



Órbitas nas vizinhanças da inclinação crítica.

Alberto Enrique Rodríguez Castilla¹, Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes²,
Profa. Dra. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita².

¹ Instituto de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal de São Paulo.
Aluno de Mestrado em Matemática Pura e Aplicada.

² Instituto de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal de São Paulo.
Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada.

alberto.rodriguez@unifesp.br

Resumo. *Este trabalho consiste em analisar a estabilidade das órbitas de satélites espaciais orbitando satélites planetários nas vizinhanças de inclinações críticas. Tal análise envolve principalmente o estudo do problema dos dois corpos, das Equações planetárias de Lagrange, do potencial gravitacional de um planeta, das equações de movimento na forma hamiltoniana e da estabilidade de Lyapunov.*

Palavras-chave: Satélites; Órbitas; Hamiltoniana; Inclinação crítica; Estabilidade de Lyapunov.

1. Introdução

Os satélites artificiais são empregados em diversas atividades e entre elas podemos citar: exploração espacial, posicionamento, realização de experiências em ambiente de micro gravidade, estudos geodinâmicos, monitoramento do clima, estudo de atmosferas e de campos magnéticos planetários, como elo em telecomunicações, aplicações militares, entre outras. O presente trabalho refere-se à análise dos movimentos orbitais de satélites artificiais orbitando satélites planetários levando-se em conta a distribuição não uniforme de massa do corpo central. Missões espaciais recentes mostram interesse na exploração de satélites lunares do nosso sistema solar aproveitando pontos (órbitas estáveis), por exemplo, para efetuar manobras com consumo mínimo de combustível.

É sabido que quando se considera, no potencial devido a distribuição não uniforme de massa do corpo central, apenas termos seculares até a ordem do coeficiente J_2 , o sistema de equações que descreve o movimento orbital de um satélite artificial é integrável analiticamente. Nesse caso verifica-se também que o pericentro não precessiona quando a inclinação é $63,43^\circ$ e tal inclinação é chamada de “inclinação crítica”. Tal órbita vem sendo extensivamente estudadas em [Allan 1970], [Garfinkel 1960], [Hughes 1981], [Jupp 1987] e [Tzirti, Tsiganis and Varvoglis 2009]. Quando outros termos do potencial são considerados a inclinação e o pericentro oscilam ao redor de um determinado valor [Tzirti, Tsiganis and Varvoglis 2009]. Assim, o principal objetivo do presente trabalho é a análise da estabilidade de órbitas de satélites espaciais orbitando satélites planetários nas vizinhanças de inclinações críticas.



As equações do movimento serão utilizadas na forma hamiltoniana e comparadas com [Carvalho, Vilhena de Moraes, and Prado 2011a], fornecendo uma continuação aos trabalhos desenvolvidos por [Carvalho, Vilhena de Moraes and Prado 2009, 2010 e 2011a], [Carvalho, Vilhena de Moraes, Prado, and Elipe 2011b, 2012a e 2012b], [Costa, Vilhena de Moraes, Carvalho, and Prado 2020], [Tresaco, Carvalho, Elipe, Prado and Vilhena de Moraes 2018] e [Tzirti, Tsiganis and Varvoglis 2009].

2. Metodologia

Neste trabalho estamos considerando órbitas com inclinação chamada “crítica”, que têm a propriedade de manter o pericentro congelado o que permite, por exemplo, efetuar manobras com econômico consumo de combustível ou que um satélite permaneça mais tempo orbitando sobre uma parte visível do planeta. As órbitas Tundra, Supertundra e Molniya, por exemplo, utilizam deste artifício para economizar combustível [Capderou 2014]. Desde [Orlov and Gurfil (1953)] a inclinação crítica vem sendo extensivamente estudadas há mais de 60 anos. Uma extensa bibliografia sobre isso pode ser encontrada em [Costa, Vilhena de Moraes, Carvalho, and Prado 2020].

Veremos alguns resultados sobre o comportamento das órbitas nas vizinhanças de uma inclinação crítica e a importância do coeficiente C_{22} ; ao estudar a estabilidade de Lyapunov da solução do sistema de equações de movimento, na forma hamiltoniana, com condições iniciais específicas, quando $\delta = 0$ e quando $\delta \neq 0$.

3. Resultados e Discussão

A hamiltoniana média de 1ª ordem é dada em [Tzirti, Tsiganis and Varvoglis 2009] por:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}(L, G, H, h) &= \mathcal{H}_0(L) + \mathcal{H}_{J_2}(L, G, H) + \mathcal{H}_{c_{22}}(L, G, H, h) + \mathcal{H}_{n_{\mathcal{Q}}}(H) \\ &= -\frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\varepsilon\mu^4}{4G^3L^3} - \frac{3\varepsilon\mu^4H^2}{4G^5L^3} + \frac{3\delta\mu^4}{2G^3L^3}\cos(2h) - \frac{3\delta\mu^4H^2}{2G^5L^3}\cos(2h) - n_{\mathcal{Q}}H.\end{aligned}\quad (1)$$

Desta forma as equações médias de movimento de 1ª ordem ficam:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{3\varepsilon\mu^4}{4G^3L^4} + \frac{9\varepsilon\mu^4H^2}{4G^5L^4} - \frac{9\delta\mu^4}{2G^3L^4}\cos(2h) + \frac{9\delta\mu^4H^2}{2G^5L^4}\cos(2h), \quad (2)$$

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{3\varepsilon\mu^4}{4G^4L^3}\left(1 - 5\frac{H^2}{G^2}\right) + \frac{3\delta\mu^4}{2G^4L^3}\cos(2h)\left(-3 + 5\frac{H^2}{G^2}\right), \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = -n_{\mathcal{Q}} - \frac{3\varepsilon\mu^4H}{2G^5L^3} - \frac{3\delta\mu^4H}{G^5L^3}\cos(2h), \quad (4)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dG}{dt} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{3\delta\mu^4}{G^3L^3}\sin(2h) - \frac{3\delta\mu^4H^2}{G^5L^3}\sin(2h), \quad (7)$$



em que $\varepsilon = J_2 a_e^2$ e $\delta = -C_{22} a_e^2$.

Consideremos o sistema de equações de ordem 1:

$$\dot{\vec{x}} = F(t, \vec{x}), \quad (8)$$

com $F : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua definida em algum aberto $\hat{\Omega}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, a variável t toma valores em $\mathbb{R}$ e a variável x toma valores em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1 (Estabilidade de Lyapunov) Uma solução $\gamma : (\bar{a}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ da Equação 8 com condição inicial $\gamma(t_0) = \vec{x}_0$ é estável, no sentido de Lyapunov, se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta^* > 0$ tal que toda solução maximal β com condição inicial $\beta(t_0) \in B_{\delta^*}(\vec{x}_0)$ está definida para todo $t \in [t_0, +\infty)$ e satisfaz $\|\beta(t) - \gamma(t)\| \leq \epsilon$ para todo $t \in [t_0, +\infty)$.

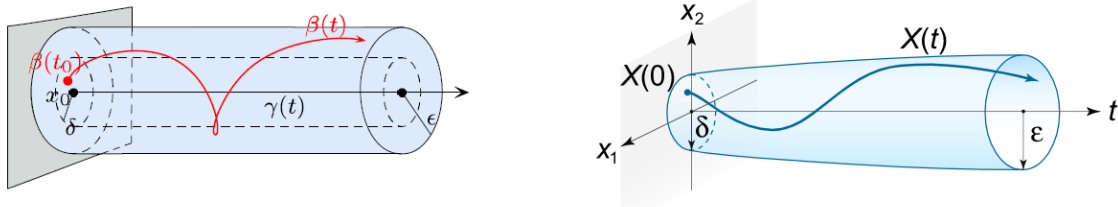


Figura 1. Estabilidade de Lyapunov. Fonte: [Viana and Espinar 2019] e [Svirin 2020].

Consideremos agora o problema para trajetórias estacionárias da equação autônoma:

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}) \quad (9)$$

onde $F : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores de classe C^1 . Seja $\vec{x}_0 \in \hat{\Omega}$ tal que $F(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Suponhamos que $\vec{x}_0 = \vec{0}$ é um ponto estacionário da Equação (diferencial) 9. Seja $\hat{\Omega}_0$ uma vizinhança de $\vec{0}$ contida no domínio $\hat{\Omega}$ do campo de vetores F e seja $V : \hat{\Omega}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $V(\vec{0}) = 0$. Diremos que V é *definida positiva* se $V(\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \in \hat{\Omega}_0 \setminus \{\vec{0}\}$, *definida negativa* se $V(\vec{x}) < 0$ para todo $\vec{x} \in \hat{\Omega}_0 \setminus \{\vec{0}\}$, *não negativa* se $V(\vec{x}) \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \hat{\Omega}_0 \setminus \{\vec{0}\}$, *não positiva* se $V(\vec{x}) \leq 0$ para todo $\vec{x} \in \hat{\Omega}_0 \setminus \{\vec{0}\}$.

A partir daqui suporemos que $V : \hat{\Omega}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Definimos a sua derivada ao longo do fluxo da seguinte forma:

$$\dot{V}(\vec{x}) = \frac{d}{dt} V(\beta(t)) \big|_{t=0} = DV(\vec{x})F(\vec{x}) \quad (10)$$

para cada $\vec{x} \in \hat{\Omega}_0$, onde $\beta(t)$ representa qualquer solução da Equação 9 com condição inicial $\beta(0) = \vec{x}$. Observe que $\dot{V}$ é contínua e $\dot{V}(\vec{0}) = 0$, pois supomos que $F(\vec{0}) = \vec{0}$.

Definição 2 Dizemos que V é uma função de Lyapunov para o ponto estacionário $\vec{x}_0 = \vec{0}$ se

- (1) V é definida positiva e
- (2) $\dot{V}$ é não positiva.

Teorema 1 Se existe uma função de Lyapunov $V : \hat{\Omega}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ em alguma vizinhança do ponto estacionário $\vec{x}_0 = \vec{0}$ então a respectiva trajetória estacionária $\gamma(t) \equiv \vec{0}$ é estável.



Considere agora a Equação 8 e suponhamos que $F(t, \vec{0}) = \vec{0}$ e $\gamma(t) = \vec{0}$ para todo $t > \bar{a}$. Seja $\hat{\Omega}_0$ uma vizinhança da origem tal que $(\bar{a}, +\infty) \times \hat{\Omega}_0$ está contido no domínio $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ da função F . Dizemos que uma função contínua $V : (\bar{a}, +\infty) \times \hat{\Omega}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é *definida positiva* (respectivamente, não negativa) se $V(t, \vec{0}) = 0$ para todo $t > \bar{a}$ e existe uma função $V_0 : \hat{\Omega}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida positiva (respectivamente, não negativa), tal que $V(t, \vec{x}) \geq V_0(\vec{x})$ para todo $(t, \vec{x}) \in (\bar{a}, +\infty) \times \hat{\Omega}_0$. A partir daqui, suponhamos que V é de classe C^1 . A sua derivada ao longo do fluxo é dada por

$$\dot{V}(t, \vec{x}) = \partial_t V(t, \vec{x}) + \partial_{\vec{x}} V(t, \vec{x}) F(t, \vec{x}).$$

Observe que $\dot{V}$ é contínua e $\dot{V}(t, \vec{0}) = 0$ para todo $t > \bar{a}$, uma vez que supomos $V(t, \vec{0}) = 0$ e $F(t, \vec{0}) = \vec{0}$ para todo $t > \bar{a}$.

Definição 3 Dizemos que V é uma função de Lyapunov para a solução estacionária $\gamma(t) \equiv 0$ se

- (1) V é definida positiva e
- (2) $\dot{V}$ é não positiva.

O resultado a seguir generaliza o Teorema 1 e sua demonstração pode ser encontrada em [Viana and Espinar 2019].

Teorema 2 (Lyapunov) Se existe uma função de Lyapunov $V : (\bar{a}, +\infty) \times \hat{\Omega}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ então a solução estacionária $\gamma(t) \equiv \vec{0}$ é estável em todo tempo $t_0 > \bar{a}$.

Definição 4 (Inclinação crítica) Se existe uma inclinação i tal que $w(t) = w_0$, para todo $t \in I$, então i é uma inclinação crítica (i_c).

Relembramos que δ e ϵ representam não uniformidades da distribuição de massa uniforme do corpo central e que levam a perturbações na órbita Kepleriana do problema dos dois corpos. Observamos que a ordem de grandeza de δ e ϵ depende do corpo que está sendo usado (no caso da Terra $|\delta|$ é quase mil vezes menor do que $|\epsilon|$) e para determinados corpos do sistema solar pode acontecer deles serem da mesma ordem de grandeza. Vamos estudar a influência de ϵ , isto é, do coeficiente C_{22} , nas vizinhanças de uma inclinação particular, a inclinação crítica, motivo deste trabalho e que será obtida a seguir, para o caso em que $\delta = 0$.

Se $\delta = 0$, as Equações 2 a 7 ficam

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{3\epsilon\mu^4}{4G^3L^4} + \frac{9\epsilon\mu^4H^2}{4G^5L^4}, \quad (11)$$

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{3\epsilon\mu^4}{4G^4L^3} \left(1 - 5\frac{H^2}{G^2}\right), \quad (12)$$

$$\frac{dh}{dt} = -n_{\mathcal{Q}} - \frac{3\epsilon\mu^4H}{2G^5L^3}, \quad (13)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dG}{dt} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (16)$$



Verificamos assim que as variáveis L , G e $H = H_c$ são constantes para quaisquer condições iniciais. Por outro lado, se quisermos que o pericentro permaneça constante, isto é, $\frac{dg}{dt} = 0$, temos que

$$1 - 5 \frac{H_c^2}{G^2} = 0 \Rightarrow \cos^2(i_c) = \frac{G^2 \cos^2(i_c)}{G^2} = \frac{H_c^2}{G^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos(i_c) = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto, se $\delta = 0$, $i_c \approx 63,4349488^\circ$ e $i_c \approx 116.5650512^\circ$ definem inclinações críticas quando a órbita é direta ou retrógrada, respectivamente. De acordo com [Jupp 1987] e [Coffey, Deprit, and Miller (2019)], foi [Orlov and Gurfil 1953] o primeiro que chamou a atenção para essa incomum situação, chamada inclinação crítica que acontece quando $i \equiv \pm \arctan(2) \mod \pi$. Satélites em órbita com tais inclinações têm aplicações práticas importantíssimas na área de telecomunicação (por exemplo o satélite Mólniya) e em manobras orbitais.

Fazendo

$$K_1 = \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{3\varepsilon\mu^4}{4G^3L^4} + \frac{9\varepsilon\mu^4H_c^2}{4G^5L^4}, \quad K_2 = -\frac{3\varepsilon\mu^4}{4G^4L^3} \left(1 - 5\frac{H_c^2}{G^2}\right), \quad K_3 = -n\mathcal{L} - \frac{3\varepsilon\mu^4H_c}{2G^5L^3}$$

e $G^2 = 5H_c^2$; isto é, para órbitas com inclinação crítica, portanto $K_2 = 0$ e $g(t) = g_0$ ao longo do tempo. Em tais condições o sistema de Equações 11 a 16 fica

$$\frac{dl}{dt} = K_1, \quad \frac{dg}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = K_3, \quad \frac{dL}{dt} = 0, \quad \frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{dH}{dt} = 0. \quad (17)$$

Agora, seja $\epsilon > 0$ e γ uma solução do sistema de Equações 17 com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0 = (l_0, g_0, h_0, L, G, H_c)$, então para todo $t \in [t_0, +\infty)$ temos que:

$$\gamma(t) = (K_1t + l_1, g_0, K_3t + h_1, L, G, H_c) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Se $\delta^* = \epsilon$, então para toda solução maximal β do sistema de Equações 17;

$$\beta(t) = (K_1t + k_1, g_0, K_3t + k_3, L, G, H_c) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};$$

definida para todo $t \in [t_0, +\infty)$, com condição inicial $\beta(t_0) \in B_{\delta^*}(x_0)$; isto é,

$$\begin{aligned} \|\beta(t_0) - x_0\| &= \|\beta(t_0) - \gamma(t_0)\| \\ &= \|(K_1t_0 + k_1 - K_1t_0 - l_1, 0, K_3t_0 + k_3 - K_3t_0 - h_1, 0, 0, 0)\| \\ &= \|(k_1 - l_1, 0, k_3 - h_1, 0, 0, 0)\| < \delta^*; \end{aligned}$$

temos que, para todo $t \in [t_0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \|\beta(t) - \gamma(t)\| &= \|(K_1t + k_1 - K_1t - l_1, 0, K_3t + k_3 - K_3t - h_1, 0, 0, 0)\| \\ &= \|(k_1 - l_1, 0, k_3 - h_1, 0, 0, 0)\| \\ &< \delta^* = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 1 (Estabilidade de Lyapunov) temos que γ é uma solução estável, no sentido de Lyapunov (Ver Figura 1).



Agora, passamos a considerar o caso $\delta \neq 0$ para estudar a estabilidade da solução do sistema de Equações 2 a 7 nas vizinhanças da inclinação crítica, mais especificamente, a estabilidade do sistema independente: Equação 25. Se $\delta \neq 0$, então as Equações 2 a 7 ficam:

$$\frac{dl}{dt} = F_1(h, H) = \frac{\mu^2}{L^3} + \frac{D}{2L} [G^2 - 3H^2] - \frac{3}{2L} [A + BH^2] \cos(2h), \quad (18)$$

$$\frac{dg}{dt} = F_2(h, H) = \frac{DG}{2} \left[1 - 5 \frac{H^2}{G^2} \right] + \frac{BG}{2} \left[3 - 5 \frac{H^2}{G^2} \right] \cos(2h), \quad (19)$$

$$\frac{dh}{dt} = F_3(h, H) = C + [D + B \cos(2h)] H, \quad (20)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{dG}{dt} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{dH}{dt} = F_4(h, H) = [A + BH^2] \sin(2h), \quad (23)$$

em que,

$$A = \frac{3\delta\mu^4}{G^3L^3}, \quad B = -\frac{3\delta\mu^4}{G^5L^3}, \quad C = -n\mathcal{Q}, \quad D = -\frac{3\varepsilon\mu^4}{2G^5L^3}. \quad (24)$$

Logo, o sistema independente de equações diferenciais, constituído por $\dot{h}$ e $\dot{H}$, Equações 20 e 23, fica

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = F_3(h, H) = C + [D + B \cos(2h)] H, \\ \frac{dH}{dt} = F_4(h, H) = [A + BH^2] \sin(2h), \\ (h(0), H(0)) = (h_0, H_0), \end{cases} \quad (25)$$

em que, $(h_0, H_0) \in (0, 2\pi) \times (0, G)$ para as órbitas diretas e $(h_0, H_0) \in (0, 2\pi) \times (-G, 0)$ para as órbitas retrógradas. Seja $\hat{\Omega} = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ e $F : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por $F(\vec{x}) = F(h, H) = (F_3(h, H), F_4(h, H))$. Então o sistema de Equações 25 é equivalente ao sistema de Equações definido por

$$\dot{\vec{x}} = F(\vec{x}) \quad (26)$$

Note que a Equação 26 é uma equação autônoma, onde F é um campo de vetores de classe C^1 . Por outro lado, $F_2(h, H) = 0$ quando $\cos^2(i) = \frac{H^2}{G^2} = \frac{\varepsilon + 5\delta \cos(2h)}{5\varepsilon + 10\delta \cos(2h)}$. Portanto,

se $\cos^2 i_c = \frac{H_c^2}{G^2} = \frac{1}{5}$ então $F_2(h_0, H_c) = 0$ se, e somente se, $\cos(2h_0) = 0$. Além disso, se $\rho \neq 0$ e $\rho \rightarrow 0$ temos que

$$\cos^2(i_c) = \frac{H_c^2}{G^2} = \frac{1}{5} + \rho \quad \text{e} \quad \cos(2h_0) = -\frac{25\rho}{[15 - 50\rho]\delta}, \quad \implies \quad F_2(h_0, H_c) = 0.$$

Assim, estudaremos a estabilidade de Lyapunov da solução $\gamma(t) = (h(t), H(t))$ da Equação 26 com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0 = (h_0, H_c)$ tal que $G^2 = 5H_c^2$, isto é, $i_c \approx 63,4349488^\circ$ e $i_c \approx 116,5650512^\circ$ quando a órbita é direta ou retrógrada, respetivamente.



Suponhamos $\gamma : (\bar{a}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e consideremos a mudança de variável $\vec{x} = \vec{y} + \gamma(t)$. Se $x(t)$ é solução da Equação 26 então $y(t) = x(t) - \gamma(t)$ satisfaz $\dot{\vec{y}}(t) = \dot{\vec{x}}(t) - \dot{\gamma}(t) = F(x(t)) - F(\gamma(t)) = F(y(t) + \gamma(t)) - F(\gamma(t))$, ou seja, $y(t)$ é solução da equação diferencial:

$$\dot{\vec{y}} = \bar{F}(t, \vec{y}), \quad \bar{F}(t, \vec{y}) = F(\vec{y} + \gamma(t)) - F(\gamma(t)). \quad (27)$$

$\bar{F}$ é de classe C^1 no domínio $\Upsilon = \{(t, \vec{y}) : t > \bar{a} \text{ e } \vec{y} + \gamma(t) \in \hat{\Omega}\}$ e $\bar{F}(t, 0) = 0$. Reciprocamente, se $y(t)$ é solução da Equação 27 então $x(t) = y(t) + \gamma(t)$ é solução da Equação 26. Ou seja, temos uma correspondência mediante translação entre as soluções das duas equações. Por outro lado, a solução $\gamma(t)$ da Equação 26 corresponde à solução constante $\bar{\gamma}(t) \equiv 0$ da Equação 27 e como a correspondência é mediante uma translação, $\gamma(t)$ é estável para a Equação 26 se e somente se a solução constante $\bar{\gamma}(t) \equiv 0$ é estável para a Equação 27. Note que $\bar{F}(t, \vec{y}) = (\bar{F}_3(t, \vec{y}), \bar{F}_4(t, \vec{y}))$, em que se $\vec{y} = (y_1, y_2)$,

$$\begin{aligned} \bar{F}_3(t, \vec{y}) &= F_3(\vec{y} + \gamma(t)) - F_3(\gamma(t)) \\ &= C + [D + B \cos(2(y_1 + h(t)))] [y_2 + H(t)] - C - [D + B \cos(2h(t))] H(t) \\ &= Dy_2 + By_2 \cos(2(y_1 + h(t))) + BH(t) [\cos(2(y_1 + h(t))) - \cos(2h(t))], \\ \bar{F}_4(t, \vec{y}) &= F_4(\vec{y} + \gamma(t)) - F_4(\gamma(t)) \\ &= [A + B(y_2 + H(t))^2] \sin(2(y_1 + h(t))) - [A + B(H(t))^2] \sin(2h(t)) \\ &= [A + B(H(t))^2] [\sin(2(y_1 + h(t))) - \sin(2h(t))] + B(y_2^2 + 2y_2H(t)) \sin(2(y_1 + h(t))). \end{aligned}$$

O sistema independente, Equação 25, é hamiltoniano de um grau de liberdade com espaço de fase bidimensional. A Figura 2 mostra o retrato de fase (h, H) no sistema girante $(\lambda_{22} = \lambda_{\oplus} = n_{\mathcal{L}} \neq 0)$ de um satélite artificial ao redor de Io. Figuras semelhantes ao retrato de fase no sistema girante para um satélite artificial ao redor da Lua, de Europa, de Calisto, de Ganimedes ou de Titã podem ser encontradas em [Costa, Vilhena de Moraes, Carvalho, and Prado 2020].

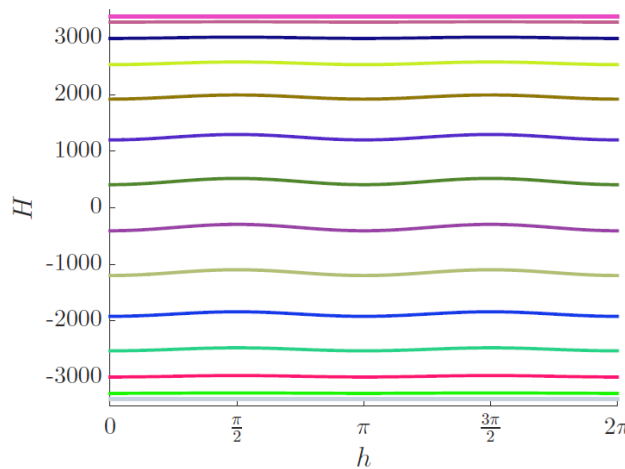


Figura 2. Retrato de fase (h, H) - sistema girante - satélite artificial ao redor de Io.
Fonte: [Costa, Vilhena de Moraes, Carvalho, and Prado 2020].



Vemos que $h(t)$ é sempre periódica e $H(t)$ é monótona no tempo. Pode-se notar na Figura 2 que o retrato de fase do sistema $(\dot{h}, \dot{H})$, quando o sistema é girante, só tem regiões de circulação. Observemos que quando se considera o efeito do C_{22} não existe trajetória tal que g (isto é, o pericentro) seja constante o que nos leva a introduzir um novo conceito: *inclinação quase crítica* [Costa, Vilhena de Moraes, Carvalho, and Prado 2020].

4. Conclusão

Neste trabalho, foi feita a análise da estabilidade de órbitas de satélites espaciais orbitando satélites planetários nas vizinhanças de inclinações críticas. As equações do movimento foram utilizadas na forma hamiltoniana e comparadas com com [Carvalho, Vilhena de Moraes, and Prado 2011a], fornecendo uma continuação aos trabalhos desenvolvidos por [Carvalho, Vilhena de Moraes and Prado 2009, 2010 e 2011a], [Carvalho, Vilhena de Moraes, Prado, and Elipe 2011b, 2012a e 2012b], [Costa, Vilhena de Moraes, Carvalho, and Prado 2020], [Tresaco, Carvalho, Elipe, Prado and Vilhena de Moraes 2018] e [Tzirti, Tsiganis and Varvoglis 2009]. A análise do sistema de equações 2 a 7 foi dividida em duas partes, considerando $\delta = 0$ e $\delta \neq 0$. Para o primeiro caso ($\delta = 0$), teremos que qualquer solução do novo sistema (Equações 11 a 16), com a condição $G^2 = 5H_c^2$ (isto é, $i_c \approx 63,4349488^\circ$ e $i_c \approx 116,5650512^\circ$, que definem inclinações críticas quando a órbita é direta ou retrógrada, respectivamente) é estável no sentido de Lyapunov, fazendo uso direito da Definição 1 (Estabilidade de Lyapunov).

Por outro lado, quando consideramos o efeito do C_{22} , isto é, $\delta \neq 0$, o sistema assume a forma do sistema de Equações 18 a 23, e não existe trajetória tal que o pericentro seja constante. Além disso, ao estudar a estabilidade da solução do sistema autônomo independente (Equação 25) com condição inicial $x_0 = (h_0, H_c)$, não temos solução analítica do sistema nem tampouco pontos de equilíbrio, pelo que fazendo uso da teoria de Estabilidade de Lyapunov, por meio de uma translação da solução, é possível estudar sua estabilidade, estudando a estabilidade da solução constante $\gamma(t) \equiv 0$ da Equação 27 não autônoma. Portanto, para trabalhos futuros pode-se pensar em achar uma função de Lyapunov, definida numa vizinhança da origem, definida positiva com derivada ao longo do fluxo não positiva e fazer uso do Teorema 2 (Lyapunov).

Agradecimentos: *A Deus por me dar o presente da vida. Á minha família e amigos. Aos meus queridos orientadores, Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes e Prof. Dra. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita. Ao Instituto de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal de São Paulo, direção e administração. Á Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).*

Referências

- [1] Allan, R. R. (1970). *The critical inclination problem: a simple treatment*. Celest. Mech. 2, 121-122.
- [2] Capderou, M. (2014). *Orbit and Mission*. In: Handbook of Satellite Orbits. Springer, Cham, p. 339-431.
- [3] Carvalho, J. P. D. S., Vilhena de Moraes, R. and Prado A. F. B. A. (2009). *Nonsphericity of the Moon and Near Sun-Synchronous Polar Lunar Orbits*. Mathematical Problems in Engineering, pp. 1-25.



- [4] Carvalho, J. P. D. S., Vilhena de Moraes, R. and Prado A. F. B. A. (2010). *Some Orbital Characteristics of Lunar Artificial Satellites*. Celest. Mech. Dyn. Astron., Vol. 108, No. 4, pp. 371-388.
- [5] Carvalho, J. P. D. S., Vilhena de Moraes, R. and Prado A. F. B. A. (2011a). *Planetary Satellite Orbiters: Applications for the Moon*. Mathematical Problems in Engineering (MPE), Volume 2011, Article ID 187478, 19 pages doi:10.1155/2011/187478.
- [6] Carvalho J. P. D. S., Elipe, A., Vilhena de Moraes, R. and Prado, A. F. B. A. (2011b). *Low-Altitude, Near-Polar And Near-Circular Orbits Around Europa*. Advances in Space Research., v.48, p.1 - 14.
- [7] Carvalho, J. P. D. S., Mourão, D. C., Elipe, A., Vilhena de Moraes, R. and Prado, A. F. B. A. (2012a). *Frozen Orbits around Europa*. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering.
- [8] Carvalho, J. P. D. S., Elipe, A., Vilhena de Moraes, R. and Prado, A. F. B. A. (2012b.) *Low-altitude, Near-polar and Near-circular Orbits Around Europa*. Advances in Space Research, vol49, p. 994-1006.
- [9] Coffey, S., Deprit, A. and Miller, B. R. (2019). *Quasi-Heliosynchronous Orbits..* In: Proceedings of the 2019 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference - AAS 19-780. Portland, ME: American Astronautical Society.
- [10] Costa, M. L. G. T. X., Vilhena de Moraes, R., Carvalho, J. P. DE S. and Prado, A. F. B. A. (2020). *An optimization approach to search for quasi-critical inclinations for direct and retrograde orbits: Applications for artificial satellites around Io*, Eur. Phys. J. Special Topics 229, 1429-1440.
- [11] Garfinkel, B. (1960). *On the Motion of a Satellite in the Vicinity of the Critical Inclination*. The Astronomical Journal, v 65, number 10, december.
- [12] Hughes, S. (1981). *The critical inclination: another look*. Celest. Mech. 25, 235-266.
- [13] Jupp, A.H. (1987). *The Critical Inclination problem - 30 years of progress*. Celestial mechanics. v. 43, n. 1-4, p. 127-138.
- [14] Orlov, A. A. and Gurfil, P. (1953) *Almost Circular Periodic Motions of a Particle of Matter Under the Gravitational Attraction of a Spheroid*. Reports of the State Astronomical Institute in Shternberg, n. 88-89.
- [15] Svirin, A. (2020) *Math 24: Basic Concepts of Stability Theory*. <https://www.math24.net/stability-theory-basic-concepts/>.
- [16] Tresaco, E., Carvalho, J. P. S., Elipe, A., Prado, A. F. B. A. and Vilhena de Moraes, R. (2018). *Averaged model to study long-term dynamics of a probe about Mercury*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, v. 130, p. 1.
- [17] Tzirti, S., K. Tsiganis and H. Varvoglis. (2009). *Quasi-critical orbits for artificial lunar satellites*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 104.3: 227-239.
- [18] Viana, M. and Espinar, J. (2019). *Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos*. <http://edo.impa.br/>.