

Noções de Filtro de Kalman

Alexandre Nowosad

DMD-CPTEC-INPE

Introdução

- Estimação de processos estocásticos gerados por equações de diferença aleatoriamente perturbadas.
- Abordagem primeiramente formulada por Kalman (1960).
- Primeiras tentativas (sem muito impacto): Jones (1965) e Petersen (1973).
- Tentativas melhor-sucedidas: Ghil (1981), Dee (1985), Parrish e Cohn (1985).

Modelos do Filtro:

- O modelo atmosférico:

$$w_{n+1} = F_n w_n + e_n^q$$

$$E \{e_n^q\} = 0, \quad E \left\{ e_{n_1}^q \left(e_{n_2}^q \right)^T \right\} = \begin{cases} Q_{n_1} & \text{se } n_1 = n_2 \\ 0 & \text{se } n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

- Relação entre análise (a) e previsão (p):

$$w_{n+1}^f = F_n w_n^a$$

- Os erros de previsão (f) e análise (a):

$$e_n^f \equiv w_n^f - w_n \quad e \quad e_n^a \equiv w_n^a - w_n$$

- As matrizes de covariância de erro de previsão (f) e análise (a):

$$P_n^f = E \left\{ e_n^f \left(e_n^f \right)^T \right\} \quad e \quad P_n^a = E \left\{ e_n^a \left(e_n^a \right)^T \right\}$$

- Modelo de observação (z):

$$z_n = H_n w_n + e_n^o$$

$$E \left\{ e_n^o \right\} = 0, \quad E \left\{ e_{n_1}^o \left(e_{n_2}^o \right)^T \right\} = \begin{cases} R_{n_1} & \text{se } n_1 = n_2 \\ 0 & \text{se } n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

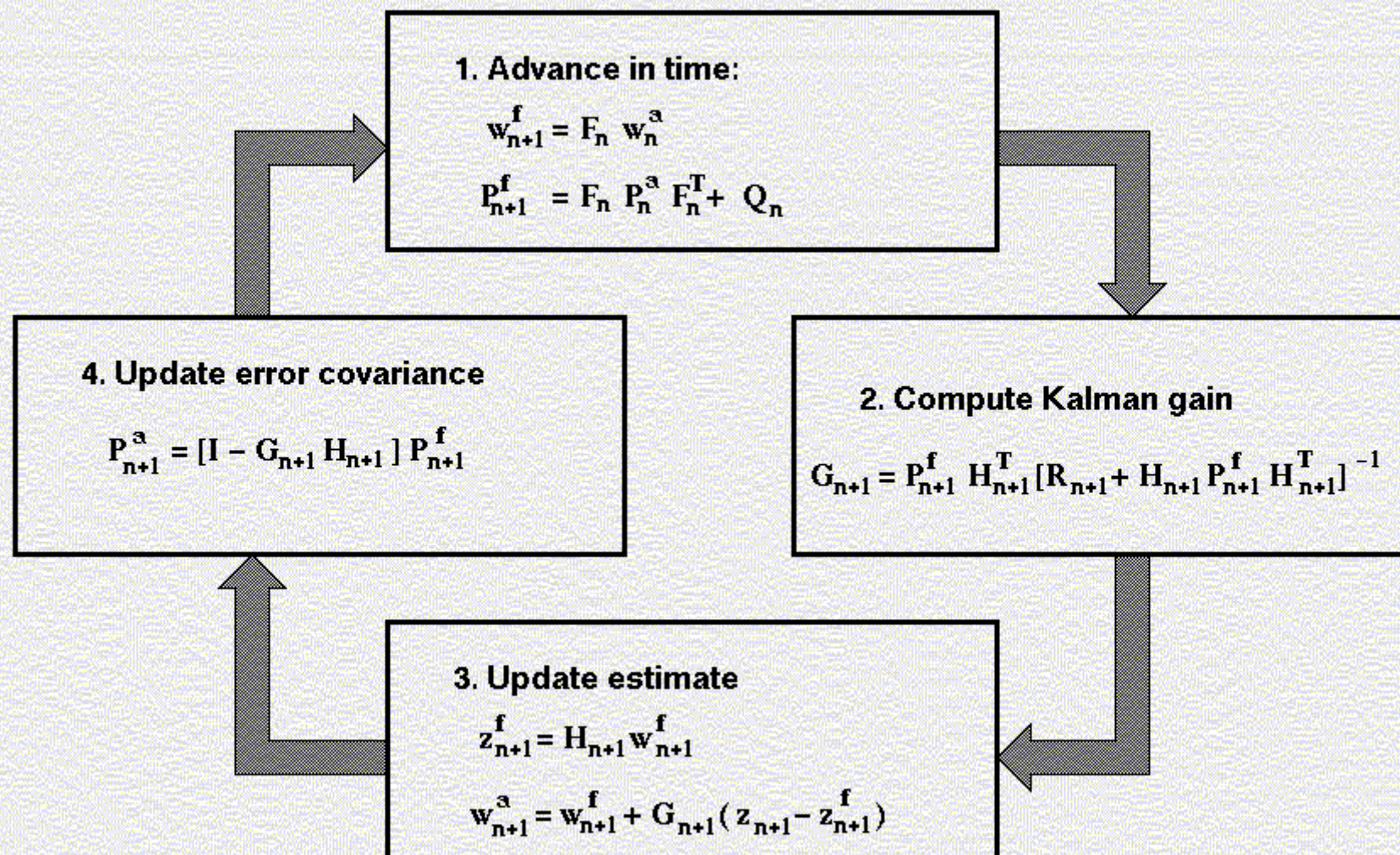
- Relação entre observação (z) e previsão (f):

$$z_n^f \equiv H w_n^f$$

- Minimizar a função custo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \left(z_i - H_{ni} w \right)^T \left(R_i \right)^{-1} \left(z_i - H_{ni} w \right) \\ + \frac{1}{2} \left(w - w^f \right)^T \left(P^f \right)^{-1} \left(w - w^f \right)$$

- Algoritmo do Filtro:



- Estensões:

- FK Estendido:

$$w_{n+1} = f(w, n) + e_n^q \Rightarrow w_{n+1}^f = f_n(w_n^q)$$

$$f(w, n) \cong f(E\{w\}, n) + \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{w=E\{w\}} (w - E\{w\}), \quad F_n \leftarrow \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{w=w_n^q}$$

$$z_n = h(w, n) + e_n^o \Rightarrow z_n^f = h_n(w_n^f)$$

$$h(w, n) \cong h(E\{w\}, n) + \left. \frac{\partial h}{\partial w} \right|_{w=E\{w\}} (w - E\{w\}), \quad H_n \leftarrow \left. \frac{\partial h}{\partial w} \right|_{w=w_n^f}$$

- FK Simplificado: reduzir tamanho de F_n

$$P_n^f = F_n P_n^a F_n^T + Q_n$$

$$\dim(w_n^f) = m \Rightarrow m^3 \text{ multiplicações}$$

- FK por Conjuntos:

$$\hat{w}_n^{a,f} = E\{w_n^{a,f}\}$$

$$\hat{P}_n^{a,f} = E\left\{\left(w_n^{a,f} - \hat{w}_n^{a,f}\right)\left(w_n^{a,f} - \hat{w}_n^{a,f}\right)^T\right\}$$

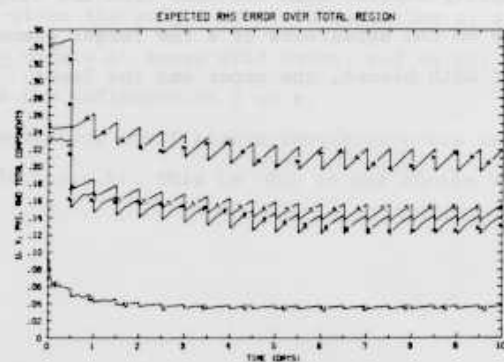
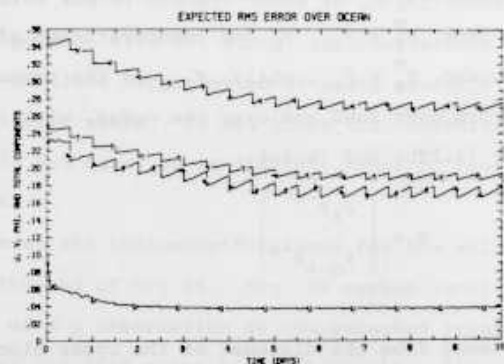
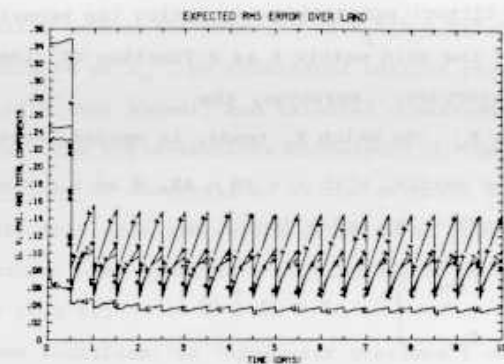


Fig. 6 This figure and the following ones show the properties of the estimated algorithm (2.11) in the presence of system noise, $Q \neq 0$. This figure gives the E_{rms} estimation error, and is homologous to Fig. 2. Notice the sharper increase of error over land between synoptic times, and the convergence of each curve to a periodic, nonzero function.