1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-4415-TDL/306		*October 1987*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem *PG/DMC*	Programa *FRH/CEA*		

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)

DETERMINAÇÃO DE ATITUDE
FILTRO DE KALMAN
ALGORITMO QUEST (QUATERNION ESTIMATOR)

7. C.D.U.: *629.783:629.7.062.2*

8. Título *INPE-4415-TDL/306*

DETERMINAÇÃO DA ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS ATRAVÉS DA APLICAÇÃO CONJUNTA DE TÉCNICAS DE DE ESTIMAÇÃO ÓTIMA ESTÁTICA E DINÂMICA

10. Páginas: *115*

11. Última página: *D.2*

12. Revisada por

Valcir Orlando

9. Autoria

Sebastião Eduardo Corsatto Varotto

Assinatura responsável

13. Autorizada por

Marco Antonio Raupp
Diretor Geral

14. Resumo/Notas

Neste trabalho apresenta-se um algoritmo, aplicável em tempo real, desenvolvido para a estimação ótima de atitude de satélites artificiais. A estimação da atitude em cada instante de amostragem é feita em duas fases. Na primeira obtém-se uma estimativa preliminar por mínimos quadrados, baseada apenas em informações instantâneas de sensores de atitude não-inerciais, utilizando o algoritmo conhecido como QUEST ("Quarternion Estimador"). Na segunda fase, a estimativa preliminar, depois de tratada convenientemente, é utilizada como observação a ser processada por um filtro estendido de Kalman. A atitude "real" de um satélite artificial, simulada em um computador digital, foi utilizada para testar o desempenho do procedimento. A análise dos resultados evidencia o bom desempenho do procedimento em termos de precisão, robutez e tempo de processamento, comparativamente com outros procedimentos de estimação de atitude.

15. Observações *Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital, aprovada em 25 de julho de 1986.*

Aprovada pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de Mestre em Ciência Espacial

Dr. Atair Rios Neto		Presidente
Dr. Valcir Orlando		Orientador
Engº Roberto Vieira F.Lopes, Mestre		Co-Orientador
Dr. Takashi Yoneyama		Membro da Banca -convidado-
Dr. Agenor de Toledo Fleury		Membro da Banca

Candidato: Sebastião Eduardo Corsatto Varotto

São José dos Campos, 25 de julho de 1986

AGRADECIMENTOS

Gostaria de deixar meus agradecimentos a todos aqueles que de uma forma ou de outra colaboraram para a execução deste trabalho. Agradeço ao Dr. Valcir Orlando e ao MSc. Roberto Vieira da Fonseca Lopes a sugestão do tema da pesquisa, o constante interesse e a dedicação ao trabalho de orientação tanto do conteúdo como da redação do texto, assim como a paciência e camaradagem a mim dispensada. Ao Dr. Atair Rios Neto, ao Dr. Agenor de Toledo Fleury e ao Dr. Takashi Yoneyana as correções e sugestões oportunas por ocasião da apresentação preliminar do trabalho. Gostaria de agradecer ainda à minha esposa e a meus pais pela positividade com que aguardaram o cumprimento de mais esta etapa em minha carreira profissional.

ABSTRACT

This work presents an algorithm for optimal attitude estimation of artificial satellites, suitable for real time applications. The attitude estimation at each sampling time is made in two phases. In the first one a preliminary estimation is obtained by a least squares method based only on instantaneous information from noninertial attitude sensors. This is made by using the algorithm known as QUEST ("Quaternion Estimator"). In the second phase, the preliminary estimate, after conveniently treated, is used as an observation to be processed by an extended Kalman filter. The "real" attitude of an artificial satellite simulated in a digital computer, was used to test the procedure performance. The analysis of the results shows the good performance of the procedure in terms of precision, robustness and processing time, comparing with others procedures of atitude estimation.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABELAS

Pág.

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- Matriz de atitude ou cossenos diretores
$E(.)$	- Operador expectância
$F[X(t), t]$	- Matriz de derivadas parciais da função $f(X_t, t)$ em relação às variáveis de estado
$f(X_t, t)$	- Função não-linear vetorial do estado e do tempo
H_k	- Matriz de derivadas parciais da função de observação em relação às variáveis de estado, avaliada no instante t_k
$h[X(t), t]$	- Função vetorial que relaciona os elementos do vetor de estado com as observações
J	- Tensor de inércia escrito em relação aos eixos principais de inércia
I	- Matriz identidade
Jx	- Momento principal de inércia no eixo X
Jy	- Momento principal de inércia no eixo Y
Jz	- Momento principal de inércia no eixo Z
K_k	- Matriz ganho de Kalman referente ao instante t_k
$\underline{L}$	- Vetor momento angular
M_I, M_J, M_K	- Componentes do vetor intensidade do campo geomagnético
m	- Dimensão do vetor de observação
N	- Torques externos
n	- Dimensão do vetor de estado
$P(t)$	- Matriz de covariância do erro no estado de dimensão (7x7)
Pqq	- Matriz de covariância do erro associado ao quatérnion, dimensão (4x4)
$P_r(t)$	- Matriz de covariância do erro associado ao estado reduzido, dimensão (6x6)

$P_{\theta\theta}$ - Matriz de covariância dos desvios angulares, dimensão (3 x 3)

Q - Matriz de covariância do ruído no estado

$\underline{q}$ - Vetor constituído pelos parâmetros simétricos de Euler

R - Matriz de covariância do erro nas observações

r - Resíduo de observação

$\bar{r}$ - Resíduo normalizado

S_I, S_J, S_K - Componentes do vetor na direção satélite-Sol

t - Tempo

v - Ruído branco gaussiano das observações

X - Vetor de estado, dimensão (7x1)

X_r - Vetor de estado reduzido, dimensão (6x1)

$\underline{Y}$ - Vetor de observações

$\underline{V}$ - Vetor de referência

W - Ruído branco gaussiano no estado

Δq - Erro na estimativa do quatérnion de atitude

$\Delta \omega$ - Erro na estimativa da velocidade angular

$\Delta \theta$ - Vetor de erro angular na estimativa da atitude nos três eixos

δq - Precisão do estimador para o quatérnion de atitude

$\delta \omega$ - Precisão do estimador para a velocidade angular

$\delta \theta$ - Precisão angular do estimador para a atitude nos três eixos

δ_{ij} - Delta de Kronecker

$\delta(t-\tau)$ - Função delta de Dirac

λ - Razão de momentos principais de inércia

ω - Vetor velocidade angular do satélite em torno do seu centro de massa

*	- Indica conjugado
ϕ	- Matriz de transição de estado
x	- Indica produto vetorial
.	- Indica produto escalar

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste trabalho desenvolve-se um procedimento para determinação da atitude de satélites artificiais através da combinação de duas técnicas de características diversas comumente utilizadas isoladamente para esta finalidade: o Filtro Estendido de Kalman (Jazwinski, 1979) e o Algoritmo QUEST (Shuster and Oh, 1981). A primeira consiste em uma técnica estocástica de estimação de estado que utiliza um modelo dinâmico para descrever o comportamento do sistema entre instantes de amostragem de observações. A segunda trata-se de uma técnica que fornece estimativas ótimas locais da atitude através do critério de mínimos quadrados, sem utilizar quaisquer informações sobre a dinâmica do sistema.

A idéia básica a ser desenvolvida no trabalho consiste em utilizar o Algoritmo QUEST para gerar uma estimativa ótima preliminar da atitude que, após um tratamento matemático conveniente, possa ser utilizada como observação pelo filtro estendido de Kalman. Com isto pretende-se viabilizar um procedimento automático que possa satisfazer a requisitos de processamento em tempo real, e por incorporar as características positivas das técnicas envolvidas, permita uma maior abrangência de aplicações, tornando o desempenho global do procedimento melhor quando comparado com o desempenho de cada técnica aplicada isoladamente.

A determinação da atitude a partir de observações de sensores vem sendo objeto de pesquisa há várias décadas. Atualmente existe um número relativamente grande de procedimentos para determinação da atitudes; a maioria deles foram desenvolvidos para aplicações em situações específicas (Pivovarov, 1979; Bhat et alii, 1981; Titov and Shchukin, 1978).

Técnicas para determinação de atitude possuem importância fundamental em aplicações na área espacial. Da determinação da atitude pode depender o sucesso da missão, pois o atendimento de seus requisitos fundamentais, na maioria dos casos, depende do bom desempenho deste processo. Por exemplo, nas fases iniciais da missão, em que manobras de aquisição de órbita e atitude são efetuadas, com a finalidade de colocar o satélite em suas condições nominais de operação, a determinação de atitude é fundamental tanto para permitir tomadas de decisões em Terra, quanto para fornecer dados necessários ao sistema de controle. Já na fase de rotina, é importante o monitoramento da atitude e órbita em Terra para que se possa, por exemplo, interpretar corretamente os resultados dos experimentos realizados a bordo; aplicar procedimentos para correções de imagens no caso de sensoriamento remoto; ou ainda, para que se possa efetuar com sucesso as operações de correção de órbita e/ou atitude quando necessário. Assim sendo, da precisão obtida na determinação da atitude dependerá a precisão final do apontamento e desta a satisfação das condições de operação da carga útil.

Para satélites com controle autônomo, além de se determinar a atitude a bordo para a malha de realimentação do sistema de controle, é também importante sua determinação em solo, para que se possa monitorar o desempenho do sistema de controle. A Figura 1.1 apresenta, a título ilustrativo, um esquema simplificado de um sistema de controle de atitude em malha fechada para um satélite artificial. A malha de realimentação é composta por sensores de atitude cuja finalidade é realizar medidas da orientação de vetores conhecidos em Terra (Satélite-Centro da Terra, Campo Geomagnético, Satélite-Sol, por exemplo), as quais são utilizadas como entradas para um estimador de atitude. O processamento relativo ao estimador visa retirar as informações da atitude do veículo contidas nas medidas, fornecendo estimativas da atitude, com base em algum critério de otimalidade, com as quais é fechada a malha de controle.

O esquema apresentado na Figura 1.1 mostra de forma simplificada um controlador de atitude, onde se evidencia a importância da determinação da atitude no caso de o controle ser em malha fechada.

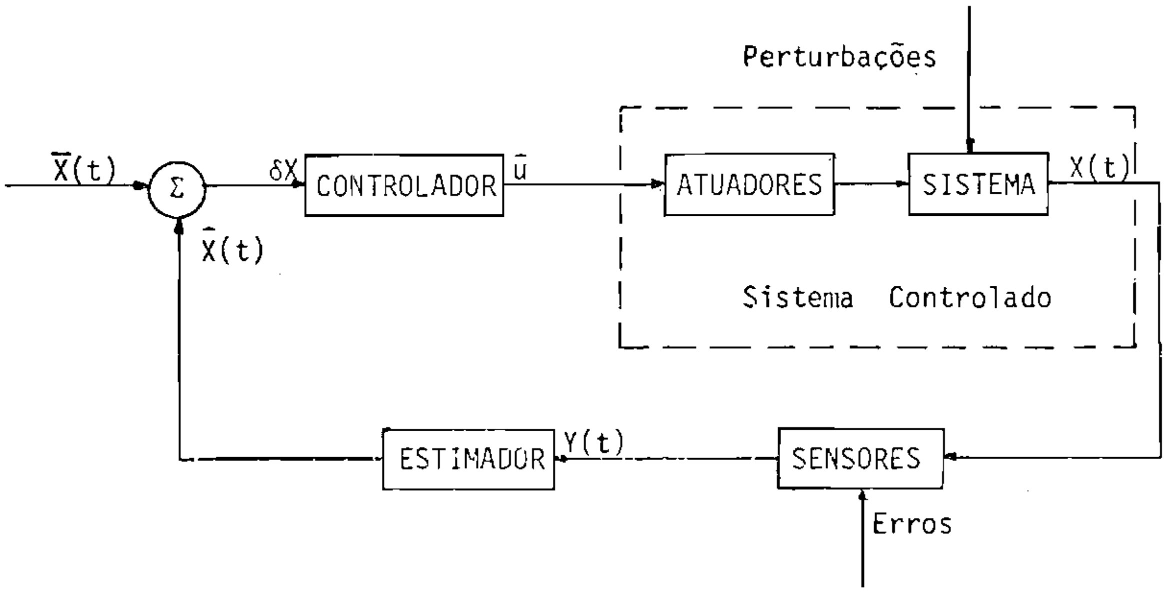


Fig. 1.1 - Esquema simplificado de um do controlador estimador de atitude.

No Capítulo 2, são descritos de maneira resumida os conceitos gerais e as técnicas utilizadas no desenvolvimento do procedimento. No Capítulo 3, coloca-se o problema a ser abordado, seguido da descrição do procedimento desenvolvido. No Capítulo 4, os testes de desempenho e avaliação do procedimento são especificados e os resultados obtidos são apresentados e analisados. O quinto capítulo é dedicado à elaboração de comentários, conclusões e sugestões para futuros desenvolvimentos.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordam-se os principais conceitos e apresentam-se os fundamentos teóricos nos quais se alicerça o procedimento desenvolvido neste trabalho. Inicialmente faz-se uma explanação resumida de temas que, fugindo ao escopo principal, constituem entretanto suporte ao desenvolvimento do trabalho. Em seguida, apresentam-se as equações relativas ao estimador ótimo não-tendencioso de mínima variância, aplicado a sistemas não-lineares, conhecido como Filtro Estendido de Kalman; descrições mais detalhadas desta técnica de filtragem são encontradas em Jazwinski (1970), Gelb et alii (1974), Liebelt (1967) e Maybeck (1979). Depois disso, descreve-se uma técnica ótima de estimação local da atitude, sem informação da dinâmica do veículo, a partir de observações de sensores; trata-se do chamado Algoritmo QUEST (Quaternion Estimator) (Shuster and Oh, 1981). Finalmente, apresentam-se considerações e hipóteses necessárias à aplicação do Filtro Estendido de Kalman ao problema de determinação de atitude de satélites artificiais.

2.2 - SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Para quantificar a atitude é necessária a definição de dois referenciais: um que tenha orientação conhecida e outro solidário ao corpo do satélite. Para o primeiro, adota-se o Sistema de Coordenadas Pseudo-inerciais Geocêntricas: para o segundo, adota-se um sistema de coordenadas que seja coincidente com os eixos principais de inércia do satélite. Estes sistemas são ilustrados nas Figuras 2.1 e 2.2, respectivamente. Ilustra-se também, na Figura 2.3, o Sistema de Coordenadas Geocêntrico Solidário à Terra, que será utilizado para descrever o Campo Geomagnético.

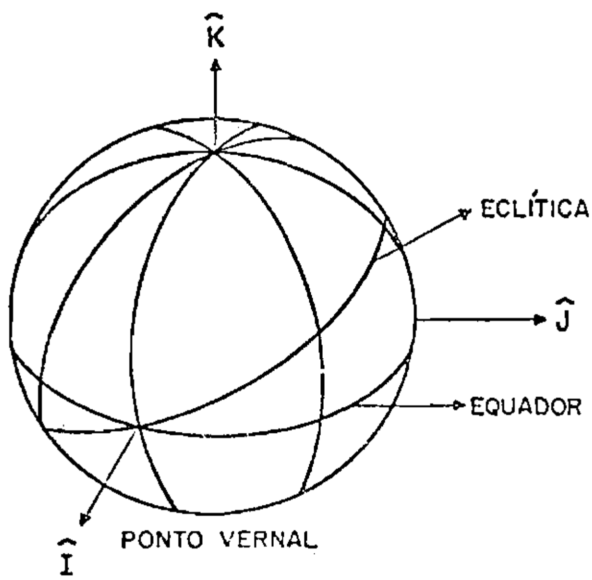


Fig. 2.1 - Sistema geocêntrico pseudo-inercial.

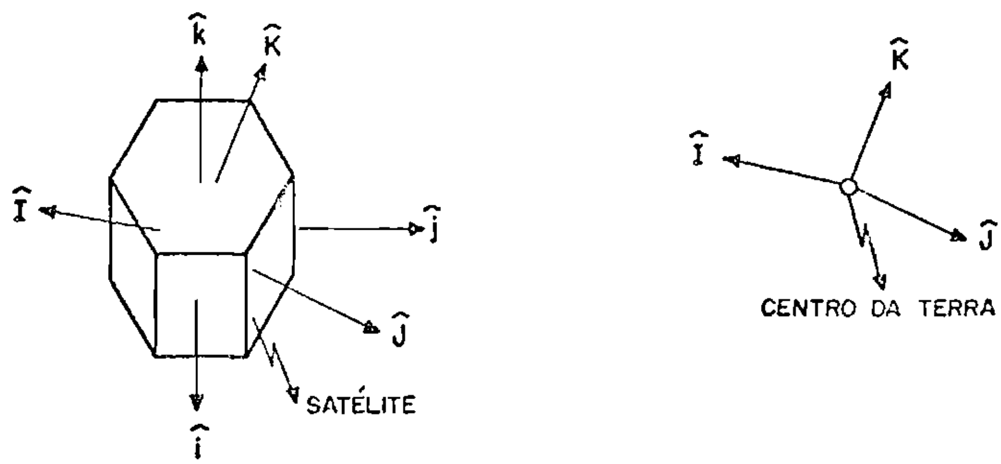


Fig. 2.2 - Referencial solidário ao satélite ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$).
Referencial conhecido em Terra ($\hat{I}$, $\hat{J}$. $\hat{K}$).

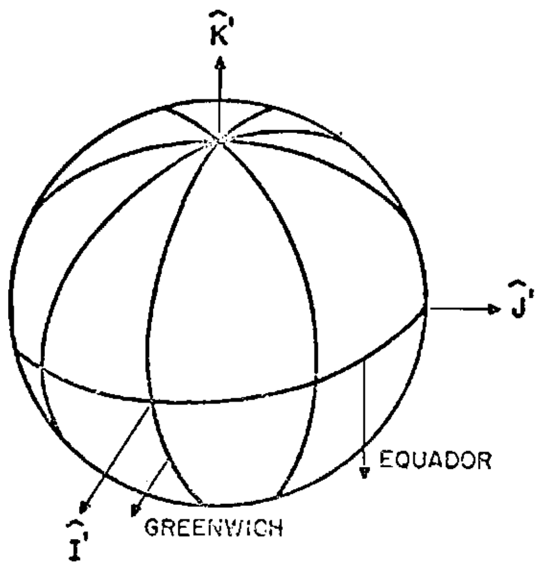


Fig. 2.3 - Sistema geocêntrico solidário à Terra.

2.2.1 - SISTEMA GEOCÊNTRICO PSEUDO-INERCIAL

Conforme ilustrado na Figura 2.1 este sistema de coordenadas é definido pelos versores $\hat{I}$, $\hat{J}$, $\hat{K}$, onde: $\hat{I}$ possui a direção da intersecção entre o plano do equador terrestre com o plano da órbita da Terra, apontando para o ponto vernal; $\hat{K}$ possui a direção e sentido do vetor velocidade angular da Terra e $\hat{J}$ é o produto vetorial de $\hat{K}$ por $\hat{I}$.

Embora tal sistema não seja absolutamente inercial, pode-se considerá-lo como tal, com uma precisão sempre melhor que um minuto de arco por ano, o que é suficiente para os objetivos deste trabalho.

2.2.2 - SISTEMA GEOCÊNTRICO SOLIDÁRIO À TERRA

Este sistema de coordenadas é utilizado, neste trabalho, para descrever o Campo Geomagnético. Apenas uma simples rotação, que depende do instante considerado, em torno do eixo longitudinal terrestre (eixo $\hat{K}$) faz com que este sistema coincida com o Referencial Geocêntrico Inercial.

Como mostrado na Figura 2.3 este sistema de coordenadas é definido pelos versores $\hat{I}'$, $\hat{J}'$ e $\hat{K}'$, onde: $\hat{I}'$ aponta na direção do meridiano de Greenwich, latitude zero; $\hat{K}' = \hat{K}$ aponta na direção e sentido do vetor velocidade angular da Terra e $\hat{J}'$ é o produto vetorial de $\hat{K}'$ por $\hat{I}'$.

2.3 - QUATÉRNION

O quatérnion é um ente matemático composto de uma parte vetorial e outra escalar, sendo definido como:

$$\underline{q} \triangleq \underline{p} + q_4 = q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k} + q_4, \tag{2.1}$$

onde os versores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ definem a base de um referencial.

As operações básicas dos quatérnions são as seguintes:

a) Conjugado

$$\underline{q}^* = -q_1\vec{i} - q_2\vec{j} - q_3\vec{k} + q_4. \tag{2.2}$$

b) Multiplicação

$$\underline{q}' \otimes \underline{q} = \Omega(\underline{p}', q_4')q, \tag{2.3a}$$

onde o sinal $\otimes$ indica multiplicação na álgebra de quatérnions; q é uma matriz coluna composta pelos elementos do quatérnion, e:

$$\Omega(\underline{p}', q_4') = \begin{bmatrix} q_4' & -q_3' & q_2' & q_1' \\ q_3' & q_4' & -q_1' & q_2' \\ -q_2' & q_1' & q_4' & q_3' \\ -q_1' & -q_2' & -q_3' & q_4' \end{bmatrix} \tag{2.3b}$$

ou

$$\underline{q}' \otimes \underline{q} = \Lambda(\underline{p}, q_4)\, q' \tag{2.3c}$$

sendo

$$\Lambda(\underline{p}, q_4) = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \tag{2.3d}$$

c) Módulo

$$|\underline{q}| = \underline{q} \otimes \underline{q}^* = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2. \tag{2.4a}$$

No caso particular em que as componentes do quatérnion são os parâmetros simétricos de Euler, tem-se:

$$\underline{q} = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \{\vec{i}\ E1 + \vec{j}\ E2 + \vec{k}\ E3\} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{2.4b}$$

onde E1, E2, E3 são os cossenos diretores de um eixo de rotação (eixo de Euler) e θ o ângulo de rotação em torno do referido eixo. Estes parâmetros definem a rotação que leva o referencial inercial adotado para um referencial arbitrário. No caso de este referencial arbitrário ser o referencial solidário ao corpo do satélite, o quatérnion se torna uma medida da atitude do satélite, denominada quatérnion de atitude. Observa-se, neste caso, que $|\underline{q}| = 1$.

Demonstra-se (Apêndice A) que:

$$\dot{\underline{q}} = (\underline{q} \otimes \underline{\omega})/2, \quad (2.5)$$

onde

$$\underline{\omega} = \omega x \ \vec{i} + \omega y \ \vec{j} + \omega z \ \vec{k}, \quad (2.6)$$

sendo ωx, ωy e ωz as componentes do vetor velocidade angular instantânea do referencial solidário ao satélite, escrito neste mesmo referencial.

A Equação 2.5 pode ser escrita na forma matricial como:

$$q = \begin{bmatrix} 0 & \omega z & -\omega y & \omega x \\ -\omega z & 0 & \omega x & \omega y \\ \omega y & -\omega x & \omega 0 & \omega z \\ -\omega x & -\omega y & -\omega z & 0 \end{bmatrix} q/2, \quad (2.7)$$

onde q é a matriz coluna composta pelos elementos do quatérnion $\underline{q}$, ou seja:

$$q^T = [q_1 \ : \ q_2 \ : \ q_3 \ : \ q_4]. \quad (2.8)$$

A Expressão 2.7 fornece a equação para a cinemática da atitude.

2.4 - DINÂMICA DE ATITUDE

O Teorema do Momento Angular (Meirovitch, 1970) é usado para encontrar as equações básicas para a dinâmica de atitude. Considera-se as derivadas no tempo das componentes do vetor momento angular (L) no sistema de eixos solidários ao satélite. Admitindo que o satélite seja um corpo rígido, o sistema de eixos solidário ao satélite pode ser tomado como sendo o sistema de eixos coincidentes com as direções principais de inércia e o tensor de inércia do corpo pode ser colocado em uma forma mais conveniente. O teorema do momento angular aplicado a esta situação particular fornece que:

$$d(\underline{L})/d(t) = \underline{N} - (\underline{\omega} \times \underline{L}), \tag{2.9}$$

onde $\underline{L}$ e $\underline{\omega}$ são respectivamente os vetores momento angular e velocidade angular instantânea do corpo; $\underline{N}$ é o vetor formado pelas componentes do torque externo em relação ao centro de massa, no referencial coincidente com os eixos principais de inércia do corpo.

O vetor momento angular pode ser escrito na forma vetorial da seguinte maneira:

$$\underline{L} = J\,\underline{\omega}, \tag{2.10}$$

onde:

$$J = \begin{bmatrix} Jx & 0 & 0 \\ 0 & Jx & 0 \\ 0 & 0 & Jz \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

sendo Jx, Jy e Jz os três momentos principais de inércia do corpo.

Substituindo a Expressão 2.10 na Equação 2.9, resulta:

$$J\,d(\underline{\omega})/d(t) = \underline{N} - \underline{\omega} \times (J\,\underline{\omega}). \tag{2.12}$$

A Equação 2.12 pode ser escrita componente a componente com o que se obtém:

$$\dot{\omega}x = \lambda_1\,\omega y\,\omega z + N1/Jx, \tag{2.13a}$$

$$\dot{\omega}y \quad \lambda_2\,\omega z\,\omega x + N2/Jy, \tag{2.13b}$$

$$\dot{\omega}z = \lambda_3\ \omega x\ \omega y + N3/Jz, \tag{2.13c}$$

onde:

$$\lambda_1 = (Jy - Jz)/Jx, \tag{2.14a}$$

$$\lambda_2 = (Jz - Jx)/Jy, \tag{2.14b}$$

$$\lambda_3 = (Jx - Jy)/Jz. \tag{2.14c}$$

As Equações 2.13 compõem a dinâmica da atitude de um corpo rígido; maiores detalhes sobre quatérnions e dinâmica de atitude são apresentados em Wertz (1978), Meirovitch (1970), Whittaker (1965) e Mayo (1978).

2.5 - TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO ÓTIMA

2.5.1 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

A adaptação do Filtro de Kalman para aplicação a sistemas não-lineares gera o chamado Filtro Estendido de Kalman. (Gelb et alii 1974; Sorenson, 1966; Jazwinski, 1970). Com o propósito de iniciar a apresentação resumida deste filtro, suponha-se um sistema não-linear cujo modelo matemático é dado por:

$$dX_t/dt = f(X_t,\ t) + G(t)\ W_t;\ t \geq t_o\ , \tag{2.15}$$

onde X_t é o vetor n-dimensional de estado do sistema dinâmico; f é uma função vetorial diferenciável não necessariamente linear; G é uma matriz (n x r) com elementos contínuos no tempo; W_t é um vetor de dimensão r que representa incertezas na modelagem do sistema. Este valor é por hipótese um processo branco gaussiano com estatística N(0, Q(t)), ou seja:

$$E(W_t) = 0, \tag{2.16a}$$

$$E(W_t\ W_\tau^T) = Q(t)\ \delta(t - \tau), \tag{2.16b}$$

onde E(.) representa a expectância da variável aleatória entre os parênteses; $Q(t)$ é uma matriz diagonal $r \times r$ definida positiva; $\delta(t-\tau)$ é a função delta de Dirac. Admite-se ainda que o estado no instante inicial seja uma variável aleatória gaussiana com média $\hat{X}_0$ e covariância P_0.

Considere-se que se dispõe de observações do estado do sistema, obtidas discretamente no tempo. Suponha-se que essas observações sejam funções contínuas e de derivadas contínuas em relação a X, modeladas matematicamente por:

$$Y_k = h[X(t_k), t_k] + v_k, \tag{2.17}$$

onde o índice k representa o instante a que se refere a observação, ou seja: $k = 1, 2, 3, \ldots$, para $t = t_1, t_2, t_3, \ldots$ respectivamente; Y_k é um vetor de dimensão m que representa o conjunto de observações referentes ao instante t_k; h é um vetor de funções não-lineares do estado cuja dimensão é m; v_k é um vetor de dimensão m, cujas componentes representam ruídos aleatórios, por hipótese gaussianos, nas respectivas componentes do vetor de observação. As propriedades estatísticas de v_k são por hipótese dadas por:

$$E(v_k) = 0 \tag{2.18a}$$

$$E(v_k\ v_j) = R_k\ \delta_{ij}, \tag{2.18b}$$

onde E(.), como nas Equações 2.16, denota a expectância da variável aleatória entre os parênteses, R_k é uma matriz conhecida e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Algumas hipóteses adicionais necessárias à dedução de filtro de Kalman são: o ruído no estado, w_t, é não-correlacionado tanto com o estado inicial quanto com o ruído nas observações, assim como este último é não-correlacionado com o estado. Essas hipóteses são respectivamente expressas matematicamente por:

$$E(W_t\ v_j^T) = 0, \tag{2.19a}$$

$$E(W_t\ X_{to}^T) = 0, \tag{2.19b}$$

$$E(V_k\ X_{t_k}^T) = 0. \tag{2.19c}$$

Suponha-se agora uma trajetória nominal $\overline{X}(t)$ a partir de uma condição inicial $\overline{X}(t_o)$ dada, a qual satisfaz a:

$$d\overline{X}/dt = f(\overline{X}(t),\ t); \quad t \geq t_o. \tag{2.20}$$

Define-se agora

$$\delta X_t = X_t - \overline{X}(t) \tag{2.21}$$

como sendo o desvio da trajetória nominal. Nota-se que δX_t é um processo estocástico que satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$d(\delta X)/dt = d(X_t;\ t) - f(\overline{X}(t),\ t) + G(t)\ W_t, \tag{2.22}$$

com condição inicial $\delta X_{to} \simeq N(\hat{X}_o - \overline{X}(t_o),\ P_{to})$.

Expandindo a função $f(X_t,\ t)$ em série de Taylor até a primeira ordem em torno da trajetória nominal $\overline{X}(t)$ obtém-se:

$$f(X_t,\ t) - f(\overline{X}(t),\ t) \cong F[t;\ \overline{X}(t)]\ \delta X_t, \tag{2.23}$$

onde

$$F[t;\ \overline{X}(t)] \triangleq \frac{\partial f_i(\overline{X}(t),\ t)}{\partial X_j} \tag{2.24}$$

é a matriz de derivadas parciais de f(.) em relação ao estado, avaliada ao longo da trajetória de referência.

Substituindo o resultado expresso na Equação 2.23 na Equação 2.22 obtém-se:

$$d(\delta X_t)/dt = F[t;\ \bar{X}(t)]\ \delta X + G(t)\ W_t, \qquad (2.25)$$

que é a equação linearizada do Sistema 2.15.

Para enfatizar a dependência de δX na escolha da trajetória nominal, inclui-se $\bar{X}(t)$ no argumento da função F; no entanto, não se deve esquecer que F é função apenas do tempo, sendo avaliada nos valores de $\bar{X}(t)$.

A aplicação do filtro de Kalman ao sistema linearizado contínuo representado pela Equação 2.25 fornece, para a equação de propagação, a matriz de covariância do erro no estado, a equação de Riccati. Para evitar a integração da equação de Riccati, discretiza-se o sistema dado pela Equação 2.25. Assim sendo, supõe-se que o intervalo de amostragem seja pequeno o suficiente para que W_t possa ser considerado como um "step-process", constante em cada intervalo de tempo entre duas observações consecutivas com as seguintes propriedades estatísticas:

$$E(W_{t_k}) = 0, \qquad (2.26a)$$

$$E(W_{t_k}\ W_{t_j}) = Q(t_k)\ \delta_{kj}, \qquad (2.26b)$$

sendo δ_{kj} o delta de Kronecker. Pode-se então escrever:

$$\delta X_{t_{k+1}} = \phi(t_{k+1},\ t_k)\ \delta X_{t_k} + \Gamma(t_k)\ W_{t_k}), \qquad (2.27)$$

onde ϕ é a matriz de transição de estado do sistema linearizado no intervalo $(t_k,\ t_{k+1})$, definida por:

$$\dot{\phi}(t,\ t_k) \triangleq F[t;\ \overline{X}(t)]\ \phi(t,\ t_k);\quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \tag{2.28}$$

com condição inicial $\phi(t_k,\ t_k) = I$ e

$$\Gamma(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1},\ \tau)\ G(\tau)\ d\tau. \tag{2.29}$$

Visto que se quer uma trajetória nominal próxima à trajetória real, escolhe-se como condição inicial para a trajetória nominal a estimativa mais recente do estado, ou seja:

$$\overline{X}(t_k) = \hat{X}(t_k/t_k).$$

Para inicializar o processo, escolhe-se

$$\overline{X}(t_o) = \hat{X}_o, \tag{2.30}$$

sendo $\hat{X}_o$ a estimativa a priori do estado. A matriz de covariância do erro em $\hat{X}_o$, designada como P_o, deve ser tomada a favor da segurança, com base nas incertezas existentes sobre o valor do estado inicial. A melhor estimativa do estado do sistema entre observações é dada por:

$$d\hat{X}(t/t_k)/dt = f(X(t/t_k),\ t);\quad t_k \leq t \leq t_{k+1}. \tag{2.31}$$

Define-se agora o vetor de medidas nominais, $\overline{Y}(t_{k+1})$ calculado a partir de uma trajetória nominal $\overline{X}(t_{k+1})$, ou seja:

$$\overline{Y}_{(k+1)} \triangleq h(\overline{X}(t_{k+1}),\ t_{k+1}). \tag{2.32}$$

Define-se também a variação em torno das medidas nominais por:

$$\delta Y_{k+1} = Y_{k+1} - \overline{Y}(t_{k+1}) = Y_{k+1} - h(\overline{X}(t_{k+1}),\ t_{k+1}). \tag{2.33}$$

Efetuando uma expansão em série de Taylor até primeira ordem em torno da trajetória nominal $\overline{X}(t)$ no instante t_{k+1}, obtém-se:

$$\delta Y_{k+1} = H_{k+1}\, \delta X(t_{k+1}) + v_{k+1}, \tag{2.34}$$

onde

$$H_{k+1} = \frac{\partial h_i(X(t_{k+1}),\, t_{k+1})}{\partial X_j}, \tag{2.35}$$

Para o Sistema Linearizado 2.33 e 2.25, a equação para a correção da estimativa fica dada por:

$$\delta\hat{X}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \delta\hat{X}(t_{k+1}/t_k) + K_{k+1}\{\delta Y - H_{k+1}\, \delta\hat{X}(t_{k+1}/t_k)\}, \tag{2.36}$$

onde K_{k+1} é o ganho de Kalman, dado por:

$$K_{k+1} = P(t_{k+1}/t_k)\, H^T_{k+1}\, \{H_{k+1}\, P(t_{k+1}/t_k)\, H^T_{k+1} + R_{k+1}\}^{-1}. \tag{2.37}$$

Quando se processar um conjunto de observações relativas ao instante $t = t_{k+1}$ obter-se-á um valor para $\delta\hat{X}(t_{k+1}/t_{k+1})$, que representa a correção que deve ser efetuada em $\hat{X}(t_{k+1}/t_k)$ para que a estimativa do estado em t_{k+1} possa incluir as informações sobre valor do estado real em t_{k+1} contidas nessas observações. Assim, pode-se escrever:

$$\hat{X}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \hat{X}(t_{k+1}/t_k) + \delta\hat{X}(t_{k+1}/t_{k+1}). \tag{2.38}$$

Antes do processamento do conjunto de observações, a melhor estimativa do estado é dada por $\hat{X}(t_{k+1}/t_k)$, que é a propagação de $\hat{X}(t_k/t_k)$ com o auxílio da Equação 2.31. Disso se conclui que:

$$\delta\hat{X}(t_{k+1}/t_k) = 0. \tag{2.39}$$

Substituindo a Equação 2.39, 2.38 e 2.33 na Equação e.36, obtém-se:

$$\hat{X}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \hat{X}(t_{k+1}/t_k) + K_{k+1} \{Y_{k+1} - h[\bar{X}(t_{k+1}), t_{k+1}]\}, \quad (2.40)$$

que é a equação para a atualização do estado através do Filtro Estendido de Kalman.

Numa notação mais compacta, $\hat{X}_{k+1}(-)$ e $P_{k+1}(-)$ denotam os valores propagados para o vetor de estado e respectiva matriz de covariância do erro, entre os instantes t_k e t_{k+1}; analogamente $\hat{X}_{k+1}(+)$ e $P_{k+1}(+)$ denotam as mesmas quantidades, imediatamente após o processamento das observações no instante t_{k+1}. Assim, utilizando esta notação e considerando os resultados obtidos no equacionamento anterior, tem-se as seguintes equações para o Filtro Estendido de Kalman:

a) Equações para a propagação do estado e respectiva matriz de covariância entre instantes de amostragem

$$\hat{X}_{k+1}(-) = \hat{X}_k(+) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(X(t/t_k))\, dt, \quad (2.41)$$

$$P_{k+1}(-) = \phi(t_{k+1}, t_k)\, P_k(+)\, \phi^T(t_{k+1}, t_k) + \Gamma(t_k)\, Q(t_k\, \Gamma(t_k). \quad (2.42)$$

b) Equações para atualização do estado e respectiva matriz de covariância

$$\hat{X}_{k+1}(+) = \hat{X}_{k+1}(-) + K_{k+1} \{Y_{k+1} - h(\hat{X}(-), t_{k+1})\}, \quad (2.43)$$

$$P_{k+1}(+) = \{I - K_{k+1} H_{k+1}\} P_{k+1}(-). \quad (2.44)$$

Nas Equações 2.43 e 2.44, K_{k+1} o ganho de Kalman dado por:

$$K_{k+1} = P_{k+1}(-)\, H_{k+1}^T \{H_{k+1}\, P_{k+1}(-)\, H_{k+1}^T + R_{k+1}\}^{-1}. \quad (2.45)$$

2.5.2 - ALGORITMO QUEST

O Algoritmo QUEST (Quarternion Estimator) foi desenvolvido para a estimação da atitude a partir de medidas num referencial solidário ao corpo cuja atitude se deseja estimar, das orientações de vetores conhecidos em relação a um referencial externo.

Trata-se de uma técnica que fornece estimativas locais ótimas de atitude, ou seja, estas são estimadas com base em um conjunto de medidas referentes a um dado instante, segundo o critério de mínimos quadrados, não necessitando de informação sobre a dinâmica do sistema.

No desenvolvimento do algoritmo QUEST, como proposto por Shuster e Oh (1981), encontra-se um equacionamento elaborado e bastante complexo, onde os artifícios algébricos empregados nem sempre são evidentes e imediatos. Assim sendo, com o propósito de tornar mais clara a manipulação algébrica envolvida neste equacionamento e facilitar o seu entendimento, apresenta-se a seguir uma versão mais detalhada deste algoritmo. Deve-se frisar ainda que, apesar do algebrismo envolvido na dedução deste algoritmo, sua implementação é, não obstante, simples.

Para iniciar a descrição deste procedimento, suponha-se a princípio uma matriz ortogonal A (matriz de atitude ou cossenos diretores), como sendo uma matriz que satisfaz a seguinte condição:

$$A\,\hat{V}_i = \hat{Y}_i ;\; i = 1,2, \ldots, m \qquad (2.46)$$

com

$\hat{V}_1, \hat{V}_2, \ldots, \hat{V}_m$ compondo um conjunto de versores de referência, que definem m direções no sistema de coordenadas pseudo-inercial, $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \ldots, \hat{Y}_m$ são versores de observação que são as mesmas m direções medidas num sistema de coordenadas fixo no corpo do satélite.

Devido ao fato de os versores de referência e de observação serem corrompidos por erros, uma solução para a matriz A, com base na Equação 2.46, geralmente não existe. Assim sendo, considera-se o problema de estimar uma matriz ortogonal A segundo o critério de minimização do seguinte índice de desempenho:

$$L(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} a_i |\bar{Y}_i - A\,\hat{V}_i|^2, \tag{2.47}$$

onde a_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ é um conjunto de pesos não-negativos sujeitos ao vínculo:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 1. \tag{2.48}$$

Minimizar o índice de desempenho dado pela Equação 2.47, é equivalente a minimizar o erro médio quadrático ponderado através dos pesos a_i. Inicialmente estes pesos podem ser tomados arbitrariamente, tal que o vínculo existente entre eles seja satisfeito; entretanto no decorrer do trabalho, estabelece-se um critério adequado para a escolha destes pesos.

Define-se então uma função ganho como:

$$g(A) \triangleq 1 - L(A) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, \hat{Y}_k\, A\, \hat{V}_i. \tag{2.49}$$

Observando as Equações 2.47 e 2.49 conclui-se que a função L(A) assume um valor mínimo quando a função g(A) é máxima; assim sendo, os desenvolvimentos que se seguem são direcionados a encontrar a matriz de atitude ótima que maximiza a função g(A). Interpretando individualmente os termos da Equação 2.49 como matrizes 1 x 1, segue do Teorema do Traço (Hilderbrand, 1962) que:

$$g(A) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, Tr[\hat{Y}_i^T\, A\, \hat{V}_i] = Tr[A\, B], \tag{2.50}$$

onde Tr denota a operação de traço e B é dada por:

$$B = \sum_{i=1}^{m} a_i \hat{Y}_i \hat{V}_i^T \; . \qquad (2.51)$$

A maximização direta de g(A) na forma da Equação 2.49 torna-se inadequada pois os nove elementos de A são sujeitos a seis vínculos. Entretanto se a matriz de atitude, A, for expressa em termos das relações de quatérnions, tem-se a seguinte relação:

$$A(\underline{q}) = (q_4^2 - \underline{p}^T \cdot \underline{p})\, I + 2\underline{p}\underline{p}^T + 2q_4 \Psi(\underline{p}), \qquad (2.52)$$

onde

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{p} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E}\ \mathrm{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix}; \qquad (2.53)$$

$\hat{E}$ é o eixo de rotação; θ o ângulo de rotação em torno do eixo $\hat{E}$ $\underline{p}$ = $= (p_1\, \hat{i} + p_2 \cdot \hat{j} + p_3\, \hat{k})$;

I a matriz identidade 3x3; e $\Psi(\underline{p})$ uma matriz anti-simétrica dada por:

$$\Psi(\underline{p}) = \begin{bmatrix} 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.54)$$

Sendo que o quatérnion satisfaz a um único vínculo dado pela seguinte relação:

$$\underline{q}^T \underline{q} = |\underline{p}| + q_4^2 = 1. \qquad (2.55)$$

Substituindo a Equação 2.52 na Equação 2.50 a função ganho pode ser reescrita como:

$$g(\underline{q}) = \underline{q}^T K \underline{q}, \tag{2.56}$$

onde K é a matriz 4x4 dada por:

$$K = \left[\begin{array}{c|c} (S - \sigma I) & \underline{z} \\ \hline \underline{z}^T & \sigma \end{array}\right], \tag{2.57}$$

sendo

$$\sigma = Tr[B] = \sum_{i=1}^{m} a_i \hat{Y}_i \cdot \hat{V}_i, \tag{2.58}$$

$$S = B + B^T = \sum_{i=1}^{m} a_i (\hat{Y}_i \hat{V}_i^T + \hat{V}_i \hat{Y}_i^T), \tag{2.59}$$

$$\underline{z} = \sum_{i=1}^{m} a_i (\hat{Y}_i \times \hat{V}_i). \tag{2.60}$$

Assim, o problema de determinar a atitude ótima foi reduzido a encontrar o quatérnion ótimo que maximiza a forma quadrática dada pela Equação 2.56, sujeito ao vínculo expresso na Equação 2.55. Este vínculo é levado em consideração quando se utiliza o método dos multiplicadores de Lagrange, com o que se define uma função ganho modificada dada por:

$$g'(\underline{q}) = \underline{q}^T K \underline{q} + \rho(1 - \underline{q}^T\underline{q}). \tag{2.61}$$

Aplicando a condição de otimalidade à Equação 2.61 verifica-se que $g'(\underline{q})$ possui um valor estacionário dado por:

$$K \underline{q} = \rho\underline{q}, \tag{2.62}$$

ou seja, $g'(\underline{q})$ possui um valor estacionário quando ρ for um auto-valor da matriz K.

Para cada auto-vetor de K, tem-se:

$$g(\underline{q}) = \underline{q}^T K \underline{q} = \rho \underline{q}^T \underline{q} = \rho. \quad (2.63)$$

Assim, $g(\underline{q})$ é maximizada se q_{opt} é escolhido como sendo o auto-vertor de K relacionado com o maior auto-valor de K, ou seja:

$$K \underline{q}_{opt} = \rho_{max} \underline{q}_{opt}, \quad (2.64)$$

que é o resultado desejado. Desta forma o problema de encontrar o quatérnion ótimo foi reduzido a um problema de auto-valores e auto-vetores.

A Equação 2.64 pode ser escrita para um auto-valor qualquer como:

$$(S - \sigma I)\underline{p} + \underline{z}\, q_4 = \rho \underline{p}, \quad (2.65)$$

$$\underline{z}^T \underline{p} + \sigma q_4 = \rho q_4. \quad (2.66)$$

Isolando o termo $\underline{z}\, q_4$ na Equação 2.65 e pré-multiplicando a equação resultante por $[(\rho + \sigma) I - S]^{-1}$, a Equação 2.65 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$[(\rho + \sigma) I - S]^{-1} \underline{z} = \frac{\underline{p}}{q_4}. \quad (2.67)$$

Analogamente, isolando ρ na Expressão 2.66, tem-se:

$$\rho = \frac{\underline{z}^T \underline{p}}{q_4} + \sigma. \quad (2.68)$$

O vetor de Gibbs, segundo Wertz (1978), pode ser definido como:

$$\underline{y} \triangleq \frac{\underline{p}}{q_4} = \hat{E} \tan(\theta/2), \quad (2.69)$$

e portanto o quatérnion pode ser escrito em função do vetor de Gibbs, da seguinte maneira:

$$\underline{q} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\underline{y}|^2}} \begin{bmatrix} \underline{y} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.70}$$

Observando a Equação 2.69, pode-se escrever as Equações 2.67 e 2.68 respectivamente como:

$$\underline{y} = [(\rho + \sigma) I - S]^{-1} \underline{z}, \tag{2.71}$$

$$\rho = \sigma + \underline{z}^T \underline{y} . \tag{2.72}$$

Quando ρ for igual a ρ_{max}, $\underline{y}$ e $\underline{q}$ serão a solução para a atitude ótima. Substituindo a Equação 2.71 na Equação 2.72, encontra-se uma equação para os auto-vetores da matriz K; assim:

$$\rho = \sigma + \underline{z} [(\rho + \sigma) I - S]^{-1} \underline{z}. \tag{2.73}$$

Observando as Equações 2.49 e 2.63 conclui-se que:

$$\rho_{max} = 1 - L(A) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} a_i |\hat{Y}_i - A \hat{V}_i|^2, \tag{2.74}$$

que é um valor próximo da unidade, uma vez que nesta situação o índice de desempenho assume um valor mínimo. Assim sendo, pode-se substituir:

$$\rho_{max} \approx 1 \tag{2.75}$$

na Equação 2.71 e obter uma expressão para a atitude cuja precisão é da ordem do quadrado dos erros de medida, válida somente se a matriz $[(\rho + \sigma) I - S]$ for não-singular. No entanto, o vetor de Gibbs tende a infinito quando o ângulo de rotação tende a π. Consequentemente, a matriz que aparece na Equação 2.71, mostrada anteriormente, será singular;

desta forma a aproximação dada pela Equação 2.75 não é conveniente quando o ângulo de rotação for próximo de π.

A seguir procura-se desenvolver métodos mais precisos que evitam o problema colocado por esta singularidade. O primeiro passo é derivar uma expressão que permita o cálculo do quatérnion ótimo sem o cálculo intermediário do vetor de Gibbs.

Pode-se mostrar que um auto-valor ρ de uma matriz quadrada S satisfaz à seguinte equação característica:

$$\det \left| S - \rho I \right| = 0, \tag{2.76}$$

onde para uma matriz de dimensão 3x3 a equação característica é dada por:

$$-\rho^3 + 2\sigma\rho^2 - k\rho + \Delta = 0 \tag{2.77}$$

com

$$\sigma = \frac{tr(S)}{2} \; ; \; k = tr(adj\ S); \; \Delta = \det S.$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton (Hoffman and Kunze, 1961) a matriz S satisfaz à Equação 2.77

$$S^3 = 2\sigma\, S^2 - k\, S + \Delta I. \tag{2.78}$$

A Equação 2.78 pode ser usada para reduzir uma função polinomial qualquer de S a uma forma quadrática. Uma função polinomial qualquer de terceiro grau em S pode ser escrita como:

$$(d\, I - S)\, (S^2 + b\, S + c\, I) = u\, I. \tag{2.79}$$

Em particular, tomando $d = \rho + \sigma$, a matriz a ser invertida na Equação 2.71 pode ser escrita como:

$$[(\rho + \sigma)\ I - S]^{-1} = u^{-1}(S^2 + b\ S + c\ I), \qquad (2.80)$$

onde os coeficientes b, c e u são determinados multiplicando ambos os lados da Equação 2.80 por $[(\rho + \sigma)I - S]$ e substituindo o termo em S^3 resultante desta operação pela forma quadrática dada pela Equação 2.78. Isto resulta em:

$$[(\rho + \sigma)\ I - S]^{-1} = [(\rho + \sigma)\ c - \Delta]^{-1}\ [(\rho^2 - \sigma^2 + k) + (\rho - \sigma)\ S + S^2]. \qquad (2.81)$$

Pós-multiplicando ambos os lados da Equação 2.81 por $\underline{z}$, e observando as Equações 2.71 e 2.80, quando ρ assume o valor máximo, conclui-se que:

$$\underline{y}_{opt} = \underline{x}/u, \qquad (2.82)$$

onde

$$\underline{x} = [S^2 + (\rho^2_{max} - \sigma)\ S + (\rho^2_{max} - \sigma^2 + k)\ I]\ \underline{z}, \qquad (2.83a)$$

$$u = (\rho_{max} + \sigma)\ c - \Delta, \qquad (2.83b)$$

$$c = \rho_{max} - \sigma^2 + k. \qquad (2.83c)$$

Substituindo a Equação 2.82 na Equação 2.70 tem-se que:

$$\underline{q}_{opt} = \frac{1}{\sqrt{u + |x|^2}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ u \end{bmatrix}, \qquad (2.84)$$

que permite determinar o quatérnion de atitude sem o conhecimento do vetor de Gibbs.

Substituindo a Equação 2.81 na equação (2.73) encontra-se uma expressão mais conveniente para a equação de autovalores, que é dada por:

$$\rho^4 - (a + b)\ \rho^2 - c\rho + (a\ b + c\sigma - d) = 0, \qquad (2.85)$$

onde:

$$a = \sigma - k; \qquad b = \sigma + \underline{z}^T \underline{z};$$

$$c = \Delta + \underline{z}^T S \underline{z}; \qquad d = \underline{z}^T S^2 \underline{z}. \tag{2.86}$$

Como foi ressaltado anteriormente sabe-se que o valor de ρ_{max} é próximo da unidade. Assim sendo, o método de Newton- Raphson pode ser aplicado à Equação 2.85 para calcular o maior autovalor que tem a unidade como valor de partida.

A vantagem computacional deste método comparado com os requisitos exigidos para a solução completa do problema de autovalores é evidente, especialmente quando se leva em consideração que as quantidades que aparecem nas Equações 2.86 devem também ser calculadas para a construção do quatérnion ótimo.

Resultados interessantes podem ser obtidos, ao analizar o equacionamento anterior quando a matriz de atitude é aproximadamente igual à matriz identidade (null attitude) com desvios apenas da ordem do erro das medidas; ou ainda quando o ângulo de rotação θ é pequeno. Neste caso, algumas aproximações podem ser efetuadas, por exemplo $\underline{z}$ pode tornar-se uma quantidade bastante pequena e da mesma ordem do ângulo de rotação θ. Desta forma, $\bar{Y}_i$ pode ser trocado por $\hat{V}_i$ no cálculo de algumas expressões, pois a matriz de rotação estimada será da ordem da faixa de incerteza desta estimativa. Assim, se (δ) for uma quantidade da ordem do erro de observação, tem-se as seguintes aproximações:

$$z = \theta(\delta), \tag{2.87}$$

$$\sigma = 1 + \theta(\delta^2), \tag{2.88}$$

$$\rho_{max} = 1 + \theta(\delta^2), \tag{2.89}$$

$$S \doteq So + \theta(\delta), \tag{2.90}$$

onde:

$$So = 2 \sum_{i=1}^{m} a_i \hat{V}_i \hat{V}_i^T . \qquad (2.91)$$

Com essas aproximações, a Equação 2.71 pode ser reescrita como:

$$\underline{y} = [2I - So]^{-1} \underline{z} + \theta(\delta^2). \qquad (2.92)$$

Este algoritmo para pequenos ângulos, Equações 2.87 a 2.92, pode ser utilizado como uma correção ótima, em conjunto com um algoritmo rápido, não-ótimo, que provê uma estimativa preliminar razoável para a atitude. Entretanto, geralmente estes algoritmos híbridos podem ser menos econômicos em termos computacionais, comparados com o cálculo direto da atitude efetuado por um algoritmo ótimo.

Os vetores de observação ($\hat{Y}_i$) e de referência ($\hat{V}_i$) podem ser corrompidos por erros ($\delta\hat{Y}_i$) e ($\delta\hat{V}_i$). Pelo fato de os vetores $\hat{V}_i$ e $\hat{Y}_i$ serem vinculados como vetores de módulo unitário (versores), o erro de primeira ordem deve estar no plano perpendicular a tais vetores. Desta forma os vetores de erro ($\delta\hat{Y}_i$) e ($\delta\hat{V}_i$) podem ter somente dois graus de liberdade. Considera-se então a hipótese de que o vetor erro tenha distribuição axialmente simétrica em torno do respectivo vetor unitário, já que não se conhece uma direção preferencial para o erro.

Em termos das matrizes de covariância dos erros, supondo que os erros não sejam correlacionados uns com os outros, tem-se:

$$E(\delta\hat{Y}_i \ \delta\hat{Y}_j^T) = \sigma_{yi}^2 \ \delta_{ij}(I - \hat{Y}_i \hat{Y}_i^T), \qquad (2.93)$$

$$E(\delta\hat{V}_i \ \delta\hat{V}_j^T) = \sigma_{Vi}^2 \ \delta_{ij}(I - \hat{V}_i \hat{V}_i^T), \qquad (2.94)$$

$$E(\delta\hat{V}_i \ \delta\hat{Y}_j^T) = 0, \qquad (2.95)$$

onde a notação σ_X^2 representa a variância da componente de X na direção normal a E(X).

A influência dos erros nos vetores de observação e de referência na estimativa da atitude efetuada pelo método descrito anteriormente pode ser avaliada através do cálculo da precisão com que a atitude foi determinada. Assim sendo, os parágrafos que se seguem serão dedicados à dedução de uma expressão apropriada para o cálculo da matriz de covariância do erro associado à estimativa da atitude via o Algoritmo QUEST.

A matriz de covariância para o quatérnion é definida como segue: Tome-se $\underline{\delta q}$ como sendo o quatérnion que representa uma pequena rotação que leva a atitude estimada pelo procedimento descrito anteriormente para a atitude verdadeira.

Em termos da álgebra de quatérnion, pode-se escrever:

$$\underline{q}_v = \underline{q}_{opt} \otimes \underline{\delta q}, \tag{2.96}$$

onde se supõe que $\underline{\delta q}$ é não-tendencioso, ou seja:

$$E(\delta \underline{q}) = E \begin{bmatrix} \underline{\delta p} \\ \\ \delta q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.97}$$

A matriz de covariância (3x3) do quatérnion pode ser definida como:

$$P_{pp} = E(\underline{\delta p} \;\; \underline{\delta p}^T); \tag{2.98}$$

para o enfoque de pequenas rotações, tem-se da Equação 2.4b que:

$$\underline{\delta p} = [\frac{\delta\theta_1 \;\; \delta\theta_2 \;\; \delta\theta_3]^T}{2} = \frac{\underline{\delta\theta}}{2},$$

onde $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3$, são ângulos que caracterizam rotações infinitesimais que levam a matriz de atitude estimada para a matriz de atitude verdadeira; é por hipótese suposto não-tendencioso.

Assim, a matriz de covariância do erro angular pode ser relacionada com a matriz de covariância do erro no quatérnion como:

$$P_{\theta\theta} = E(\underline{\delta\theta}\ \underline{\delta\theta}^T) = 4\ P_{pp}. \qquad (2.99)$$

Considerando que $\underline{\delta q}$ é o quatérnion que representa uma pequena rotação, as aproximações feitas anteriormente podem ser usadas na obtensão de uma expressão para δq. Esta consideração, na realidade é equivalente a efetuar uma pré-rotação da atitude estimada pelo algoritmo QUEST, de modo que os versores de referências neste novo referencial sejam:

$$\bar{\hat{V}}_i = A_{opt}\ \hat{V}_i \approx \hat{Y}_i\ .$$

Assim sendo, a matriz de atitude associada a este quatérnion incremental pode ser aproximada por uma matriz identidade. Desta forma, no cálculo da matriz de covariância do quatérnion, $\bar{V}_i$ pode ser trocado por $\hat{Y}_i$. Assim, utilizando a Equação 2.92 e desprezando os termos de segunda ordem tem-se:

$$\underline{\delta q} = M^{-1}\ \underline{z}, \qquad (2.100)$$

onde

$$M = 2\ \underline{I} - 2 \sum_{i=1}^{m} a_i\ V_i\ V_i^T, \qquad (2.101)$$

$$\underline{\delta z} = \sum_{i=1}^{m} a_i\ (\delta\hat{Y}_i \times \hat{V}_i + \bar{X}_i \times \delta\bar{V}_i). \qquad (2.102)$$

A Equação 2.102 pode ser escrita numa forma matricial como:

$$\underline{\delta z} = \sum_{i=1}^{m} a_i(-\Psi(\bar{\hat{V}}_i)\ \delta\hat{Y}_i + \Psi(\hat{Y}_i)\ \delta\hat{V}_i), \qquad (2.103)$$

onde $\Psi(.)$ é a função matricial dada pela Equação 2.54.

Substituindo a Equação 2.100 na Equação 2.98, tem - se que:

$$P_{pp} = M^{-1}\, E(\delta \underline{z}\ \delta \underline{z}^T)\, M^{-1}, \tag{2.104}$$

pois; $M^{-1} = (M^{-1})^T$.

A operação de expectância que aparece na Equação 2.104 pode ser avaliada utilizando a Equação 2.103, auxiliada pelas Equações 2.93 a 2.95 e lembrando que para pequenas rotações a aproximação $\hat{V}_i = \hat{Y}_i$ é válida. Assim, tem-se que:

$$E(\delta \underline{z}\ \delta \underline{z}^T) = \sum_{i=1}^{m} a_i^2\, \sigma_i^2\, (I - \hat{Y}_i\, \hat{Y}_i^T), \tag{2.105}$$

onde:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{vi}^2 + \sigma_{yi}^2. \tag{2.106}$$

Substituindo a Equação 2.105 na Equação 2.98 tem-se:

$$P_{pp} = M^{-1}\, [\sum_{i=1}^{m} a_i^2\, \sigma_i^2 (I - \hat{Y}_i\ \hat{Y}_i^T)]\, M^{-1}, \tag{2.107}$$

sendo a matriz M definida anteriormente pela Equação 2.64.

Os pesos $a_i (i = 1, 2, \ldots\ m)$ podem ser determinados tal que o traço da matriz de covariância P_{pp} seja minimizado sujeito ao vínculo $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$.

Com a finalidade de simplificar a notação, definem - se as seguintes quantidades:

$$D(a_i) = P_{pp} + \mu I[\sum_{i=1}^{m} a_i - 1], \tag{2.108}$$

$$A_i = I - \hat{Y}_i\ \hat{Y}_i^T, \tag{2.109}$$

$$B = \hat{Y}_i \; \hat{Y}_i^T = I \; A_i, \qquad (2.110)$$

Com essas definições a Equação 2.107 pode ser reescrita como:

$$P_{pp} = [2 \sum_{i=1}^{m} a_i \; A_i]^{-1} \sum_{i=1}^{m} a_i \; \sigma_i^2 \; A_i \; [2 \sum_{i=1}^{m} a_i \; A_i]^{-1}. \qquad (2.111)$$

Minimizar o traço da matriz de covariância P_{pp} sujeito ao vínculo dado pela Equação 2.48, é equivalente a:

$$\frac{\partial tr[D(a_i)]}{\partial a_i} = \frac{tr[\partial D(a_i)]}{\partial a_i}, \qquad (2.112)$$

onde tr denota a operação de traço e $D(a_i)$ é dada pela Equação 2.108.

Substituindo a Equação 2.111 na Equação 2.108 e fazendo a derivada parcial tem-se:

$$\frac{\partial D(a_i)}{\partial a_i} = 4[-Q \; A_j \; P + 2 \; Q \; a_i \sigma_i^2 A_j Q - P \; A_j \; q] = \mu I, \qquad (2.113)$$

onde

$$Q \triangleq [\sum_{i=1}^{m} a_i A_i]^{-1}$$

e

$$P \triangleq [\sum_{i=1}^{m} a_i \; A_i]^{-1} \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \; \sigma_i^2 \; A_i \; [\sum_{i=1}^{m} a_i \; A_i]^{-1},$$

que representam valores constantes para qualquer j.

Calculando a operação de traço tem-se:

$$\frac{tr(\partial D(a_i)}{\partial a_i} = tr[a_j \; \sigma_j^2 \; Q \; A_j \; Q - Q \; A_j \; P] - (tr \; \mu I)/4 = 0. \qquad (2.114)$$

Observando as Expressões 2.114 e 2.109 conclui-se que a minimização do traço da matriz de covariância P_{pp} depende da configuração geométrica dos vetores de observação, que é variável no tempo. No caso onde se considera a distinção entre as diversas configurações geométricas das observações, a solução ótima torna-se complexa. Desta forma é mais conveniente adotar-se uma solução subótima que considera apenas o efeito médio das possíveis configurações, como se estas fossem equiprováveis. Assim, A_j assume um valor médio $\bar{A}_j$ para tudo j. Feito esta consideração, a Equação 2.114 fornece que:

$$a_j \, \sigma_j^2 \, tr[Q \, \bar{A}_j \, Q] - tr[Q \, \bar{A}_j \, P] = (tr\mu \; I)/4 \qquad (2.115)$$

sendo $\bar{A}_j$ um valor constante para qualquer j.

Definindo

$$tr[Q \, \bar{A}_j \, Q] \triangleq C1,$$

$$tr[Q \, \bar{A}_j \, P] \triangleq C2,$$

tem-se:

$$a_j = \frac{(tr\mu) + 4 \; C2}{4 \; C1 \; \sigma_j^2} = \frac{C3}{(\sigma_j^2)} \, . \qquad (2.116)$$

O valor constante (C3) que aparece na Expressão 2.116 pode ser calculado utilizando a equação do vínculo entre os pesos a_j. Assim, substituindo a Equação 2.116 na Equação 2.48, tem-se:

$$(C3)^{-1} = \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i^2) = (\sigma_{tot}^2)^{-1}. \qquad (2.117)$$

Substituindo a Equação 2.177 na Equação 2.116 encontra-se uma equação bastante simples que permite a determinação dos pesos a_i, ou seja:

$$a_i = \frac{\sigma_{tot}^2}{\sigma_i^2} \, . \qquad (2.118)$$

Substituindo a Equação 2.101 na Equação 2.107 e levando em consideração a equação 2.117, tem-se:

$$P_{pp} = \frac{\sigma^2_{tot}}{4} \left[I - \sum_{i=1}^{m} a_i \hat{Y}_i \hat{Y}_i^T \right]^{-1}. \tag{2.119}$$

A matriz de covariância (4x4) do quatérnion é definida como:

$$P_{qq} = E(\underline{\Delta q}\ \underline{\Delta q}^T), \tag{2.120}$$

onde:

$$\underline{q}_{opt} = \underline{q}_v + \underline{\Delta q}. \tag{2.121}$$

Mostra-se no Apêndice B que:

$$\Delta(\underline{p}) = Z(\underline{q}) \begin{bmatrix} \delta\theta_1/2 \\ \delta\theta_2/2 \\ \delta\theta_3/2 \end{bmatrix}, \tag{2.122}$$

onde:

$$Z(\underline{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}. \tag{2.123}$$

Assim a Equação 2.120 pode ser reescrita como:

$$P_{qq} = Z(\underline{q}_{opt})\ P_{pp}\ Z^T(\underline{q}_{opt}), \tag{2.124}$$

ou ainda:

$$P_{qq} = \Omega(\underline{P}_{opt}, q_{4_{opt}}) \left[\begin{array}{c|c} P_{pp} & 0 \\ \hline 0^T & 0 \end{array} \right] \Omega^T(\underline{P}_{opt}, q_{4_{opt}}), \tag{2.15}$$

onde se observa claramente a natureza singular da matriz de covariância P_{qq}, sendo $\Omega(\underline{P}, q_4)$ dada pela Equação 2.3b.

2.6 - HIPÓTESES E CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

2.6.1 - ESCOLHA DO VETOR DE ESTADO

A representação da atitude e sua dinâmica pode ser suprida por ângulos de Euler, elementos da matriz de rotação (Cossenos diretores), também chamada matriz de atitude, quatérnion, além de outras representações menos usuais. Os ângulos de Euler apresentam singularidade e as demais dificuldades associadas às funções trigonométricas, enquanto a matriz de rotação conta com elevada redundância de informação (9 elementos com apenas 3 independentes). Quatérnions com a finalidade de caracterizar a atitude têm sido utilizado em diversos trabalhos na área (Wertz, 1978; Lefferts et alii, 1982; Bar-Itzhack, and Reiner , 1984, Bar-Itahack and Oshman, 1985) nos quais suas vantagens são evidenciadas.

Assim sendo, com a escolha de quatérnions para caracterização da atitude, o seguinte vetor de estado pode ser definido:

$$X^T = \{q_1 : q_2 : q_3 : q_4 : \omega_x : \omega_y : \omega_z\}, \tag{2.126}$$

o qual permite descrever completamente o movimento de um corpo rígido.

2.6.2 - DEFINIÇÃO DO VETOR DE OBSERVAÇÃO

Neste trabalho, o sistema de sensores de atitude considerado é o que permite dispor dos cossenos diretores do Vetor Satélite

Sol (S_i, S_j, S_k) e do campo geomagnético (M_i, M_j, M_k) no referencial solidário ao veículo. Neste caso, o vetor de observações é definido como:

$$Y^T = \{S_i : S_j : S_k : M_i : M_j : M_k\}. \tag{2.127}$$

A escolha deste vetor como observação da atitude não introduz nenhuma particularidade ao procedimento. Outro sistema constituído po um maior número de vetores observados poderia ser escolhido. A escolha do vetor descrito acima foi feita como o intuito de compatibilizar os testes de desempenho do procedimento a uma situação particular.

2.6.3 - DEFINIÇÃO DOS VETORES DE REFERÊNCIA

Conhecendo a posição do satélite em sua órbita, é possível determinar em Terra, a cada instante, as componentes do vetor de referência através de um programa de simulação de órbita. Assim, a cada direção observada pelos sensores, tem-se em Terra a sua correspondente direção de referência que será decomposta no sistema de referência pseudoinercial, originando os vetores de referência $\hat{V}_i$ associado a $\hat{Y}_i$ em cada caso, que são definidos como segue:

$$V^T = \{S_I : S_J : S_K : M_I : M_J : M_K\} . \tag{2.128}$$

2.6.4 - EQUACIONAMENTO

Com as considerações, hipóteses e deduções feitas anteriormente, o equacionamento da dinâmica de atitude é o seguinte:

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2} (q_2 \, \omega_z - q_3 \, \omega_y + q_4 \, \omega_x),$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2} (-q_1 \, \omega_z + q_3 \, \omega_x + q_4 \, \omega_y),$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2} (q_1 \, \omega_y - q_3 \, \omega_x + q_4 \, \omega_z),$$

$$\dot{q}_4 = \frac{1}{2}(-q_1\,\omega_x - q_2\,\omega_y - q_3\,\omega_z),$$

$$\dot{W}_x = \lambda_1\,\omega_y\omega_z + \eta_1,$$

$$\dot{W}_y = \lambda_2\,\omega_x\omega_z + \eta_2, \qquad (2.129)$$

$$\dot{W}_z = \lambda_3\,\omega_x\omega_y + \eta_3,$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{J_y - J_z}{J_y},$$

$$\lambda_2 = \frac{J_z - J_x}{J_y}, \qquad (2.130)$$

$$\lambda_3 = \frac{J_x - J_y}{J_z},$$

sendo J_x, J_y, J_z três momentos principais de inércia do veículo, e η_i (i = 1, 2, 3) é por hipótese um "step process", constante durante cada intervalo de amostragem de observações, com a finalidade de representar os torques externos não-modelados atuantes no veículo, cuja estatística é dada por:

$$E(\eta_i) = 0, \qquad (2.131)$$

$$E(\eta_i\,\eta_j^T) = \delta_{ij}Q,$$

onde Q é uma matriz 3x3 diagonal e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Considerar o ruído dinâmico como um "step process", constante durante cada intervalo de amostragem, é uma hipótese razoável a ser feita para o modelo de trabalho utilizado no estimador, uma vez que se admite dispor de uma taxa de amostragem relativamente alta para as observações; desta forma pode-se considerar que os torques atuantes no satélite sejam constantes entre os instantes de amostragem.

Deve-se ressaltar entretanto que este equacionamento aproximado refere-se apenas ao modelo de trabalho do estimador. Já o modelo de avaliação utilizado, melhor descrito no Capítulo 4, é mais sofisticado visando simular realisticamente o movimento da atitude do veículo.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTO DESENVOLVIDO

3.1 - PROCEDIMENTO PARA ESTIMAÇÃO DA ATITUDE

O filtro de Kalman quando aplicado a sistemas lineares fornece uma estimativa ótima de mínima variância; entretanto, o filtro estendido de Kalman, aplicado a sistemas não lineares, por ser uma aproximação, fornece uma estimativa subótima devido basicamente às linearizações que são efetuadas no modelo dinâmico e no modelo de observação. Em contrapartida o método desenvolvido por Shuster e Oh (Algoritmo QUEST) é um estimador estático que apresenta uma solução ótima de mínimos quadrados, não necessitando de informações sobre a dinâmica do sistema.

Nesta seção explora-se a possibilidade de conciliar as características positivas dos métodos citados anteriormente, apresentando um procedimento que utiliza as informações contidas no modelo dinâmico, procurando simultaneamente manter a característica ótima em termos locais.

O desenvolvimento do procedimento baseia-se na utilização do Algoritmo QUEST para gerar estimativas estáticas preliminares da atitude do satélite parametrizadas em quatérnions. Estas estimativas, após um tratamento matemático prévio serão utilizadas como observações para alimentar um estimador dinâmico estocástico, o filtro estendido de Kalman.

Inicialmente poder-se-ia pensar em utilizar diretamente o quatérnion estimado pelo Algoritmo QUEST como sendo a observação para o filtro de Kalman. No entanto, a matriz de covariância (Pqq) do erro associado às componentes do quatérnion é não-diagonal e singular como pode ser visto pela Equação 2.125. Isso inviabiliza a implementação de um algoritmo sequencial que utiliza o quatérnion estimado pelo Algoritmo QUEST diretamente como observação da atitude.

A utilização direta de quatérnions como observação acarreta portanto uma dificuldade adicional durante a fase de atualização do filtro. Especificamente dificulta o cálculo do ganho de Kalman que é efetuado através da Equação 2.45, que requer a inversão de uma matriz de dimensão 4x4 formada pela soma de duas matrizes com o mesmo tipo de singularidade, resultando na prática em uma matriz malcondicionada.

Assim sendo, os desenvolvimentos que se seguem são dirigidos no sentido de resolver este problema de singularidade. Para isto, considera-se que o erro cometido na estimativa do quatérnion ($\underline{\delta q}$) seja um quatérnion que corresponda a uma rotação infinitesimal que leva o quatérnion estimado para o quatérnion verdadeiro (Lefferts et al, 1982). A álgebra de quatérnions fornece:

$$\underline{\delta q} = \underline{\hat{q}}^* \otimes \underline{q}_v , \tag{3.1}$$

onde $\underline{\delta q}$ é o vetor composto pelos elementos do quatérnion incremental, $\underline{q}_v$ é o quatérnion verdadeiro e $\underline{\hat{q}}^*$ é o quatérnion estimado conjugado.

Desde que o "quatérnion incremental", $\underline{\delta q}$, corresponda a uma pequena rotação, a quarta componente do vetor $\underline{\delta q}$ será próxima da unidade (para aproximação de primeira ordem). Assim, se a hipótese acima for satisfeita, toda informação de interesse para a atitude fica contida num vetor de 3 componentes, que representa os desvios angulares em cada uma das direções x, y, e z, sofridos pela atitude estimada em relação à atitude verdadeira, cuja matriz de covariância não é singular como é mostrado no Apêndice B.

A solução para o problema da singularidade colocada anteriormente reside em não estimar diretamente as variáveis de estado, mas sim incrementos dessas variáveis através de um filtro estendido de Kalman que utiliza como observação um quatérnion incremental.

3.1.1 - TRANSFORMAÇÃO DE VARIÁVEIS

Com a finalidade de simplificar a notação e em benefício da clareza, serão omitidos os argumentos t_{k+1} quando o significado for evidente no contexto. Pela mesma razão, os argumentos (t_{k+1}/t_k) serão substituídos pelo símbolo (¯) colocado sobre a variável.

Admitindo que o quatérnion propagado possa ser encarado como uma informação a priori para a fase de atualização do filtro, o quatérnion verdadeiro pode ser modelado como:

$$\underline{q}_V = \bar{\underline{q}} + \underline{\zeta}, \tag{3.2}$$

onde $\underline{q}_V$ é o quatérnion verdadeiro, $\bar{\underline{q}}$ é o quatérnion propagado e $\underline{\zeta}$ é o erro associado ao quatérnion propagado, que possui por hipótese distribuição gaussiana com as seguintes características:

$$E(\underline{\zeta}) = 0, \tag{3.3}$$

$$E(\underline{\zeta}\ \underline{\zeta}^T) = Pqq. \tag{3.4}$$

Como é mostrado no Apêndice B, a matriz de covariância propagada Pqq associada ao erro $\underline{\zeta}$ pode ser decomposta da seguinte forma:

$$Pqq = Z(\bar{\underline{q}})\ Pqq\ Z^T(\bar{\underline{q}}), \tag{3.5}$$

onde:

$$Z(\underline{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Pré-multiplicando a Equação 3.2 pelo quatérnion propagado do conjugado, tem-se:

$$\underline{\hat{q}}^{*} \otimes \underline{q}_{v} = \underline{\hat{q}}^{*} \otimes \underline{\hat{q}} + \underline{\hat{q}}^{*} \otimes \underline{\zeta}. \tag{3.7}$$

Levando em consideração a hipótese feita anteriormente de que o quatérnion incremental dado pela Equação 3.1 corresponda a uma pequena rotação, a quarta componente do vetor $\underline{\delta q}$ será próxima da unidade, então é razoável fazer a seguinte aproximação:

$$\underline{\hat{q}}^{*} \otimes q_{v} = \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Assim sendo, a Equação 3.7 pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \underline{\zeta}_1, \tag{3.9}$$

onde:

$$\underline{\zeta}_1 = \Omega^T(\underline{\hat{p}}, \hat{q}_4)\ \underline{\zeta}, \tag{3.10}$$

cuja estatística é dada por:

$$E(\underline{\zeta}_1) = \Omega^T(\underline{\hat{p}}, \hat{q}_4)\ E(\underline{\zeta}) = 0, \tag{3.11a}$$

$$E(\underline{\zeta}_1\ \underline{\zeta}_1^T) = \Omega^T(\underline{\hat{p}}, \hat{q}_4)\ Z(\underline{\hat{q}})\ P_{\alpha q}\ Z^T(\underline{\hat{q}})\ \Omega(\underline{\hat{p}}, \hat{q}_4), \tag{3.11b}$$

ou ainda:

$$E(\underline{\zeta}_1 \ \underline{\zeta}_1^T) = \left[\begin{array}{c|c} Ppp & \underline{0} \\ \hline \underline{0}^T & 0 \end{array}\right], \tag{3.12}$$

onde a matriz $\Omega(\hat{\underline{p}}, \bar{q}_4)$ é definida pela Equação 2.3b.

Com essa transformação, toda informação sobre a atitude fica contida num vetor de três componentes e a estimativa a priori para o filtro é dada por:

$$\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{\zeta}_1', \tag{3.13}$$

onde:

$$E(\underline{\zeta}_1') = 0, \tag{3.14a}$$

$$E(\underline{\zeta}_1' \ \underline{\zeta}_1'^T) = Ppp. \tag{3.14b}$$

Para o quatérnion que é estimado pelo Algoritmo QUEST, pode-se proceder de maneira análoga, de forma que o quatérnion verdadeiro pode ser modelado como:

$$\underline{q}_V = \underline{q}^Q + \underline{\gamma}, \tag{3.15}$$

onde $\underline{q}_V$ é o quatérnion verdadeiro, q^Q é o quatérnion estimado pelo Algoritmo QUEST e γ é o erro associado ao quatérnion estimado, que possuindo por hipótese uma distribuição gaussiana, com as seguintes características:

$$E(\underline{\gamma}) = 0, \tag{3.16a}$$

$$E(\underline{\gamma} \ \underline{\gamma}^T) = Pqq. \tag{3.16b}$$

Pré-multiplicando a Equação 3.15 pelo quatérnion propagado conjugado, tem-se:

$$\underline{\bar{q}}^* \otimes \underline{q}_V = \underline{\hat{q}}^* \otimes \underline{q}^Q + \underline{\hat{q}}^* \otimes \underline{\gamma}, \tag{3.17}$$

resultando em:

$$\underline{\delta q} = \underline{\delta q}^Q + \underline{\gamma_1}, \tag{3.18}$$

onde:

$$\underline{\gamma_1} = \Omega^T(\underline{\hat{p}}, \hat{q}_4)\ \gamma \tag{3.19}$$

cuja estatística é dada por:

$$E(\underline{\gamma_1}) = \Omega^T(\underline{\hat{p}}, \hat{q}_4)\ E(\gamma) = 0, \tag{3.20a}$$

$$E(\gamma_1\ \gamma_1^T) = \Omega^T(\underline{\hat{p}}, \hat{q}_4)\ Z(\underline{q}^Q)\ Ppp\ Z^T(\underline{q}^Q)\ \Omega(\underline{\hat{p}}, \hat{q}_4), \tag{3.20b}$$

sendo $\Omega(p, q_4)$ a função matricial dada pela Equação 2.3b, e Ppp é a matriz de covariância definida pela Equação 2.119.

Como foi colocado anteriormente, no caso de o quatérnion incremental ser equivalente a uma pequena rotação, as seguintes aproximações podem ser feitas:

$$\underline{\delta q}^Q = \begin{bmatrix} \delta\theta_1/2 \\ \delta\theta_2/2 \\ \delta\theta_3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

e

$$\Omega^T(\underline{\hat{p}}, \underline{\hat{q}}_4)\ \ Z(\underline{q}^Q) \cong \begin{bmatrix} I(3x3) \\ \hline 0(1x3) \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Com essa transformação, as observações para o Filtro de Kalman ficam dadas por:

$$\begin{bmatrix} \delta q_1^Q \\ \delta q_2^Q \\ \delta q_3^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\theta_1/2 \\ \delta\theta_2/2 \\ \delta\theta_3/2 \end{bmatrix} + \gamma_1' \tag{3.23}$$

onde:

$$E(\gamma_1') = 0, \tag{3.24a}$$

$$E(\gamma_1' \; \gamma_1'^T) = Ppp. \tag{3.24b}$$

3.1.2 - ALGORITMO PROPOSTO

Suponha-se a atitude de um satélite artificial modelada dinamicamente por um sistema de equações análogo ao dado pela Equação 2.15, e adotando o vetor de estado escolhido no capítulo anterior, Equação 2.12b, o equacionamento para a dinâmica de atitude fica dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= \frac{1}{2} (X_2 \; X_7 + X_4 \; X_5 - X_3 \; X_6), \\
\dot{X}_2 &= \frac{1}{2} (X_3 \; X_5 + X_4 \; X_6 - X_1 \; X_7), \\
\dot{X}_3 &= \frac{1}{2} (X_1 \; X_6 + X_4 \; X_7 - X_2 \; X_5), \\
\dot{X}_4 &= \frac{1}{2} (-X_1 \; X_6 - X_2 \; X_6 - X_3 \; X_7), \\
\dot{X}_5 &= \lambda_1 X_6 \; X_7 + n_1, \\
\dot{X}_6 &= \lambda_2 X_5 \; X_7 + n_2, \\
\dot{X}_7 &= \lambda_3 X_5 \; X_6 + n_3,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde:

$$\lambda_1 = \frac{Jy - Jz}{Jx},$$

$$\lambda_2 = \frac{Jz - Jx}{Jy},$$

$$\lambda_3 = \frac{Jz - Jx}{Jy},$$ (3.26)

sendo Jx, Jy, Jz os momentos principais de inércia do satélite, e ηi(1= = 1, 2, 3) é aproximado por um "step process", como descrito no Capítulo 2, cuja estatística é dada por:

$$E(\eta_i) = 0,$$

$$E(\eta_i\ \eta_j) = \delta_{ij}Q.$$ (3.27)

Comparando as Equações 3.25 e a Equação 2.15, vê-se que a função $f(X_t, t)$ é dada por:

$$f_1 = \frac{1}{2}(X_2\ X_7 + X_4\ X_5 - X_3\ X_6),$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(X_3\ X_5 + X_4\ X_6 - X_1\ X_7),$$

$$f_3 = \frac{1}{2}(X_1\ X_6 + X_4\ X_7 - X_2\ X_5),$$

$$f_4 = \frac{1}{2}(-X_1\ X_5 + X_2\ X_6 - X_3\ X_7),$$ (3.28)

$$f_5 = \lambda_1\ X_6\ X_7,$$

$$f_6 = \lambda_2\ X_5\ X_7,$$

$$f_7 = \lambda_3\ X_5\ X_6,$$

e que

$$G^T(t) = [0(3x4):I(3x3)],$$ (3.29)

onde 0(3x4) é a matriz nula de dimensão 3x4 e I(3x3) é a matriz identidade de dimensão 3x3.

Como foi colocado no Capítulo 2, na aplicação do Filtro de Kalman a sistemas não-lineares é necessário o cálculo do gradiente da função $f(X_t, t)$ dada pela Equação 3.28. Tal cálculo é mostrado no Apêndice D, resultanto em:

$$F(X) = \left[\begin{array}{c|c} F1 & F2 \\ \hline 0(3x4) & F3 \end{array}\right]. \tag{3.30}$$

As partições F1, F2, F3 estão determinadas no Apêndice D.

Considerando que para a fase de atualização do filtro, as variáveis de estado propagadas, bem como o quatérnion estimado pelo algoritmo QUEST, sofram a transformação de variáveis proposta anteriormente, o filtro estimará componentes de um quatérnion incremental. E desta forma, o cálculo do gradiente da função de observação, de forma análoga ao dado pela Equação 2.36, torna-se trivial, uma vez que se dispõe de observações lineares em relação as novas variáveis de estado, cujo resultado é dado por:

$$Hr = [I(3x3) : 0(3x3)], \tag{3.31}$$

onde I(3x3) é a matriz identidade de dimensão 3x3 e 0(3x3) é a matriz nula de dimensão 3x3.

Feitas estas considerações preliminares e tomando como base o algoritmo para o filtro de Kalman sugerido por Gelb et alii (1974), o algoritmo proposto para a estimação da atitude é dado por:

Passo 1:

A condição inicial para o quatérnion é fornecida pelo algoritmo QUEST, bem como para a partição da matriz de covariância do estado associada ao quatérnion. Quanto à velocidade angular, pode ser inicializada com seu valor nominal, caso o satélite já esteja estabilizado. Caso não se tenha conhecimento prévio de ω_0, essa informação pode ser grosseiramente aproximada por diferenças finitas da atitude estimada pelo algoritmo QUEST, o que é suficiente para inicializar o procedimento.

Passo 2:

Propagação da estimativa do estado e da matriz de covariância do seu erro do instante t_k ao instante t_{k+1} por meio das seguintes equações:

$$\dot{X} = f(X_t, t); \; t_k \leq t \leq t_{k+1}, \tag{3.32}$$

$$P_{k+1}(-) = \phi(t_{k+1}, t_k) \; P_k(+) \; \phi^T(t_{k+1}, t_k) + \Gamma(t_k) \; Q(t_k) \; \Gamma^T(t_k) \tag{3.33}$$

onde:

$f(X_t, t)$ é dada pela Equação 3.28;

$\Gamma(t_k)$ é dada pela Equação 2.29;

$\phi(t_{k+1}, t_k)$ é a matriz de transição de estado dada pela Equação 2.28;

dado a seguinte condição inicial:

$$\overline{X}(t_k) = \hat{X}_k(+) \tag{3.34}$$

Passo 3:

Aplicando a mudança de variável descrita na seção anterior, as variáveis de estado propagadas são transformadas facilmente nas variáveis que serão utilizadas no filtro, através da seguinte equação:

$$\hat{X}r_k(-) = S^T(\underline{\hat{q}})\ \hat{X}_k(-), \tag{3.35}$$

onde $\hat{X}_k(-)$ é o vetor de estado propagado referente ao instante t_k, e $S(\underline{\hat{q}})$ é a função matricial de transformação dada por:

$$S(\underline{\hat{q}}) = \left[\begin{array}{c|c} Z(\underline{\hat{q}}) & 0(4x3) \\ \hline 0(3x3) & I(3x3) \end{array}\right], \tag{3.36}$$

onde 0(3x3) é uma matriz nula (3x3), 0(4x3) é a matriz nula (4x3), I(3x3) é a matriz identidade (3x3) e $Z(\underline{\hat{q}})$ é a função matricial dada pela Equação 3.6.

Analogamente, a matriz de covariância associada às novas variáveis pode ser calculada como:

$$Pr_k(-) = S^T(\underline{\hat{q}})\ P_k(-)\ S(\underline{\hat{q}}). \tag{3.37}$$

O algoritmo QUEST fornece uma nova observação do quatérnion que é transformada em uma pseudo-observação (δq^Q) pela equação:

$$\underline{\delta q}^Q = Z^T(\underline{\hat{q}})\ \underline{q}^Q, \tag{3.38}$$

onde $Z(\underline{\hat{q}})$ é dada pela Equação 3.6 e $\underline{q}^Q$ é o quatérnion estimado pelo Algoritmo QUEST.

Como mostrado no Capítulo 2, a matriz de covariância do erro associado a essa peseudo-observação é Ppp, dada pela Equação 2.119.

Assim, as equações do filtro para a fase de atualização são dadas por:

$$\hat{Xr}_k(+) = \hat{Xr}_k(-) + K_k \; \underline{\delta q}^Q, \tag{3.39}$$

onde:

$$\hat{Xr}_k(-) = (0 : 0 : 0 : W_x : W_y : W_z)$$

e

$$Pr_k(+) = (I - K_k\, Hr_k)\, Pr_k(-), \tag{3.40}$$

onde K_k é o ganho de Kalman dado pela equação abaixo

$$K_k = Pr_k(-)\, Hr_k\, \{Hr_k\, Pr_k(-)\, Hr_k^T + Ppp\}^{-1}, \tag{3.41}$$

onde

I é a matriz identidade de dimensão 6x6, Hr_k é a matriz dada pela Equação 3.31 e $Pr_k(-)$ é a matriz dada pela Equação 3.37.

Para obter as variáveis de estado originais faz-se a transformação contrário, ou seja:

$$\hat{X}_k(+) = S(\hat{\underline{q}})\, Xr_k(+), \tag{3.42}$$

$$P_k(+) = S(\hat{\underline{q}})\, Pr_k(+)\, S^T(\hat{\underline{q}}). \tag{3.43}$$

<u>Passo 4</u>:

Reinicialização, substituindo k por k+1 e voltando ao Passo 2.

CAPÍTULO 4

TESTE DE DESEMPENHO E ANÁLISE DO PROCEDIMENTO

Para ilustrar o desempenho do procedimento, foram efetuados testes onde foi simulada e estimada a atitude dos três eixos de um satélite artificial. O satélite adotado é estabilizado passivamente por gradiente de gravidade e dotado de um conjunto de sete sensores solares digitais de dois eixos e um sensor magnético de três eixos; esta era a configuração básica prevista para o satélite de Coleta de dados da Missão Espacial Completa Brasileira. As características principais e dados de interesse relacionados com o satélite utilizado nos testes são mostrados na Tabela 4.1 e Figura 4.1.

TABELA 4.1

CARACTERÍSTICAS PRINCIPAIS DO SATÉLITE ADOTADO NAS SIMULAÇÕES

ESTABILIZAÇÃO	MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA-MASTRO RECOLHIDO	MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA-MASTRO ESTENDIDO
Gradiente de Gravidade	Jx = 10 88 kg.m Jy = 10,00 kg.m Jz = 10,13 kg.m	Jx = 323;39 kg.m Jy = 324,06 kg.m Jz = 10,13 kg.m

4.1 - TESTE DE DESEMPENHO

Para verificar o desempenho do estimador, efetuaram-se três testes distintos os quais diferem entre si no que se refere à configuração geométrica dos vetores de observação. O primeiro é denominado *teste favorável* e o ângulo de separação entre as direções observadas varia entre 130^{0} e 80^{0} aproximadamente; o segundo é denominado *teste mediano* e o ângulo de separação entre as observações varia entre 40^{0}

e 15^{0}; finalmente o terceiro é chmado *teste desfavorável* e o ângulo de separação entre as direções varia entre 40^{0} e 0^{0}.

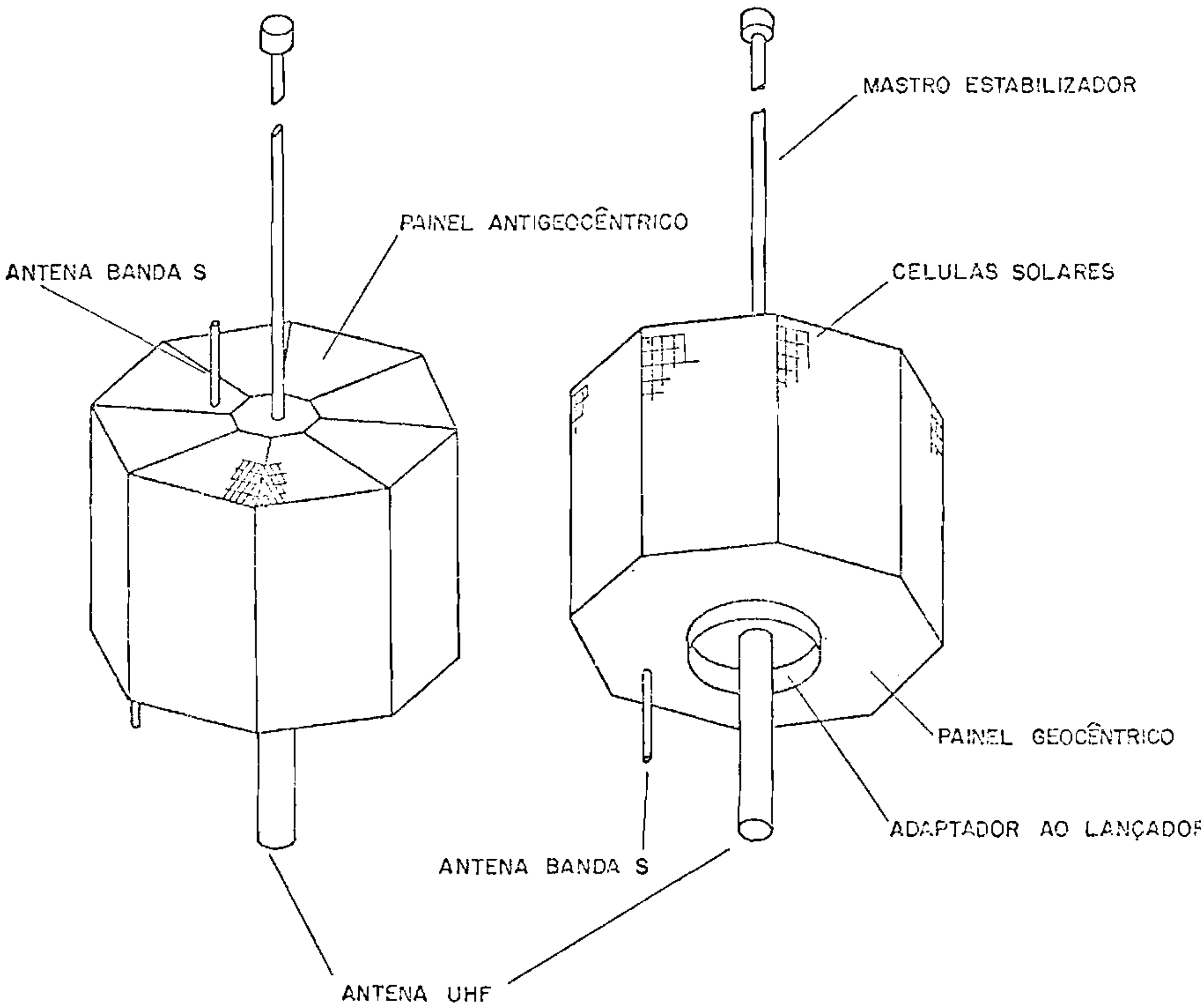


Fig. 4.1 - Satélite utilizado nas simulaç

Neste trabalho utiliza-se, para efeito de simulação, um programa desenvolvido por Moro (1982). Este programa, a partir de uma condição inicial dada e com base num modelo dinâmico adequado, propaga a órbita e a atitude, e os seguintes torques externos podem ser considerados: gravitacional, aerodinâmico e pressão de radiação. Maiores detalhes sobre estas rotinas de simulação são encontrados em Moro (1982). Já a simulação do campo geomagnético foi efetuada com o auxílio da rotina desenvolvida por Lopes et alii (1983), que fornece o campo geomagnético no local do satélite segundo o modelo IGRF80 até o 10º harmônico (Wertz, 1978). Os dados e parâmetros mais importantes que são utilizados como entradas para o programa de simulação mencionado anteriormente são apresentados na Tabela 4.2.

Para implementar o procedimento de estimação de atitude foi desenvolvida uma rotina em linguagem FORTRAN. Uma vez simulada a atitude do satélite e as observações de seus sensores pela rotina de simulação mencionada anteriormente, com a rotina de estimação calcula-se a estimativa para a atitude a partir das observações dos sensores. Com isto, podem-se comparar os valores simulados (valores reais) com os estimados e avaliar a eficiência do procedimento proposto.

Nos testes foi suposto que um pré-processamento de dados já tenha sido efetuado, estando as observações disponíveis para o estimador sempre que solicitadas. As observações são tomadas como sendo os cossenos das direções do Sol e do vetor campo geomagnético, escritos no referencial do satélite, com precisão de 0.5 e $1,0^{o}$ respectivamente, a uma taxa de amostragem de 4 segundos.

O erro de medida existente nas observações foi simulado de modo a ser coerente com a hipótese feita na dedução do algoritmo QUEST, ou seja, o erro possui distribuição axialmente simétrica no plano perpendicular a cada direção observada. Nestes testes de desempenho, o problema relacionado com a existência de erros tendenciosos devido a interferências externas nos sensores não foram considerados; desta forma, a hipótese inicialmente feita para o erro de observação torna-se razoável, uma vez que não se conhece uma direção preferencial para o erro. No Apêndice C, apresenta-se a metodologia utilizada para gerar uma erro que tenha distribuição axialmente simétrica.

TABELA 4.2

PRINCIPAIS INFORMAÇÕES SOBRE AS SIMULAÇÕES

	SIMULAÇÃO FAVORÁVEL	SIMULAÇÃO MEDIANA	SIMULAÇÃO CRÍTICA
Torques Considerados	- Gravitacional - Aerodinâmico - Radiação Solar	- Gravitacional - Aerodinâmico - Radiação Solar	- Gravitacional - Aerodinâmico - Radiação Solar
Sensores	Solar Magnético	Solar Magnético	Solar Magnético
Elementos Orbitais Iniciais	$a = 7071200$ $e = 0{,}001$ $i = 28$ $\Omega = 70$ $\gamma = 0$ $M = 126$	$a = 7071200$ $e = 0{,}001$ $i = 28$ $\Omega = 45$ $\gamma = 0$ $M = 270$	$a = 7071200$ $e = 0{,}001$ $i = 28$ $\Omega = 390$ $\gamma = 0$ $M = 235$
Data	21-09-1984 13:00 até 13:25	08-03-1984 12:00 até 12:15	23-09-1984 11:00 até 11:15
Condição Inicial	$\omega x = 0{,}001 rd/s$ $\omega y = 0{,}001 rd/s$ $\omega z = 0{,}001 rd/s$ $q_1 = q_4 = \sqrt{2}/2$ $q_2 = q_3 = 0$	$\omega x = 0{,}001 rd/s$ $\omega y = 0{,}001 rd/s$ $\omega z = 0{,}001 rd/s$ $-q_1 = q_4 = \sqrt{2}/2$ $q_2 = q_3 = 0$	$\omega x = 0{,}001 rd/s$ $\omega y = 0{,}001 rd/s$ $\omega z = 0{,}001 rd/s$ $-q_1 = q_4 = -\sqrt{2}/2$ $q_2 = q_3 = 0$

a = semi-eixo maior da órbita (metros)
e = excentricidade
i = inclinação da órbita (graus)
Ω = ascenção reta do nódulo ascendente (graus)
γ = argumento do perigeu (graus)
M = anomalia média (graus)

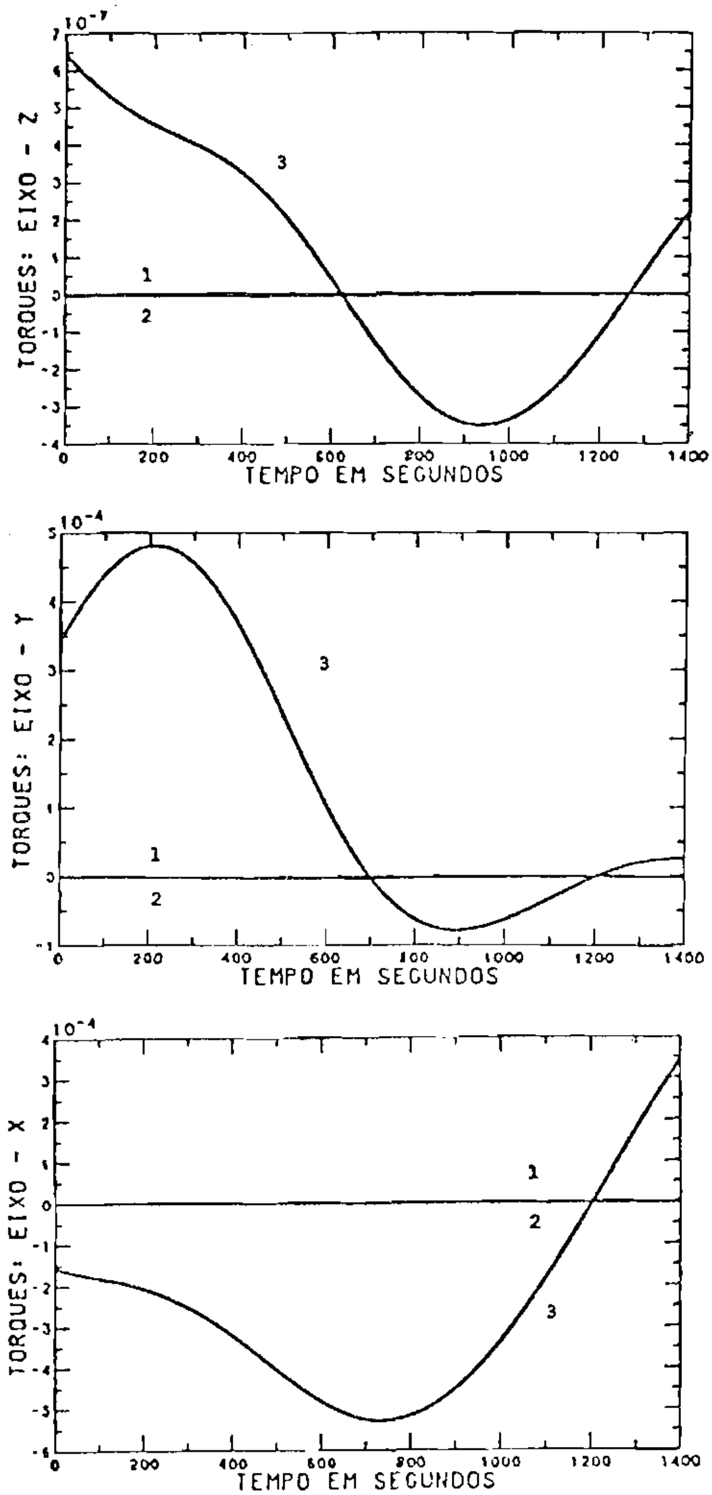


Fig. 4.2 - Torques simulados (simulação favorável):
1) aerodinâmico; 2) radiação solar;
3) gravitacional.

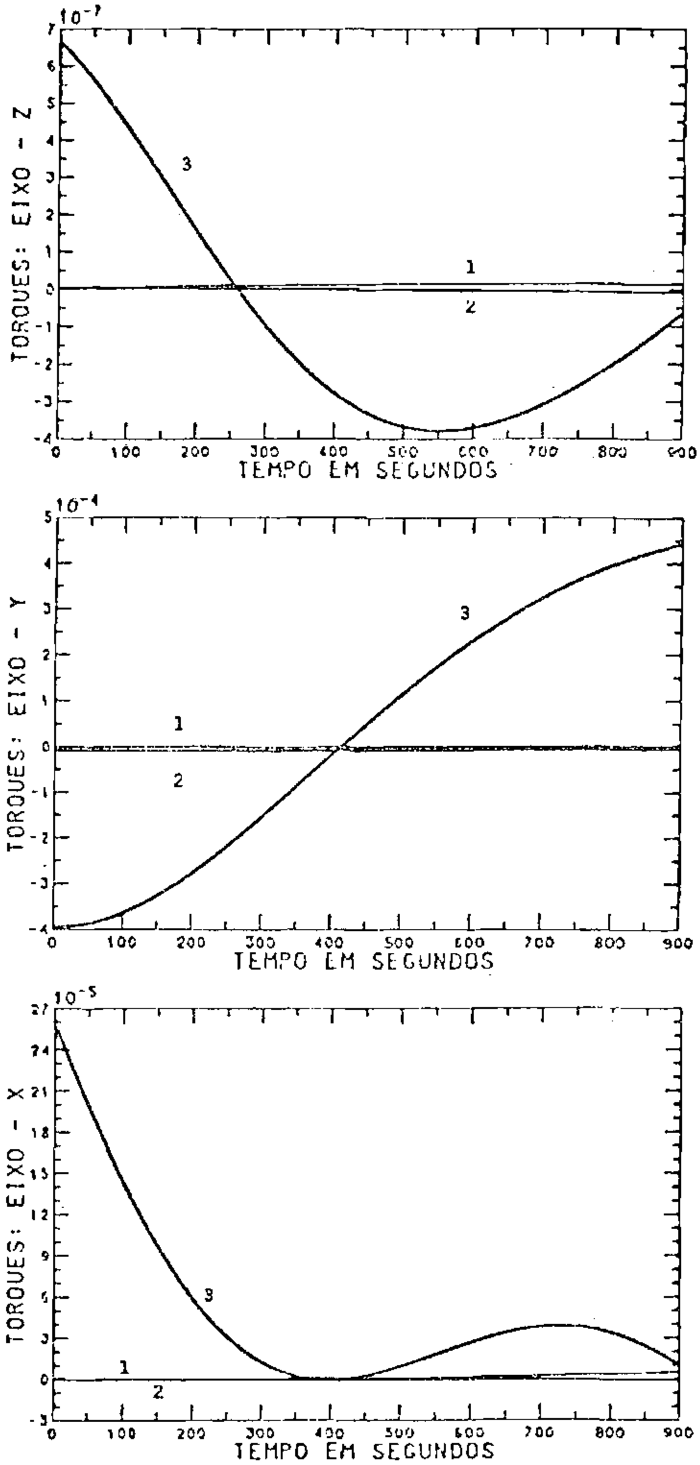


Fig. 4.3 - Torques simulados (simulação mediana):
1) aerodinâmico; 2) radiação solar;
3) gravitacional.

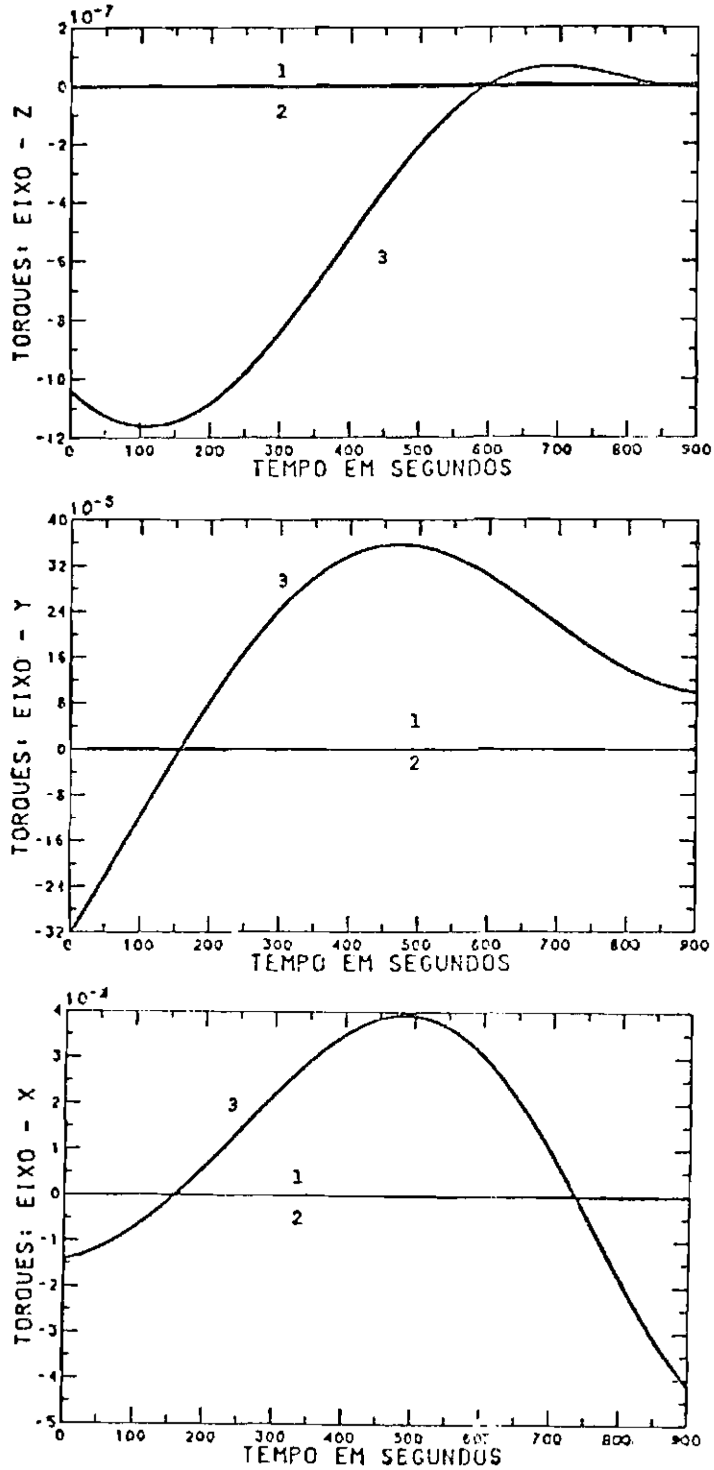


Fig. 4.4 - Torques simulados (simulação crítica):
1) aerodinâmico; 2) radiação solar;
3) gravitacional.

O ruído dinâmico utilizado para representar as imprecisões na modelagem da dinâmica empregada no estimador de atitude, foi admitido constante com uma matriz de covariância também constante e constituída por valores compatíveis com o nível dos torques externos aos quais o veículo é submetido durante o teste. Esta consideração prática permite que se tenha uma idéia preliminar a respeito da sensitividade do estimador com relação à hipótese teórica efetuada.

Definem-se, a seguir, os parâmetros utilizados na avaliação do desempenho do procedimento neste teste, e a notação M_{ij} será utilizada daqui para frente, significando o elemento da i-ésima linha, j-ésima coluna da matriz M; analogamente V_i significa o i-ésimo elemento do vetor V.

$$\Delta q \overset{\Delta}{=} \{\sum_{i=1}^{4} (\hat{X}_i - X_i)^2\}^{1/2}, \tag{4.1}$$

$$\delta q \overset{\Delta}{=} \{\sum_{i=1}^{4} P_{ii}\}^{1/2}, \tag{4.2}$$

$$\Delta W \overset{\Delta}{=} \{\sum_{i=5}^{7} (\hat{X}_i - X_i)^2\}^{1/2}, \tag{4.3}$$

$$\delta W = \{\sum_{i=5}^{7} P_{ii}\}^{1/2}, \tag{4.4}$$

onde o símbolo Δ indica erro real e δ a precisão estimada; os índices q e W referem-se ao quatérnion de atitude e velocidade angular, respectivamente; $\hat{X}$ é a estimativa do estado e X o estado simulado. Outras grandezas de interesse também são traçadas: o ângulo de separação entre as direções do Sol e o campo geomagnético visto do satélite, e o resíduo normalizado definido como:

$$\bar{r} \overset{\Delta}{=} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{r_i^2}{E(r_i^2)}, \tag{4.5}$$

sendo r o resíduo de observação definido da seguinte maneira:

$$r(t_k) \triangleq Y(t_k) - h\,[\hat{X}(t_k),\ t]. \qquad (4.6)$$

Aplicando o operador expectância de ambos os lados da Expressão 4.5, vê-se que:

$$E(\bar{r}) \approx 1,$$

considerando que a somatória que aparece na Equação 4.5 tem distribuição Chi-quadrado com 3 graus de liberdade, não ocorrendo divergência, $\bar{r}$ terá 97% de chance de estar limitado a valores entre zero e três.

4.1.1 - TESTE FAVORÁVEL

Neste teste os elementos orbitais iniciais e a data foram convenientemente selecionados de forma que os vetores de observação apresentem uma configuração geométrica favorável, ou seja, o ângulo de separação entre a direção do Sol e do campo geomagnético se mantêm próximo de 90 graus durante o período de simulação, como mostrado na Figura 4.5.

A Figura 4.6 mostra que o resíduo normalizado se manteve em torno de seu valor esperado, satisfazendo a uma condição necessária para haver convergência. Os erros reais nas estimativas do quatérnion (Δq) e da velocidade angular ($\Delta\omega$) ficaram dentro das faixas de precisão calculadas, δq e $\delta\omega$ respectivamente (ver Figuras 4.7 e 4.8). Analogamente, os erros angulares reais em torno de cada um dos três eixos se mantiveram dentro da faixa de precisão prevista pelo filtro (ver Figura 4.9). Isto significa que o filtro avaliou coerentemente a precisão de sua estimativa, ou seja, não apresentou sinais de divergência. Percebe-se claramente pela Figura 4.10 o ganho em termos de precisão angular em cada um dos três eixos, quando se compara a precisão da atitude estimada pelo procedimento proposto com a atitude estimada pelo algoritmo QUEST.

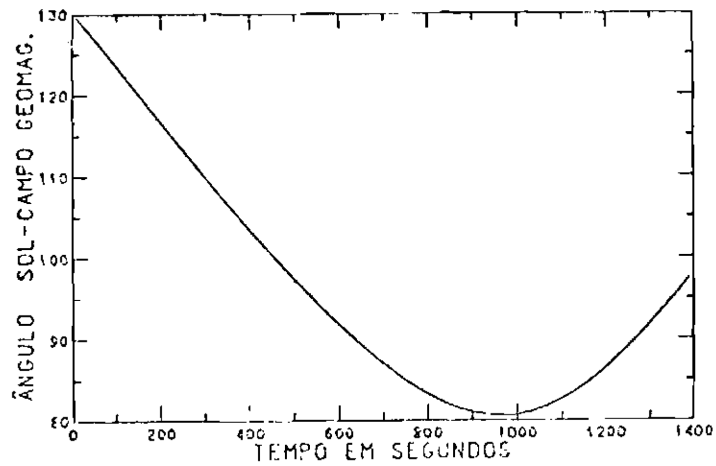


Fig. 4.5 - Ângulo α entre a direção do Sol e do campo geomagnético visto do satélite (teste favorável)

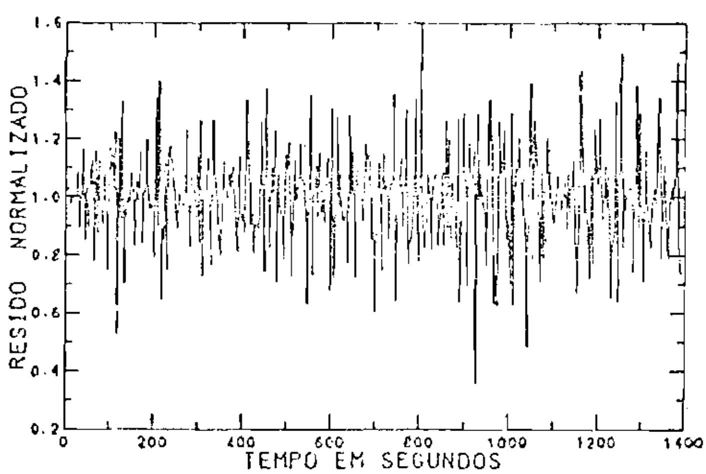


Fig. 4.6 - Resíduo normalizado (teste favorável).

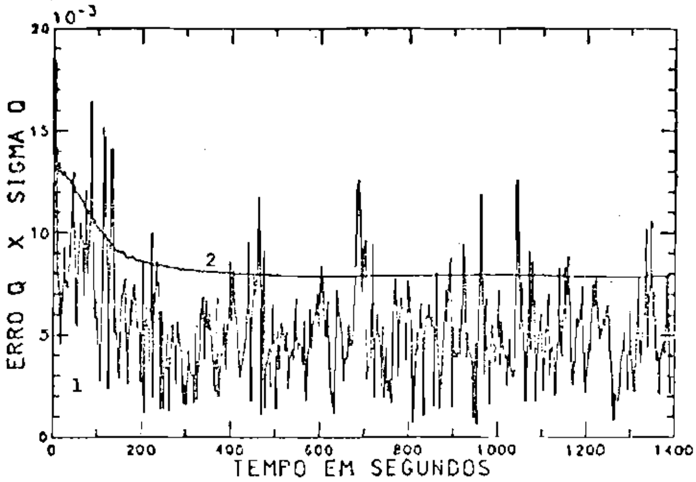


Fig. 4.7 - Curvas sobrepostas dos erros real (Δq) e estimado (δq) para a atitude (teste favorável). 1) erro real Δq; 2) erro estimado δq.

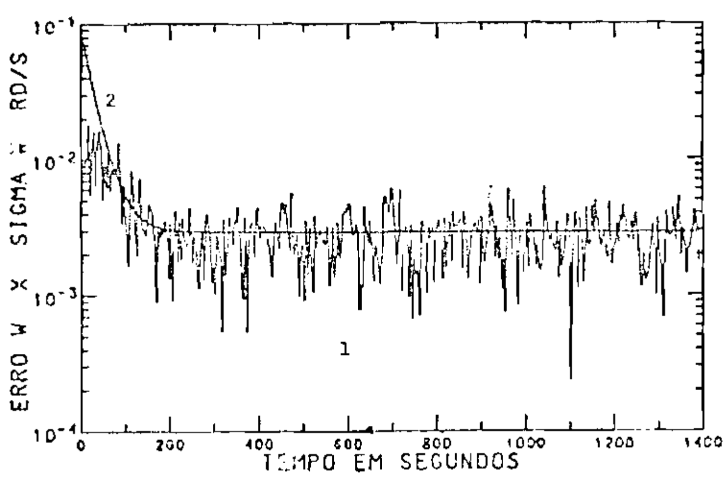


Fig. 4.8 - Curvas sobrepostas dos erros real ($\Delta\omega$) e estimado ($\delta\omega$) para a velocidade angular (teste favorável). 1) erro real $\Delta\omega$; 2) erro estimado $\delta\omega$.

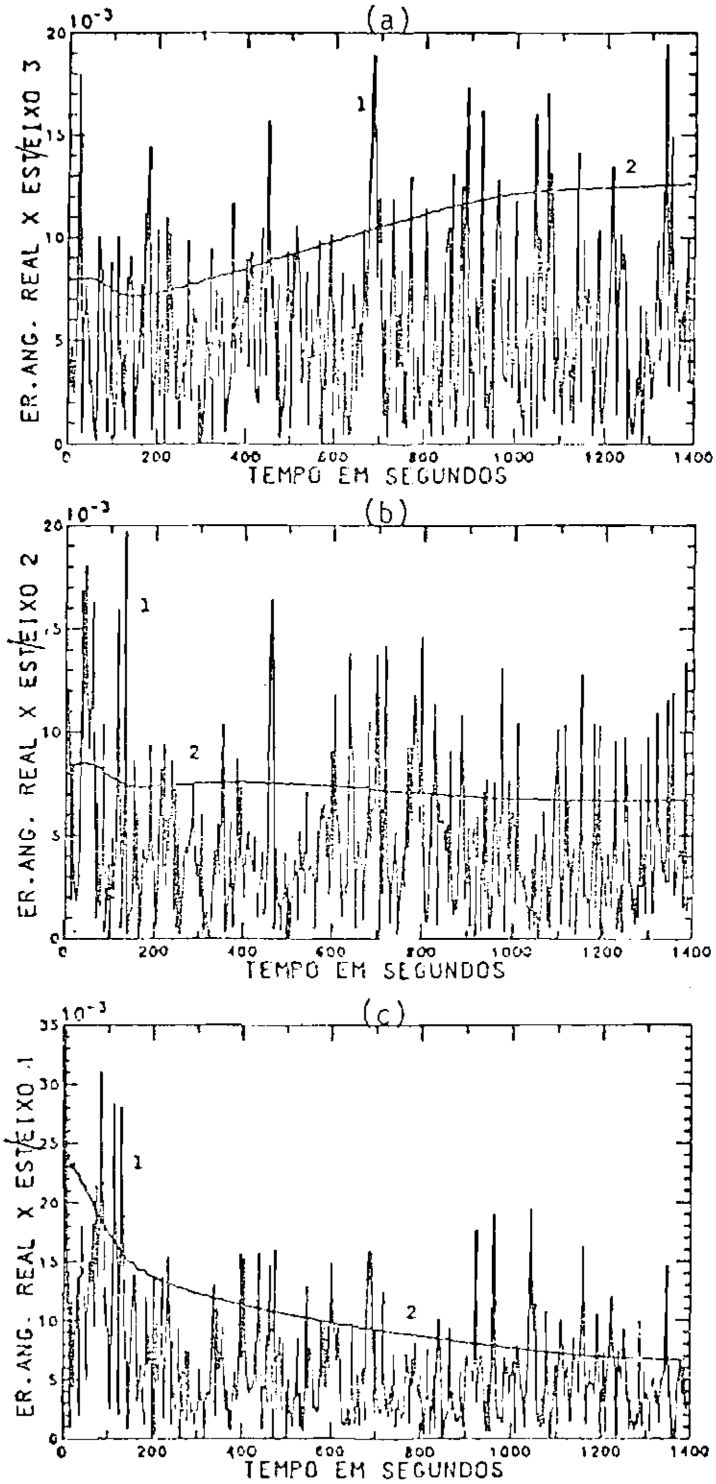


Fig. 4.9 - Curvas sobrepostas dos erros angulares real ($\Delta\theta$) e estimado ($\delta\theta$) (teste favorável). (1) erro real $\Delta\theta$; (2) erro estimado $\delta\theta$, a) eixo 3; b) eixo 2; c) eixo 1.

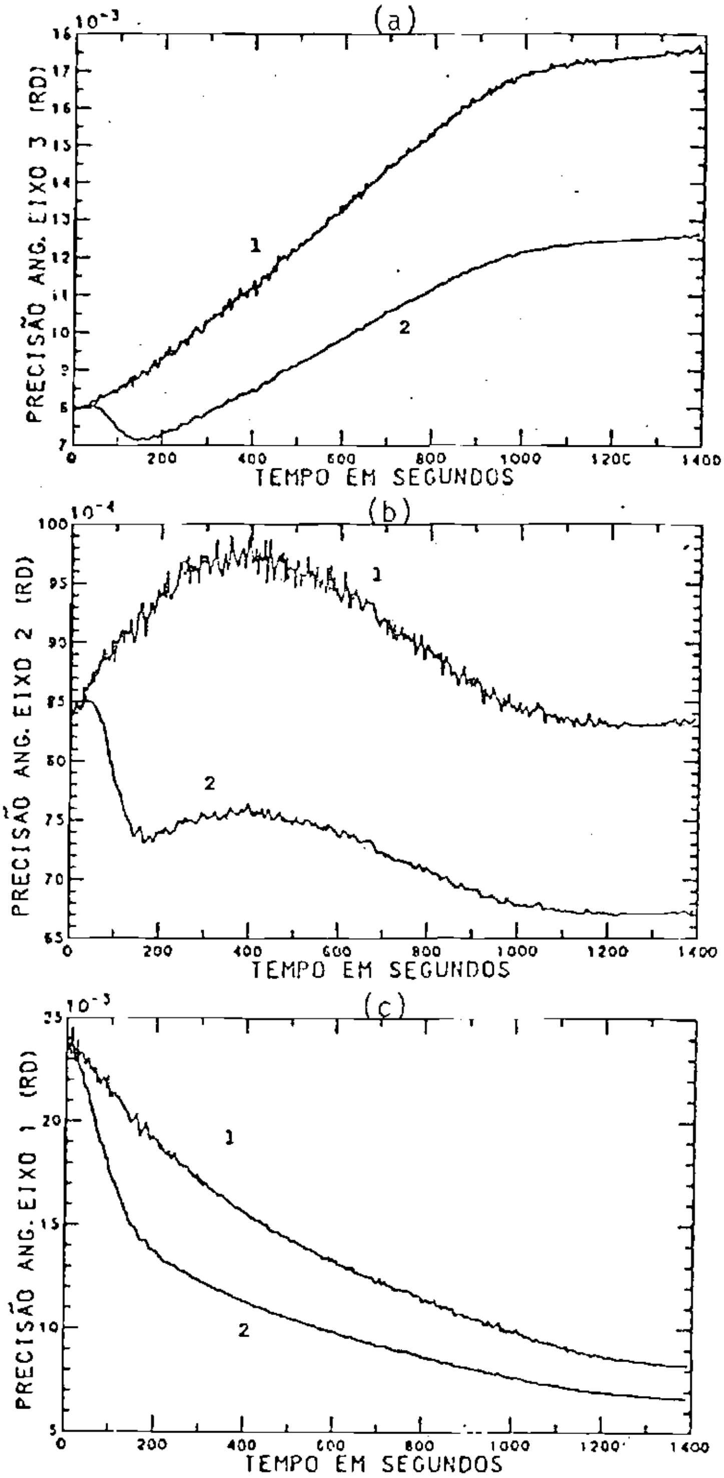


Fig. 4.10 - Curvas sobrepostas dos erros angulares estimados relativos ao algoritmo QUEST (1) e ao procedimento proposto (2) (teste favorável). a) eixo 3; b) eixo 2; c) eixo 1.

4.1.2 - TESTE MEDIANO

Neste teste a escolha da condição inicial para a órbita foi tal que o ângulo de separação entre os vetores de observação caracteriza uma configuração geométrica mediana (ver Figura 4.11).

A Figura 4.12 mostra que o resíduo normalizado se manteve em torno de seu valor esperado, satisfazendo a uma condição necessária para haver convergência. Os erros reais nas estimativas do quatérnion (Δq) e da velocidade angular ($\Delta\omega$) ficaram dentro da faixa de precisão prevista pelo filtro δq e $\delta\omega$ respectivamente (ver Figuras 4.13 e 4.14), o mesmo acontecendo com os erros angulares reais em torno de cada um dos eixos (ver Figura 4.15); ou seja, o filtro não apresentou sinais de divergência. A Figura 4.16 mostra que a precisão angular em torno de cada um dos eixos para a atitude estimada pelo procedimento é melhor quando comparada com a atitude estimada pelo algoritmo QUEST.

4.1.3 - TESTE CRÍTICO

Neste teste a configuração apresentada pelos vetores de observação é bastante desfavorável. A Figura 4.17 indica que na faixa entre 400s e 500s aproximadamente caracteriza-se a situação de colinearidade nas observações do Sol e do campo geomagnético (α = 180^{o}), sendo portanto a região crítica do teste. Nesta região, o procedimento proposto somente propaga a estimativa do estado e respectiva matriz de covariância do erro, pois o erro cometido na estimativa do quatérnion pelo algoritmo QUEST, em relação a atitude propagada, não pode ser aproximado por uma rotação infinitesimal.

Como nos testes anteriores o resíduo normalizado ficou em torno de seu valor esperado (ver Figura 4.18. Os erros reais nas estimativas do quatérnion (Δq) e da velocidade angular ($\Delta\omega$) também permaneceram nas faixas de precisão previstas pelo estimador, δq e $\delta\omega$ respectivamente (ver Figuras 4.19 e 4.20), De forma análoga, os erros angulares reais em torno de cada um dos três eixos se mantiveram dentro das faixas de precisão previstas pelo filtro (ver Figura 4.21).

Durante o período no qual as observações estão disponíveis, nota-se um ganho em termos de precisão angular em cada um dos três eixos, quando se compara a atitude estimada pelo procedimento proposto com a atitude calculada pelo algoritmo QUEST, o que não ocorre quando as estimativas são somente propagadas (ver Figura 4.22).

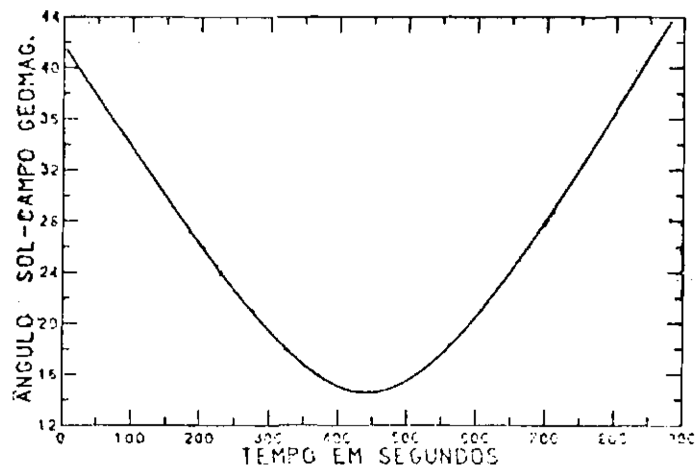


Fig. 4.11 - Ângulo α entre a direção do Sol e do campo geomagnético visto do satélite (teste mediano).

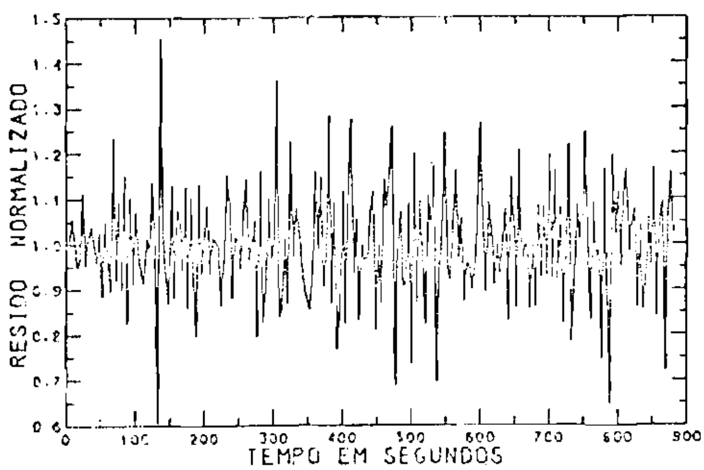


Fig. 4.12 - Resíduo normalizado (teste mediano).

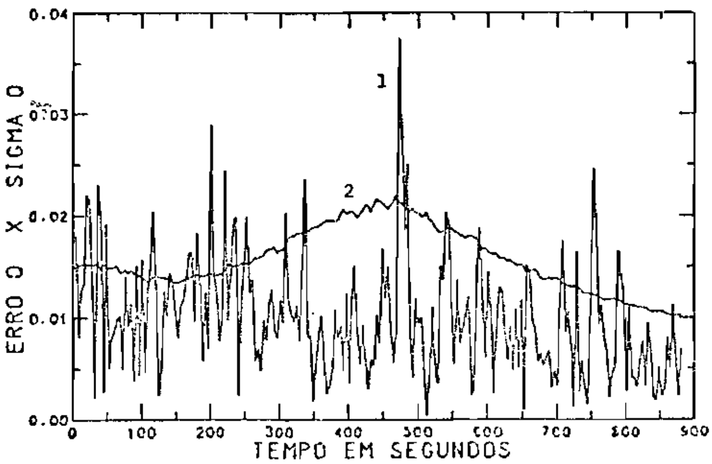


Fig. 4.13 - Curvas sobrepostas dos erros real (Δq) e estimado (δq) para a atitude (teste mediano). 1) erro real Δq; 2) erro estimado δq.

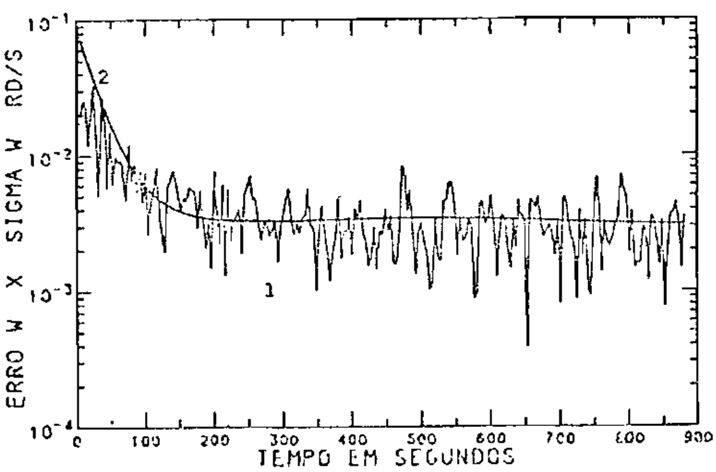


Fig. 4.14 - Curvas sobrepostas dos erros real ($\Delta\omega$) e estimado ($\delta\omega$) para a velocidade angular (teste mediano). 1) erro real $\Delta\omega$; 2) erro estimado $\delta\omega$.

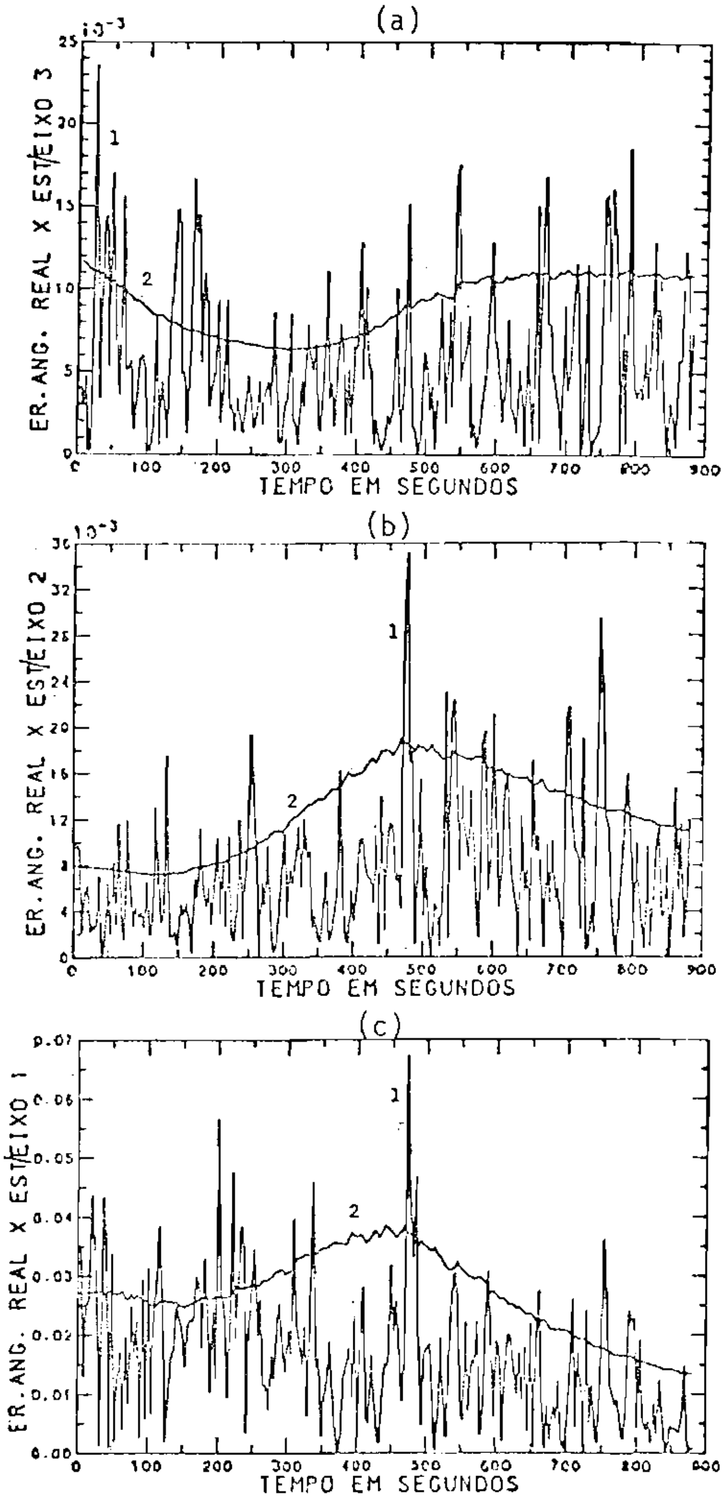


Fig. 4.15 - Curvas sobrepostas dos erros angulares real ($\Delta\theta$), e estimado ($\delta\theta$) (teste mediano). (1) erro real $\Delta\theta$, (2) erro estimado $\delta\theta$. a) eixo 3; b) eixo 2; eixo 1.

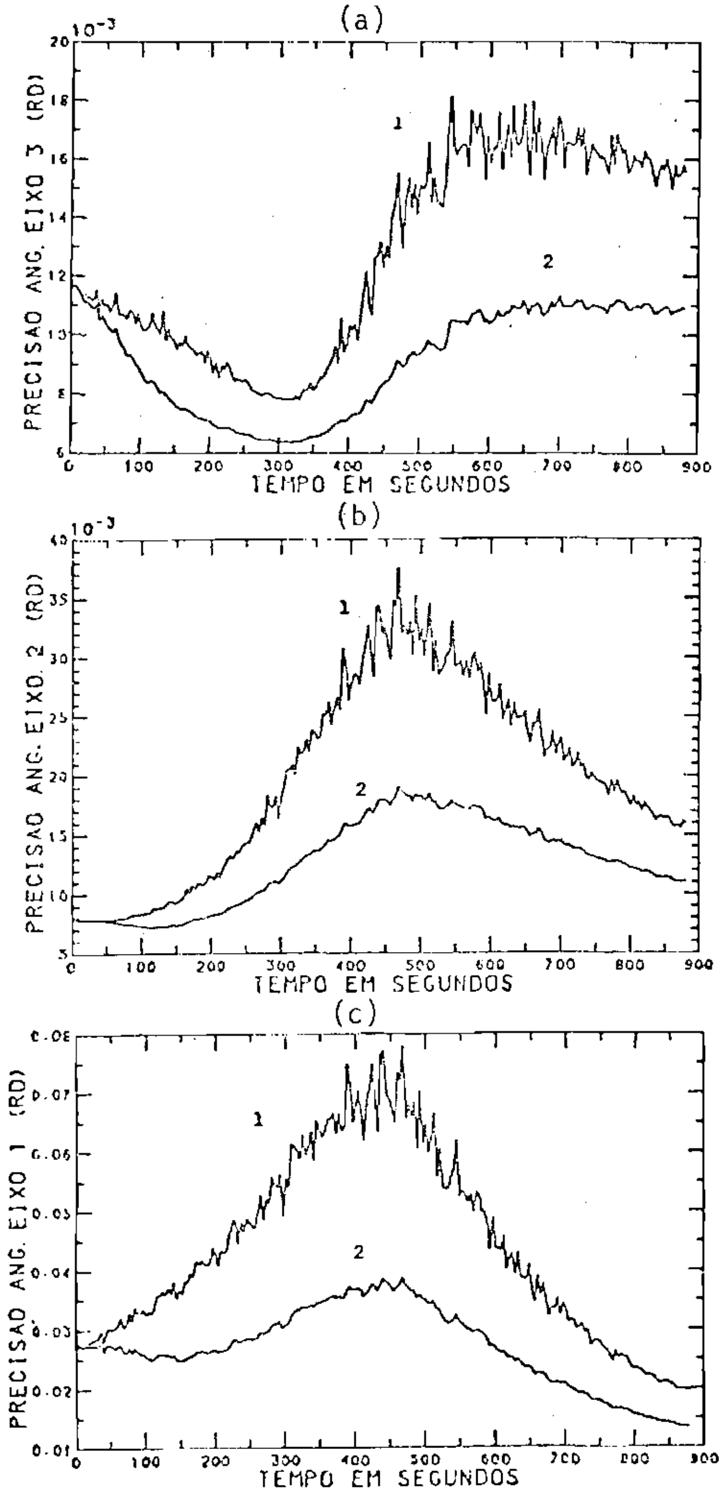


Fig. 4.16 - Curvas sobrepostas dos erros angulares estimados relativos ao algoritmo QUEST (1) e ao procedimento proposto (2) (teste mediano) a) eixo 3; b) eixo 2; c) eixo 1.

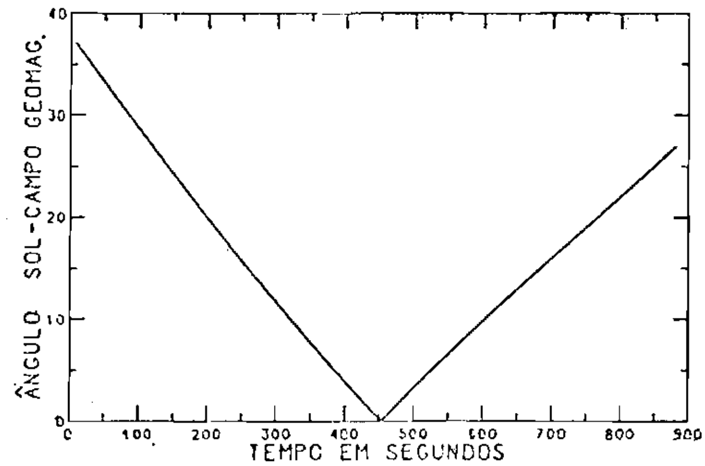


Fig. 4.17 - Ângulo α entre a direção do Sol e do campo geomagnético visto do satélite (teste crítico).

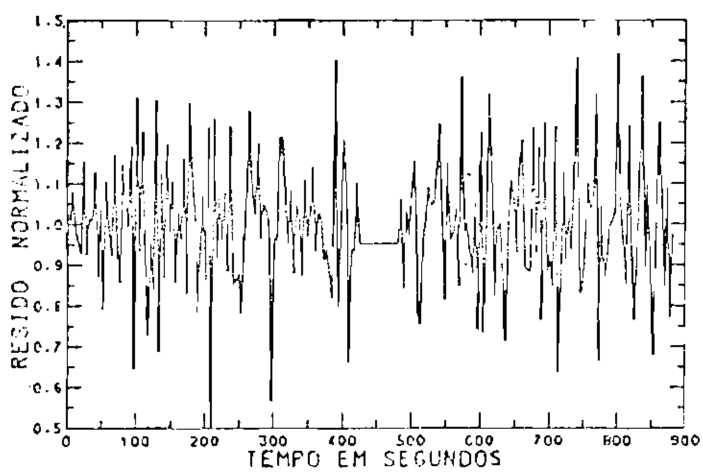


Fig. 4.18 - Resíduo normalizado (teste crítico).

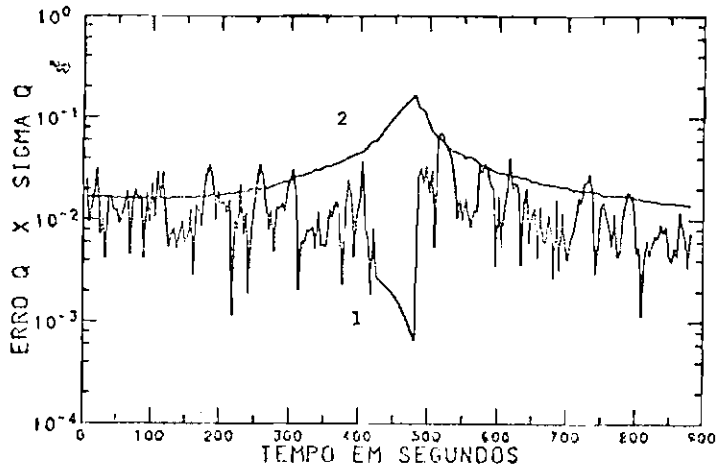


Fig. 4.19 - Curvas sobrepostas dos erros real (Δq) e estimado (δf) para a atitude (teste crítico). 1) erro real Δq; 2) erro estimado δq.

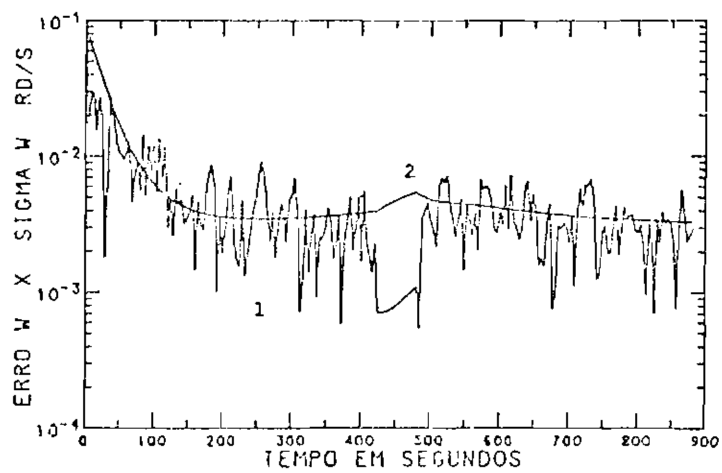


Fig. 4.20 - Curvas sobrepostas dos erros real ($\Delta\omega$) e estimado ($\delta\omega$) para a velocidade angular (teste crítico). 1) erro real ; 2) erro estimado $\delta\omega$.

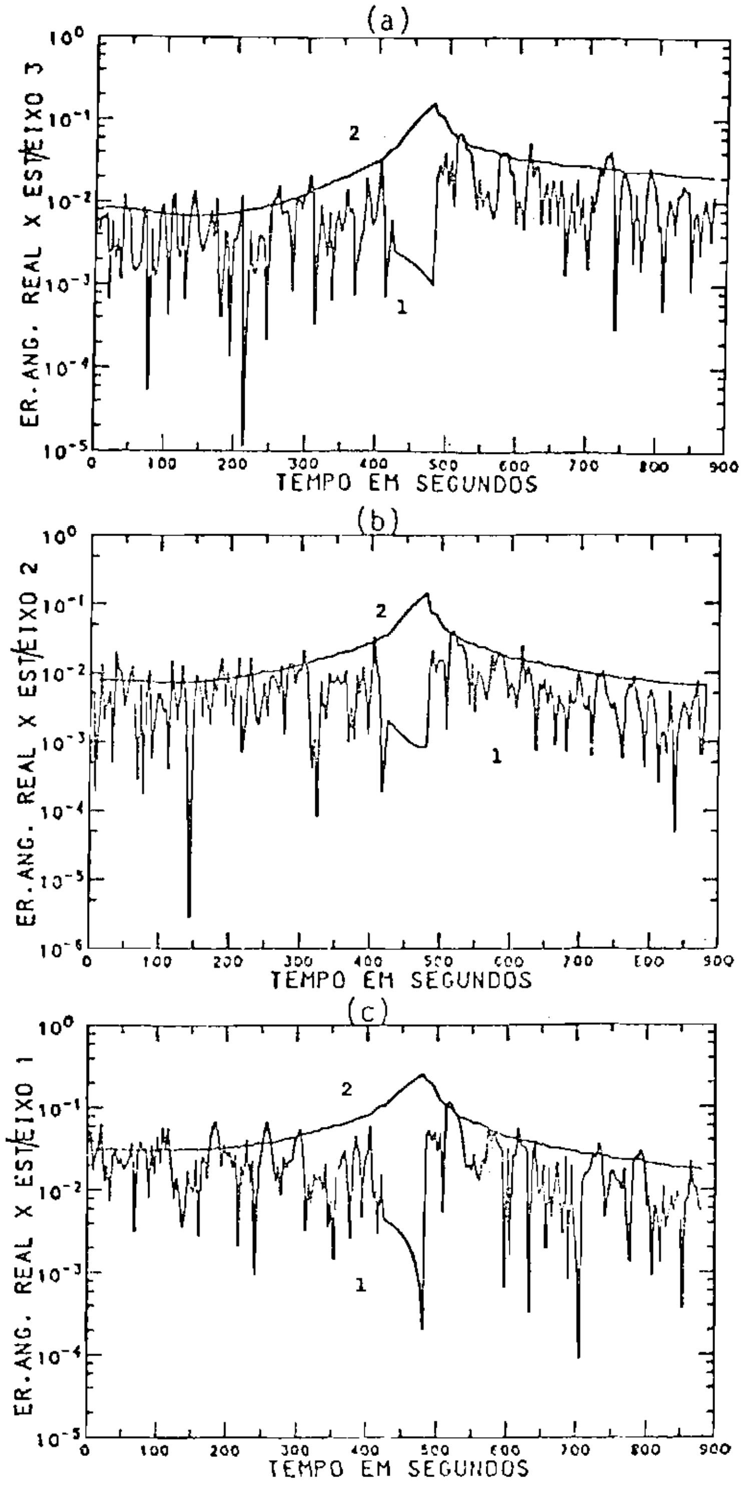


Fig.4.21 - Curvas sobrepostas dos erros angulares real ($\Delta\theta$)e estimado ($\delta\theta$) (teste crítico). 1) erro real$\Delta\theta$; 2) erro estimado $\delta\theta$. a) eixo 3; b) eixo 2; c) eixo 1.

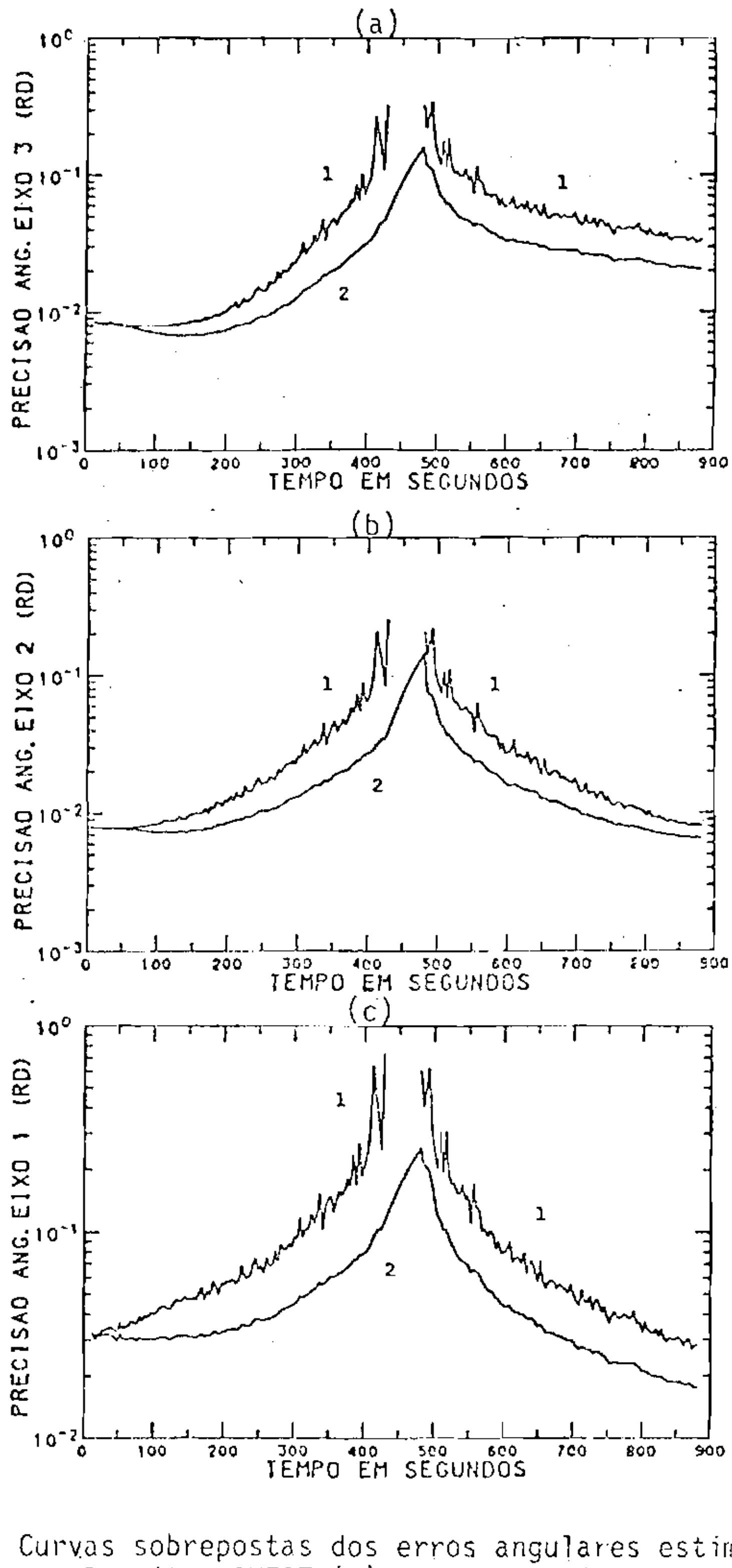


Fig. 4.22 - Curvas sobrepostas dos erros angulares estimados relativos ao algoritmo QUEST (1) e ao procedimento proposto (2) (teste crítico). a) eixo 3; b) eixo 2; c) eixo 1.

4.2 - TESTE COMPARATIVO

Neste teste faz-se um estudo comparativo que envolve os seguintes procedimentos de determinação de atitude: o algoritmo QUEST (Shuster and Oh, 1981), o procedimento proposto neste trabalho e o filtro estendido de Kalman, combinado com técnicas de compensação do modelo dinâmico e ruído adaptativo, aplicado diretamente ao procedimento das informações dos sensores (Lopes, 1982). O objetivo deste estudo é verificar a sensitividade dos procedimentos mencionados anteriormente em relação às hipóteses teóricas efetuadas para o erro de observação.

A simulação da órbita, da atitude e do campo geomagnético foram efetuadas com o auxílio das rotinas mencionadas no primeiro teste; os seguintes aspectos foram considerados:

1) torques externos:

. gravitacional,
. aerodinâmico,
. pressão de radiação;

2) momentos principais inércia:

. Jxx = 179kg.m (para mastro meio estendido),
. Jyy = 162kg.m (para mastro meio estendido),
. Jzz) 11kg.m;

3) elementos orbitais, época e condição inicial:

$a = 7{,}128 km$,
$e = 0{,}0098$,
$i = 25^o$,
$\Omega = 200^o$,
$\gamma = 92^o$,
$M = 0^o$,
data = 15-12-1989 (23:08:48),
$\omega z = \omega x = \omega z = 0{,}001 rd/s$,

$q_1 = -0{,}645,$
$q_2 = -0{,}380,$
$q_3 = -0{,}540,$
$q_4 = \ \ 0{,}384.$

A fim de manter a coerência com o objetivo deste teste, a metodologia utilizada na simulação das observações foi na medida do possível, mantida próxima da realidade, diferindo do teste anterior no qual as observações foram simuladas de modo a ser compatível com a teoria desenvolvida.

A simulação dos sensores solares digitais foi feita pela rotina desenvolvida por Sawame (1985), que leva em consideração a disposição geométrica dos 7 sensores ao longo da estrutura do satélite como mostrado na Figura 4.23. Tal rotina seleciona, em cada instante de amostragem, o sensor que estiver melhor iluminado, ou seja, aquele que estiver mais diretamente voltado para o Sol e extrai deste sensor a observação da direção satélite Sol. O modelo matemático considerado para o sensor inclui apenas o erro de discretização da medida, por ser predominante neste tipo de sensor (Wertz, 1978).

A simulação das medidas do magnetômetro foi efetuada com o auxílio da rotina desenvolvida por Lopes et alii (1983). Ao valor do campo geomagnético no referencial do satélite foram acrescidos erros para simular empiricamente os efeitos devidos aos seguintes fatores:

- ruído aleatório: σ = 3mG (compatível com a precisão do instrumento),
- interferência das barras ferromagnéticas,
- interferência de equipamentos elétricos.

Desta forma, o modelo para o erro nas observações do magnetômetro pode ser dado por:

$$\text{Erro} = \sigma + \xi b(X),$$

onde "σ" é o ruído aleatório, "ξ" é um parâmetro que permite variar a magnitude do erro devido às interferências e "b(X)" é uma função empírica do estado da atitude que representa as interferências mencionadas anteriormente.

Não foram considerados os desalinhamentos internos ou externos no magnetômetro e nem os erros de modelagem do campo geomagnético; no entanto, para efeito dos estudos efetuados neste trabalho, considera-se satisfatório o modelo empírico adotado para o erro, visto que o interesse está na ordem de grandeza do erro e não na sua determinação precisa.

Para o caso de efetuar manobras de captura com o satélite utilizando o mastro estabilizador, uma informação importante é a incerteza angular, ou seja, a separação angular entre o eixo de simetria do satélite e a direção estimada para este mesmo eixo. A incerteza angular nos outros dois eixos é irrelevante para o tipo de manobra mencionada anteriormente.

Na Figura 4.24 plota-se o valor rms da incerteza angular nas estimativas em função do nível de tendenciosidade (ξ) considerada nas medidas do magnetômetro, para cada um dos três procedimentos em análise.

Nota-se, nesta figura, que o procedimento proposto apresenta sempre incerteza menor que as dos outros métodos; porém, todos os métodos apresentam um aumento na incerteza com o aumento do erro tendencioso das observações, conforme era esperado. Para o filtro estendido de Kalman que processa diretamente as observações dos sensores, o aumento da incerteza foi ainda mais acentuado. Nota-se ainda que para níveis de tendenciosidade mais elevado, o desempenho do procedimento proposto tende ao desempenho do algoritmo QUEST.

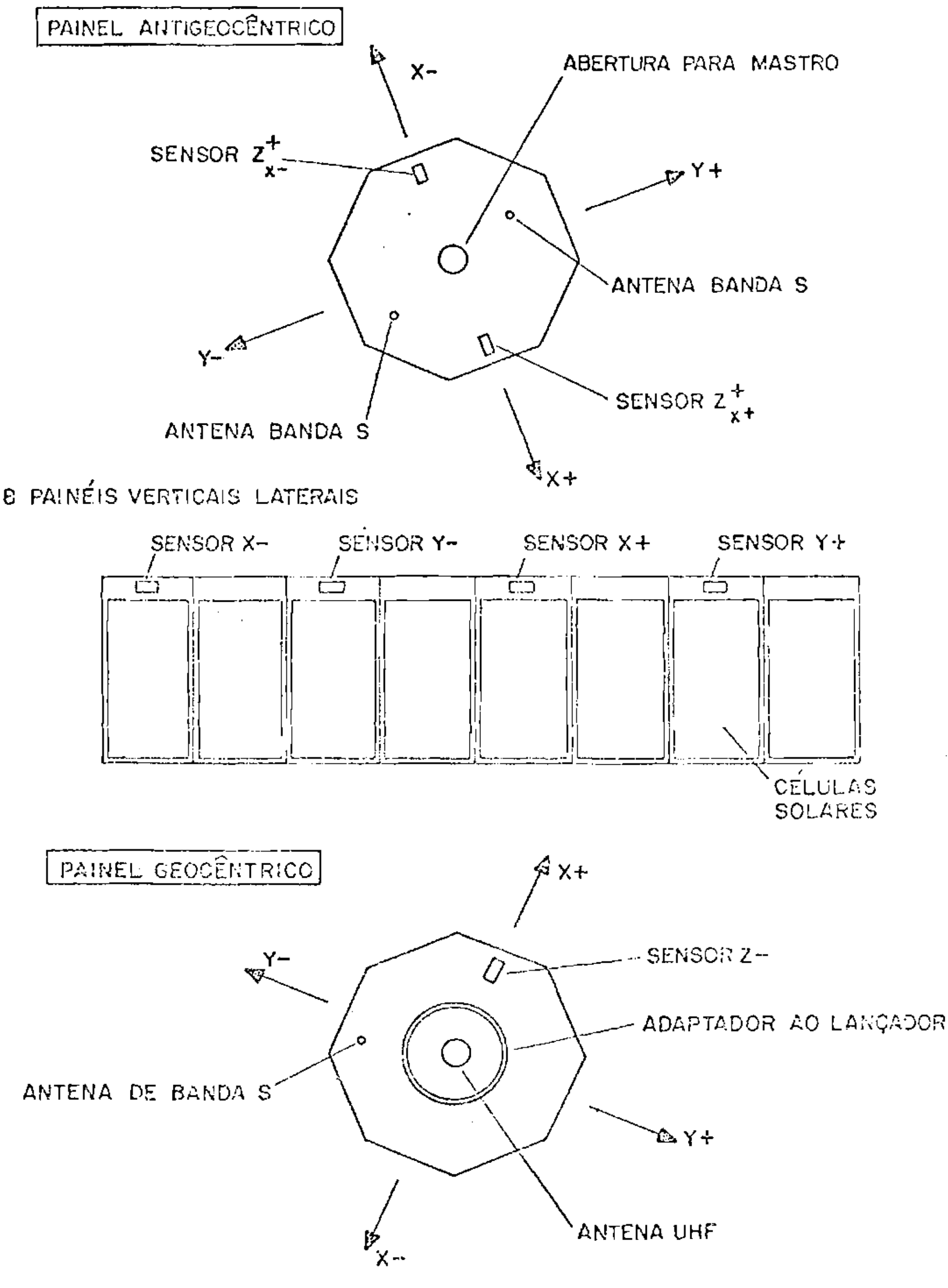


Fig. 4.23 - Distribuição dos sensores solares ao longo da estrutura do satélite.

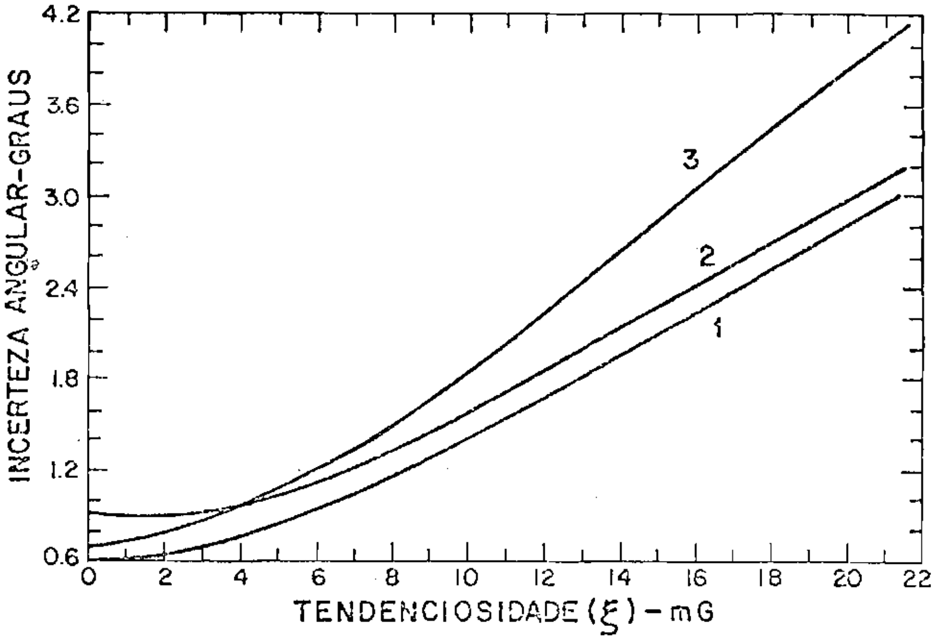


Fig. 4.24 - Curvas sobrepostas da incerteza angular, 1) procedimento proposto; 2) algoritmo QUEST; 3) filtro de Kalman.

A Tabela 4.3 apresenta o tempo de processamento necessário para um período simulado de 900 seg, para cada um dos procedimentos.

TABELA 4.3

TEMPO DE PROCESSAMENTO

MÉTODO UTILIZADO NA DETERMINAÇÃO DA ATITUDE	TEMPO DE CPU (seg)
Filtro de Kalman processando observações dos sensores	200
Procedimento proposto (Filtro de Kalman + algoritmo QUEST).	140
Algoritmo QUEST	46

Deve-se salientar, entretanto, que o filtro de Kalman aplicado ao processamento direto das observações dos sensores é combinado com técnicas de compensação do modelo dinâmico e ruído adaptativo, o que acarreta uma carga de processamento adicional. Além disso, deve-se levar em consideração que os procedimentos não foram implementados por um único programador. Desta forma, ao analisar a Tabela 4.3, deve-se lembrar que esta fornece apenas uma idéia sobre a ordem de grandeza do tempo de processamento demandado. Não obstante estas críticas, uma análise preliminar indica que o procedimento é promissor.

Neste teste pode-se verificar a robustez do Algoritmo QUEST com relação à existência de erros tendenciosos nas observações; entretando, deve-se salientar que tanto o filtro de Kalman aplicado diretamente ao processamento das observações como o procedimento proposto neste trabalho fornecem a possibilidade de tratar de maneira adequada os erros tendenciosos e, com isto, obter um melhor desempenho que o ilustrado pela Figura 4.24, sendo que o algoritmo QUEST não oferece esta possibilidade.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO E COMENTÁRIOS

A análise do desempenho do estimador mostra que o procedimento cumpre os objetivos propostos, concilando as características positivas das técnicas utilizadas num único procedimento. Apesar da modelagem dinâmica simplificada, mesmo em condições críticas como aquelas encontradas na terceira simulação do primeiro teste, o procedimento foi robusto o suficiente para assegurar a convergência, estimando a atitude do satélite e sua velocidade angular com uma precisão razoável. Uma análise preliminar sobre o tempo de processamento em computador mostrou que o procedimento proposto é promissor com relação à satisfação dos requisitos para aplicações onde se requer processamento em tempo real.

O fato de utilizar observações geradas a partir de estimativas locais ótimas, que possuem portanto informações mais precisas sobre a atitude do veículo comparadas com as observações dos sensores, permite que se diminua a perda de informação devido ao processo de linearização no filtro estendido de Kalman. Na prática este fato pode ser constatado através de um ganho em termos da precisão na estimativa do estado. Deve-se ressaltar também, que o fato de os pesos a_i não minimizarem a matriz de covariância do erro associado ao quatérnion estimado pelo algoritmo QUEST não prejudicou o desempenho do procedimento.

Com relação ao tempo de processamento, uma análise preliminar indica que, por se trabalhar com um estado de dimensão reduzida, associado ao fato de evitar os cálculos de derivadas durante o processo de linearização das observações, houve uma redução do tempo de processamento superior ao gasto pelos cálculos devido ao uso do algoritmo QUEST.

Nota-se também que a precisão das estimativas depende basicamente da precisão dos sensores e da disposição geométrica das referências por eles observadas. Quando a configuração geométrica for desfavorável, o procedimento proposto mostra-se ainda mais vantajoso em relação aos métodos estáticos de determinação de atitude, pois duran te o tempo em que a configuração geométrica for desfavorável, o procedimento se apóia em estimativas anteriores e na memória dinâmica do filtro de Kalman, evitando desta maneira a degeneração da precisão da estimativa.

No teste comparativo, descrito no Capítulo 4, pode-se perceber que o desempenho do procedimento proposto foi sempre superior ao desempenho dos outros dois métodos envolvidos no teste. Isto indica que o procedimento proposto possui uma baixa sensitividade às hipóteses teóricas efetuadas, que pode ser traduzida numa maior robustez.

Neste trabalho, a matriz de covariância do ruído no estado é admitida como constante, constituída por valores compatíveis com o nível dos torques externos aos quais o veículo é submetido. Entretanto, em algumas aplicações específicas, tal expediente pode não garantir a convergência do filtro. Assim sendo, sugere-se como trabalho futuro, incorporar ao procedimento proposto alguma técnica de ruído adaptativo, como por exemplo a desenvolvida por Rios Neto e Kuga (1982) para estimar convenientemente os elementos da matriz de covariância do ruído no estado. Espera-se com isto poder empregar uma modelagem dinâmica ainda mais simples que a utilizada neste trabalho, de modo a não comprometer a característica de processamento em tempo real.

Uma outra sugestão para desenvolvimentos futuros seria estender a idéia básica utilizada neste trabalho (filtro de Kalman combinado com o algoritmo QUEST) a casos em que se disponha de sensores inerciais (girômetros) a bordo. Finalmente, uma terceira sugestão seria o desenvolvimento de um procedimento para determinação de atitude de satélites artificiais utilizando técnicas estocásticas que possibilitem estimar o valor das tendenciosidades juntamente com as variáveis de estado do sistema, com base na técnica desenvolvida por Orlando (1983).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAR-ITZHACK, I.Y.; OSHMAN, Y. Attitude determination from vector observations: quaternion estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, 21(1):128-135, Jan. 1985.

BAR-ITZHACK, I.Y.; REINER, J. Recursive attitude determination from vector observations: direction cosine matrix - identification. *Journal of Guidance*, 7(1):51-56, Jan./Fev. 1984.

BELETSKI, V.V. *Motion of an artificial satellite about its center of mass.* Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation, 1966. (Mechanics of Space Flight).

BHAT, R.S.; RAJENDRA, P.P.; RAMANI, R.; PADMANABHAN, R.; HARENDRA NATH, K. Orbit and attitude determination for Bhaskara. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACECRAFT FLIGHT DYNAMICS, Darmstad, May. 17-23, 1981. *Proceedings.* Darmstad, Europen Space Agency, 1981 p. 325-332.

DAVENPORT JR. W.B. *Probability and random processes.* Tokyo, International Student Edition, 1970.

GELB, A.; KASPER JR., J.R.; NASH JR., R.A.; PRICE, C.F.; SUTHERLAND JR, A.A. *Applied optmal estimation.* Cambridge, MIT, 1974.

HILDEBRAND, F.B. *Advanced calculus for applications.* New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1962.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear algebra.* New Jersey, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1961.

JAZWINSKI, A.H. *Stochastic process and filtering theory.* New York, Academic, 1970. (Mathematics in Science and Engineering).

LEFFERSTS, E.J.; MARKLEY, F.L.; SHUSTER, M.D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance*, 5(5):417-429, Sept./Oct. 1982.

LERNER, G.M.; SHUSTER, M.D. In-flight magnetometer calibration and attitude determination for near-earth spacecraft. *Journal of Guidance and Control*, 4(5):518-522. Sept./Oct. 1981.

LIEBELT, P.B. *An introduction to optimal estimation.* California Addison-Wesly, 1967.

LOPES, R.V.F. *Determinação de atitude do satélites artificiais atra vés de estimadores de estado.* Dissertação de mestrado em Ciências Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982, (INPE-2608-TDL/105).

LOPES, R.V.F.; CARRARA; V.; KUGA, H.K.; MEDEIROS, V.M. *Cálculo recur sivo do vetor campo geomagnético.* São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2865-PRE/400).

MAYBECK, P.S. *Stochastic models, estimation and control.* New York, Academic Press, 1979, v.1.

MAYO, R.A. Relatif quaternion state transition relation. *Journal of Guidance and Control,* 2(1):44-48, 1978.

MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics.* New York, Mc.Graw-Hill, 1970. (Advanced Engineering).

MORO, J. *Simulação do movimento e de observações de atitude para saté lites artificiais terrestres.* São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2649-RPI/076).

ORLANDO, V. *Técnicas estocásticas aplicadas a suavização, tratamento de tendenciosidades e compressão de dados de rastreamento ou teleme tria de satélites artificiais.* Tese de Doutoramento em Ciência Es pacial. São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2909-TDL/148).

PICOVAROV, M.L. Determination of artificial earth satellite under the influence of gravitational and magnetic torque. *Cosmic Reseach,* 17(1):133-135, July 1979.

RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. *Estimação adaptativa do ruído no estado pa ra estimadores sequenciais.* São José dos Campos, INPE, abril 1982. (INPE-2285-RPI/069).

SAWAME, M.M. *Simulação numérica das saídas de um sensor solar digital de dois eixos.* Trabalho de Graduação. São José dos Campos, ITA, 1985.

SHUSTER, M.D.; OH, S.D. Three axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance and Control,* 4(1):70-77, Jan./ Feb. 1981.

SORENSON, H.W. Kalman filtering techniques. In: ADVANCES IN CONTROL SYSTEMS; Theory and applications. New York, Academic, 1966. V.3, P. 219-292.

TITOV, A.M.; SHCHUKIN, V.P. Determining the orientation of an artificial satellite in a two-vector system of measurements. *Cosmic Research*, 16(1): 1-6, July 1978.

WERTZ, J.R. *Spacecraft attitude determination and control*. London, D. Reidel, 1978. (Astrophysics and Space Library).

WHITTAKER, E. *Analytical dynamics of particles and rigid bodies*. London, Cambridge University, 1965.

APÊNDICE A

QUATÉRNIONS

O teorema de Euler afirma a existência e unicidade de um eixo (Eixo de Euler) associado a dois referenciais quaisquer, de forma que uma simples rotação em torno do referido eixo faz com que um dos referenciais assuma a orientação do outro. Os cossenos diretores deste eixo (E1, E2, E3) e o ângulo de rotação mencionado (θ) são utilizados para definir os parâmetros simétricos de Euler. Estes parâmetros são usados para medir a atitude de um referencial e, portando, de um sólido com o qual este referencial seja solidário em relação a outro referencial. Os parâmetros simétricos de Euler são dados por:

$$q_1 = \text{sen}(\frac{\theta}{2})\ E1; \tag{A.1}$$

$$q_2 = \text{sen}(\frac{\theta}{2})\ E2; \tag{A.2}$$

$$q_3 = \text{sen}(\frac{\theta}{2})\ E3; \tag{A.3}$$

$$q_4 = \cos(\frac{\theta}{2}). \tag{A.4}$$

Utilizando a ágebra de quatérnions, é verificado que:

$$\underline{U}_S = \underline{q}^* \otimes \underline{U}_I \otimes \underline{q}, \tag{A.5}$$

onde $\underline{U}_S$ é um quatérnion com parte escalar nula e parte vetorial composta pelas componentes de um vetor genérico $\underline{U}$, solidário ao sólido cuja atitude se deseja estudar, e de forma análoga $\underline{U}_I$, representa o mesmo vetor no sistema "I", por exemplo, o sistema de coordenadas inerciais. O quatérnion $\underline{q}$ é então o quatérnion que representa a atitude do referencial "S" em relação ao referencial "I".

Supondo-se $\underline{q}(t)$ como o quatérnion que representa a atitude do referencial "S" em relação ao referencial "I" no tempo "t";

$\underline{q}(t+dt)$ como o quatérnion que representa a atitude do referencial "S" em relação ao referencial "I" no tempo "t+dt"; e finalmente $\underline{\delta q}$ como a representação da atitude do referencial "S" no instante "t+dt" em relação ao mesmo referencial "S" no instante "t". Tais considerações permitem escrever que:

$$\underline{U}_S(t+dt) = \underline{\delta q}^* \otimes \underline{U}_S(t) \otimes \underline{\delta q}; \tag{A.6}$$

utilizando a Equação A.5, tem-se:

$$q^*(t+dt) \otimes \underline{U}_I(t+dt) \otimes \underline{q}(t+dt) = \underline{\delta q}^* \otimes \underline{q}^*(t) \otimes \underline{U}_I(t) \otimes \underline{q}(t) \otimes \underline{\delta q}. \tag{A.7}$$

A equação anterior fornece:

$$\underline{q}(t+dt) = \underline{q}(t) \otimes \underline{\delta q} \tag{A.8}$$

sendo

$$\delta q_1 = E1\ \mathrm{sen}(d\theta/2), \tag{A.9}$$

$$\delta q_2 = E2\ \mathrm{sen}(d\theta/2), \tag{A.10}$$

$$\delta q_3 = E3\ \mathrm{sen}(d\theta/2), \tag{A.11}$$

$$\delta q_4 = \cos(d\theta/2), \tag{A.12}$$

onde E1, E2, E3 são os cossenos diretores do eixo de rotação em relação ao sistema de coordenadas "S" no instante "t" e $d\theta$ é a rotação infinitesimal correspondente ao tempo "dt".

Utilizando a Equação 2.3c; a Equação A.8 pode ser reescrita como:

$$\underline{q}(t+dt) = [\cos(d\theta/2)\ I + \mathrm{sen}(d\theta/2)\ \Lambda(\hat{E},\ 0)]\ \underline{q}(t), \tag{A.13}$$

onde I é uma matriz identidade de dimensão 4x4, $\Lambda(.,.)$ é a função matricial dada pela Equação 2.3b e $\hat{E}$ é o vetor composto pelos cossenos diretores do eixo de Euler.

No caso de se descrever o movimento da atitude é conveniente converter a Equação A.8 em equação diferencial. Neste caso, "dt" é considerado uma quantidade infinitesimal e $d\theta = \omega.dt$, onde ω é magnitude da velocidade angular instantânea do sistema "S". Assim, as seguintes aproximações podem ser feitas:

$$\cos(d\theta/2) \approx 1; \quad \mathrm{sen}(d\theta/2) \approx (\omega dt)/2.$$

Considerando as aproximações efetuadas anteriormente a Equação A.13 pode ser escrita como:

$$\underline{q}(t+dt) \approx [I + \Lambda(\omega,\ 0)\ dt\ /2]\ \underline{q}(t), \tag{A.14}$$

onde $\Omega(\omega,\ 0)$ é a função matricial dada pela Equação 2.3b e $\underline{\omega}$ é o vetor velocidade angular do corpo ao qual o sistema "S" é solidário.

Lembrando que:

$$\dot{\underline{q}}(t) = \frac{d\underline{q}(t)}{dt} = \lim_{dt \to 0} \left[\frac{\underline{q}(t+dt) - \underline{q}(t)}{dt} \right], \tag{A.15}$$

substituindo a Equação A.14 na A.15 tem-se:

$$\dot{\underline{q}}(t) = \lim_{dt \to 0} \left[\frac{\Lambda(\omega,\ 0)\ dt\ \underline{q}(t)}{2\ dt} \right],$$

que resulta finalmente em:

$$\dot{\underline{q}}(t) = \frac{1}{2}\ \Lambda(W,\ 0)\ \underline{q}(t), \tag{A.16}$$

ou ainda, em termos da álgebra de quatérnion, como pode ser visto pela Equação 2.3c, em:

$$\dot{\underline{q}}(t) = \frac{1}{2}\, \underline{q}(t) \otimes \underline{\omega}. \tag{A.17}$$

APÊNDICE B

DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA Pqq

A matriz de covariância Pqq, de dimensão (4x4), para o erro na estimativa do quatérnion de atitude é singular. Isto decorre imediatamente do vínculo existente entre as componentes do quatérnion expresso pela Equação 2.55.

A matriz de covariância Pqq é definida como:

$$Pqq = E\{(\underline{q}_V - \hat{\underline{q}})\ (\underline{q}_V - \hat{\underline{q}})^T\} = E\{\underline{\Delta q}\ \underline{\Delta q}^T\}, \tag{B.1}$$

onde $(\underline{\Delta q})$ é o erro entre o quatérnion estimado e o quatérnion verdadeiro.

Entretanto o erro entre o quatérnion estimado e o verdadeiro pode ser expresso em termos angulares como uma pequena rotação que faz com que o quatérnion estimado coincida com o quatérnion verdadeiro. Em termos da álgebra de quatérnion tem-se:

$$\underline{\delta q} = \hat{\underline{q}}^* \otimes \underline{q}_V, \tag{B.2}$$

ou ainda

$$\underline{q}_V = \hat{\underline{q}} \otimes \underline{\delta q}. \tag{B.3}$$

Para o enfoque de pequenos ângulos, o quatérnion incremental $(\underline{\delta q})$ corresponde a uma rotação infinitesimal e assim sendo / torna-se razoável efetuar a seguinte aproximação:

$$\underline{\delta q} \approx \begin{bmatrix} \underline{p} \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\theta_1/2 \\ \delta\theta_2/2 \\ \delta\theta_3/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{B.4}$$

onde $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$ são os ângulos que caracterizam uma rotação infinitesimal.

Considerando por hipótese ($\underline{\delta p}$) como não-tendencioso, têm-se:

$$E(\underline{\delta p}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E(\underline{\delta p}\ \ \underline{\delta p}^T) = \frac{P_{\theta\theta}}{4},$$

sendo $P_{\theta\theta}$ uma matriz de dimensão 3x3 não-singular, definida pela Equação 2.99.

O erro cometido na estimativa do quatérnion $\underline{\Delta q}$, como mostrado na Equação B.1, é dado por:

$$\underline{\Delta q} = \underline{q}_V - \underline{\hat{q}}, \tag{B.5}$$

Substituindo a Equação B.3 na Equação B.5 e utilizando a Equação 2.3c, tem-se que:

$$\underline{\Delta q} = [\Lambda(\underline{\delta p}, 1) - I]\ q, \tag{B.6}$$

onde I é a matriz identidade de dimensão (4x4) e $\Lambda(\underline{\delta p}, 1)$ é a função matricial dada pela Equação 2.3d.

Substituindo a Equação B.4 na Equação (B.6), tem-se:

$$\underline{\Delta q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \delta\theta_3 & -\delta\theta_2 & \delta\theta_1 \\ -\delta\theta_3 & 0 & \delta\theta_1 & \delta\theta_2 \\ \delta\theta_2 & -\delta\theta_1 & 0 & \delta\theta_3 \\ -\delta\theta_1 & -\delta\theta_2 & -\delta\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \tag{B.7}$$

ou ainda:

$$\underline{\Delta q} = \frac{Z(\hat{\underline{q}})}{2} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{Bmatrix}$$

onde $Z(\underline{q})$ é a função matricial definida por:

$$Z^T(\underline{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & -q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & -q_3 \end{bmatrix}. \qquad (B.9)$$

Assim, a matriz de covariância Pqq dada pela Equação B.1 pode ser reescrita como:

$$Pqq = \frac{1}{4}\,[Z(\hat{\underline{q}})\ P\theta\theta\ Z^T(\hat{\underline{q}})], \qquad (B.10)$$

ou ainda

$$Pqq = [Z(\hat{\underline{q}})\ Ppp\ Z^T(\hat{\underline{q}})]. \qquad (B.11)$$

Através da Equação B.10 pode-se calcular a matriz de covariância associada aos desvios angulares,

$$P\theta\theta = 4[Z^T(\hat{\underline{q}})\ Pqq\ Z(\hat{\underline{q}})]. \qquad (B.12)$$

APÊNDICE C

MODELAGEM DOS VETORES DE OBSERVAÇÃO E DE REFERÊNCIA

No desenvolvimento do Algoritmo QUEST, admitiu-se que o erro nas observações ($\delta \underline{Y}$) e referencias ($\delta \underline{A}$) tenham uma distribuição axialmente simétrica no plano perpendicular aos respectivos vetores de observação "Y" e de referência "A".

Uma determinada direção observada ou de referência pode ser representada por um versor "Y", escrito num referencial adequado, onde:

$$\hat{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T \tag{C.1}$$

e

$$|\hat{Y}| = 1; \tag{C.2}$$

as barras colocadas na Equação C.2 denotam a operação de módulo.

Um versor $\hat{N}$ que seja normal a $\hat{Y}$ pode ser obtido por:

$$\hat{N} = \frac{(\hat{Y}\,\hat{Y}^T - I)\,\underline{V}}{|(\hat{Y}\,\hat{Y}^T - I)\,\underline{V}|}, \tag{C.3}$$

onde I é a matriz identidade (3x3) e $\underline{V}$ é um vetor qualquer diferente de zero e $\hat{Y}$.

Um versor $\hat{T}$ que seja simultaneamente perpendicular a $\hat{Y}$ e $\hat{N}$ pode ser obtido fazendo o produto vetorial de $\hat{Y}$ por $\hat{N}$, ou seja:

$$\hat{T} = \hat{Y} \times \hat{N}. \tag{C.4}$$

Assim, o plano definido pelos versores $\hat{T}$ e $\hat{N}$ é perpendicular ao versor $\hat{Y}$.

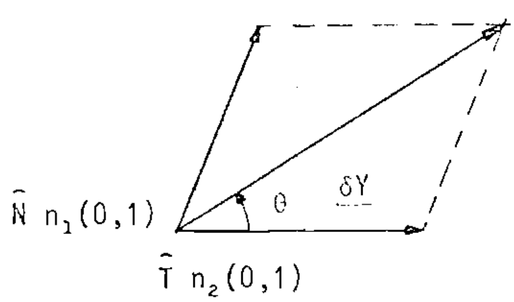
Define-se então o vetor erro como:

$$\underline{\delta Y} \triangleq \sigma\{n_1(0,\ 1)\ \hat{N} + n_2(0,\ 1)\ \hat{T}\}, \tag{C.5}$$

onde $n_1(0,\ 1)$ e $n_2(0,\ 1)$ são duas variáveis gaussianas normais independentes, $\hat{N}$ e $\hat{T}$ são os versores que definem o plano normal a $\hat{Y}$ e (σ) é a precisão com que a direção representada por $\hat{Y}$ será determinada.

Analisando a Expressão C.5 vê-se que o vetor erro $(\underline{\delta Y})$ é coplanar com os versores $\hat{Y}$ e $\hat{N}$, sendo desta forma perpendicular ao versor $\hat{Y}$.

Uma visão geométrica da disposição do vetor erro no plano perpendicular ao versor $\hat{Y}$ é mostrada na figura a seguir.



Plano definido
pelos vetores $\hat{T}$ e $\hat{N}$.

A direção do vetor $\underline{\delta Y}$, caracterizada pelo ângulo θ, é tal que:

$$\theta = \arctan(\beta) \tag{C.6}$$

sendo β dado por

$$\beta = \frac{n_1(0,\ 1)}{n_2(0,\ 1)}. \qquad (C.7)$$

Como a razão de duas variáveis aleatórias gaussianas normalizadas e independentes tem distribuição de Cauchy, (Davemport, 1970), dada por:

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi(1 + \beta^2)}, \qquad (C.8)$$

pode-se demonstrar que:

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi};\ \theta \in [0,2\pi]. \qquad (C.9)$$

Portanto o erro $\underline{\delta Y}$ tem distribuição uniformemente distribuída entre 0 e 2π.

APÊNDICE D

CÁLCULO DO GRADIENTE DE $f(X_t, t)$

Seja a função matricial:

$$F[t;\ X(to)] = \frac{\partial f(X_t,\ t)}{\partial X}$$

onde $f(X_t, t)$ é dada pelas Equações 3.37.

Seque que:

$$F[t;\ X(to)] = \left[\begin{array}{c|c} F1 & F2 \\ \hline 0(3x4) & F3 \end{array}\right],$$

onde 0(3x4) é a matriz nula (3x4); e as matrizes F1, F2, F3 são dadas por:

$$F1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & X_7 & -X_6 & X_5 \\ -X_7 & 0 & X_5 & X_6 \\ X_6 & -X_5 & 0 & X_7 \\ -X_6 & -X_6 & -X_7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X_4 & -X_3 & X_2 \\ X_3 & X_4 & X_1 \\ -X_2 & X_1 & X_4 \\ -X_1 & -X_2 & -X_3 \end{bmatrix},$$

$$F3 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 X_7 & \lambda_1 X_6 \\ \lambda_2 X_7 & 0 & \lambda_2 X_5 \\ \lambda_3 X_6 & \lambda_3 X_5 & 0 \end{bmatrix}$$