lambda x} f(x)$ 44

6.8.3 - Transformadas de $x^n f(x)$ 46

6.8.4 - Transformadas de Derivadas Sucessivas 48

6.8.5 - Transformadas de Integrais 53

6.9 - Teoremas de Convolução em Transformadas do tipo Fourier 63

6.9.1 - Convolução na Transformada de Fourier 64

6.9.2 - Convolução na Transformada de Laplace 65

6.9.3 - Convolução nas Transformadas Fourier-Cosseno e Fourier-Seno 66

6.10 - Transformadas finitas de Fourier 74

6.10.1 - Propriedades das Transformadas de Fourier Finitas 77

AGRADECIMENTOS 85

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 86

APÊNDICE A - MÉTODOS ESPECIAIS DE INTEGRAÇÃO

AGRADECIMENTOS

Meus especiais agradecimentos a Srtª Maria da Conceição Alves pela datilografia deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um estudo das transformadas integrais que têm como raiz comum a Transformada de Fourier. Entre estas são estudadas de maneira conjunta as transformadas de Fourier, Fourier-Seno, Fourier-Cosseno e Laplace. Aproveitando os resultados que aparecem, estudam-se também a função delta e suas representações n-dimensionais em coordenadas curvilíneas. O estudo é organizado de maneira a chegar primeiro à definição de cada transformada partindo da transformada de Fourier. Logo são estudadas as suas propriedades, definindo uma transformada integral genérica, para logo chegar a resultados específicos. O teorema da Convolução é tratado de maneira semelhante. Conclui-se o trabalho com um breve estudo das transformadas de Fourier finitas e um Apêndice que contém alguns métodos especiais de integração. Exemplos esclarecedores são desenvolvidos nas várias seções do trabalho. Este trabalho é baseado em notas de aula do curso de Métodos Matemáticos da Física que o autor ministra nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

ABSTRACT

In this work a study of integral transforms that have as a common root the Fourier transform is presented. Among these the Fourier, Fourier-Sine, Fourier-Cosine and Laplace transforms are globally studied. Using the results that happen to emerge, the delta function and its n-dimensional representation in curvilinear coordinates are also studied. The subject is organized such that individual definitions of the transforms are obtained starting from the Fourier Transform. Next, by defining a generic integral transform, their specific properties are stablished. The Convolution theorem is handled in a similar way. The work ends with a brief study of finite Fourier transforms and an Apendix that gives some special methods of integration. Enlightening examples in the various sections of this monograph are worked out. The present work is based on notes of the Mathematical Methods of Physics course that the author teaches in the graduate program of INPE.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Fig. 6.1 - Pulso retangular definido no intervalo $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ 8

Fig. 6.2 - (a) Transformada de Fourier do pulso retangular da Figura 6.1..... 8

(b) Coeficientes da análise de Fourier do mesmo pulso retangular, com L = 20a .. 10

Fig. 6.3 - Representação geométrica da função delta de Dirac $\delta(x)$ 11

Fig. 6.4 - Contorno de integração para o cálculo de $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+q)^2+p^2}\right\}$ do Exemplo 6.5 37

Fig. 6.5 - Circuito RLC em série 61

CAPÍTULO VI

TRANSFORMADAS INTEGRAIS

6.1- INTRODUÇÃO

Uma *transformada integral* é o resultado da operação de um operador integral sobre uma função f(x), da seguinte maneira:

$$T\left\{f(x)\right\} = \int_a^b f(x)\ K(x,\xi)\ dx = \overline{f}(\xi)\ , \qquad (6.1.1)$$

onde $K(x,\xi)$ é chamado de núcleo da transformada, a e b são limites de integração, constantes, e $\overline{f}(\xi)$ é a função decorrente da operação. Naturalmente, a função f(x) tem de estar definida dentro dos limites da integral da transformação. O parâmetro ξ é chamado de variável da transformada.

Supondo que f(x) e g(x) sejam duas funções que possuem transformadas, e α e β duas constantes, tem-se que:

$$T\left\{\alpha\ f(x) + \beta\ g(x)\right\} = \int_a^b [\alpha\ f(x) + \beta\ f(x)]\ K(x,\xi)\ dx$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\ K(x,\xi)\ dx +$$

$$+ \beta \int_a^b g(x)\ K(x,\xi)\ dx$$

$$T\left\{\alpha\ f(x) + \beta\ g(x)\right\} = \alpha\ T\left\{f(x)\right\} + \beta\ T\left\{g(x)\right\}. \qquad (6.1.2)$$

Isto é, *as transformadas integrais são operadores lineares.*

A importância das transformadas integrais é notada principalmente por sua aplicação na solução de equações diferenciais, na análise espectral de dados experimentais e nos campos da física teórica, onde o estudo de determinados fenômenos físicos, descritos no campo da variável x, pode ser mais simplificado no campo da variável ξ.

6.2 - TRANSFORMADA DE FOURIER

A forma complexa da série de Fourier de uma função periódica, de período L, é dada por (ver Seção 5.13 do trabalho "Série de Fourier" INPE-1933-RPE/256, Out. 1980, deste mesmo autor):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{i \frac{2\pi n}{L} x} , \qquad (6.2.1)$$

onde

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \, e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} \, dx \qquad (6.2.2)$$

e $f(x)$ é uma função bem comportada, integrável em valor absoluto e quadraticamente integrável; isto é, satisfaz as condições de Dirichlet.

Suponha-se agora que o período L, da função $f(x)$, cresce aproximando-se do infinito. Isto, evidentemente, significa que $f(x)$ deixa de ser periódica, e converte-se numa função definida no espaço unidimensional infinito ($-\infty \leq x \leq \infty$).

Definindo o parâmetro:

$$k = \frac{2\pi n}{L}$$

e a função:

$$\overline{f}(k) = \lim_{L \to \infty} L\, C_n \quad ,$$

tem-se que:

$$\overline{f}(k) = \lim_{L \to \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\; e^{-ikx}\, dx$$

$$\overline{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; e^{-ikx}\, dx \; . \qquad (6.2.3)$$

Comparando as Expressões (6.2.3) e (6.1.1), pode-se notar que a função f(k) é a transformada integral, com núcleo $K(x,k) = e^{-ikx}$, da função f(x). Esta transformada é conhecida com o nome de *Transformada de Fourier* da função f(x) a qual, neste trabalho, é denotada simbolicamente por:

$$\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \overline{f}(k) \; .$$

Por outro lado, a Expressão (6.2.1) pode ser colocada na forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{i \frac{2\pi n}{L} x} \, \Delta n \, , \qquad (6.2.4)$$

onde $\Delta n = 1$. Esta expressão corresponde à forma de uma integral numérica na variável n. Da definição do parâmetro k tem-se ainda que:

$$\Delta n = \frac{L}{2\pi} \Delta k \, ,$$

desta maneira,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} L \, C_n \, e^{ikx} \, \Delta k \, .$$

Observa-se que o fator $k = \frac{2\pi}{L} n$ é uma quantidade extremamente pequena para valores muito grandes de L, ao ponto de: $\lim_{L\to\infty} \Delta k = dk$; portanto, é possível substituir a somatória por uma integral. Assim:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(k) \, e^{ikx} \, dk \, . \qquad (6.2.5)$$

Esta relação é, também, uma transformada integral de núcleo $K(k,x) = \frac{1}{2\pi} e^{ikx}$, da função $\bar{f}(k)$. Esta nova transformada é conhecida como a *Transformada de Fourier Inversa*. De fato, ambas as transformadas indicadas nas Expressões (6.2.3) e (6.2.5) estão intimamente ligadas, sendo uma a transformada inversa da outra. Isto significa que, por exemplo, substituindo a Relação (6.2.3) no integrando da (6.2.5), dever-se-ia obter o primeiro membro desta última. Demonstrar-se-á, logo mais, que isto realmente acontece.

Devido à sua procedência, a transformada de Fourier da função $f(x)$ e a transformada inversa da função $\bar{f}(k)$ existem quando estas funções satisfazem as condições de Dirichlet. Estas condições, no entanto, podem ser relaxadas à condição única de ser funções integráveis no espaço infinito; esta condição é facilmente identificável nas Relações (6.2.3) e (6.2.5), onde para $k = 0$ e $x = 0$, respectivamente, as integrais têm de ser convergentes. Esta condição pode ser expressa de maneira mais geral: A função $f(x)$ possui transformada de Fourier se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ existe e é finito. Daqui decorre que $f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$.

Um outro aspecto de interesse é o significado "físico" da transformada de Fourier. Isto é, o que representa a transformada de Fourier de uma função? Este tipo de pergunta torna-se irrelevante quando a transformada de Fourier, ou qualquer outra transformada, é utilizada como simples ferramenta matemática na solução de problemas; por exemplo, na solução de equações diferenciais onde, depois de encontrar a transformada da equação, pode-se resolver o problema no campo da variável da transformada e em seguida aplicar a transformada inversa para trazer a solução ao campo da variável original. Entretanto, existem outros casos nos quais a solução do problema, ou o resultado de uma análise, tem uma melhor interpretação no campo das transformadas. Isto geralmente ocorre na análise espectral de dados experimentais (por exemplo, a obtenção da densidade espectral de potência é extremamente importante na identificação da presença de harmônicos num conjunto de dados).

Voltando ao problema do significado da transformada de Fourier de uma função, note-se que a nova variável $k = \frac{2\pi n}{L}$ tem unidades de "freqüência" (à semelhança da conhecida definição de freqüência $\nu = 2\pi/T$, correspondente ao período T), uma vez que n é um número adimensional. Por outro lado, sendo C_n a amplitude do harmônico de fre-

qüência $2\pi n/L$, a transformada de Fourier $\overline{f}(k) = F\{f(x)\}$ representa, também, a amplitude do harmônico de freqüência k, da função f(x). Em outras palavras, ao encontrar a transformada de Fourier de uma função, o que se está fazendo, realmente, é submeter à função f(x) a uma análise harmônica, no sentido descrito na Seção 5.11 do trabalho sobre Série de Fourier citado linhas acima. A diferença é que, neste caso, o resultado da análise fornece um espectro contínuo de freqüências, e não o discreto correspondente à análise de Fourier.

Além das definições expressas nas Equações (6.2.3) e (6.2.5), existem outras definições da transformada de Fourier que diferem apenas nos coeficientes numéricos, pois a forma do núcleo é a característica principal desta transformada. Neste trabalho, o autor prefere a definição moderna, simétrica nos coeficientes, e que é expressa mediante as seguintes relações:

$$F\left\{f(x)\right\} = \overline{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \,, \qquad (6.2.6)$$

$$F^{-1}\left\{\underline{f}(k)\right\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(k)\, e^{ikx}\, dk \,. \qquad (6.2.7)$$

Estas relações podem ser obtidas, também, a partir das Equações (6.2.1) e (6.2.2), com uma escolha apropriada de $\overline{f}(k)$ (ver problema proposto). Embora as definições indicadas nas Expressões (6.2.6) e (6.2.7) sejam as adotadas neste trabalho para as transformadas de Fourier, qualquer outra definição pode ser utilizada sem maiores inconvenientes, desde que seu uso seja consistente. Isto é, caso se decida utilizar uma determinada definição, esta deverá ser

utilizada em todas as fases do problema, especialmente quando se tiver de encontrar a transformada inversa.

EXEMPLO 6.1

Seja um sinal retangular, da forma indicada na Figura 6.1:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < |a| \\ 0 & |x| > |a| \end{cases} .$$

A transformada de Fourier desta função, é obtida mediante a aplicação da Relação (6.2.6), a saber:

$$F\left\{f(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-ikx}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx}\ dx$$

$$= \frac{2}{k\sqrt{2\pi}}\ \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\text{sen } ka}{k} .$$

Logo,

$$\bar{f}(k) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\text{sen } ka}{ka} .$$

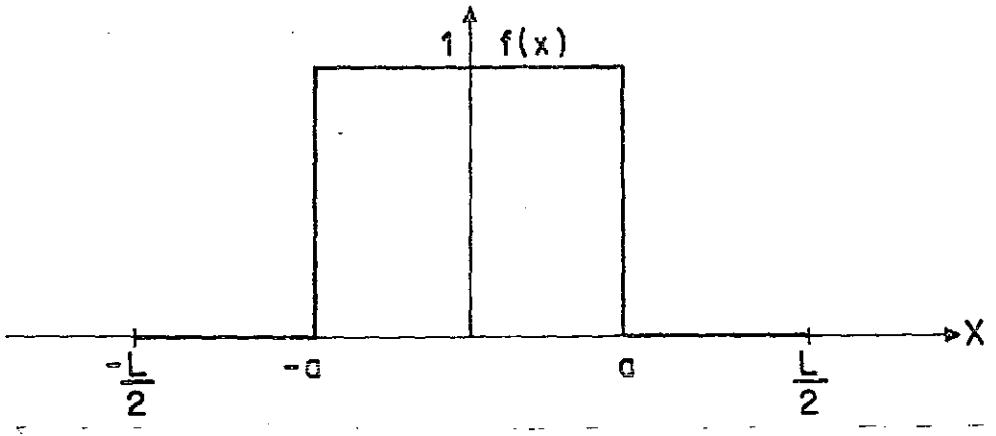

Fig. 6.1 - Pulso retangular definido no intervalo $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$.

A representação gráfica deste resultado é mostrada na Figura 6.2(a).

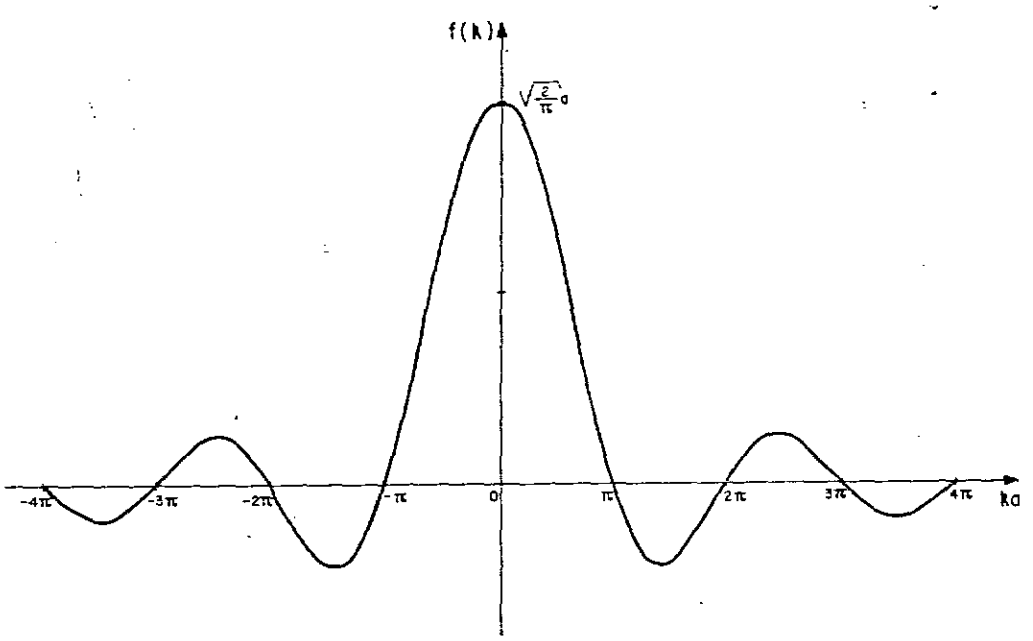

Fig. 6.2(a) - Transformada de Fourier do pulso retangular da Figura 6.1.

A título de comparação far-se-á, em continuação, a análise de Fourier (harmônica) do mesmo sinal retangular. Com este objetivo, supõe-se que f(x) deste exemplo, seja uma função periódica com as seguintes características:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq |a| \\ 0 & |a| < |x| \leq |\frac{L}{2}| \end{cases} ,$$

$$f(x) = f(x + L) ,$$

onde L é uma grandeza de valor arbitrário, que satisfaz apenas as condições especificadas acima. Dado que a função periódica é uma função par, os coeficientes C_n serão grandezas reais. Assim,

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{i2\pi n}{L} x} dx = \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{2\pi n a}{L} ,$$

$$C_n = \frac{2a}{L} \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi n}{L} a}{\frac{2\pi n}{L} a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Os valores discretos deste coeficiente são mostrados na Figura 6.2(b), onde L = 20a. Pode-se ver que este resultado, comparado com o obtido para a transformada de Fourier, é a versão discreta do espectro contínuo de frequências $\bar{f}(k)$. Este exemplo esclarece a equivalência existente entre a análise harmônica de uma função e sua transformada de Fourier.

<u>Exercício</u>: Partindo das Relações (6.2.1) e (6.2.2), demonstrar que a transformada de Fourier, e sua inversa, podem ser definidas pelas expressões (6.2.6) e 6.2.7), respectivamente.

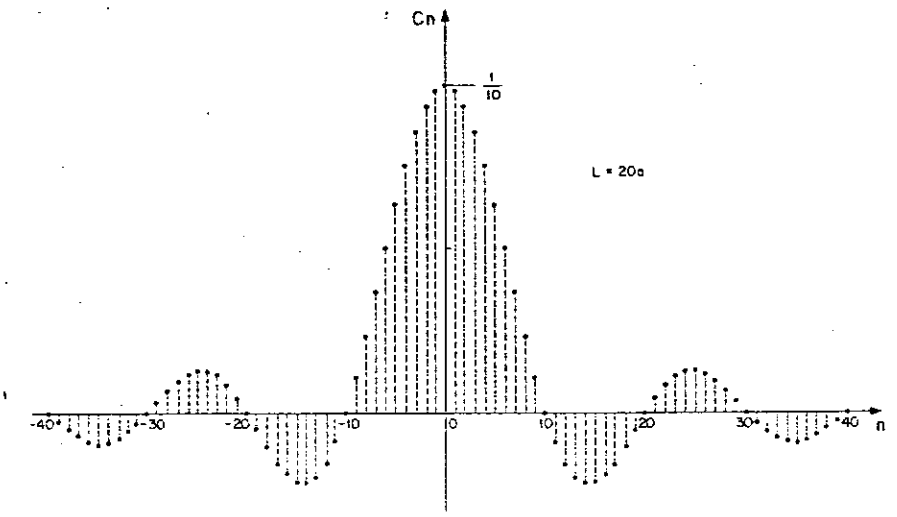

Fig. 6.2(b) - Coeficientes da análise de Fourier do mesmo pulso retangular, com L = 20a.

6.3 - FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

A função *Delta de Dirac* $\delta(x)$ (assim chamada por ter sido introduzida por Paul A.M. Dirac) é definida pelas seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} ; \qquad (6.3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1 , \qquad (6.3.2)$$

onde, na integral de normalização, ε é uma quantidade muito pequena, próxima de zero.

De acordo com a definição dada pela Relação (6.3.1), a função delta pode ser representada esquematicamente da maneira mostrada na Figura 6.3.

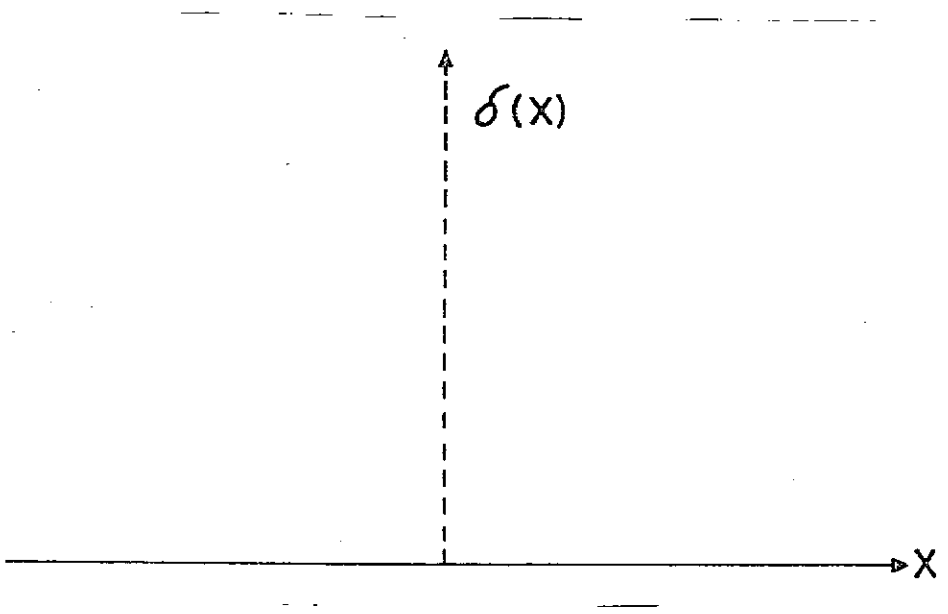

Fig. 6.3 - Representação geométrica da função delta de Dirac $\delta(x)$.

6.3.1 - Propriedades da Função Delta

Com as propriedades definidas nas Relações (6.3.1) e (6.3.2), deduzem-se outras não menos importantes.

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ \delta(\xi - x)\ d\xi = f(x)\ .$$

Para demonstrar esta propriedade, observa-se que, de acordo com (6.3.1),

$$\delta(\xi - x) = \begin{cases} 0 & \xi - x \neq 0, \text{ ou seja: } \xi \neq x \\ \infty & \xi - x = 0, \text{ ou seja: } \xi = x \end{cases} .$$

Portanto, os limites de integração da Expressão (6.3.2) são:

Limite inferior: $\xi - x = -\varepsilon$; de onde: $\xi = x - \varepsilon$.

Limite superior: $\xi - x = \varepsilon$; de onde: $\xi = x + \varepsilon$.

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ \delta(\xi - x)\ d\xi = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\ \delta(\xi - x)\ d\xi . \quad (6.3.3)$$

Porém, no intervalo entre $x - \varepsilon$ e $x + \varepsilon$, e quando $\varepsilon \to 0$, obviamente tem-se que $f(\xi) = f(x)$, que pode sair do símbolo de integração; isto é:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\ \delta(\xi - x)\ d\xi = f(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(\xi - x)\ d\xi\ .$$

Fazendo a troca $\eta = \xi - x$, $d\eta = d\xi$, a integral do segundo membro fica:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(\xi - x)\, d\xi = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\eta)\, d\eta = 1 .$$

Portanto:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \delta(\xi - x)\, d\xi . \qquad (6.3.4)$$

Esta propriedade é extremamente importante em aplicações da física matemática.

b) $$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk .$$

Para demonstrar esta propriedade, aplica-se a transformada de Fourier à função delta:

$$F\left\{\delta(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

Por outro lado, a transformada de Fourier inversa deste último resultado deve restabelecer a função delta original. Assim,

$$\delta(x) = F^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}\, dk ,$$

de onde:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dk . \qquad (6.3.5)$$

Esta expressão integral para a função delta permite uma utilização elegante desta função em análises teóricas. Por exemplo, substituindo $\bar{f}(k)$ da Relação (6.2.6) na (6.2.7), e com a identificação da função delta, obtém-se $f(x)$.

c) $$f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) = - \delta(x) \frac{d}{dx} f(x) .$$

Para demonstrar esta propriedade, define-se a derivada da função delta (seja o que for que esta derivada signifique) por $\delta'(x) = \frac{d}{dx}\delta(x)$. As propriedades desta nova função, igual à função de origem, só podem ser manipuladas em associação com símbolos de integração. Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta'(x)\ dx = f(x)\ \delta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\ \delta(x)\ dx .$$

A integração por partes acima é válida somente quando $f(x)$ é contínua e tem derivada finita. Naturalmente, o primeiro termo é nulo em ambos os limites; portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta'(x)\ dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\ \delta(x)\ dx .$$

Igualando os integrandos, tem-se que:

$$f(x)\ \delta'(x) = -f'(x)\ \delta(x) . \qquad (6.3.6)$$

d) $$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) .$$

Considere-se a integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\ f(x)\ dx$$

onde precisam ser considerados os casos em que $a > 0$ e $a < 0$.

<u>$a > 0$.</u>

Fazendo a troca $ax = \xi$ (de onde: $dx = \frac{1}{a}\, d\xi$), a integral fica:

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)\ f(\frac{\xi}{a})\ d\xi \ = \ \frac{1}{a}\, f(0) \ = \ \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ f(x)\ dx\ .$$

Portanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\ f(x)\ dx \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\, \delta(x)\ f(x)\ dx\ ,$$

de onde, igualando os integrandos de ambos os membros, tem-se:

$$\delta(ax) \ = \ \frac{1}{a}\, \delta(x)\ .$$

<u>$a < 0$</u>

Neste caso, com $a = -\,|a|$, a integral inicialmente considerada fica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-|a|x)\ f(x)\ dx = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\xi)\ f(-\frac{\xi}{|a|})\ (-\frac{d\xi}{|a|}) ,$$

onde foi utilizada a troca na variável de integração: $\xi = -|a|x$. Pode-se ver que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-|a|x)\ f(x)\ dx = \frac{1}{|a|}\ f(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ f(x)\ dx.$$

Dado que este é o mesmo resultado que o obtido para o caso $a > 0$, em geral pode-se escrever:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\ \delta(x) . \qquad (6.3.7)$$

onde a é um número real. Esta relação encontrada revela uma outra propriedade importante da função delta. Assim, fazendo $a = -1$, tem-se:

$$\delta(-x) = \delta(x) ; \qquad (6.3.8a)$$

isto é, a função delta de Dirac é uma função par! Este fato permite que a expressão integral da função delta tenha a forma geral:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ikx}\ dk . \qquad (6.3.8b)$$

Exemplo 6.2: Teorema de Parseval

Supondo-se $f(x)$ uma função complexa, considere-se a integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, f^*(x) \, dx \, .$$

Substituindo $f(x)$ no integrando do segundo membro, pela Expressão (6.2.7), tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(k) \, e^{ikx} \, dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^*(k\ ) e^{-ik'x} dk'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(k) \, dk \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^*(k') \, dk' \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(k) \, dk \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^*(k') \, dk' \, \delta(k-k')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(k) \, \bar{f}^*(k) \, dk \, .$$

Desta maneira, tem-se a importante relação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(k)|^2 \, dk \, , \qquad (6.3.9)$$

que é a versão contínua do Teorema de Parseval correspondente à série de Fourier. A relação encontrada explicita que, se f(x) é uma função quadraticamente integrável, sua transformada de Fourier também é uma função quadraticamente integrável.

Uma utilidade evidente da Relação (6.3.9) é a que se refere ao cálculo de integrais. Observa-se que se for o caso de calcular uma integral do tipo indicado no primeiro membro de (6.3.9) a qual apresente dificuldades para o seu cálculo, pode-se tentar encontrar a transformada de Fourier de f(x) e efetuar este cálculo no campo da variável k.

6.4 - TRANSFORMADAS DE FOURIER-SENO E FOURIER-COSSENO

Quando a função f(x) apresenta propriedades de paridade, as respectivas transformadas de Fourier têm também formas especiais. Suponha-se que f(x) é uma função par (simétrica em relação ao eixo x = 0):

$$f(-x) \quad f(x) \ .$$

A transformada de Fourier desta função chega a ter uma forma diferente, conforme é mostrado a seguir:

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

A integral do primeiro termo, substituindo x por -x, fica:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = -\int_{\infty}^{0} f(-x)\, e^{+ikx}\, dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{ikx}\, dx.$$

Logo,

$$\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\, (e^{ikx} + e^{-ikx})\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos kx\, dx\ .$$

Assim, quando f(x) é uma função par, a transformada de Fourier desta função tem a seguinte expressão:

$$\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \overline{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos kx\, dx\ . \qquad (6.4.1)$$

A transformada inversa de $\overline{f}(\underline{k})$ pode ser obtida através da Relação (6.2.7). No entanto, observando que $\overline{f}(k)$ é também uma função par, a transformada inversa segue o mesmo tratamento que o efetuado para $\overline{f}(k)$, chegando-se à seguinte expressão:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\overline{f}(k)\right\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \overline{f}(k) \cos kx\, dk. \qquad (6.4.2)$$

De uma maneira análoga, quando f(x) é uma função ímpar (anti-simétrica em relação ao eixo $x = 0$):

$$f(-x) = -f(x)\ ,$$

pode-se demonstrar que a transformada de Fourier desta função tem a forma:

$$F\left\{f(x)\right\} = \bar{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \int_0^\infty f(x) \text{ sen } kx \, dx \,. \quad (6.4.3)$$

com a transformada inversa:

$$F^{-1}\left\{\bar{f}(k)\right\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \int_0^\infty \bar{f}(k) \text{ sen } kx \, dk \,. \quad (6.4.4)$$

Resumindo: quando f(x) tem propriedades de paridade (simétricas ou anti-simétricas em relação ao eixo $x = 0$), a transformada de Fourier fica simplificada, dando origem a transformadas de núcleos $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ cos kx e $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ sen kx, respectivamente. É interessante notar que os núcleos das transformadas inversas são idênticos em ambos os casos.

Uma análise mais geral do par de transformadas leva a concluir que uma função, definida no intervalo $0 \leq x \leq \infty$, pode ter dois tipos diferentes de transformadas integrais, cada uma com sua respectiva transformada inversa. Desta maneira, para uma função bem comportada definida no espaço semi-infinito positivo, define-se a <u>Transformada Fourier-Cosseno</u>:

$$F_c\left\{f(x)\right\} = \bar{f}_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos kx \, dx \quad (6.4.5)$$

com sua transformada inversa:

$$F_c^{-1}\left\{\bar{f}_c(k)\right\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \bar{f}_c(k) \cos kx \, dk \quad (6.4.6)$$

e a Transformada de Fourier-Seno:

$$F_s\left\{f(x)\right\} = \overline{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \text{ sen } kx \, dx \quad (6.4.7)$$

com sua transformada inversa:

$$F_s^{-1}\left\{f(k)\right\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \overline{f}_s(k) \text{ sen } kx \, dk. \quad (6.4.8)$$

6.5- TRANSFORMADA DE FOURIER EM N DIMENSÕES

Até agora estudou-se a transformada de Fourier de uma função unidimensional f(x); isto é, a transformada foi feita na variável x. Naturalmente, aqui surge a pergunta: e se a função for, por exemplo, bidimensional? Neste caso, dever-se-á escolher a variável sobre a qual se deseja a transformada. Assim, a transformada de Fourier sobre a variável y da função f(x,y), será:

$$F\left\{f(x,y)\right\}_y = \overline{f}(x,k_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, e^{-ik_y y} \, dy \, ,$$

onde, neste caso, chamou-se de k_y o parâmetro da transformada.

Se ao mesmo tempo se precisar também da transformada sobre a variável x, ter-se-á que:

$$\mathcal{F}\left\{\bar{f}(x,k_y)\right\}_x = \bar{f}(k_x,k_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x,k_y)\, e^{-ik_x x}\, dx$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_x x}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-ik_y y}\, dy$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, dx\, dy\,.$$

Chamando:

$$\mathcal{F}\left\{f(x,y)\right\} = \mathcal{F}\left\{\mathcal{F}\left\{f(x,y)\right\}_y\right\}_x = \bar{f}(k_x,k_y)$$

e utilizando a notação vetorial: $k_x x + k_y y = \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{x}$, a transformada de Fourier sobre as duas variáveis podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\mathcal{F}\left\{f(x,y)\right\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i\, \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{x}}\, dx\, dy\,.$$

Fica evidente que a transformada de Fourier de uma função que depende de 3 variáveis (por exemplo, as coordenadas x, y e z) é:

$$\mathcal{F}\left\{f(x,y,z)\right\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\, e^{-i\, \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{x}}\, dx\, dy\, dz\,. \tag{6.5.1}$$

Utilizando novamente a notação vetorial e chamando simbolicamente

$$f(\underset{\sim}{x}) = f(x,y,z), \quad \overline{f}(\underset{\sim}{k}) = \overline{f}(k_x,k_y,k_z) \quad ,$$

a Relação (6.5.1) pode, também simbolicamente, ser representada por:

$$F\left\{f(\underset{\sim}{x})\right\} = \overline{f}(\underset{\sim}{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int f(\underset{\sim}{x})\, e^{-i\,\underset{\sim}{k}\,.\,\underset{\sim}{x}}\, d^3x, \quad (6.5.2)$$

onde a integração é feita sobre o espaço tridimensional infinito.

De uma maneira análoga, pode-se demonstrar que a *Transformada de Fourier inversa*, tridimensional, é representada por:

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \overline{f}(\underset{\sim}{k})\, e^{i\,\underset{\sim}{k}\,.\,\underset{\sim}{x}}\, d^3k \; . \quad (6.5.3)$$

Embora óbvio, é necessário salientar que esta representação tridimensional da transformada de Fourier é válida apenas para coordenadas cartesianas.

A extensão da definição da transformada de Fourier e da sua inversa para um espaço n-dimensional é trivial:

$$F\left\{f(\underset{\sim}{x})\right\} = \overline{f}(\underset{\sim}{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int f(\underset{\sim}{x})\, e^{-i\,\underset{\sim}{k}\,.\,\underset{\sim}{x}}\, d^nx \; , \quad (6.5.4)$$

$$F^{-1}\left\{\overline{f}(\underset{\sim}{k})\right\} = f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \overline{f}(\underset{\sim}{k})\, e^{i\,\underset{\sim}{k}\,.\,\underset{\sim}{x}}\, d^nx \; . \quad (6.5.5)$$

Exemplo 6.3: Átomo de hidrogênio no estado 2p

No átomo de hidrogênio, o "estado" em que se encontra o elétron é definido pela chamada "função de onda" $\Psi(x)$, cujo significado físico é caracterizado pela seguinte relação:

$$\Psi(\underset{\sim}{x})\Psi^*(\underset{\sim}{x})\, d^3x = |\Psi(\underset{\sim}{x})|^2\, d^3x =$$ (Probabilidade de que o elétron se encontre, dentro do volume d^3x, localizado no ponto $\underset{\sim}{x}$ relativo ao núcleo)

O estado 2p (notação espectroscópica) indica o estado de "excitação" do átomo (ou, alternativamente, o estado energético do elétron). A função de onda $\Psi(\underset{\sim}{x})$, que caracteriza este estado, é obtida da solução da equação (diferencial) de Schrodinger, com o seguinte resultado:

$$\Psi(\underset{\sim}{x}) = \frac{z\, e^{-\frac{r}{2a_0}}}{\sqrt{32\pi\, a_0^5}} ,$$

onde: a_0 = raio de Bohr (uma constante), $r = |\underset{\sim}{x}|$ (módulo do vetor de posição), $z = r\cos\theta$, θ = ângulo polar (das coordenadas esféricas). O problema consiste em encontrar a transformada de Fourier da função de onda. Neste caso, o parâmetro k está relacionado com o momentum do elétron; assim, a função

$$\Phi(\underset{\sim}{k}) = \mathcal{F}\left\{\Psi(\underset{\sim}{x})\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{z\, e^{-\frac{r}{2a_0}}}{\sqrt{32\pi\, a_0^5}}\, e^{-i\, \underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{x}}\, d^3x$$

representa a função de onda expressa no campo do momentum.

Para efetuar a integração indicada, deve-se lembrar que esta integração é feita sobre o espaço infinito das variáveis independentes (que, para este caso, são as coordenadas). Assim, a integral de volume pode ser calculada utilizando qualquer sistema de coordenadas. Para este caso, particular, as mais apropriadas são as coordenadas polares. Por outro lado, a orientação do sistema de coordenadas é também arbitrária e, portanto, pode ser orientado de tal maneira que o vetor $\underset{\sim}{k}$ coincida com o vetor $\hat{\underset{\sim}{z}}$ do sistema cartesiano; assim,

$$\underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{x} = k\, r \cos\theta$$

(ver Seção A.2 do Apêndice para outros exemplos deste tipo). Portanto:

$$\Phi(k) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{32\,\pi\, a_0^5}} \int_0^\infty r^3\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\, dr \int_0^\pi e^{-irk\cos\theta}\, \mathrm{sen}\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi .$$

Chamando $\xi = \cos\theta$, a integral, na variável θ, pode ser integrada da seguinte maneira:

$$\int_{-1}^{1} \xi\, e^{-ikr\xi}\, d\xi = -\frac{1}{ir}\frac{\partial}{\partial k}\int_{-1}^{1} e^{-ikr\xi}\, d\xi = \frac{2i}{r^2}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\mathrm{sen}\, kr}{k}\right)$$

$$= \frac{2i}{r^2}\left(\frac{r\cos kr}{k} - \frac{\mathrm{sen}\, k\, r}{k^2}\right) .$$

Com este resultado tem-se que:

$$\Phi(\underset{\sim}{k}) = \frac{i}{4\pi\sqrt{a_0^5}\,k^2}\int_0^\infty (kr\cos kr - \operatorname{sen} kr)\, r\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\, dr .$$

Estas integrais são do tipo

$$\int_0^\infty r^2 \cos kr\, e^{-\gamma r}\, dr \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty r \operatorname{sen} kr\, e^{-\gamma r}\, dr ,$$

que podem ser calculadas a partir das integrais (A.11) e (A.12) do Apêndice:

$$\int_0^\infty r\, e^{-\gamma r} \cos kr\, dr = \frac{\gamma^2 - k^2}{(\gamma^2 + k^2)^2} \qquad \text{e}$$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma r} \operatorname{sen} kr\, dr = \frac{k}{\gamma^2 + k^2} ,$$

respectivamente, utilizando o artifício de derivar em relação ao parâmetro γ. Os resultados são os seguintes:

$$\int_0^\infty r^2\, e^{-\gamma r} \cos kr\, dr = \frac{2\gamma(\gamma^2 - 3k^2)}{(\gamma^2 + k^2)^3} ,$$

$$\int_0^\infty r\, e^{-\gamma r} \operatorname{sen} kr\, dr = \frac{2\,\gamma\, k}{(\gamma^2 + k^2)^2} .$$

Desta maneira:

$$\Phi(\underset{\sim}{k}) = \frac{2^6 \, a_0^{5/2} \, k}{\pi i [1 + (2a_0 \, k)^2]^3} \, .$$

6.6- FUNÇÃO DELTA EM N DIMENSÕES

A definição dada mediante a Expressão (6.3.2), pode ser colocada, para cada variável x_1, x_2, x_3, ... etc., na forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - x_1') \, dx_1 = \int_{x_1'-\varepsilon}^{x_1'+\varepsilon} \delta(x_1 - x_1') \, dx_1 = 1 \, ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_2 - x_2') \, dx_2 = \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2'+\varepsilon} \delta(x_2 - x_2') \, dx_2 = 1 \, ,$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \, , \\ \cdot & \cdot & \cdot \, , \\ \cdot & \cdot & \cdot \, , \\ \cdot & \cdot & \cdot \, , \end{array}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_n - x_n') \, dx_n = \int_{x_n'-\varepsilon}^{x_n'+\varepsilon} \delta(x_n - x_n') \, dx_n = 1 \, ,$$

Multiplicando membro a membro as n relações e chamando simbolicamente

$$\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}') = \delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2') \ldots \delta(x_n - x_n') ,$$

tem-se que:

$$\int_{\substack{\text{hiperesfera}\\ \text{infinita}}} \delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')\, d^n x = \int_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')\, d^n x = 1 , \qquad (6.6.1)$$

onde $\underset{\sim}{\varepsilon}$ representa uma esfera infinitesimal de raio $\varepsilon \to 0$ centrada em $\underset{\sim}{x}'$. A Relação (6.6.1) define a integral de normalização da função delta de Dirac em n dimensões.

De maneira semelhante pode-se escrever outra propriedade importante da função delta:

$$\int f(\underset{\sim}{x})\ \delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')\, d^n x = f(\underset{\sim}{x}') , \qquad (6.6.2)$$

onde a integral é sobre todo o espaço infinito.

Uma outra propriedade interessante de ser escrita, para um espaço de n dimensões em coordenadas ortogonais, é a forma integral da função delta.

A expressão integral da função delta (6.3.5) pode ser escrita na forma:

$$\delta(x_1 - x_1') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x_1 - x_1')}\, dk_1 .$$

O produto de n funções delta para n variáveis independentes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ correspondentes às coordenadas retangulares é dado por:

$$\delta(x_1-x_1')\,\delta(x_2-x_2')\ldots =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x_1-x_1')}\,dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_2(x_2-x_2')}\,dk_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikn(x_n-x_n')}\,dk_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[k_1(x_1-x_1')+(k_2(x_2-x_2')+\ldots+}$$

$$+\,k_n(x_n-x_n')]\,dk_1\,dk_2\ldots dk_n\,.$$

Chamando, ainda simbolicamente:

$$\delta(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}') = \delta(x_1-x_1')\,\delta(x_2-x_2')\ldots\delta(x_n-x_n')$$

e identificando:

$$\underset{\sim}{k}\cdot(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}') = \sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha(x_\alpha-x_\alpha')\,,$$

o produto das n funções delta pode ser escrito como se segue:

$$\delta(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}') = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\underset{\sim}{k}\cdot(\underset{\sim}{x}-x')}\,d^nk\,, \qquad (6.6.3)$$

onde a integração é efetuada sobre o espaço infinito dos parâmetros k_α.

6.6.1- A Função Delta em Coordenadas Curvilíneas

A função delta unidimensional em coordenadas cartesianas tem sido definida para um domínio infinito. Sua extensão para duas ou mais variáveis foi, de certa maneira, imediata devido a esta particularidade. Entretanto, a função delta pode ser definida dentro de domínios finitos e associada a qualquer outro tipo de coordenadas. Por exemplo, se a variável for circular $-\pi \leq \phi \leq \pi$, a integral de normalização ficará:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\phi - \phi')\, d\phi = 1 \qquad -\pi < \phi < \pi .$$

O que pode gerar uma certa confusão é a expressão da função delta, para duas ou mais dimensões, em coordenadas curvilíneas. Por exemplo, se o ponto $\underset{\sim}{x}'$ (de coordenadas polares ρ' e ϕ') estiver no interior do círculo de raio R, os fatores do integrando da Relação (6.6.1) não poderão ser interpretados independentemente, de forma que:

$$\delta(\underset{\sim}{x} - x') = \delta(\rho - \rho')\ \delta(\phi - \phi')$$

e

$$d^2x = \rho\, d\rho\, d\phi \quad ,$$

pois chegar-se-ia ao absurdo:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \delta(\rho - \rho')\ \delta(\phi - \phi')\ \rho\ d\rho\ d\phi = \rho' \ .$$

O correto é a interpretação do integrando como um todo:

$$\oint_S \delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')\ d^2x = \int_0^R \int_0^{2\pi} \delta(\rho - \rho')\ \delta(\phi - \phi') d\rho\ d\phi = 1 .$$

Assim, para um espaço n-dimensional em coordenadas curvilíneas, tem-se:

$$\int_V \delta(q_1 - q_1')\ \delta(q_2 - q_2') \ldots \delta(q_n - q_n')\ dq_1\ dq_2 \ldots dq_n = 1 , \tag{6.6.3}$$

onde V é o "volume" do espaço.

Pode-se ver também que:

$$\int_V f(q_1, q_2, \ldots, q_n)\ \delta(q_1 - q_1')\ \delta(q_2 - q_2') \ldots \delta(q_n - q_n') dq_1\ dq_2 \ldots dq_n =$$

$$= f(q_1', q_2', \ldots, q_n') \ . \tag{6.6.4}$$

6.7- TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Fourier é muito útil no estudo de funções que são integráveis no espaço infinito. Naturalmente, para funções que não satisfazem esta condição, a transformada de Fourier (incluindo as $F_c\{f(x)\}$ e

$F_s\{f(x)\}$) com todas as suas propriedades, não é mais aplicável. Esta dificuldade é superada se a função em questão é submetida a um tratamento tal que depois seja convertida numa função integrável no espaço infinito.

Supondo que f(x) seja uma função não integrável, (p.ex. f(x) e^x, constrói-se a função:

$$H(x) \quad f(x)\, e^{-ax} \qquad (a = \text{real} > 0) \;, \qquad (6.7.1)$$

onde H(x) é a função "degrau"

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \;. \qquad (6.7.2)$$

Esta nova função é integrável no espaço infinito, contanto que o crescimento de f(x) para $x \to \infty$ seja menos rápido que a diminuição no valor da função exponencial. Esta condição, na maior parte das funções que aparecem na física, é satisfeita principalmente porque o parâmetro a pode sempre ser escolhido de maneira que isto aconteça. É verdade que a nova função, H(x) f(x) e^{-ax}, tem características diferentes da função original f(x). No entanto, este fato apenas restringirá as características das funções f(x) que passarão a serem definidas no intervalo $x > 0$.

A seguir, passar-se-á a estudar a transformada de Fourier da função definida em (6.7.1). Objetivando chegar a resultados comumente encontrados na literatura, o tipo de transformada de Fourier que será utilizado será a definida na Relação (6.2.3). Assim:

$$F\left\{H(x)\ f(x)\ e^{-ax}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\ f(x)\ e^{-ax}\ e^{-ikx}\ dx = g(k,a).$$

Pode-se ver que:

$$g(k,a) = \int_{0}^{\infty} f(x)\ e^{-(a+ik)x}\ dx\ . \qquad (6.7.3)$$

Por outro lado, a transformada inversa leva a:

$$F^{-1}\left\{g(k,a)\right\} = H(x)\ f(x)\ e^{-ax} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k,a)\ e^{ikx}\ dk\ ,$$

de onde

$$H(x)\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k,a)\ e^{(a+ik)x}\ dk\ , \qquad (6.7.4)$$

Na realidade pode-se notar, da Relação (6.7.3), que $g(k,a) = g(a + ik)$; logo, fazendo:

$$s = a + ik\ ,$$

chamando:

$$\overline{f}(s) = g(k,a)$$

e levando em conta que a função $H(x)\ f(x)$ é simplesmente $f(x)$, definida no intervalo $0 \leq x \leq \infty$, as Relações (6.7.3) e (6.7.4), respectivamente, ficam:

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x) \; e^{-sx} \, dx \quad , \tag{6.7.5}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{f}(s) \; e^{sx} \, ds \quad . \tag{6.7.6}$$

Observe-se que este par de relações constitui, por si, duas transformadas integrais, sendo uma delas a transformada inversa da outra, e vice-versa. A Relação (6.7.5) é chamada de Transformada de Laplace da função f(x), e é comumente representada por:

$$L\left\{f(x)\right\} = \int_0^\infty f(x) \; e^{-sx} \, dx = \bar{f}(s) \quad . \tag{6.7.7}$$

Por conseguinte, a Relação (6.7.6) é chamada de Transformada de Laplace Inversa.

$$L^{-1}\left\{\bar{f}(s)\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{f}(s) \; e^{sx} \, ds = f(x) \quad . \tag{6.7.8}$$

Observe-se que a integração, neste último caso, deve ser efetuada no plano complexo s, ao longo de uma linha reta (infinita) paralela ao eixo imaginário e afastada dela numa distância a. O valor do parâmetro a é escolhido de modo a fazer com que todos os pólos da função f(s) se encontrem à esquerda da linha reta de integração; exceto por esta restrição, o valor de a é arbitrário. A razão desta escolha é que a integração é efetuada utilizando o Teorema dos Resíduos, conforme será mostrado no Exemplo 6.5.

Neste ponto, é importante resumir as características que a função f(x) tem de ter para possuir transformada de Laplace.

a) f(x) tem de estar definida no intervalo $0 \leq x \leq \infty$,

b) f(x) deve satisfazer a condição

$$\lim_{x \to \infty} f(x)\, e^{-ax} = 0 ,$$

onde a é um parâmetro real e positivo, arbitrariamente escolhido de maneira a satisfazer esta condição. Assim, f(x) não precisa ser uma função integrável em valor absoluto; isto é, pode ser, por exemplo, $f(x) = e^{\alpha x}$ (com $\alpha > 0$), tal que $\int_0^\infty |f(x)|dx \to \infty$. Neste caso, escolhe-se $a > \alpha$, ou seja, $Re\{s\} > \alpha$ (*). Por outro lado, funções do tipo $f(x) = e^{x^2}$ não possuem transformada de Laplace, uma vez que:

$$\lim_{x \to \infty} e^{x^2}\, e^{-ax} \to \infty .$$

(*) Re{s} = Parte real de s.

Exemplo 6.4

Seja encontrar $L\{e^{\alpha x}\}$ onde α é real e positivo.

$$L\left\{e^{\alpha x}\right\} = \int_0^\infty e^{x}\, e^{-sx}\, dx = \left.\frac{e^{(\alpha - s)x}}{\alpha - s}\right|_0^\infty .$$

Note-se que o resultado da integração é finito apenas quando $Re\{s\} > \alpha$. Assim,

$$L\left\{e^{\alpha x}\right\} = -\frac{e^{-(s-\alpha)x}}{s-\alpha}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha} .$$

Aproveitando a propriedade de linearidade das transformadas integrais, é possível encontrar a transformada de Laplace de funções que resultam da combinação linear de $e^{\alpha x}$. Por exemplo, lembrando que:

$$\text{senh } \alpha x = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}\right) ,$$

pode-se ver que:

$$L\left\{\text{senh } \alpha x\right\} = \frac{1}{2} L\left\{e^{\alpha x}\right\} - \frac{1}{2} L\left\{e^{-\alpha x}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2} .$$

De uma maneira análoga,

$$L\left\{\cosh \alpha x\right\} = \frac{s}{s^2 - \alpha^2} .$$

<u>Exemplo 6.5</u>

Seja encontrar

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+q)^2 + p^2}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{sx}\, ds}{(s+q)^2 + p^2} = ?$$

Evidentemente, o cálculo desta transformada inversa reduz-se ao cálculo da integral no plano complexo s. Para isto, considera-se a integral

$$\oint \frac{e^{sx}\, ds}{(s + q)^2 + p^2} =$$

$$= 2\pi i \; [b_{-1}(s=-q + ip) + b_{-1}\; (s=-q - ip)] \,,$$

onde os resíduos b_{-1} são calculados nos pólos simples do integrando. O contorno fechado da integração é escolhido da maneira indicada na Figura 6.4. O leitor pode verificar que:

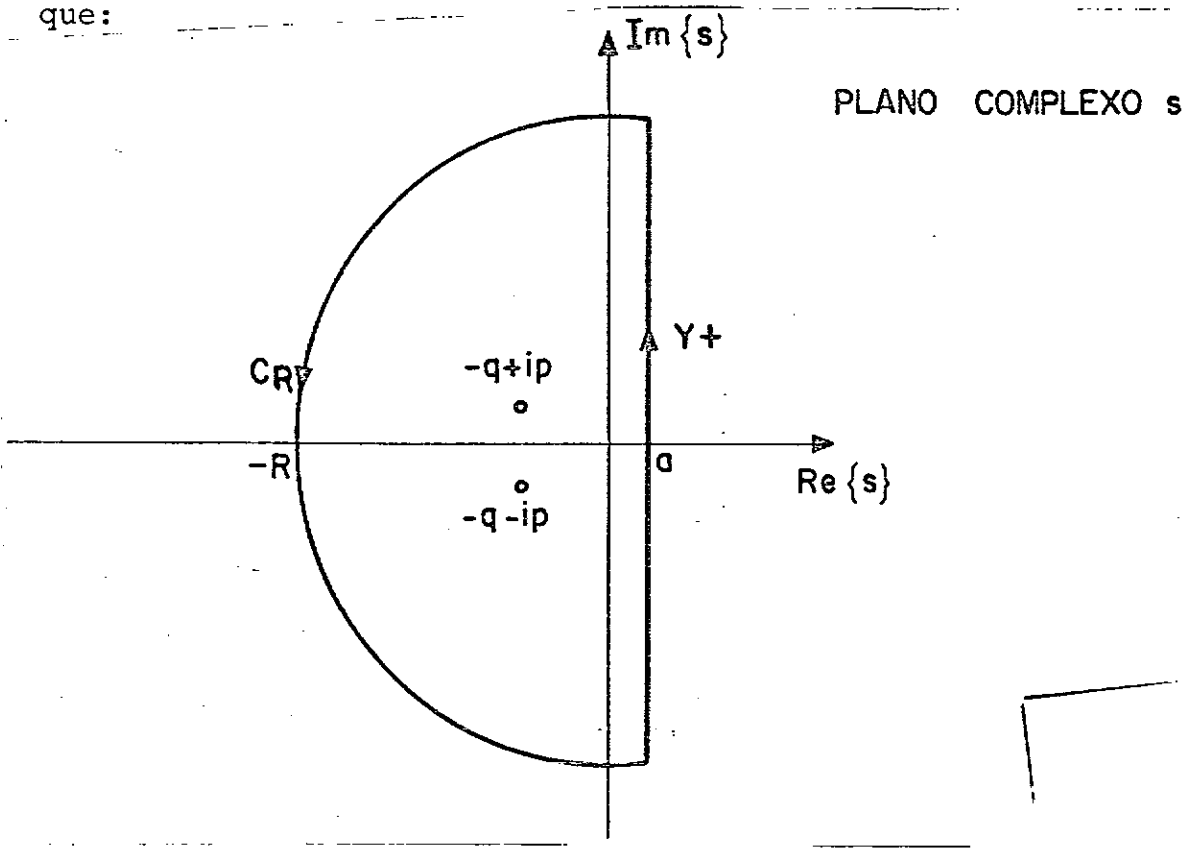

Fig. 6.4 - Contorno de integração para o cálculo de $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s + q)^2 + p^2}\right\}$ do Exemplo 6.5.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{sx}\, ds}{(s + q)^2 + p^2} = 0 \;.$$

Portanto, considerando que:

$$b_{-1}\ (s = -q + ip) = \frac{1}{2ip}\ e^{-(q-ip)x} \quad ,$$

$$b_{-1}\ (s = -q - ip) = \frac{-1}{2ip}\ e^{-(q+ip)x} \quad ,$$

tem-se:

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{sx}\ ds}{(s + q)^2 + p^2} = \frac{2\pi i}{p}\ e^{-qx}\ \text{sen}\ px \quad ,$$

Finalmente:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s + q)^2 + p^2}\right\} = \frac{1}{p}\ e^{-qx}\ \text{sen}\ px \quad .$$

É interessante observar que, devido à localização dos pólos em relação ao contorno escolhido, neste caso o parâmetro $a = \text{Re}\{s\}$ pode ser: $a = 0$.

6.8- PROPRIEDADES GERAIS DAS TRANSFORMADAS DO TIPO FOURIER

Nesta Seção, serão desenvolvidas as propriedades de transformadas do tipo:

$$T\left\{f(x)\right\} = K \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\ e^{-\zeta x}\ dx \quad , \qquad (6.8.1)$$

onde K é um coeficiente real; ζ, um número complexo; e α um limite inferior, real. Esta transformada, assim definida, é aqui chamada de transformada do tipo Fourier. Depois, em seções seguintes, os resultados a ser obtidos serão adaptados às transformadas de Fourier, Fourier-Cosseno, Fourier-Seno e Laplace. Com este objetivo, nota-se que:

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} + i\mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\,(\cos kx + i \operatorname{sen} kx)\; dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\; e^{ikx}\; dx\ .$$

Chamando

$$\mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\; e^{ikx}\; dx$$

$$= \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} + i\mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} \qquad (6.8.2)$$

tem-se que:

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} = \operatorname{Re}\left\{\mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\}\right\}\ , \qquad (6.8.3a)$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} = \operatorname{Im}\left\{\mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\}\right\}\ , \qquad (6.8.b)$$

onde Re{ } e Im{ } simbolizam: parte real de { } e parte imaginária de { }, respectivamente.

Evidentemente, quando:

$$\zeta = ik,\ \alpha = -\infty \quad e \quad K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \text{tem-se: } \mathcal{T}\{f(x)\} \rightarrow \mathcal{F}\{f(x)\};$$

$$\zeta = -ik,\ \alpha = 0 \quad e \quad K = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ ,\ \text{tem-se: } \mathcal{T}\{f(x)\} \rightarrow \mathcal{F}_T\{f(x)\}\ ,$$

$$\zeta = s,\ \alpha = 0 \quad e \quad K = 1, \quad \text{tem-se: } \mathcal{T}\{f(x)\} \rightarrow \mathcal{L}\{f(x)\}\ .$$

6.8.1- <u>Translação</u>

Quando se conhece $\mathcal{T}\{f(x)\}$ e se deseja conhecer $\mathcal{T}\{f(x + b)\}$, em termos da primeira, a relação a ser desenvolvida é importante.

$$\mathcal{T}\left\{f(x + b)\right\} = K \int_{\alpha}^{\infty} f(x + b)\ e^{-\zeta x}\ dx\ .$$

Fazendo $x + b = y$ no integrando, tem-se:

$$\mathcal{T}\left\{f(x + b)\right\} = K \int_{\alpha+b}^{\infty} f(y)\ e^{-\zeta(y-b)}\ dy$$

$$= e^{b\zeta}\ K \int_{\alpha+b}^{\infty} f(y)\ e^{-\zeta y}\ dy\ , \qquad (6.8.4)$$

onde deve-se notar que y é apenas uma variável "muda".

a) <u>Transformada de Fourier</u>: Da Relação (6.8.4) pode-se ver que:

$$\mathcal{F}\left\{f(x+b)\right\} = e^{ibk}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ikx}\,dx$$

$$\mathcal{F}\left\{f(x+b)\right\} = e^{ibk}\,\mathcal{F}\left\{f(x)\right\}\,. \qquad (6.8.5)$$

b) <u>Transformadas de Fourier-Cosseno e Fourier-Seno</u>: Para estes casos, a relação (6.8.4) fica:

$$\mathcal{F}_T\left\{f(x+b)\right\} = e^{-ibk}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{b}^{\infty} f(x)\,e^{+ikx}\,dx\,.$$

Considerando primeiro que b seja uma grandeza real e positiva,

$$\int_b^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^{b}\,.$$

Portanto:

$$\mathcal{F}_T\left\{f(x+b)\right\} = e^{-ibk}\left[\mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{b} f(x)\,e^{ikx}\,dx\right]$$

$$= (\cos bk - i\,\mathrm{sen}\,bk)\left[\mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} + i\,\mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{b} f(x)\,(\cos kx + i\,\mathrm{sen}\,kx)\,dx\right]\,.$$

Finalmente, utilizando as Relações (6.8.3), tem-se:

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x + b)\right\} = \cos bk\ \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} + \operatorname{sen} bk\ \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} -$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^b f(x) \cos k(x - b)\, dx \qquad (6.8.6)$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(x + b)\right\} = \cos bk\ \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} - \operatorname{sen} bk\ \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} -$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^b f(x) \operatorname{sen} k(x - b)\, dx\ . \qquad (6.8.7)$$

Nestes resultados deve-se considerar ainda o caso em que o parâmetro b é negativo; a saber, quando:

$$b = -|b|$$

as integrais das equações anteriores são tais que

$$\int_0^{-|b|} = 0\ ,$$

uma vez que f(x) é definida apenas para $x \geqq 0$. Desta maneira, as Relações (6.8.6) e (6.8.7) reduzem-se às seguintes:

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x - |b|)\right\} = \cos |b|k \; \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} -$$

$$- \operatorname{sen} |b|k \; \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} \qquad (6.8.8)$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(x - |b|)\right\} = \cos |b|k \; \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} +$$

$$+ \operatorname{sen} |b|k \; \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} . \qquad (6.8.9)$$

As Relações (6.8.6) e (6.8.8) podem ser colocadas numa única forma, tanto para valores positivos como negativos de b, da seguinte maneira:

$$\mathcal{F}_c\left\{f(x + b)\right\} = \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} \cos bk + \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} \operatorname{sen} bk -$$

$$-\left(\frac{|b| + b}{2b}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^b f(x) \cos k(x-b)\, dx \qquad (6.8.10)$$

$$\mathcal{F}_s\left\{f(x + b)\right\} = \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} \cos bk - \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} \operatorname{sen} bk -$$

$$-\left(\frac{|b| + b}{2b}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^b f(x) \operatorname{sen} k(x-b)\, dx. \qquad (6.8.11)$$

c) Transformada de Laplace: A Relação (6.8.4) para este caso tem a forma (b, real positivo):

$$L\left\{f(x+b)\right\} = e^{bs} \int_b^{\infty} f(x)\, e^{-sx}\, dx$$

$$L\left\{f(x+b)\right\} = e^{bs} \left[L\{f(x)\} - \int_0^b f(x)\, e^{-sx}\, dx\right]$$

$$b > 0 \,. \qquad (6.8.12)$$

Pelas mesmas razões anotadas anteriormente, quando $b < 0$

$$b = -|b|$$

tem-se:

$$L\left\{f(x-|b|)\right\} = e^{-|b|s}\, L\left\{f(x)\right\} \qquad b < 0 \,. \quad (6.8.13)$$

6.8.2- Transformadas de $e^{-\lambda x} f(x)$

$$T\left\{e^{-\lambda x} f(x)\right\} = K \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\, e^{-(\zeta+\lambda)x}\, dx \,.$$

Chamando

$$\overline{f}(\zeta) = T\{f(x)\}$$

e observando a relação anterior, tem-se que:

$$T\{e^{-x} f(x)\} = \bar{f}(\zeta + \lambda) \quad . \tag{6.8.14}$$

Este resultado é de aplicação direta nas transformadas em estudo.

a) <u>Transformada de Fourier</u>: Utilizando a Notação (6.2.6), tem-se:

$$F\{e^{-\lambda x} f(x)\} = \bar{f}(k - i\lambda) \quad . \tag{6.8.15}$$

b) <u>Transformadas de Fourier-Cosseno e Fourier-Seno</u>: Apesar de a transformada $F_T\{e^{-\lambda x} f(x)\}$ ter uma expressão simples: $\bar{f}_T(k - i\lambda)$, as transformadas Fourier-Cosseno e Fourier-Seno não podem ser colocadas em termos de uma translação no parâmetro k; portanto, suas expressões permanecem sem alteração:

$$F_C\left\{e^{-\lambda x} f(x)\right\} = Re\left\{\bar{f}_T(k - i\lambda)\right\}$$

$$F_S\left\{e^{-\lambda x} f(x)\right\} = Im\left\{\bar{f}_T(k - i\lambda)\right\}$$

c) Transformada de Laplace: Com a Notação (6.7.5), tem-se:

$$L\{e^{\pm\lambda x} f(x)\} = \bar{f}(s \mp \lambda) \quad . \tag{6.8.16}$$

Neste caso, o parâmetro λ pode ser um número positivo finito.

6.8.3 - Transformadas de $x^n f(x)$

Derivando a Expressão (6.8.1) em relação ao parâmetro ζ, obtém-se:

$$\frac{d}{d\zeta} T\left\{f(x)\right\} = - K \int_{\alpha}^{\infty} xf(x)\, e^{-\zeta x}\, dx = -T\left\{xf(x)\right\} .$$

Efetuando n vezes esta mesma derivada, chega-se a:

$$T\left\{x^n f(x)\right\} = (-1)^n \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n T\left\{f(x)\right\} . \qquad (6.8.17)$$

Nas transformadas do tipo Fourier os resultados são aplicáveis somente quando f(x) diminui mais rapidamente do que o aumento de x^n para $x \to \infty$.

a) Transformada de Fourier

$$F\left\{x^n f(x)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{d(ik)^n} F\left\{f(x)\right\} ,$$

$$F\left\{x^n f(x)\right\} = i^n \left(\frac{d}{dk}\right)^n F\left\{f(x)\right\} . \qquad (6.8.18)$$

b) Transformadas de Fourier-Cosseno e Fourier-Seno

$$F_T\left\{x^n f(x)\right\} = (-i)^n \left(\frac{d}{dk}\right)^n F_T\left\{f(x)\right\} ,$$

$$= (-i)^n \left(\frac{d}{dk}\right)^n \left[F_c\left\{f(x)\right\} + iF_s\left\{f(x)\right\}\right] .$$

Quando n é um número par $(n = 2\,m)$, tem-se:

$$\mathcal{F}_T\left\{x^{2m}\, f(x)\right\} = (-1)^m \left(\frac{d}{dk}\right)^{2m} \left[\mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} + i\mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\}\right]$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

ao passo que, quando n é ímpar $(n = 2m + 1)$, tem-se:

$$\mathcal{F}_T\left\{x^{2m+1}\, f(x)\right\} = (-1)^{m+1} \left(\frac{d}{dk}\right)^{2m+1} \left[i\mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} - \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\}\right]$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Portanto:

$$\mathcal{F}_c\left\{x^{2m}\, f(x)\right\} = (-1)^m \left(\frac{d}{dk}\right)^{2m} \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\}\ ,$$

$$\mathcal{F}_c\left\{x^{2m+1}\, f(x)\right\} = (-1)^m \left(\frac{d}{dk}\right)^{2m+1} \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\}\ , \tag{6.8.19}$$

$$\mathcal{F}_s\left\{x^{2m}\, f(x)\right\} = (-1)^m \left(\frac{d}{dk}\right)^{2m} \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\}\ ,$$

$$\mathcal{F}_s\left\{x^{2m+1}\, f(x)\right\} = (-1)^{m+1} \left(\frac{d}{dk}\right)^{2m+1} \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\}\ , \tag{6.8.20}$$

onde $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

c) Transformada de Laplace: Da Relação (6.8.17), tem-se diretamente que:

$$L\left\{x^n\ f(x)\right\} = (-1)^n \left(\frac{d}{ds}\right)^n L\left\{f(x)\right\} . \qquad (6.8.21)$$

6.8.4- Transformadas de Derivadas Sucessivas

Chamando $f'(x) = \frac{d}{dx}\ f(x)$, a transformada desta derivada é:

$$T\left\{f'(x)\right\} = K \int_{\alpha}^{\infty} f'(x)\ e^{-\zeta x}\ dx$$

$$= K \left[f(x)\ e^{-\zeta x}\ \Big|_{\alpha}^{\infty} + \zeta \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\ e^{-\zeta x}\ dx\right]$$

$$= K\ f(x)\ e^{-\zeta x}\ \Big|_{x=\alpha}^{\infty} + \zeta T\left\{f(x)\right\} .$$

De uma maneira análoga, pode-se ver que:

$$T\left\{f''(x)\right\} = \zeta^2\ T\left\{f(x)\right\} + K\ e^{-\zeta x} \left[f'(x) + \zeta\ f(x)\right]\Big|_{x=\alpha}^{\infty} .$$

Seguindo este mesmo procedimento n vezes, chega-se à seguinte relação:

$$T\left\{f^{(n)}(x)\right\} = \zeta^n\ T\left\{f(x)\right\} + K\ e^{-\zeta x} \sum_{r=1}^{n} \zeta^{n-r}\ f^{(r-1)}(x)\Big|_{x=\alpha}^{\infty}$$

(6.8.22)

onde

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x), \quad e \quad f^0(x) = f(x) \quad .$$

a) Transformada de Fourier: Para este caso, dado que $f(x)$ tem de ser tal que $f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = f''(\pm\infty) = \ldots = f^{(n-1)}(\pm\infty) = 0$, a Relação (6.8.22) reduz-se simplesmente a:

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (ik)^n \, \mathcal{F}\{f(x)\} \; . \tag{6.8.23}$$

b) Transformadas de Fourier-Cosseno e Fourier-Seno: Aqui a Relação (6.8.22) toma a forma:

$$\mathcal{F}_T\{f^{(n)}(x)\} = (-ik)^n \, \mathcal{F}_T\{f(x)\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, e^{ikx} \sum_{r=1}^{n} (-ik)^{n-r} \, f^{(r-1)}(x) \Big|_{x=0}^{\infty} \; .$$

Entretanto, $f(\infty) = f'(\infty) = \ldots = f^{(n-1)}(\infty) = 0$; logo:

$$\mathcal{F}_T\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (-ik)^n \, \mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\} -$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{r=1}^{n} (-ik)^{n-r} \, f^{(r-1)}(0) \quad .$$

Visando separar o segundo membro em partes real e imaginária, consideram-se separadamente os casos em que n é par e é ímpar, respectivamente.

Quando $n = 2\,m$ (onde $m = 1, 2, 3, \ldots$), tem-se:

$$\mathcal{F}_T\left\{f^{(2m)}(x)\right\} = (-1)^m\, k^{2m}\, \mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\} -$$

$$- (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{r=1}^{2m} i^r\, k^{2m-r}\, f^{(r-1)}(0)\ .$$

Para este caso, o somatório pode ser subdividido em

$$\sum_{r=1}^{2m} = \sum_{r=1,3,5,\ \ldots}^{2m-1} + \sum_{r=2,4,6,\ \ldots}^{2m}\ ,$$

onde, no primeiro e segundo somatórios, segundo membro, podem ainda ser feitas as trocas $r = 2p - 1$ e $r = 2p$, respectivamente. Assim, depois de um pouco de álgebra, tem-se:

$$\mathcal{F}_T\left\{f^{(2m)}(x)\right\} = (-1)^m\, k^{2m}\, \mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\} -$$

$$- (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{p=1}^{m} (-1)^p \left[k^{2(m-p)} f^{(2p-1)}(0) - \right.$$

$$\left. - i k^{2(m-p)+1} f^{(2p-2)}(0)\right]\ . \qquad (6.8.24)$$

Quando $n = 2\,m - 1$ (onde $m = 1, 2, 3, \ldots$), pode-se ver que:

$$\mathcal{F}_T\{f^{(2m-1)}(x)\} = i(-1)^m k^{2m-1} \mathcal{F}_T\{f(x)\} -$$

$$- (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{r=1}^{2m-1} i^{r+1} k^{2m-r-1} f^{(r-1)}(0) .$$

Subdividindo o somatório, como antes, em somatórios de índices pares e ímpares, respectivamente, e depois de um pouco de álgebra, tem-se:

$$\mathcal{F}_T\{f^{(2m-1)}(x)\} = i(-1)^m k^{2m-1} \mathcal{F}_T\{f(x)\} -$$

$$- (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sum_{p=1}^{m} (-1)^p k^{2(m-p)} f^{(2p-2)}(0) + \right.$$

$$\left. + (1-\delta_{1m}) i \sum_{p=1}^{m-1} (-1)^p k^{2(m-p)-1} f^{(2p-1)}(0) \right] ,$$

(6.8.25)

onde δ_{1m} é o conhecido delta de Kronecker.

Das Relações (6.8.25) e (6.8.24) identificam-se a transformada de Fourier-Cosseno:

$$\mathcal{F}_C\{f^{(2m-1)}(x)\} = (-1)^{m-1} k^{2m-1} \mathcal{F}_S\{f(x)\} -$$

$$- (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{p=1}^{m} (-1)^p k^{2(m-p)} f^{(2p-1)}(0) ,$$

(6.8.26)

$$F_c\{f^{(2m)}(x)\} = (-1)^m k^{2m} F_c\{f(x)\} -$$

$$- (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{p=1}^{m} (-1)^p k^{2(m-p)} f^{(2p-1)}(0) \quad ,$$

onde m = 1, 2, 3, 4, ... , e a transformada de Fourier-Seno:

$$F_s\{f^{(2m-1)}(x)\} = (-1)^m k^{2m-1} F_c\{f(x)\} -$$

$$- (1 - \delta_{1m}) (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{p=1}^{m-1} (-1)^p k^{2(m-p)-1} f^{(2p-1)}(0)$$

(6.8.27)

$$F_s\{f^{(2m)}(x)\} = (-1)^m k^{2m} F_s\{f(x)\} +$$

$$+ (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{p=1}^{m} (-1)^p k^{2(m-p)+1} f^{(2p-2)}(0) \quad ,$$

onde m = 1, 2, 3, 4, ...

É importante observar que as transformadas de Fourier Seno e Cosseno não se misturam apenas quando as derivadas são da ordem par. Portanto, estas são as de maior aplicação em equações diferenciais.

c) <u>Transformada de Laplace</u>: Para este caso, a Relação (6.8.22) fica:

$$L\{f^{(n)}(x)\} = s^n L\{f(x)\} + e^{-sx} \sum_{r=1}^{m} s^{n-r} f^{(r-1)}(x) \Big|_{x=0}^{\infty}$$

Observe-se que $\lim_{x\to\infty} e^{-sx} = 0$. Portanto:

$$L\left\{f^{(n)}(x)\right\} = s^n\, L\left\{f(x)\right\} - \sum_{r=1}^{n} s^{n-r}\, f^{(r-1)}(0)\,. \qquad (6.8.28)$$

6.8.5- <u>Transformadas de Integrais</u>

Lembrando que a derivada de uma integral definida é dada por:

$$\frac{d}{dx}\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(\xi)\, d\xi = f(\phi_2)\,\frac{d\phi_2}{dx} - f(\phi_1)\,\frac{d\phi_1}{dx}\,,$$

tem-se que a derivada da função

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi \qquad (6.8.29)$$

é, simplesmente:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)\,, \qquad (6.8.30)$$

Contudo, a Relação (6.8.30) corresponde também à derivada da integral indefinida:

$$F(x) = \int f(x)\, dx + C\,. \qquad (6.8.31)$$

Portanto, quando se trata de encontrar a transformada de uma integral, ter-se-á de considerar ambos os casos.

Da Relação (6.8.22), com n = 1, tem-se que:

$$T\left\{\frac{dF}{dx}\right\} = K\,F(x)\;e^{-\zeta x}\Big|_{x=\alpha}^{\infty} + \zeta\,T\left\{F(x)\right\} ,$$

de onde

$$T\left\{F(x)\right\} = \frac{1}{\zeta}\,T\left\{\frac{dF}{dx}\right\} - \frac{K}{\zeta}\,F(x)\;e^{-\zeta x}\Big|_{x=\alpha}^{\infty} . \qquad (6.8.32)$$

Substituindo F(x) por qualquer uma das Integrais (6.8.29) ou (6.8.31), obtém-se a transformada do tipo Fourier, de uma integral. Entretanto, expressões explícitas somente são obtidas aplicando às características próprias de cada transformada.

a) <u>Transformada de Fourier</u>: Substituindo F(x) da Equação (6.8.31) e $\frac{dF}{dx}$ da (6.8.30) na (6.8.32), chega-se a:

$$F\left\{\int f(c)\;dx\right\} = \frac{1}{ik}\;F\left\{f(x)\right\} -$$

$$- \frac{(2\pi)^{-1}}{ik}\;e^{-ikx}\int f(x)\;dx\Big|_{-\infty}^{\infty} + F\left\{C\right\} ,$$

onde C é a constante de integração da integral indefinida.

Se F(x) suposto ter transformada de Fourier, então $F(x)\big|_{-\infty}^{\infty} = \int f(x)\;dx\;\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$, pois somente assim ter-se-á que $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\;dx$ = finito. Por outro lado, pode-ser ver que $F\{C\} = \sqrt{2\pi}\;C\;\delta(k)$. Assim, para as funções f(x) que satisfazem a condição anterior, tem-se que:

Hélio
F

$$\mathcal{F}\left\{\int f(x)\ dx\right\} = \frac{1}{ik}\ \mathcal{F}\left\{f(x)\right\} + A\ \delta(k) \quad , \qquad (6.8.33)$$

onde A é uma nova constante, redefinida.

Por outro lado, a definição para F(x) mostrada na Relação (6.8.29) conduz à seguinte relação:

$$\mathcal{F}\left\{\int_0^x f(\xi)\ d\xi\right\} = \frac{1}{ik}\ \mathcal{F}\left\{f(x)\right\} +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2\pi}\ k}\ e^{-ikx} \int_0^x f(\xi)\ d\xi \ \Big|_{x=-\infty}^{\infty} \ .$$

Aqui novamente para as funções f(x) que satisfazem a condição:

$$\int_0^x f(\xi)\ d\xi \ \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad ,$$

tem-se:

$$\mathcal{F}\left\{\int_0^x f(\xi)\ d\xi\right\} = \frac{1}{ik}\ \mathcal{F}\left\{f(x)\right\} \ . \qquad (6.8.34)$$

b) <u>Transformadas de Fourier-Cosseno e Fourier-Seno</u>: A função F(x) definida na Relação (6.8.29), substituída na (6.8.32) para o caso presente, conduz a:

$$\mathcal{F}_T\left\{\int_0^x f(\xi)\ d\xi\right\} = \frac{1}{ik}\ \mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\} -$$

$$- \frac{1}{ik}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ e^{-ikx}\int_0^x f(\xi)\ d\xi\ \Big|_{x=0}^{\infty}$$

$$= \frac{-i}{k}\ \mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\} +$$

$$+ \frac{i}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ e^{-ikx}\int_0^x f(\xi)\ d\xi\Big|_{x=\infty} . \quad (6.8.35)$$

Observe-se que o segundo termo apresenta dependência no limite $x = \infty$. Para funções que satisfazem a condição:

$$\int_0^x f(\xi)\ d\xi\ \Big|_{x=\infty} = 0$$

tem-se que:

$$\mathcal{F}_T\left\{\int_0^x f(\xi)\ d\xi\right\} = -\frac{i}{k}\ \mathcal{F}_T\left\{f(x)\right\} .$$

Portanto,

$$\mathcal{F}_c\left\{\int_0^x f(\xi)\ d\xi\right\} = \frac{1}{k}\ \mathcal{F}_s\left\{f(x)\right\} \quad (6.8.36)$$

e

$$\mathcal{F}_s\left\{\int_0^x f(\xi)\ d\xi\right\} = -\frac{1}{k}\ \mathcal{F}_c\left\{f(x)\right\} . \quad (6.8.37)$$

c) <u>Transformada de Laplace</u>: Para este caso, a Relação (6.8.32), com a Expressão (6.8.29) para F(x), fica:

$$L\left\{\int_0^x f(\xi)\ d\xi\right\} = \frac{1}{s}\ L\left\{f(x)\right\} - \frac{1}{s}\ e^{-sx} \int_0^x f(\xi)\ d\xi \ \Big|_{x=0}^{\infty} .$$

Neste caso, fica evidente que o segundo termo, do segundo membro, se anula para os dois limites. Assim:

$$L\left\{\int_0^x f(\xi)\ d\xi\right\} = \frac{1}{s}\ L\left\{f(x)\right\} . \qquad (6.8.38)$$

Para o caso da integral indefinida, é fácil demonstrar que:

$$L\{\int f(x)dx\} = \frac{1}{s}\ [L\{f(x)\} + \int f(x)dx \ \Big|_{x=0} + C] \qquad (6.8.39)$$

Nos exemplos a seguir, demonstrar-se-á algumas das aplicações das transformadas a equações diferenciais e integro-diferenciais. Maiores esclarecimentos, quanto à aplicação destas transformadas na solução de equações diferenciais, são apontados na Seção 7.4.5 do trabalho "Equações Diferenciais Ordinárias" (INPE-1753-RPE/144, Maio 1980) deste autor.

Exemplo 6.6

Seja resolver o sistema de equações diferenciais seguinte:

$$y' + z' - 3z = 0 ,$$

$$y'' + z' = 0 ,$$

onde $y = y(x)$ e $z = z(x)$, sujeitos às condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$ e $z(0) = 4/3$, respectivamente.

A disponibilidade de condições iniciais associadas a derivadas de funções sugere a utilização da transformada de Laplace (lembra-se que as outras transformadas exigem que as funções envolvidas se anulem no infinito). Assim, tomando a transformada de Laplace do sistema e chamando $Y = L\{z\}$, $Z = L\{z\}$, tem-se:

$$L\{y'\} + L\{z'\} - 3L\{z\} = sY - y(0) + sZ - z(0) - 3Z = 0$$

$$L\{y''\} + L\{z'\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) + sZ - z(0) = 0 ,$$

de onde vem que:

$$sY + (s - 3)Z - \frac{4}{3} = 0 ,$$

$$s^2Y + sZ - \frac{4}{3} = 0 .$$

Eis aqui a grande vantagem das transformadas integrais, na solução de equações diferenciais. Observa-se que o sistema de equações diferenciais, no espaço da variável x, foi convertido num sistema de equações algébricas, no espaço do parâmetro s da transformada.

Resolvendo o sistema de equações, tem-se que:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2(4 - s)} \quad e \quad Z(s) = \frac{4}{3}\,\frac{1 - s}{s(4 - s)} .$$

Essencialmente o problema está resolvido, apenas se encontra no espaço do parâmetro s. Naturalmente, o próximo passo é encontrar a transformada inversa de Laplace destas soluções. Assim:

$$y(x) = L^{-1}\left\{Y(s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2(4 - s)}\right\} = x - \frac{1}{4}\,(e^{4x} - 1)$$

$$z(x) = L^{-1}\left\{Z(s)\right\} = \frac{4}{3}\,L^{-1}\left\{\frac{1 - s}{s(4 - s)}\right\} = e^{4x} + \frac{1}{3} .$$

<u>Exemplo 6.7</u>

Seja encontrar a solução da equação diferencial:

$$y'' - \lambda^2 y = f(x)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$y(0) = b \quad e \quad y(\infty) = 0.$$

Neste caso, a disponibilidade das condições de contorno e a ausência da primeira derivada na equação diferencial satisfazem as condições necessárias para a utilização da transformada de Fourier-Seno. Assim, tomando a transformada Fourier-Seno da equação diferencial, tem-se:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k\, y(0) - k^2\, F_s\{y\} - \lambda^2\, F_s\{y\} = F_s\{f(x)\}\ ,$$

de onde:

$$F_s\{y\} = \frac{1}{k^2 + \lambda^2}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, bk - F_s\{f(x)\}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k^2 + \lambda^2}\left[bk - \int_0^\infty f(x)\ \text{sen}\ kx\ dx\right]\ .$$

Portanto, tomando a transformada inversa, tem-se:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\, b \int_0^\infty \frac{k\ \text{sen}\ kx}{k^2 + \lambda^2}\, dk\ -$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\text{sen}\ kx}{k^2 + \lambda^2}\, dk \int_0^\infty f(\xi)\ \text{sen}\ k\xi\ d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi}\, b\, \frac{\pi}{2}\, e^{-\lambda x} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\ d\xi \int_0^\infty \frac{\text{sen}\ kx\ \text{sen}\ k\xi}{k^2 + \lambda^2}\, dk.$$

Finalmente:

$$y(x) = b\ e^{-\lambda x} - \frac{1}{2\lambda}\int_0^{\infty} f(\xi)\ [e^{-\lambda|x-\xi|} - e^{-\lambda(x+\xi)}]\ d\xi\ .$$

Exemplo 6.8

Seja o circuito RLC, alimentado pela fonte eletromotriz $E = E_0$ sen ωt, mostrado na Figura 6.5. A corrente I deste circuito é dada pela Equação:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\ d\tau = E_0 \text{ sen } \omega t\ ,$$

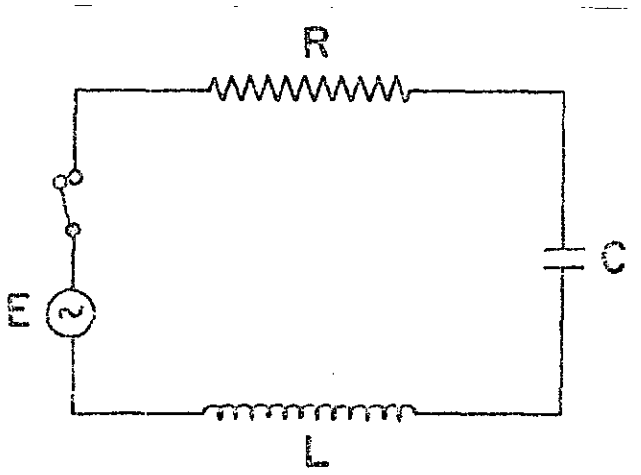

Fig. 6.5 - Circuito RLC em série.

onde L é a inductância; R, a resistência; C a capacitância; E_0, o valor de pico da força eletromotriz e ω a frequência de oscilação da fonte. Em $t = 0$, antes de o circuito ter sido ligado, evidentemente $I(0) = 0$. Aplicando a transformada de Laplace à equação integro-diferencial, tem-se:

$$L\,s\,\mathcal{L}\{I\} + R\,\mathcal{L}\{I\} + \frac{1}{Cs}\,\mathcal{L}\{I\} = \frac{E_0\,\omega}{s^2 + \omega^2} ,$$

de onde

$$\mathcal{L}\{I\} = \frac{E_0\,\omega s}{(s^2 + \omega^2)\,(Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})} .$$

Após um cálculo cuidadoso, pode-se demonstrar que a transformada inversa de Laplace desta expressão é:

$$I(t) = \frac{E_0}{|Z|}\,\text{sen}\,(\omega t - \phi) + \frac{E_0}{|Z|}\,\text{sen}\,\phi\, e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\omega_0 t -$$

$$- \frac{E_0}{|Z|\,\omega_0 t}\left(\frac{R}{2}\,\text{sen}\,\phi + \frac{\cos\phi}{\omega C}\right) e^{-\frac{R}{2L}t}\,\text{sen}\,\omega_0 t ,$$

onde:

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) ,$$

$$\phi = \text{arc tg}\,\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) ,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} .$$

6.9- TEOREMAS DE "CONVOLUÇÃO" EM TRANSFORMADAS DO TIPO FOURIER

Os Teoremas de Convolução são expressões integrais que permitem o cálculo da transformada inversa de um produto de transformadas de duas funções cujas inversas são conhecidas.

Suponha-se a função $\Phi(x)$ definida pela integral:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\xi)\, h_2(x - \xi)\, d\xi \,, \qquad (6.9.1)$$

onde as funções $h_1(x)$ e $h_2(x)$ são funções que possuem transformadas integrais, assim como $\Phi(x)$. A Integral (6.9.1) é chamada de Convolução das funções $h_1(x)$ e $h_2(x)$. Aplicando o operador transformada T, definido mediante (6.8.1), à Expressão (6.9.1), tem-se:

$$T\left\{\Phi(x)\right\} = K\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\zeta x}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\xi)\, h_2(x - \xi)\, d\xi$$

$$= K\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\xi)\, d\xi \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\zeta x}\, h_2(x - \xi)\, dx \,.$$

Fazendo a troca $x - \xi = \eta$, a equação anterior fica:

$$T\left\{\Phi(x)\right\} = K\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\xi)\, d\xi \int_{\alpha-\xi}^{\infty} e^{-\zeta(\xi+\eta)}\, h_2(\eta)\, d\eta$$

$$= K\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta\xi}\, h_1(\xi)\, d\xi \int_{\alpha-\xi}^{\infty} e^{-\zeta\eta}\, h_2(\eta)\, d\eta \,. \qquad (6.9.2)$$

Este resultado pode aplicar-se agora, de modo específico às transformadas de Fourier e Laplace. A integral de convolução para as transformadas Fourier-Cosseno e Fourier-Seno é diferente da definida mediante (6.9.1), conforme será visto mais tarde.

6.9.1 - Convolução na Transformada de Fourier

A Relação (6.9.2) para este caso é:

$$F\left\{\Phi(x)\right\} = \sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi}\, h_1(\xi)\, d\xi\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\eta}\, h_2(\eta)\, d\eta$$

$$= \sqrt{2\pi}\; F\{h_1(x)\}\; F\{h_2(x)\} \;. \qquad (6.9.3)$$

Chamando $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\Phi(x)$, a Relação (6.9.3) fica:

$$F\{f(x)\} = F\{h_1(x)\}\; F\{h_2(x)\} \qquad (6.9.4)$$

e a integral de convolução toma a forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\xi)\; h_2(x-\xi)\; d\xi \;. \qquad (6.9.5)$$

As Equações (6.9.4) e (6.9.5) são de muita importância no cálculo da transformada de Fourier inversa de uma função constituída de dois fatores, cujas transformadas inversas são conhecidas. Evidentemente, a transformada inversa deste produto é dada pela integral de convolução (6.9.5), correspondente à transformada de Fourier. Aqui é muito importante lembrar que as transformadas de Fourier são as definidas com os coeficientes simétricos.

6.9.2 - Convolução na Transformada de Laplace

Sabendo que a transformada de Laplace é aplicável a funções definidas no intervalo $0 \leq x \leq \infty$, ou, eqüivalentemente, a funções em geral multiplicadas pela função degrau $H(x)$, fica evidente que as integrações para $x < 0$ são nulas. Portanto, a Relação (6.9.2) com $\Phi(x) = f(x)$, para este caso, fica:

$$L\left\{f(x)\right\} = \int_0^\infty e^{-s\xi}\, h_1(\xi)\, d\xi \int_0^\infty e^{-s\eta}\, h_2(\eta)\, d\eta \quad ,$$

de onde vem:

$$L\{f(x)\} = L\{h_1(x)\}\; L\{h_2(x)\} \quad . \tag{6.9.6}$$

Por outro lado, a integral de convolução (6.9.1) pode ser reduzida a uma de limites finitos após as seguintes considerações. Observa-se que o limite inferior da integral tem de ser zero, uma vez que $h_1(\xi)$ é diferente de zero apenas para valores positivos de ξ. Quanto ao limite superior, também fica modificado, já que o argumento da função h_2 tem de ser positivo, i.e., $x - \xi \geq 0$; isto significa que o máximo valor da variável de integração é: $\xi \leq x$. Portanto, a integral de convolução para o caso da transformada de Laplace é:

$$f(x) = \int_0^x h_1(\xi)\, h_2(x - \xi)\, d\xi \quad . \tag{6.9.7}$$

Analogamente às relações similares para a transformada de Fourier, as Relações (6.9.6) e (6.9.7) são muito importantes, dado que possibilitam o cálculo da transformada de Laplace inversa, de um produto de funções de transformadas inversas conhecidas, mediante a integral de convolução (6.9.7).

6.9.3- Convolução nas Transformadas Fourier-Cosseno e Fourier-Seno

O leitor pode verificar que quando a integral de convolução é definida segundo (6.9.1), para o caso de transformadas de Fourier-Cosseno e Fourier-Seno, não são obtidas expressões semelhantes às (6.9.1) e (6.9.6), encontradas para o caso das transformadas de Fourier e Laplace, respectivamente. Por esta razão, neste caso, seguir-se-á o procedimento inverso; isto é, supor-se-á a existência do produto das transformadas de duas funções conhecidas, encontrando a correspondente integral de convolução.

Sejam as funções $F_c\{h_1(x)\}$ e $F_c\{h_2(x)\}$, cujas funções primitivas $h_1(x)$ e $h_2(x)$, respectivamente, são conhecidas. O problema consiste em encontrar a integral de convolução, para a transformada de Fourier-Cosseno, das funções $h_1(x)$ e $h_2(x)$. Assim, considere-se a função:

$$F_c\{f(x)\} = F_c\{h_1(x)\} \; F_c\{h_2(x)\} \; . \qquad (6.9.8)$$

A transformada de Fourier-Cosseno inversa é:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos kx \, dk \; F_c\{h_1(x)\} \; F_c\{h_2(x)\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_c\{h_2(x)\} \, dk \int_0^\infty h_1(\xi) \cos kx \cos k\xi \, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty h_1(\xi) \, d\xi \int_0^\infty F_c\{h_2(x)\} \, [\cos k|x - \xi| \; +$$

$$+ \cos k(x + \xi)] \, dk.$$

Agora,

$$\int_0^\infty F_C\{h_2(x)\} \cos kx \, dk = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, h_2(x) \; ;$$

portanto:

$$\int_0^\infty F_C\{h_2(x)\} \cos k|x - \xi| \, dk = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, h_2(|x - \xi|) \; .$$

Desta maneira:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty h_1(\xi) \; [h_2(|x - \xi|) + h_2(x + \xi)] d\xi, \quad (6.9.9)$$

resultado que representa a integral de convolução para a transformada de Fourier-Cosseno.

Para a transformada de Fourier-Seno, a integral de convolução é um pouco mais complicada. Suponha-se, como antes, que $F_S\{h_1(x)\}$ e $F_S\{h_2(x)\}$ são conhecidas e que se deseja uma expressão para a transformada inversa da função:

$$F_S\{f(x)\} = F_S\{h_1(x)\} \; F_S\{h_2(x)\} \; . \quad (6.9.10)$$

Seguindo o mesmo procedimento anterior, chega-se a:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty h_1(\xi) \, d\xi \int_0^\infty F_S\{h_2(x)\} \; [\cos k|x - \xi| -$$

$$- \cos k(x + \xi)] \, dk \; . \quad (6.9.11)$$

Neste ponto, porém, define-se a função:

$$w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s\{h_2(x)\} \cos kx \, dk ,$$

que não é a expressão simples de uma transformada Fourier-Cosseno, uma vez que a função a ser transformada é a transformada de Fourier-Seno de $h_2(x)$. Com esta definição, a Relação (6.9.11) fica:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty h_1(\xi) \; [w(|x - \xi|) - w(x + \xi] \; d\xi , \quad (6.9.12)$$

função esta que representa a convolução das funções $h_1(x)$ e $w(x)$ nas transformadas de Fourier-Seno.

Uma outra integral de convolução para este mesmo caso é obtida quando se trata de encontrar a transformada de Fourier-Seno inversa da função:

$$F_s\{f(x)\} = F_s\{h_1(x)\} \; F_c\{h_2(x)\} . \quad (6.9.13)$$

Para este caso, o leitor pode verificar que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty h_1(\xi) \; [h_2(|x - \xi|) - h_2(x + \xi)] \, d\xi . \quad (6.9.14)$$

Exemplo 6.9

Seja encontrar a transformada de Laplace inversa da função:

$$L\{f(x)\} = \frac{1}{(s^2 + 1)\ (s - 1)} ,$$

sabendo que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \text{sen } x$$

e

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1}\right\} = e^x .$$

Observa-se que:

$$L\{f(x)\} = L\{\text{sen } x\}\ L\{e^x\} .$$

Portanto, f(x) é dada pela integral de convolução (6.9.7), escolhendo:

$$h_1(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad h_2(x) = e^x .$$

Assim,

$$f(x) = \int_0^x \text{sen}\ \xi\ e^{x-\xi}\ d\xi = e^x \int_0^x e^{-\xi}\ \text{sen}\ \xi\ d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\ (e^x - \text{sen}\ x - \cos x)\ .$$

Ressalta-se que o resultado independe da escolha alternativa: $h_1(x) = e^x$ e $h_2(x) = \text{sen}\ x$. Apenas a integração teria sido um pouco mais trabalhosa.

<u>Exemplo 6.10</u>

Seja encontrar a solução da equação diferencial:

$$y'' - a^2 y = f(x)\ ,$$

sujeita às condições de contorno:

$$y(\pm\infty) = \frac{d}{dx}\ y(\pm\infty) = 0.$$

Evidentemente, as condições de contorno exigem que também $f(\pm\infty) = 0$. Assim, na solução da equação diferencial proposta, pode-se utilizar a transformada de Fourier.

$$-k^2\ \mathcal{F}\{y\} - a^2\ \mathcal{F}\{y\} = \mathcal{F}\{f(x)\}\ ,$$

$$\mathcal{F}\{y\} = \frac{-1}{k^2 + a^2}\ \mathcal{F}\{f(x)\}\ .$$

Chamando

$$F\{g(x)\} = \frac{-1}{k^2 + a^2}$$

tem-se que:

$$g(x) = -F^{-1}\left\{\frac{1}{k^2 + a^2}\right\} = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 + a^2}\, dk \ .$$

A integral resultante pode ser calculada mediante o teorema dos resíduos (ver, por exemplo, a Seção 4.13 do trabalho "Funções de Variável Complexa" deste autor), com o seguinte resultado:

$$g(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{e^{-a|x|}}{a} \ .$$

Portanto, a transformada de Fourier inversa de

$$F\{y\} = F\{g(x)\}\, F\{f(x)\}$$

é dada pela integral de convolução para a transformada de Fourier (6.9.5):

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ g(x - \xi)\ d\xi$$

$$= \frac{-1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-\xi|}\ f(\xi)\ d\xi\ .$$

Esta solução pode ainda ser colocada na forma:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi)\ f(\xi)\ d\xi\ ,$$

onde

$$G(x,\xi) = \frac{-1}{2a}\ e^{-a|x-\xi|}\ .$$

Observe-se que se:

$$f(x) = \delta(x)$$

então:

$$y(x) = G(x,0)\ ;$$

isto é, a função $G(x,0)$ é a solução da equação

$$G'' - a^2G = \delta(x)\ ,$$

com as mesmas condições de contorno que a E.D. original. A função $G(x,\xi)$ que satisfaz estas condições é chamada de Função de Green.

Exemplo 6.11: Equação Integral Linear

A forma geral de uma equação integral linear é a seguinte:

$$\Psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi \,, \qquad (6.9.15)$$

onde λ é uma constante, $f(x)$ e $K(x,\xi)$ são funções conhecidas e $\Psi(x)$ é a função incógnita. A Equação (6.9.15) é chamada de equação integral porque a função incógnita encontra-se dentro do símbolo de integração.

A Equação Integral (6.9.15) pode ser resolvida com a ajuda das transformadas integrais, quando o chamado "núcleo" $K(x,\xi)$ da equação integral é da forma:

$$K(x,\xi) = K(x - \xi) \,,$$

e os limites da integral sejam tais que esta integral possa ser identificada com a integral de convolução. Naturalmente, as funções $K(x,\xi)$, $f(x)$ e $\Psi(x)$ serão tais que possuam transformadas. Seja resolver a equação integral:

$$\int_0^x \operatorname{senh}(x - \xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi = x^3\, e^{-x} \,.$$

Comparando esta equação com a (6.9.7), identifica-se: $f(x) = x^3\, e^{-x}$, $h_1(x) = \Psi(x)$ e $h_2(x) = \operatorname{senh} x$. Assim, a Relação (6.9.6), fica:

$$L\{x^3\ e^{-x}\} = L\{\Psi(x)\}\ L\{\text{senh } x\}\ .$$

de onde:

$$L\{\Psi(x)\} = \frac{L\{x^2\ e^{-x}\}}{L\{\text{senh}x\}} = \frac{\dfrac{6}{(s+1)^4}}{\dfrac{1}{s^2-1}} = 6\,\frac{(s-1)}{(s+1)^3}\ ,$$

$$\Psi(x) = 6\ L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+1)^3}\right\}$$

$$= 6x\ (1-x)\ e^{-x}\ .$$

6.10- TRANSFORMADAS FINITAS DE FOURIER

As transformadas finitas são aplicadas a problemas onde o intervalo do domínio das variáveis de interesse é finito; isto é, se x for a variável sobre a qual se pretende aplicar uma transformada finita, então: $a \leq x \leq b$, onde a e b são números finitos (é costume, ou pode-se sempre, escolher o sistema de coordenadas de maneira a fazer $a = 0$).

Lembra-se que uma função $f(x)$, definida num intervalo $0 \leq x \leq b$, a qual satisfaz as condições de Dirichlet (função bem comportada), pode ser expressa em Série de Fourier em termos das funções cosseno:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{b} x\ , \qquad (6.10.1)$$

onde

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cos\frac{n\pi}{b}x\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (6.10.2)$$

ou, em termos das funções seno:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}x \quad , \qquad (6.10.3)$$

onde

$$B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}x\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (6.10.4)$$

O que é interessante observar nestas relações é que as integrais que fornecem os coeficientes das séries, nas Equações (6.10.2) e (6.10.4), respectivamente, têm as características de transformadas integrais com núcleos $\cos\frac{n\pi}{b}x$ e $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}x$.

De fato, se estas integrais representam transformadas, as transformadas inversas têm, de alguma maneira, de estar relacionadas com as séries correspondentes. Define-se a <u>Transformada Finita de Fourier-Cosseno</u> e <u>Transformada Finita de Fourier-Seno</u> da seguinte maneira:

$$\mathcal{C}\{f(x)\} = \bar{f}_c(n) = \int_0^b f(x)\cos\frac{n\pi}{b}x\,dx \qquad (6.10.5)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mathcal{S}\{f(x)\} = \bar{f}_s(n) = \int_0^b f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}x\,dx \qquad (6.10.6)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

Comparando as Relações (6.10.2) e (6.10.4) com as Relações (6.10.5) e (6.10.6), respectivamente, observa-se que:

$$A_n = \frac{2}{b}\,\bar{f}_c(n)$$

e

$$B_n = \frac{2}{b}\,\bar{f}_s(n) \quad .$$

Com estas identificações obtém-se de forma imediata, as transformadas inversas:

$$\mathcal{C}^{-1}\{\bar{f}_c(n)\} = f(x) = \frac{1}{b}\,\bar{f}_c(0) +$$

$$+ \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_c(n)\cos\frac{n\pi}{b}x \quad , \qquad (6.10.7)$$

$$\mathcal{S}^{-1}\{\bar{f}_s(n)\} = f(x) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_s(n)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{b}x \quad . \qquad (6.10.8)$$

É importante lembrar sempre que, nas transformadas de Fourier finitas ou qualquer outra transformada finita, o domínio da variável independente é finito e o parâmetro da transformada é um número inteiro, à diferença das outras transformadas integrais que eram aplicáveis a domínios infinitos, ou semi-infinitos, e com parâmetros contínuos.

6.10.1 - Propriedades das Transformadas Finitas de Fourier

As propriedades que se seguem podem ser deduzidas da mesma maneira que na Seção 6.8. Assim, o leitor pode verificar as seguintes propriedades:

i) Translação

$$\mathcal{C}\left\{f(x+a)\right\} = \bar{f}_c(n)\cos\frac{n\pi}{b}a + \bar{f}_s(n)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{b}a -$$

$$-\frac{|a|+a}{2a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{b}(x-a)\,dx\,, \qquad (6.10.9)$$

$$\mathcal{S}\left\{f(x+a)\right\} = \bar{f}_s(n)\cos\frac{n\pi}{b}a - \bar{f}_c(n)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{b}a -$$

$$-\frac{|a|+a}{2a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{b}(x-a)\,dx\,, \qquad (6.10.10)$$

onde $0 \leq x \leq b$ e o parâmetro a é um número real que, para valores negativos, as relações anteriores se reduzem aos dois primeiros termos, respectivamente.

ii) <u>Derivadas sucessivas</u>

$$\mathcal{C}\left\{f^{(2m-1)}(x)\right\}=(-1)^{m-1}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2m-1}\bar{f}_s(n)\ +$$

$$+(-1)^m\sum_{p=1}^{m}(-1)^p\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2(m-p)}\left[(-1)^n\ f^{(2p-2)}(b)\ -\right.$$

$$\left.-f^{(2p-2)}(0)\right],\qquad (6.10.11a)$$

$$\mathcal{C}\left\{f^{(2m)}(x)\right\}=(-1)^m\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2m}\bar{f}_c(n)\ +$$

$$+(-1)^m\sum_{p=1}^{m}(-1)^p\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2(m-p)}\left[(-1)^n\ f^{(2p-1)}(b)\ -\right.$$

$$\left.-f^{(2p-1)}(0)\right],\qquad (6.10.11b)$$

$$\dot{S}\left\{f^{(2m-1)}(x)\right\}=(-1)^m\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2m-1}\bar{f}_c(n)\ +$$

$$+(1-\delta_{1m})(-1)^m\sum_{p=1}^{m-1}(-1)^p\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2(m-p)-1}\Big[(-1)^n f^{(2p-1)}(b)-$$

$$-f^{(2p-1)}(0)\Big]\ , \qquad (6.10.12a)$$

$$S\left\{f^{(2m)}(x)\right\}=(-1)^m\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2m}\bar{f}_s(n)\ -$$

$$-(-1)^m\sum_{p=1}^{m}(-1)^p\left(\frac{n\pi}{b}\right)^{2(m-p)+1}\Big[(-1)^n\ f^{(2p-2)}(b)\ -$$

$$-f^{(2p-2)}(0)\Big]\ . \qquad (6.10.12b)$$

Nestas relações:

$$m = 1, 2, 3, \ldots ,$$

$$\delta_{1m} = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 0 & m \neq 1 \end{cases} .$$

Outras propriedades das transformadas finitas, tal como a integral de convolução, não são de utilidade prática, razão pela qual não são aqui citadas.

Uma das maiores utilidades das transformadas finitas consiste na sua aplicação à solução de equações diferencias que tenham derivadas somente de ordem par, ou somente de ordem ímpar, e com o domínio limitado da variável independente.

Exemplo 6.12

Seja resolver a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 , \qquad 0 \leq x \leq \pi , \quad t > 0$$

onde:

$$\Psi = \Psi(x,t) ,$$

com as condições:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}\Psi(\pi,t) = 0$$

e

$$\Psi(x,0) = f(x) .$$

Nesta equação diferencial, identifica-se que o domínio finito ocorre na variável x, pois o domínio variável t é semi-infinito. Naturalmente, na variável t poder-se-ia utilizar, em princípio, uma das transformadas já conhecidas (p. ex., a de Laplace), devendo-se analisar, no entanto, sua viabilidade em termos das condições de existência da transformada inversa. Contudo, neste exemplo utilizar-se-á uma das transformadas finitas. A transformada finita Fourier-Cosseno na variável x da equação diferencial é:

$$\mathcal{C}\left\{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right\} - \frac{1}{\kappa}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\right\}\mathcal{C}\{\Psi\} = 0 .$$

Chamando

$$\mathcal{C}\{\Psi(x,t)\} = \overline{\Psi}_c(n,t) = \int_0^{\pi}\Psi(x,t)\cos nx\,dx ,$$

A Relação (6.10.11b), com $m = 1$, fica:

$$\mathcal{C}\left\{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right\} = -\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 \overline{\Psi}_c(n,t) + (-1)^n \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Psi(\pi,t)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Psi(0,t)}_{=0} .$$

Substituindo estas expressões na transformada da equação diferencial tem-se:

$$-n^2\,\overline{\Psi}_c(n,t) - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Psi}_c(n,t) = 0 ,$$

é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, cuja solução é:

$$\overline{\Psi}_c(n,t) = B\, e^{-\kappa n^2 t} .$$

A constante de integração é calculada, normalmente, utilizando a condição inicial $\Psi(x,0) = f(x)$. Para isto, nota-se que

$$\overline{\Psi}_c(n,0) = \int_0^{\pi}\Psi(x,0)\cos nx\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \overline{f}_c(n) .$$

Portanto:

$$B = \overline{f}_c(n) ,$$

de onde:

$$\bar{\Psi}_c(n,t) = \bar{f}_c(n)\, e^{-\kappa n^2 t}.$$

Finalmente, a transformada inversa, segundo a Expressão (6.10.7), é:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\pi}\, \bar{\Psi}_c(0,t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Psi}_c(n,t) \cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\, \bar{f}_c(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_c(n)\, e^{-\kappa n^2 t} \cos nx.$$

Porém:

$$\bar{f}_c(n) = \int_0^{\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi ,$$

$$\bar{f}_c(0) = \int_0^{\pi} f(\xi)\, d\xi .$$

Portanto, a solução final da equação diferencial fica:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa n^2 t} \cos nx \int_0^{\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi .$$

É necessário notar que, neste exemplo, foi escolhida a transformada finita de Fourier-Cosseno em virtude de as condições de contorno do problema, na variável x, coincidirem com os parâmetros $\frac{\partial}{\partial x}\ \Psi(0,t)$ e $\frac{\partial}{\partial x}\ \Psi(\pi,t)$, necessários para a aplicação da transformada de Fourier-Cosseno à segunda derivada da equação. Este é um cuidado especial que o leitor deve ter ao selecionar o tipo de transformada a ser utilizada, especialmente em equações diferenciais parciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COCHRAN, JAMES A. "Applied Mathematics. Principles, and Applications". Belmont, Cal., Wadsworth International Group, 1982.

SNEDDON, IAN N. "Fourier Transforms". New York, McGraw Hill, 1951.

TRANTER, C.J. "Integral Transforms in Mathematical Physics". London, John Wiley & Sons, Inc., 1966.

WOLF, KURT B. "Integral Transforms in Science and Engineering". New York, Plenum Press, 1979.

APÊNDICE A

MÉTODOS ESPECIAIS DE INTEGRAÇÃO

Às vezes, em problemas práticos, encontram-se integrais que não são facilmente achadas em tabelas matemáticas, nem são facilmente integráveis pelos métodos convencionais. Assim, a seguir descrevem-se alguns métodos especiais de integração.

A.1- Integrais Unidimensionais

Seja calcular a integral

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \; .$$

Sendo o integrando uma função par, tem-se que:

$$I_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \; .$$

O produto $I_0 I_0 = I_0^2$ fica:

$$I_0^2 = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{-(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \; .$$

O último membro representa a integral da função $e^{-(x^2+y^2)}$ sobre o plano infinito x-y. Esta mesma integração pode ser efetuada em coordenadas polares, observando que $x^2+y^2 = r^2$ e $dx\, dy = r\, dr\, d\theta$. Assim:

$$I_0^2 = \frac{1}{4}\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi} e^{-r^2}\, r dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} r\, e^{-r^2}\, dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dr}\left(e^{-r^2}\right) dr = -\frac{\pi}{4}\, e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}(-1) = \frac{\pi}{4} \quad .$$

Portanto:

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \qquad (A.1)$$

Este resultado pode ser aproveitado para calcular uma integral um pouco mais geral:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-au^2}\, du .$$

onde a é um número real positivo. Fazendo $au = t$, vem:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad ;$$

logo,

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-au^2}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} . \qquad (A.2)$$

Outra integral associada à I_0 é:

$$I_2 = \int_0^{\infty} u\, e^{-u^4}\, du .$$

Fazendo $u^2 = t$, $du = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$, tem-se:

$$\int_0^\infty u \; e^{-u^4} \, du = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt = \frac{1}{2} I_0 .$$

Ou seja:

$$I_2 = \int_0^\infty u \; e^{-u^4} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} . \qquad (A.3)$$

Continuando, ver-se-á uma integral mais geral:

$$I_3(a,n) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \, x^n \, dx \quad (n\text{: inteiro,positivo}). \qquad (A.4)$$

Evidentemente,

$$I_3(a,0) = I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} . \qquad (A.5)$$

Para $n = 1$,

$$I_3(a,1) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \, x \, dx .$$

Outra vez, faz-se a mudança de variável $ax^2 = t^2$

$$I_3(a,1) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-t^2} \, t \, dt =$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{d}{dt} \left(e^{-t^2}\right) dt = \frac{1}{2a} .$$

Assim,

$$I_3(a,1) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\, x\, dx = \frac{1}{2a} . \qquad (A.6)$$

Outras integrais, correspondentes à (A.4) para $n > 1$, podem ser calculadas encontrando as derivadas sucessivas, em relação ao parâmetro a, das Equações (A.5) e (A.6) para valores pares e ímpares, respectivamente. Assim, por exemplo:

de $$\frac{\partial}{\partial a} I_3(a,0) = -\int_0^\infty x^2\, e^{-ax^2}\, dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}$$

tem-se que:

$$I_3(a,2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2} ; \qquad (A.7)$$

de $$\frac{\partial}{\partial a} I_3(a,1) = -\frac{1}{2a^2}$$

tem-se que:

$$I_3(a,3) = \frac{1}{2a^2} \qquad (A.8)$$

etc.

A seguir, considerem-se integrais do tipo:

$$I_4(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^\alpha}\, dx \qquad (\alpha \text{ - número real}) .$$

Esta integral não é tão fácil de calcular pelos métodos comuns. No entanto, fazendo $x^{\alpha} = u$: $dx = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha} - 1} du$, tem-se:

$$I_4(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha} - 1} du .$$

Observe-se que esta última integral é a função Gama, de argumento $\frac{1}{\alpha}$. Portanto:

$$I_4(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^{\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \Gamma(\frac{1}{\alpha}) . \qquad (A.9)$$

Outro tipo interessante de integral é:

$$I_5 = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x \, dx,$$

onde, λ e a, são números reais positivos. O integrando pode ser também colocado na forma:

$$I_5 = \mathrm{Re} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{i\lambda x} dx \right\} .$$

Desta maneira, a integração é, agora, imediata. Assim,

$$I_5 = \mathrm{Re} \left\{ \left| - \frac{e^{-(a-i\lambda)k}}{a - i\lambda} \right|_0^{\infty} \right\} = \mathrm{Re} \left\{ \frac{1}{a - i\lambda} \right\} = \mathrm{Re} \left\{ \frac{a + i\lambda}{a^2 + \lambda^2} \right\} .$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x \, dx = \frac{a}{a^2 + \lambda^2} . \qquad (A.10)$$

Aproveitando este resultado, pode-se calcular a integral:

$$I_6 = \int_0^\infty x\, e^{-ax} \cos \lambda x \, dx$$

efetuando a derivada de I_5 em relação ao parâmetro a. Assim:

$$I_6 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} (e^{-ax} \cos \lambda x) \, dx = -\frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{a}{a^2 + \lambda^2}\right],$$

$$I_6 = \int_0^\infty x e^{-ax} \cos \lambda x \, dx = \frac{a^2 - \lambda^2}{(a^2 + \lambda^2)} . \qquad (A.11)$$

Note-se que, como um subproduto da integração de (A.8), obtém-se

$$I_7 = \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} \lambda x \, dx = I_m \left\{\int_0^\infty e^{-ax} e^{i\lambda x} \, dx\right\},$$

$$I_7 = \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} \lambda x \, dx = \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2} . \qquad (A.12)$$

Existem também outros métodos onde são usados artifícios engenhosos para o cálculo de integrais. Seja, por exemplo, a integral

$$I_8 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx.$$

Convenientemente, define-se a integral

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\text{sen } x}{x} dx ,$$

onde fica evidente que,

$$\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = I_8 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} I(\alpha) = - \int_0^\infty e^{-\alpha x} \text{sen } x \, dx = - \frac{1}{\alpha^2 + 1} ,$$

$$I(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{\alpha^2 + 1} d\alpha = - \text{arctg } \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} .$$

Devido ao fato de $I(0) = I_8$, deduz-se que $\alpha = 0$ é um dos limites aconselháveis na integração. Por outro lado, pode-se ver que $I(\infty) = \int_0^\infty e^{-x\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = 0$. Logo,

$$I(\alpha) \Big|_0^\infty = 0 - I(0) = -\text{arctg } (\alpha) \Big|_0^\infty = - \frac{\pi}{2} + 0 ,$$

de onde:

$$I_8 = I(0) = \int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2} . \qquad (A.13)$$

A.2- Integrais sobre Ângulos Sólidos

Muitas vezes é necessário o cálculo de integrais que envolvem expressões vetoriais tridimensionais. Seguem-se alguns exemplos deste tipo.

Seja a integral

$$I_9(\underset{\sim}{k},\alpha) = \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\alpha + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}} ,$$

onde α e $\underset{\sim}{k}$ são grandezas constantes, e o elemento de ângulo sólido, em coordenadas esféricas, é dado por:

$$d\Omega = \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \quad .$$

Apesar da presença de funções vetoriais no integrando, a priori nota-se que $I_9(\underset{\sim}{k},\alpha)$ tem de ser uma grandeza escalar, uma vez que a função integrando é também uma grandeza escalar. Por outro lado, pela variável $d\Omega$, identifica-se que a integração ocorre nas variáveis espaciais e, portanto, $\hat{\underset{\sim}{r}}$ é um vetor variável na integração. Observa-se também que a orientação do sistema de coordenadas é arbitrário, podendo ser escolhido de maneira que $\underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}} = k \cos\theta$; isto é, o vetor $\underset{\sim}{k}$ é colocado coincidente com o eixo z.Com estas considerações, a integral I_9 fica:

$$I_9(\underset{\sim}{k},\alpha) = \iint \frac{\operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi}{\alpha + k \cos\theta} = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \, d\theta}{\alpha + k \cos\theta} =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\alpha + k\xi} = \frac{2\pi}{k} \ln(\alpha + k\xi) \Big|_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{k} \ln\left(\frac{\alpha + k}{\alpha - k}\right).$$

Finalmente,

$$I_9(\underset{\sim}{k},\alpha) = \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{\alpha + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}} = \frac{2\pi}{k} \ln\left(\frac{\alpha + k}{\alpha - k}\right) \quad . \qquad (A.14)$$

Um outro exemplo ilustrativo de integração é o seguinte:

$$I_{10}(\underset{\sim}{a},b) = \int d^3x \; e^{i\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{x}} \; e^{-br^2} \; .$$

Neste caso, também, a integração é feita em coordenadas esféricas.

$$d^3x = r^2 \, dr \, d\Omega = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \; .$$

Outra vez, orienta-se o sistema de coordenadas de maneira a ter $\underset{\sim}{a} \,//\, \hat{\underset{\sim}{z}}$; portanto: $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{x} = a\, r \cos\theta$. Assim,

$$I_{10}(\underset{\sim}{a},b) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr \; r^2 \; e^{-br^2} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \; e^{iar\cos\theta} .$$

A última integral é de integração imediata:

$$\int_{-1}^{+1} e^{iarx} \, dx = \left. \frac{e^{iarx}}{iar} \right|_{-1}^{+1} = \frac{2}{ar} \operatorname{sen} ar .$$

Logo,

$$I_{10}(\underset{\sim}{a},b) = \frac{4\pi}{a} \int_0^{\infty} r \operatorname{sen} ar \; e^{-br^2} \, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4\pi}{a} \int_{-\infty}^{\infty} r \operatorname{sen} ar \; e^{-br^2} \, dr .$$

O limite inferior foi, convenientemente, estendido até $-\infty$ em virtude de o integrando ser uma função par.

$$I_{10}(\underset{\sim}{a},b) = \frac{2\pi}{a} \operatorname{Im}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} r \; e^{-br^2+iar} \, dr \right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{a} \operatorname{Im}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} r \; e^{-b(r^2 - i\frac{a}{b} r)} \, dr \right\} .$$

Por outro lado,

$$r^2 - \frac{ia}{b} r = \left(r - \frac{ia}{2b}\right)^2 + \left(\frac{a}{2b}\right)^2 .$$

Logo,

$$I_{10}(\underset{\sim}{a},b) = \frac{2\pi}{a} e^{-\frac{a^2}{4b}} \operatorname{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} r\, e^{-b\left(r-\frac{ia}{2b}\right)^2} dr\right\} .$$

Fazendo a mudança:

$$r - \frac{ia}{2b} = u ,$$

a integral fica:

$$I_{10}(\underset{\sim}{a},b) = \frac{2\pi}{a} e^{-\frac{ba^2}{4b}} \operatorname{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left(u + \frac{ia}{2b}\right) e^{-bu^2} du\right\} .$$

Por ser o integrando uma função ímpar, observa-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-bu^2} du = 0 .$$

Entretanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bu^2} du = 2\int_{0}^{\infty} e^{-bu^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{b}} ,$$

resultado obtido anteriormente. Finalmente:

$$I_{10}(\underset{\sim}{a},b) = \frac{2\pi}{a}\, e^{-\frac{a^2}{4b}}\, \mathrm{Im}\left\{\frac{ia}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\right\} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2} e^{-\frac{a^2}{4b}} ,$$

$$I_{10}(\underset{\sim}{a},b) = \int d^3x\, e^{i\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{x}}\, e^{-br^2} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2} e^{-\frac{a^2}{4b}} . \qquad (A.15)$$

Continuando, ver-se-á agora um tipo de integral um pouco mais complicado. Por exemplo, seja calcular a integral.

$$I_{11}(\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{a},\gamma) = \int \frac{a \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}{\gamma + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}\, d\Omega .$$

O problema aqui é que há duas direções constantes correspondentes aos vetores $\underset{\sim}{a}$ e $\underset{\sim}{k}$. Portanto, aqui não é possível escolher a orientação do sistema de coordenadas de maneira que, simultaneamente, as duas direções sejam adequadas. O máximo que se pode fazer é escolher apenas uma direção conveniente. No entanto, considerando uma outra integral, desta vez de natureza vetorial:

$$\underset{\sim}{I}_{12}(\underset{\sim}{k},\gamma) = \int \frac{\hat{\underset{\sim}{r}}}{\gamma + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}\, d\Omega .$$

Evidentemente, tem-se que:

$$I_{11}(\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{a},\gamma) = \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{I}_{12}(\underset{\sim}{k},\gamma).$$

O vetor integral $\underset{\sim}{I}_{12}$ é função apenas de um vetor: $\underset{\sim}{k}$. Portanto, $\underset{\sim}{I}_{12} // \underset{\sim}{k}$. Ou seja:

$$\underset{\sim}{I}_{12} = A\,\frac{\underset{\sim}{k}}{k} .$$

Agora basta determinar o valor de A,

$$\underset{\sim}{I}_{12} \cdot \underset{\sim}{k} = A \frac{\underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{k}}{k} = A\,k\,,$$

$$A = \frac{1}{k} \int \frac{\underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}{\gamma + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}\, d\Omega = \frac{1}{k} \int \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}\right] d\Omega\,,$$

$$A = \frac{1}{k} \left[4\pi - \int \frac{d\Omega}{\gamma + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}\right] = \frac{1}{k} \left[4\pi - \frac{2\pi}{k} \ln\left(\frac{\gamma + k}{\gamma - k}\right)\right].$$

O último resultado foi obtido utilizando o valor da integral I_9. Desta maneira, tem-se:

$$\underset{\sim}{I}_{12}(\underset{\sim}{k},\gamma) = \int \frac{\hat{\underset{\sim}{r}}}{\gamma + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}\, d\Omega = \frac{4\pi}{k^2}\, \underset{\sim}{k} \left[1 - \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{\gamma + k}{\gamma - k}\right)\right]. \qquad (A.16)$$

Logo, a integral principal será:

$$I_{11}(\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{a},\gamma) = \int \frac{\underset{\sim}{a} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}{\gamma + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}\, d\Omega = \frac{4\pi}{k^2}\, \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{a} \left[1 - \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{\gamma + k}{\gamma - k}\right)\right]. \qquad (A.17)$$

Como um último exemplo, seja calcular a integral

$$I_{13}(\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{a}) = \int_{4\pi} \frac{\underset{\sim}{a} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}{(1 + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}})^2}\, d\Omega\,.$$

Observa-se que derivando a integral $I_9(\underset{\sim}{k},\alpha)$ em relação a $\underset{\sim}{k}$ e fazendo $\alpha = 1$, obtém-se uma expressão parecida à integral $I_{13}(\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{a})$. A única diferença é representada pelo vetor constante $\underset{\sim}{a}$.

Encontrando a derivada da Expressão (A.14), em relação ao vetor $\underset{\sim}{k}$, tem-se:

$$\frac{\partial I_9}{\partial \underset{\sim}{k}} = - \int_{4\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{k}}(\alpha + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}})}{(\alpha + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}})^2} d\Omega = - \int_{4\pi} \frac{\hat{\underset{\sim}{r}} \, d\,\Omega}{(\alpha + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}})^2} .$$

Porém:

$$\frac{\partial I_9}{\partial \underset{\sim}{k}} = \frac{\underset{\sim}{k}}{k} \frac{\partial I_9}{\partial k} = \hat{\underset{\sim}{k}} \frac{\partial I_9}{\partial k} .$$

Assim,

$$- \frac{\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{k}}{k} \frac{\partial I_9}{\partial k} = \int_{4\pi} \frac{\underset{\sim}{a} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}{(1 + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}})^2} d\Omega = I_{13}(\underset{\sim}{k}, \underset{\sim}{a}) .$$

Agora basta derivar o resultado (A.14)

$$I_{13}(\underset{\sim}{k}, \underset{\sim}{a}) = \int_{4\pi} \frac{\underset{\sim}{a} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}}{1 + \underset{\sim}{k} \cdot \hat{\underset{\sim}{r}}} d\Omega =$$

$$= \frac{2\pi \, \underset{\sim}{k} \cdot \underset{\sim}{a}}{k^2} \left[\frac{1}{k} \ln\left(\frac{1 + k}{1 - k}\right) - \frac{2}{1 - k^2} \right] . \qquad \text{(A.18)}$$