



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO
AUTHORIZATION FOR PUBLICATION

AUTORES AUTHORS	PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS MÉTODO INTERIOR ALGORITMO DE KARMARKAR PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR	AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY Marco Antonio Raupp Diretor Geral
	AUTOR RESPONSÁVEL RESPONSIBLE AUTHOR Horacio Hideki Yanasse	DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION ☐ INTERNA / INTERNAL ☒ EXTERNA / EXTERNAL ☐ RESTRITA / RESTRICTED
CDU/UDC 519.852		DATA / DATE Maio 1987

TÍTULO/TITLE	PUBLICAÇÃO Nº PUBLICAÇÃO NO INPE-4168-PRE/1065	ORIGEM ORIGIN LAC
	AUTORES/AUTHORSHIP Horacio Hideki Yanasse	PROJETO PROJECT POPES
ULTIMA PAG. LAST PAGE 29		
VERSÃO VERSION --		Nº DE MAPAS NO OF MAPS --

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

Apresenta-se os fundamentos do algoritmo de Karmarkar para problemas de programação linear. Procura-se apresentar o método de maneira didática inclusive com algumas sugestões da literatura para a sua implementação.

OBSERVAÇÕES/REMARKS

Relatório referente à palestra a ser proferida no 3º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC), 18-20 de maio de 1987, SJCampos.

* O autor dispensa revisão técnica e revisão de linguagem devido à natureza do trabalho.

ABSTRACT

We present the foundations of the Karmarkar's algorithm for linear programming problems. We try to present the method in a tutorial way incorporating also some suggestions given in the literature about its implementation.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1. <u>INTRODUÇÃO</u>	1
2. <u>FORMA PADRÃO DO PROBLEMA PARA O ALGORITMO DE KARMARKAR</u>	3
3. <u>TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA DE KARMARKAR</u>	7
4. <u>ALGORITMO DE KARMARKAR</u>	10
4.1 - O critério de parada	11
4.2 - A função ϕ	11
5. <u>COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DO ALGORITMO DE KARMARKAR</u>	13
6. <u>COMO COLOCAR UM PROBLEMA GERAL NA FORMA REQUERIDA PELO ALGORITMO DE KARMARKAR</u>	22
7. <u>COMENTÁRIOS FINAIS</u>	27
8. <u>BIBLIOGRAFIA</u>	28

1. INTRODUÇÃO

O algoritmo de Karmarkar (1984) é foco de atenção de grande parte da comunidade científica ligada às áreas de pesquisa operacional/ matemática aplicada/computação aplicada, principalmente pelos relatos encorajadores sobre a rapidez deste novo método. As informações são contraditórias até o momento. Há afirmação de que o algoritmo de Karmarkar chega a ser 50 vezes mais rápido que o método simplex quando aplicado a problemas grandes (veja Hooker, 1986). Entretanto, a comunidade científica ainda aguarda por confirmações neste sentido. Vários pesquisadores tem tentado implementar o algoritmo sem contudo ter conseguido reproduzir tal desempenho. Aparentemente, existem detalhes de implementação que ainda não são de pleno domínio público e que influenciam diretamente o desempenho do algoritmo na prática.

Um outro atrativo teórico do algoritmo de Karmarkar é a sua complexidade computacional no pior caso, $O(n^{3,5} L^2)$ onde n é o número de variáveis do problema e L é o número de bits para representar números no computador.

O primeiro método polinomial para a resolução de problemas de programação linear foi sugerido em 1979 por Kachian (1979). O seu algoritmo elipsóide é $O(n^6 L^2)$, portanto inferior ao algoritmo de Karmarkar.

Os desenvolvimentos feitos com o algoritmo de Kachian mostraram que existem dificuldades práticas na sua utilização pela exigência de que os cálculos realizados sejam feitos com grande precisão (conforme Karmarkar, 1984, Hooker, 1986) e o que se tem observado é um desempenho bem inferior ao método simplex em problemas reais. No algoritmo de Karmarkar, tais dificuldades não existem. Os erros de arredondamento não se acumulam passo a passo e isto é uma grande vantagem.

Apesar da complexidade computacional exponencial, no pior caso, do método simplex, ele tem um bom desempenho na prática. Espera-se que um método polinomial, como é o de Karmarkar, tenha um desempenho ainda melhor na prática.

Os dois métodos diferem radicalmente na sua abordagem. O método simplex caminha, passo a passo, nas fronteiras da região viável, procurando o ponto ótimo examinando pontos extremos. O método de Karmarkar (também conhecido como método projetivo com mudança de escala) procura uma solução movendo-se no interior da região viável até atingir um ponto ótimo na fronteira.

Uma observação intuitiva (veja Hooker, 1986) que, poder-se-ia dizer, é utilizada no algoritmo de Karmarkar é ilustrada na Figura 1.

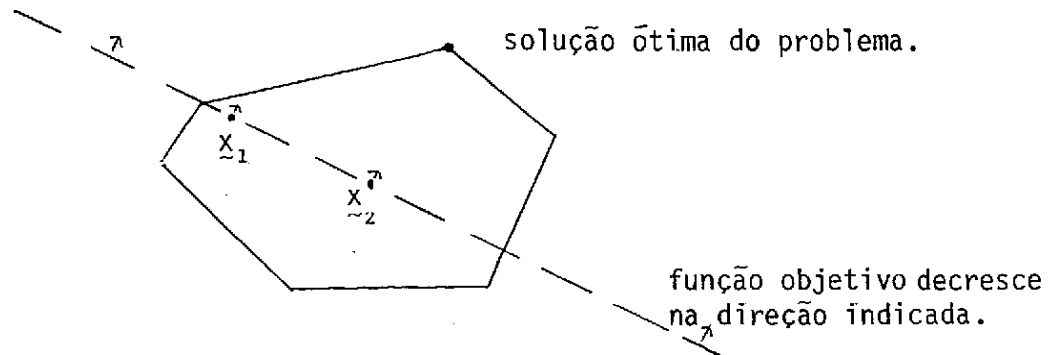


Fig. 1 - Politopo de um problema de programação linear.

A solução x_2 , que está próxima do "centro" do politopo, tem a possibilidade de alcançar um ponto viável mais próximo da solução ótima que a solução x_1 , que está mais afastada do centro, se se caminhar na direção de descida mais rápida.

O algoritmo de Karmarkar transforma pois o espaço solução de modo a colocar a solução atual próxima do centro do politopo, sem mudar o problema na sua essência.

A transformação sugerida por Karmarkar é uma transformação projetiva. Outras transformações mais simples poderiam ser utilizadas, por exemplo, mudando-se apenas a escala de algumas variáveis (veja Vanderbey et alii, 1985; Chandru and Kochar, 1986; conforme Hooker, 1986).

A estratégia utilizada no método de Karmarkar é bem simples: pega-se um ponto interior, transforma-se o espaço de modo que o ponto interior fique próximo ao centro do politopo, procura-se um novo ponto viável

vel interior movendo-se na direção de descida mais rápida e repete-se a transformação de modo que o novo ponto interior fique próximo ao centro do polítopo. Prossegue-se de maneira similar até que uma solução ótima seja encontrada dentro da precisão desejada.

Observe-se que é necessário permanecer interiormente ao polítopo para que, com a transformação projetiva, este ponto fique próximo ao centro do polítopo (pontos na fronteira nunca ficariam interiores após uma transformação projetiva).

A seguir apresentaremos os detalhes do algoritmo de Karmarkar incluindo também algumas sugestões necessárias para sua utilização.

2. FORMA PADRÃO DO PROBLEMA PARA O ALGORITMO DE KARMARKAR

O algoritmo original de Karmarkar exige que o problema esteja na seguinte forma especial:

$$\text{Minimizar } \underline{c}^T \underline{x}, \quad (1)$$

$$\text{sujeito a } A\underline{x} = 0,$$

$$\underline{e}^T \underline{x} = 1, \quad \underline{x} \geq 0,$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e $\underline{e}$ é um vetor de 1's.

Além disso, deve-se ter:

- a) o valor ótimo do problema é zero;
- b) um ponto inicial viável interior (refere-se a ponto interior, aquele onde cada variável é estritamente positiva).

Na seção 6 discutiremos como ajustar um problema geral de programação linear de forma a satisfazer estas condições exigidas e apresentaremos algumas sugestões sugeridas na literatura para lidar com problemas encontrados na implementação e utilização do algoritmo.

Admitamos, por enquanto, que o problema esteja na forma indicada com as devidas condições adicionais satisfeitas.

Definamos o subespaço afim

$$X = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / A\underline{x} = \underline{0}\}$$

e o simplex de dimensão $n-1$,

$$S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n x_i = 1, \underline{x} \geq \underline{0}\}.$$

O problema 1 é simplesmente,

Minimizar $\underline{c}^T \underline{x}$

sujeito a $\underline{x} \in X \cap S$.

Dada esta estrutura especial, é interessante observar o que se segue.

Seja $\underline{e}_0$ o centro do simplex S . No caso, $\underline{e}_0 = \frac{1}{n} \underline{e}$, onde $\underline{e}$ é um vetor de 1's. Suponhamos que $\underline{e}_0 \in X$, portanto $\underline{e}_0$ é um ponto viável de nosso problema.

Seja $E(\underline{e}_0, r)$ a maior esfera com centro em $\underline{e}_0$ e raio r que pode ser inscrita no simplex S e, $E(\underline{e}_0, R)$ a menor esfera com centro em $\underline{e}_0$ e raio R circunscrevendo o simplex S . É de conhecimento que

$$\frac{R}{r} = n-1, \quad r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Temos que

$$E(\underline{e}_0, r) \subset S \subset E(\underline{e}_0, R) \quad \text{ou}$$

$$E(\underline{e}_0, \alpha r) \subset S \subset E(\underline{e}_0, R), \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (2)$$

A intersecção de uma esfera e um espaço afim é uma esfera de dimensão menor naquele espaço e tem o mesmo raio se o centro da esfera original está no espaço afim. Como este é o caso, seja

$E'(\underline{e}_0, \alpha r)$ e $E'(\underline{e}_0, R)$ as duas esferas intersecção de $E(\underline{e}_0, \alpha r)$ e $E(\underline{e}_0, R)$ com X , respectivamente.

De (2) tem-se que

$$E'(\underline{e}_0, \alpha r) \subseteq (X \cap S) \subseteq E'(\underline{e}_0, R)$$

e, portanto, minimizando-se a função objetivo sobre a esfera $E'(\underline{e}_0, \alpha r)$ encontra-se um limitante superior ao problema original, minimizando-se a função objetivo sobre a esfera $E'(\underline{e}_0, R)$ encontra-se um limitante inferior.

Pelo fato da função objetivo ser linear, é possível obter-se o seguinte limitante para a função objetivo.

Suponha que $v_{\alpha r}$, v e v_R denotam os valores ótimos da função objetivo em $E'(\underline{e}_0, \alpha r)$, $X \cap S$ e $E'(\underline{e}_0, R)$, respectivamente. O valor da função objetivo no ponto $\underline{e}_0$ é $\underline{c}^T \underline{e}_0$. Tem-se que:

$$\underline{c}^T \underline{e}_0 - v_{\alpha r} \leq \underline{c}^T \underline{e}_0 - v \leq \underline{c}^T \underline{e}_0 - v_R.$$

Como a função é linear, tem-se que para $\alpha \in (0, 1]$,

$$\underline{c}^T \underline{e}_0 - v_R = \frac{R}{\alpha r} [\underline{c}^T \underline{e}_0 - v_{\alpha r}] = \frac{n-1}{\alpha} [\underline{c}^T \underline{e}_0 - v_{\alpha r}].$$

Logo,

$$\frac{\underline{c}^T \underline{e}_0 - v_{\alpha r}}{\underline{c}^T \underline{e}_0 - v} \geq \frac{\alpha}{n-1} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\underline{c}^T \underline{e}_0 - v_{ar}}{\underline{c}^T \underline{e}_0 - v} - 1 \geq \frac{\alpha}{n-1} - 1 \quad \text{ou}$$

$$\frac{v - v_{ar}}{\underline{c}^T \underline{e}_0 - v} \geq \frac{\alpha}{n-1} - 1 \quad \text{ou}$$

$$\frac{v_{ar} - v}{\underline{c}^T \underline{e}_0 - v} \leq \left[1 - \frac{\alpha}{n-1} \right]. \quad (3)$$

Assim, indo do ponto $\underline{e}_0$ ao ponto $\underline{e}_{ar}$ que minimiza a função objetivo linear sobre a esfera $E'(\underline{e}_0, \alpha r)$, chega-se mais próximo do valor mínimo da função objetivo de um fator $(1 - \frac{\alpha}{n-1})$.

Observe que minimizar uma função linear sobre uma esfera é bem simples. Do centro da esfera caminhe na direção de máximo decréscimo da função objetivo de um comprimento igual ao raio da esfera. Para se achar esta direção de máximo decréscimo, no nosso caso, basta projetar-se o vetor $\underline{c}$ ortogonalmente sobre o espaço nulo de $\begin{bmatrix} A \\ \underline{e}^T \end{bmatrix}$ obtendo-se um vetor $\underline{c}_p$, ou

seja, $\underline{z} = \underline{c}_p$ resolve o problema de mínimos quadrados

$$\text{Min}_{\underline{z}} \quad || \underline{c} - \underline{z} ||$$

$$\text{Sujeito a} \quad A\underline{z} = \underline{0}$$

$$\underline{e}^T \underline{z} = 0$$

A solução para este problema $\bar{e}$ conhecida e $\bar{e}$ dada por

$$\underline{c}_p = [I - B^T(BB^T)^{-1} B] \underline{c} \quad (4)$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} A \\ \underline{e}_T \end{bmatrix}.$$

O vetor de norma unitária na direção de máximo decréscimo $\bar{e} = \frac{-\underline{c}_p}{\|\underline{c}_p\|}$. Portanto, o ponto de mínimo na esfera $E'(\underline{e}_0, \alpha r)$ é :

$$\underline{e}_{\alpha r} = \underline{e}_0 - \frac{\underline{c}_p}{\|\underline{c}_p\|} \alpha r. \quad (5)$$

Assim, para se achar uma solução viável para o problema t que esteja mais próxima do valor ótimo do problema de um fator $(1 - \frac{\alpha}{n-1})$, basta encontrar o ponto $\underline{e}_{\alpha r}$ conforme (5).

Observe que o número de operações necessárias para o cálculo de (5) é $O(n^3)$ que corresponde a inversão da matrix BB^T em (4).

Observe que existe algumas dificuldades para se poder fazer uso das observações feitas. É preciso ter-se o centro do simplex como ponto viável do problema. Como superar esta dificuldade? A transformação projetiva sugerida por Karmarkar dá a solução para este problema.

3. TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA DE KARMARKAR

Uma transformação projetiva T é uma transformação da forma:

$$y = T(\underline{x}) = \frac{A\underline{x} + \underline{b}}{\underline{c}^T \underline{x} + d}$$

onde A é uma matriz $n \times n$,

$$\underline{b} \text{ e } \underline{c} \in \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$d \in \mathbb{R}$$

Algumas propriedades relevantes das transformações projetivas são:

- a) a composição de transformações projetivas também é projetiva;
- b) a inversa de uma transformação projetiva é uma transformação projetiva;
- c) subespaços lineares afins permanecem afins sob transformações projetivas;
- d) transformações projetivas transformam razões de funções lineares em razões de funções lineares.

Considere o problema na forma 1. Admitamos que tenhamos um ponto viável interior $\underline{x}^k$. A transformação projetiva escolhida mapeia o ponto $\underline{x}^k$ no centro do simplex. Ela é definida por:

$$\underline{z} = T(\underline{x}) = \frac{D^{-1} \underline{x}}{\underline{e}^T D^{-1} \underline{x}}$$

onde $D = \text{diag} (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$. Observe que $T(\underline{x}^k) = \frac{\underline{e}}{n}$.

A inversa desta transformação é

$$\underline{x} = T^{-1}(\underline{z}) = \frac{D \underline{z}}{\underline{e}^T D \underline{z}}.$$

O problema 1 fica,

$$\text{Minimizar } \frac{\underline{c}^T D \underline{z}}{\underline{e}^T D \underline{z}}, \quad (6a)$$

$$\text{sujeito a } \frac{AD \underline{z}}{\underline{e}^T D \underline{z}} = \underline{0}, \quad (6b)$$

$$\frac{\underline{e}^T D \underline{z}}{\underline{e}^T D \underline{z}} = 1, \quad (6c)$$

$$\underline{e}^T \underline{z} = 1, \quad (6d)$$

$$\underline{z} \geq \underline{0}. \quad (6e)$$

A restrição (6d) resulta da definição da transformação projetiva escolhida.

Como o valor ótimo do problema (1) é zero e o denominador da função objetivo é estritamente positivo, sujeito às restrições do problema, pode-se simplesmente minimizar o numerador e o problema (6) é reescrito da seguinte forma:

$$\text{Min } \underline{c}^T D \underline{z} \quad (7a)$$

$$\text{sujeito a } AD \underline{z} = 0 \quad (7b)$$

$$\underline{e}^T \underline{z} = 1 \quad (7c)$$

$$\underline{z} \geq \underline{0}. \quad (7d)$$

Observe que em (6b) o denominador $\bar{e}$ é estritamente positivo para todo $\underline{z} \geq \underline{0}$, $\underline{z} \neq \underline{0}$ e, portanto, ele pode ser deletado. A restrição (6c) é satisfeita trivialmente e portanto $\bar{e}$ também é deletada.

Note que o problema (7) tem a mesma forma que o problema (1) e, para este novo problema, o ponto viável interior está no centro do simplex.

A estratégia adotada no método de Karmarkar parece agora evidente. A partir de um ponto viável interior, aplica-se uma transformação projetiva que mapeia este ponto ao centro do simplex. Determina-se um novo ponto viável na esfera inscrita ao simplex de raio α conforme (5). Pela transformação inversa a este ponto corresponde um novo ponto interior ao problema original e cuja função objetivo decresce de um determinado valor com relação ao ponto inicial. Repete-se a abordagem tomando-se este ponto como ponto inicial e assim sucessivamente até que algum critério de parada seja atingido. A seguir apresenta-se uma descrição formal do algoritmo de Karmarkar juntamente com o critério de parada adotado.

4. ALGORITMO DE KARMARKAR

O algoritmo de Karmarkar cria uma sequência de pontos $\underline{x}^0, \underline{x}^1, \dots, \underline{x}^k$ seguindo os seguintes passos:

Passo 1: $\underline{x}^0 = \underline{a}_0$ (ponto inicial)

$$k = 0.$$

Passo 2: While $\underline{c}^T \underline{x}^k$ é "ainda muito grande" do $\{\underline{x}^{k+1} = \phi(\underline{x}^k), k = k+1\}$.

No passo 1, o ponto inicial $\underline{a}_0$ é um ponto viável interior da do. No passo 2, é preciso ter-se um critério de parada e definir-se a função $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

4.1 - O CRITÉRIO DE PARADA

É preciso ter-se um parâmetro q de término do algoritmo, cujo objetivo é achar uma solução viável $\underline{x}$ tal que

$$\frac{\underline{c}^T \underline{x}}{\underline{c}^T \underline{x}_0} \leq 2^{-q}.$$

Usando o argumento utilizado no algoritmo elipsóide, sabe-se que se $\underline{x}^*$ e $\underline{x}^{**}$ são duas soluções básicas tal que $\underline{c}^T \underline{x}^* \neq \underline{c}^T \underline{x}^{**}$, então $|\underline{c}^T \underline{x}^* - \underline{c}^T \underline{x}^{**}| > 2^{-kL}$ para alguma constante k . Isto significa que se $\underline{x}$ for uma solução viável tal que $0 < \underline{c}^T \underline{x} < 2^{-kL}$, então modificando-se $\underline{x}$ de modo a torná-la uma solução básica viável, tomando-se o cuidado de melhorar a função objetivo, obtêm-se uma solução ótima.

Portanto, tomando-se $q = O(L)$, a solução resultante aproximadamente ótima obtida pelo algoritmo pode ser convertida para uma solução ótima exata.

Na prática, um problema é considerado resolvido quando o valor original é reduzido por um fator 2^L pois 2^{-L} é a precisão do computador (Hooker, 1986). Assim, o problema está resolvido na iteração k se

$$\frac{\underline{c}^T \underline{x}}{\underline{c}^T \underline{a}_0} \leq 2^{-L}.$$

Resta definir agora a função $\phi = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ do passo 2.

4.2 - A FUNÇÃO ϕ

$\underline{b} = \phi(\underline{a})$ é definida pela seguinte sequência de operações:

$$1. \text{ Seja } B = \begin{bmatrix} AD \\ \underline{e}^T \end{bmatrix}$$

onde $D = \text{diag} \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, ($\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$).

$$2. \underline{c}_p = [I - B^T(BB^T)^{-1} B] D \underline{c}.$$

$$3. \hat{\underline{c}} = \frac{\underline{c}_p}{\|\underline{c}_p\|} \quad (\text{vetor unitário da direção de } \underline{c}_p).$$

$$4. \underline{b}' = \underline{e}_0 - \alpha r \hat{\underline{c}}$$

$$\text{onde } \underline{e}_0 = \frac{1}{n} \underline{e},$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}},$$

$$\alpha \in (0,1).$$

$$5. \underline{b} = \frac{D \underline{b}'}{\underline{e}^T D \underline{b}'}.$$

A definição da função ϕ segue a estratégia descrita na seção 3. Uma transformação projetiva $\bar{e}$ é realizada que mapeia o ponto de entrada $\underline{a}$ no centro do simplex. Há uma otimização da função objetivo transformada sobre a esfera de raio αr onde um ponto $\underline{b}'$ é encontrado. Aplica-se a transformação inversa ao ponto $\underline{b}'$ para obter o ponto $\underline{b}$.

Obviamente, o parâmetro α escolhido afeta a taxa de convergência do método. Existem razões práticas e técnicas para não se escolher o valor de $\alpha = 1$. Uma delas é que se desejarmos realizar operações aproximadamente, isto dá margem a absorção de erros de arredondamento, o que impede que em alguma iteração caiamos fora do simplex. Para se provar a complexidade polinomial do algoritmo o valor de α tem que ser pequeno como pode ser visto na seção 5. Em Nickels et al., 1985 são reportados alguns testes realizados com o algoritmo de Karmarkar quando se varia o valor de α .

5. COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DO ALGORITMO DE KARMARKAR

O tempo computacional do algoritmo de Karmarkar depende do número de iterações até que o algoritmo pare e da duração de cada iteração.

A cada iteração do algoritmo é necessário resolver um sistema de equações lineares que leva $O(n^3)$ operações aritméticas no pior caso (eliminação de Gauss). Entretanto, Karmarkar (1984) sugere que as equações sejam resolvidas a cada iteração modificando-se a solução da iteração anterior e isto ocasiona uma economia de um fator de $\sqrt{n}$.

Para cada operação aritmética é necessária uma precisão de $O(L)$ bits. Assim, a cada iteração, a complexidade é $O(n^{2.5}L)$.

Vamos agora estabelecer o número de iterações necessárias até que o algoritmo pare. Relembremos que um problema é considerado resol-

visto se $\frac{\underline{c}^T \underline{x}^k}{\underline{c}^T \underline{a}_0} \leq 2^{-L}$. Se pudermos mostrar que o algoritmo reduz a função

objetivo $\underline{c}^T \underline{x}^k$ para no máximo $\underline{c}^T \underline{x}^k (e^{-\frac{\delta}{n}})$ a cada iteração, onde $\delta > 0$ é uma constante, então o número de iterações até que seja atingida a precisão desejada é $O(nL)$. Isto pode ser verificado da seguinte forma:

reduzir $\underline{c}^T \underline{x}^k$ para $\underline{c}^T \underline{x}^k$ para $\underline{c}^T \underline{x}^k (e^{-\frac{\delta}{n}})$ é equivalente a dizer que $n \ln \underline{c}^T \underline{x}^k$ é reduzido para $n \ln \underline{c}^T \underline{x}^k - \delta$ a cada iteração. Então, após k iterações, teremos

$$n \ln \underline{c}^T \underline{x}^k \leq n \ln \underline{c}^T \underline{a}_0 - k \delta \quad \text{ou}$$

$$\frac{\underline{c}^T \underline{x}^k}{\underline{c}^T \underline{a}_0} \leq e^{-\frac{k\delta}{n}} = 2^{-\frac{k\delta}{n \ln 2}}$$

(Esta última igualdade pode ser verificada calculando-se o logaritmo na base e de ambos os termos).

Para fazer o expoente de 2 igual a $-L$ deveremos ter

$$\frac{k\delta}{n \ln 2} = L \rightarrow k = nL \left(\frac{\ln 2}{\delta} \right) \text{ ou } k = O(nL),$$

ou seja, $O(nL)$ iterações são suficientes.

Portanto, mostrando-se que a cada iteração $\underline{c}^T \underline{x}^k$ é reduzido de um fator $e^{-\frac{\delta}{n}}$, em $O(nL)$ iterações a precisão desejada é alcançada.

Karmarkar não pode provar diretamente que o seu algoritmo reduz $n \ln \underline{c}^T \underline{x}^k$ de uma constante k a cada iteração. No entanto, o algoritmo reduz a seguinte "função potencial" por δ a cada iteração,

$$f(y) = \sum_{j=1}^n \ln \frac{\underline{c}^T \underline{y}}{y_j} = n \ln \underline{c}^T \underline{y} - \sum_{j=1}^n \ln y_j \quad (8)$$

e, portanto, de $k\delta$ após k iterações. Se realmente isto ocorre, $n \ln \underline{c}^T \underline{y}$ é reduzido de no mínimo $k\delta$ após k iterações pois o segundo termo $-\sum_{j=1}^n \ln y_j$ tem o seu valor mínimo para $y_j = \frac{1}{n}$, $j = 1, \dots, n$ e isto ocorre na primeira iteração. Assim, se reduzimos $f(y)$ de $k\delta$ após k iterações, reduzimos $n \ln \underline{c}^T \underline{y}$ de mais do que $k\delta$ após k iterações. É suficiente pois mostrar que o algoritmo reduz a função potencial (8) de no mínimo δ a cada iteração. Observe que a função potencial é invariante sob a transformação projetiva, isto é, dado

$$f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n \ln \frac{\underline{c}^T \underline{x}}{x_j}$$

$$\text{e } T(\underline{x}) = \underline{z} = \frac{D^{-1} \underline{x}}{e^T D^{-1} \underline{x}}, \quad \text{com inversa}$$

$$T^{-1}(\underline{z}) = \underline{x} = \frac{D \underline{z}}{e^T D \underline{z}}, \quad \text{onde}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}, \quad \text{segue que}$$

$$g(\underline{z}) = f(T^{-1}(\underline{z})) = \sum_{j=1}^n \ln \frac{(c^T D \underline{z} / e^T D \underline{z})}{(a_j z_j / e^T D \underline{z})} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \ln \frac{c^T D \underline{z}}{z_j} - \sum_{j=1}^n \ln a_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \ln \frac{c^T D \underline{z}}{z_j} - \text{constante},$$

ou seja, tem a mesma forma que a função original a menos de uma constante.

Se $g(\underline{z})$ diminui de δ no espaço transformado, então $f(\underline{x})$ também diminui de δ no espaço original, ou seja, se

$$g(\underline{z}) \leq g(\underline{z}_0) - \delta \quad \text{então}$$

$$f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0) - \delta \quad \text{onde}$$

$$\underline{x} = T^{-1}(\underline{z}) \quad \text{e}$$

$$\underline{x}_0 = T^{-1}(\underline{z}_0).$$

Isto porque

$$g(\underline{z}) = \sum_{j=1}^n \ln \frac{\underline{c}^T \underline{D} \underline{z}}{z_j} - \sum_{j=1}^n \ln a_j \quad e$$

$$h(\underline{x}) = g(T(\underline{x})) = \sum_{j=1}^n \ln \frac{(\underline{c}^T \underline{D} \underline{D}^{-1} \underline{x} / e^{\underline{c}^T \underline{D}^{-1} \underline{x}})}{(\underline{x}_j / e^{\underline{c}^T \underline{D}^{-1} \underline{x}})} - \sum_{j=1}^n \ln a_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \ln \frac{\underline{c}^T \underline{x}}{x_j} \cdot a_j - \sum_{j=1}^n \ln a_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \ln \frac{\underline{c}^T \underline{x}}{x_j} = f(\underline{x}).$$

Resta provar somente que a cada iteração, $g(\underline{z})$ é reduzido de no mínimo uma constante δ .

No espaço transformado, a cada iteração iniciamos com um ponto no centro do simplex. Podemos sempre mover a uma distância αr , $\alpha \in (0,1)$ e r é o raio da maior esfera inscrita no simplex.

Assim podemos reduzir a função linear $\underline{c}^T \underline{D} \underline{z}$ para no mínimo $\underline{c}^T \underline{D} \underline{z} (1 - \frac{\alpha}{n-1})$ a cada iteração, conforme análise feita anteriormente, relacionando a taxa de convergência com os raios da esfera inscrita e circunscrita ao simplex (relembre que o valor ótimo do problema é admitido ser nulo).

Isto significa que reduzimos o termo $n \ln \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j$ de $g(\underline{z})$ de no mínimo uma constante $(\frac{n}{n-1})^\alpha$ a cada iteração pois $(1 - \frac{\alpha}{n-1}) \leq e^{-\alpha/n-1}$. É preciso verificar o que acontece com o termo $-\sum_{j=1}^n \ln z_j$ de $g(\underline{z})$, quando movemos do ponto $\frac{\underline{e}}{n}$ (centro do simplex) para um ponto $\underline{z}$ na esfera de raio αr , com $\underline{e}^T \underline{z} = 1$. Temos que a diferença correspondente a este termo é dada por:

$$\begin{aligned} & \left| -\sum_{j=1}^n \ln z_j + \sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{1}{n}\right) \right| = \\ & \left| -\sum_{j=1}^n \ln z_j - \sum_{j=1}^n \ln n \right| = \left| -\sum_{j=1}^n \ln n z_j \right|. \end{aligned} \quad (9)$$

Para estabelecer um limitante para este termo, com $|\underline{z} - \frac{\underline{e}}{n}| \leq \alpha r$, Karmarkar (1984) utilizou as seguintes relações auxiliares.

Observe que se $|\underline{z} - \frac{\underline{e}}{n}| \leq \alpha r$, então $\sum_{j=1}^n (z_j - \frac{1}{n})^2 \leq \alpha^2 r^2$ ou

$$\sum_{j=1}^n \frac{(z_j - \frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2} \leq \frac{\alpha^2 r^2}{(\frac{1}{n})^2} = n^2 \alpha^2 r^2 \triangleq \beta^2 \quad (10)$$

Como $r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, então $\beta = \alpha \sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

De (10) temos que

$$\frac{|z_j - \frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} \leq \beta, \quad \forall j.$$

Observe também que se $|x| \leq \beta < 1$, então $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2(1-\beta)^2}$. Isto porque pelo teorema do valor médio (ou teorema de Taylor),

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(\bar{x}) \frac{x^2}{2}$$

para algum $|\bar{x}| \leq |x|$.

Tomando-se $f(x) = \ln(1+x)$ temos

$$\ln(1+x) = x + \left(\frac{-1}{(1+\bar{x})^2} \right) \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{onde} \quad |\bar{x}| \leq |x|.$$

Para $|x| \leq \beta < 1$,

$$|\ln(1+x) - x| = \frac{x^2}{2(1+\bar{x})^2} \leq \frac{x^2}{2(1-\beta)^2} \quad (11)$$

Fazendo-se $x = \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ na relação (11) temos:

$$\left| \ln \left(1 + \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) - \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{2(1-\beta)^2} \left[\frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right]^2$$

ou

$$\sum_j \left| \ln \left(1 + \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) - \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{2(1-\beta)^2} \sum_j \left[\frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right]^2$$

mas

$$\left| \sum_j \left[\ln \left(1 + \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) - \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right] \right| \leq \sum_j \left| \ln \left(1 + \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) - \frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right|$$

e, portanto,

$$\left| \sum_j \ln n z_j - \sum_j \left(\frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) \right| \leq \frac{1}{2(1-\beta)^2} \sum_j \left(\frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^2. \quad (12)$$

Mas,

$$\sum_j \left(\frac{z_j - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_j z_j - \sum_j \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} (1-1) = 0. \quad (13)$$

De (10), (12) e (13), temos:

$$\left| \sum_j \ln n z_j \right| \leq \frac{1}{2(1-\beta)^2} \cdot \beta^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g \left(\frac{e}{n} \right) - g \left(\frac{z}{n} \right) &\geq \left(\frac{n}{n-1} \right) \alpha - \frac{\beta^2}{2(1-\beta)^2} = \\ &= \left(\frac{n}{n-1} \right) \alpha - \frac{\alpha^2 n^2 n^2}{2(1-\alpha n)^2} = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n}{n-1} \right) \alpha - \frac{\alpha^2 \left(\frac{n}{n-1} \right)}{2 \left(1 - \alpha \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)^2} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-1} \right) \alpha \left[1 - \frac{\alpha}{2 \left(1 - \alpha \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)^2} \right]$$

Para α suficientemente pequeno,

$$\left[1 - \frac{\alpha}{2 \left(1 - \alpha \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)^2} \right] > 0.$$

Por exemplo, se $\alpha = \frac{1}{3}$ e n for grande,

$$1 - \frac{\alpha}{2 \left(1 - \alpha \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)^2} \approx 1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 \left(1 - \frac{1}{3} \right)^2} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 \left(\frac{4}{9} \right)} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{5}{8} > 0.$$

Para um α conveniente, fazendo

$$\delta = \left(\frac{n}{n-1} \right)^\alpha \left[1 - \frac{\alpha}{2 \left(1 - \alpha \sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)^2} \right]^2 \quad (14)$$

temos

$$g\left(\frac{e}{n}\right) - g(\underline{z}) \geq \delta.$$

Observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = \alpha \left[1 - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \right] e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) > 0 \text{ para todo } \alpha \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

Portanto, o número de iterações com δ definido conforme (14) e α escolhido convenientemente é $O(nL)$ e a complexidade total do algoritmo é $O(n^{3,5} L^2)$.

Padberg (1986) mostrou através de uma prova diferente de convergência do método projetivo que o algoritmo para após $O(nL)$ iterações com qualquer $\alpha \in (0, 0.7968...)$.

6. COMO COLOCAR UM PROBLEMA GERAL NA FORMA REQUERIDA PELO ALGORITMO DE KARMARKAR

Suponha que tenhamos um problema de programação linear em uma forma geral,

$$\begin{aligned} \min \quad & \underline{c}^T \underline{x}, \\ \text{sujeito a} \quad & A\underline{x} = \underline{b}, \\ & \underline{x} \geq \underline{0}, \quad (15) \\ & \underline{x} \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Como converter (15) para a forma (1) de modo a podermos utilizar o método de Karmarkar?

Apresentaremos a sugestão proposta por Tomlin (1985) (segundo Hooker, 1986) que é similar a de Todd and Burrell (1985) e tem a vantagem de fornecer um ponto inicial viável interior.

Para fazer a conversão, adicionamos mais três variáveis, z_1 , z_2 , z_3 , e mais duas linhas ao problema (15).

Seja $\underline{y} = \frac{\underline{x}}{\sigma}$ onde σ é escolhido grande suficiente de modo que para qualquer solução viável (para propósitos gerais), $\underline{x}$ satisfaz $\underline{e}^T \underline{x} < \sigma$, a menos que o problema seja ilimitado.

Resolvemos então o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma \underline{c}^T \underline{y} + 0z_1 + 0z_2 + Mz_3 \\ \text{sujeito a} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A & \underline{0} & -nb/\sigma & nb/\sigma - Ae \\ 0 & 0 & n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}^T \underline{y} + z_1 + z_2 + z_3 = 1, \quad (16)$$

$$\underline{y} \geq \underline{0}, z_1, z_2, z_3 \geq 0, \underline{y} \in \mathbb{R}^m, z_i \in \mathbb{R}, i=1,2,3$$

e

$$n = m+3.$$

Observe que a variável z_1 é uma variável de folga que é a diferença entre 1 e a soma das outras variáveis. z_2 é uma variável definida apenas para trazer para o lado esquerdo, o lado direito da equação; seu valor é 1. A variável z_3 é uma variável artificial ponderada por um custo

alto M que a força para zero quando o problema (15) tem solução. No método simplex, um M grande pode causar problemas numéricos, mas isto não ocorre no método de Karmarkar.

Se z_3 for positivo na solução ótima de (16), então (15) não tem solução viável. Se z_1 for igual a zero, sabemos que o problema (15) é ilimitado.

Para colocar o problema (16) na forma (1), basta subtrair a última equação da penúltima, obtendo finalmente a forma desejada,

$$\text{Min } \underline{c}^T \underline{y} + 0z_1 + 0z_2 + Mz_3,$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} A & \underline{0} & -\frac{nb}{\sigma} & \frac{nb}{\sigma} - Ae \\ -\underline{e}^T & -1 & n-1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix},$$

$$\underline{e}^T \underline{y} + z_1 + z_2 + z_3 = 1, \quad (17)$$

$$\underline{y} \geq \underline{0}, \quad z_1, z_2, z_3 \geq 0,$$

que tem o ponto interior viável

$$y_j = \frac{1}{n}, \quad j=1, \dots, m$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = \frac{1}{n}.$$

A solução $\underline{x}$ do problema (15) é obtida de $\underline{y}$ fazendo-se $\underline{x} = n\underline{y}$.

E a função objetivo? Para uso do método de Karmarkar, o valor ótimo do problema tem que ser zero.

No caso de se conhecer o valor ótimo $v \neq 0$ de (1), define-se uma nova função objetivo,

$$\begin{aligned} \underline{c}^T \underline{x} - v &= \underline{c}^T \underline{x} - v(\underline{e}^T \underline{x}) = \\ &= (\underline{c}^T - v\underline{e}^T) \underline{x} \end{aligned}$$

pois $\underline{e}^T \underline{x} = 1$.

A nova função objetivo tem valor ótimo zero.

Porém, é mais provável que o valor v seja desconhecido. Uma sugestão natural seria utilizar as propriedades da teoria de dualidade em programação linear. Um novo problema seria definido com as restrições do problema primal e dual e com função objetivo igual a diferença entre as funções objetivos dos dois problemas. Isto apresenta o inconveniente de aumentar bastante o tamanho do problema.

Karmarkar sugere a utilização de uma "função objetivo deslizante" onde admite-se que sejam conhecidos limitantes inferiores e superiores, l_0 e u_0 , respectivamente, da função objetivo (se não forem conhecidos,

pode-se usar $l_0 = -2^{0(L)}$ e $u_0 = 2^{0(L)}$. Usa-se então, tentativamente, como limitantes inferior e superior, os valores $l' = l_0 + \frac{1}{3}(u_0 - l_0)$ e $u' = l_0 + \frac{2}{3}(u_0 - l_0)$ e inicia-se o método admitindo-se que o valor ótimo seja $v = l'$. As iterações são realizadas até que uma das seguintes condições ocorre:

- a) a função potencial não pode mais ser melhorada de δ . Neste caso, l' é menor do que o valor ótimo. Faz-se então $l_0 = l'$ e redefine-se tentativamente novos limitantes;
- b) o valor da função objetivo cai abaixo de u' .

Neste caso, faz-se $u_0 = u'$ e novamente, redefine-se tentativamente novos limitantes.

De acordo com Karmarkar, uma destas situações deve ocorrer em no máximo $n(k + \ln(n))$ iterações, onde k é tal que

$$\left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^{kn} \leq \frac{1}{2},$$

pois após tal número de iterações, se o suposto limitante inferior não se tornou inválido, então a função objetivo deverá ter decrescido abaixo de u' .

Após $O(nL)$ iterações, o intervalo original é reduzido de $2^{0(L)}$ para $2^{-0(L)}$ e, portanto, o método usando a função objetivo deslizante mantém o limitante polinomial e a suposição de valor ótimo da função objetivo ser zero é desnecessária.

Outras sugestões foram apresentadas na literatura relaxando as exigências requeridas na forma do problema e no valor da função objetivo ótima.

Todd e Burrell (1985), por exemplo, sugerem que seja utilizado informações sobre a solução dual para atualizar uma estimativa do valor ótimo do problema. A sugestão proposta por eles gera também soluções duais convergentes.

Considere o dual do problema (1),

$$\begin{aligned} \max \quad & v, \\ \text{sujeito a} \quad & A^T \underline{u} + \underline{e}v \leq \underline{c}. \end{aligned}$$

Para qualquer $\underline{u}$, $(\underline{u}, v)$ é uma solução dual viável se

$$v = \min_j \{t_j\} \quad \text{onde } t = \underline{c} - A^T \underline{u}.$$

Deve-se escolher $\underline{u}$ a cada iteração de modo que $(\underline{u}, v)$ convirja para a solução ótima do dual a medida que o algoritmo prossegue. Inicialmente, o primeiro valor $\underline{u}^0$ para o vetor $\underline{u}$ pode ser escolhido como a solução da equação

$$AA^T \underline{u}^0 = A\underline{c} \text{ e a primeira estimativa para } v \text{ seria } v_0 = \min_j \{(\underline{c} - A^T \underline{u}^0)_j\}.$$

A atualização das variáveis duais é feita da seguinte maneira. Seja $\underline{u}^{k+1}$ a solução do sistema

$$AD^2 A^T \underline{u}^{k+1} = AD^2 \underline{c}(v^k) \quad (18)$$

onde $\underline{c}(v^k) = (\underline{c} - v^k \underline{e})$.

$$\text{Seja } \tilde{v} = \min_j \{(\underline{c} - A^T \underline{u}^{k+1})_j\}.$$

Se $\tilde{v} \leq v^k$, então o limitante inferior v^k não foi melhorado e fazemos $v^{k+1} = v^k$. Se $\tilde{v} > v^k$, então adota-se $v^{k+1} = \tilde{v}$ e $\underline{u}^{k+1}$ é recalculado pelo sistema de equações,

$$AD^2 A^T \underline{u}^{k+1} = AD^2 \underline{c}(v^{k+1}). \quad (19)$$

Observe que o cálculo de $\underline{u}^{k+1}$ em (19) pode ser feito sem muito trabalho adicional dependendo do método utilizado em (18) pois apenas algumas pequenas mudanças acontecerem no lado direito da equação (19). (pode-se utilizar, por exemplo, uma fatorização QR).

Todd e Burrell (1985) provam que, desta forma, os $(\underline{u}^k, \underline{v}^k)$'s convergem para a solução ótima do dual. É importante observar que o cálculo utilizado para computar $\underline{u}^{k+1}$ é parte do cálculo da direção de máximo decréscimo no espaço nulo de B, que é dado por

$$\underline{c}_p = [I - \underline{e} \underline{e}^T/n] [D \underline{c}(\underline{v}^{k+1}) - D A^T \underline{u}^{k+1}].$$

Portanto, não há acréscimo na complexidade computacional do algoritmo e a restrição de que o valor ótimo do problema seja nulo pode ser deletada.

Várias outras variantes para o método de Karmarkar têm sido sugeridas, por exemplo, a de Lustig (1985) que elimina a necessidade da forma (1) do problema e permite a utilização em problemas com limitantes inferiores e superiores nas variáveis de decisão.

No que concerne a experimentos computacionais com o método de Karmarkar, há relatos (veja Cavalier e Soyster, 1985) de instabilidade numérica quando a solução ótima do problema é degenerada. Isto porque o determinante de BB^T se aproxima de zero. Uma sugestão encontrada em Nickels et al (1985) para evitar este problema de estabilidade numérica é utilizar a fatorização de Cholesky após rearranjar convenientemente as linhas de B (veja Dongarra et al, 1980).

7. COMENTÁRIOS FINAIS

Após o resultado de Kachian mostrando ser polinomial a complexidade computacional do problema de programação linear, muitos pesquisadores tem-se dedicado à pesquisa de métodos interiores para a resolução deste tipo de problema.

Uma revisão de resultados sobre a complexidade de problemas de programação linear após método elipsóide pode ser encontrada em Megiddo (1986).

Há resultados de pesquisa mostrando que o algoritmo de karmarkar é simplesmente um caso particular dentro da classe dos métodos de solução conhecido como métodos de barreira de Newton projetado (veja Hooker,

1986 e Gill et alii, 1985); há trabalhos relacionando o algoritmo de Karmarkar e programação fracionária (Anstreicher, 1986, conforme Hooker, 1986), e outros (veja Hooker, 1986).

A idéia de trazer a solução corrente para o centro do politopo foi também explorada por outros pesquisadores, entre eles Chandru e Kochar (1986) que utilizaram apenas uma mudança de escala ao invés de uma transformação projetiva.

Ao leitor interessado, Megiddo (1986) discute outros métodos interiores recentes.

8. BIBLIOGRAFIA

- ANSTREICHER, K.M. A monotonic projective algorithm for fractional programming. Yale School of Organization and Management, New Haven, Connecticut, 1986.
- CAVALIER, T.M.; SOYSTER, A.L. Some computational experience and a modification of the Karmarkar algorithm. Department of Industrial and Management Systems Engineering, The Pennsylvania State University, University Park, PA, 1985.
- CHANDRU, V.; KOCHAR, B.S. A class of algorithms for linear programming - Research Memorandum 85-14, School of Industrial Engineering, Purdue University, West Lafayette, Indiana, 1986.
- DONGARRA, J.J.; BUNCH, J.R.; MOLER, C.B.; STEWART, G.W. LINPACK User's Guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- GAY, D.M. Pictures of Karmarkar's linear programming algorithm. Computing Science Technical Report n° 136 - AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, Jan. 1987.
- GAY, D.M. A variant of Karmarkar's linear programming algorithm for problems in standard form. Numerical Analysis Manuscript 85-10 - AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, Oct. 1985.

- GAZMURI, P.; ROBLES, J.M. Fundamentos del algoritmo de Karmarkar para Programación lineal. Revista del Instituto Chileno de Investigación Operativa, 2(2) 1:17- Julio 1986.
- GILL, P.E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M.A.; TOMLIN, J.A.; WRIGHT, M.A. On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method. Report 506-85-11, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, Stanford, California, 1985.
- HOOKE, J.N. Karmarkar's linear programming algorithm. Interfaces, 16(4) 75:90, July-August 1986.
- KARMARKAR, N. A new polynomial time algorithm for linear programming. Manuscript, Mathematical Sciences Division, AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, 1984.
- LUSTIG, I.J. A practical approach to Karmarkar's algorithm. Technical Report SOL 85-5. Systems Optimization Laboratory. Department of Operations Research. Stanford University, Stanford, California, June 1985.
- MEGIDDO, N. On the complexity of linear programming. RJ 4985(52162). Computer Science. IBM Almaden Research Center, San Jose, California, 1986.
- NICKELS, W.; RÖDDER, W.; XU, L.; ZIMMERMANN, H.J. Intelligent gradient search in linear programming. European Journal of Operational Research 22 (1985). p. 293-303.
- PADBERG, M. A different convergence proof of the projective method for linear programming. Operations Research Letters. 4(6) 253:257, April 1986.
- TODD, M.J.; BURRELL, B.P. An extension of Karmarkar's algorithm for linear programming using dual variables. Technical Report n° 648. School of Operations Research and Industrial Engineering. College of Engineering. Cornell University. Ithaca, New York, Jan. 1985.
- TOMLIN, J.A. An experimental approach to Karmarkar's projective method for linear programming. Ketron Inc., Mountain View, California, 1985.



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS

PROPOSTA PARA
PUBLICAÇÃO

- ☐ DISSERTAÇÃO
☐ TESE
☐ RELATÓRIO
☐ OUTROS

TÍTULO

O algoritmo de Karmarkar para programação linear

AUTOR(ES)

Horacio Hideo Yanesse

ORIENTADOR

CO-ORIENTADOR

DISS. OU TESE

IDENTIFICAÇÃO

LIMITE

DEFESA

CURSO

ORGÃO

DIVULGAÇÃO

- ☐ EXTERNA ☐ INTERNA ☐ RESTRITA
☐ CONGRESSO ☐ REVISTA ☐ OUTROS

EVENTO/MEIO

NOME DO REVISOR

NOME DO RESPONSÁVEL

Leon Sinay

APROVAÇÃO

REV. TÉCNICA

RECEBIDO

DEVOLVIDO

ASSINATURA

APROVADO

DATA

ASSINATURA

RECEBIDO

DEVOLVIDO

ASSINATURA

APROVADO

DATA

ASSINATURA

RECEBIDO

DEVOLVIDO

ASSINATURA

APROVADO

DATA

ASSINATURA

RECEBIDO

DEVOLVIDO

ASSINATURA

APROVADO

DATA

ASSINATURA

Nº DA PUBLICAÇÃO:

PÁG.:

CÓPIAS:

Nº DISCO:

LOCAL:

☐ SIM

☐ NÃO

AUTORIZO A PUBLICAÇÃO

DIRETOR

OBSERVAÇÕES E NOTAS

Relatório referente a palestra a ser proferida
no 3º ERMAC - Sab Ind'os Campos, de 18 a 20
de maio de 1987. O tema da palestra

foi determinado a partir da comissão organizadora.

O autor dispense revisão técnica e
revisão de linguagem.

27/6/87

Horacio Hideo Yanesse

LEON SINAY

Chefe do Laboratório Associado de
Computação e Matemática Aplicada

data limite: 01/5/87