



Análise do decaimento por arrasto de satélites Starlink usando a transformação de Kustaanheimo-Stiefel

Rebeca de Souza Ribeiro¹, Hélio Koiti Kuga², Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado², Cristiano Fiorilo de Melo³

¹Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil
Aluna de Doutorado do curso de Mecânica Espacial e Controle - CMC.

²Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil

³Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil

rebeca.ribeiro@inpe.br

Resumo. O crescimento acelerado da população de objetos nas LEOs, acentuado pelos recentes lançamentos das mega constelações, tem sido fonte de preocupação, por diversos motivos, desde a interferência que eles podem causar nas observações astronômicas, até ao risco de colisão em vista da superlotação das órbitas. Assim, diversos métodos estão em teste para a remoção ativa de debris em LEOs. Destes, os dispositivos para aumento de arrasto serão os alvos de estudo deste trabalho. Com o objetivo de avaliar o decaimento de satélites da constelação Starlink, foram realizadas simulações numéricas de órbitas LEOs destes veículos, dentro do Problema de Dois Corpos Perturbado, utilizando a transformação de Kustaanheimo-Stiefel, para melhorar a qualidade dos resultados em termos da precisão numérica. Os estudos realizados mostraram que as velas de arrasto possibilitam a redução do tempo de decaimento em até 1/3.

Palavras-chave: Astrodinâmica; Integração numérica; Transformação de Kustaanheimo-Stiefel; Arrasto atmosférico; Starlink.

1. Introdução

Em 24 de maio de 2019, a empresa SpaceX lançou os primeiros 60 satélites de sua mega constelação (MCDOWELL, 2020), que em sua totalidade possui previsão de 42 mil satélites em órbita baixa da Terra (LEO, do inglês low-Earth orbit) (COOPER, 2020). Segundo McDowell (2020), a partir da análise de registros de objetos em órbita, a população de objetos com mais de 100 kg em órbitas abaixo de 600 km de altitude passou de cerca de 350 para 700, majoritariamente pela introdução de 299 satélites Starlink entre 2019 e 2020.

Esse crescimento acelerado da população de objetos nas LEOs, acentuado pelos recentes lançamentos das mega constelações (VENKATESAN, et al, 2020), tem sido fonte de preocupação, por diversos motivos, desde a interferência que eles podem causar nas observações astronômicas (COOPER, 2020; MCDOWELL, 2020; VENKATESAN, et al, 2020), até ao risco de colisão em vista da superlotação das órbitas, condição já observada no choque entre os satélites Iridium 33 e Cosmos 2251, em 2009 (KELSO, 2009).



O Comitê Interagências de Coordenação de Detritos Espaciais (IADC, do inglês Inter-Agency Space Debris Coordination Committee) publicou recomendações para mitigação de detritos espaciais (debris), entre elas a de retirada em até 25 anos de objetos, em término de vida útil, que passem pelas LEOs ou tenham potencial para interferir nelas (IADC, 2020). Além de manobras para a reentrada, diversos métodos estão em teste para a remoção ativa de debris em LEOs, cita-se: velas magnéticas, tethers eletromagnéticos e de momento, veículos para captura (por meio de redes), além de dispositivos para aumento de arrasto (ZE, 2011).

Destes, os dispositivos para aumento de arrasto serão os alvos de estudo deste trabalho. Com o objetivo de avaliar o decaimento de satélites da constelação Starlink, foram realizadas simulações numéricas de órbitas LEOs destes veículos, dentro do Problema de Dois Corpos Perturbado (P2P), utilizando a transformação de Kustaanheimo-Stiefel (transformação KS), considerando-os apenas com seus painéis solares, na sua configuração operacional (Figura 1), e com a introdução de uma vela de arrasto (Figura 2) com dimensões variadas. As equações diferenciais do movimento deste satélite foram resolvidas com um integrador numérico utilizando o método Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4).

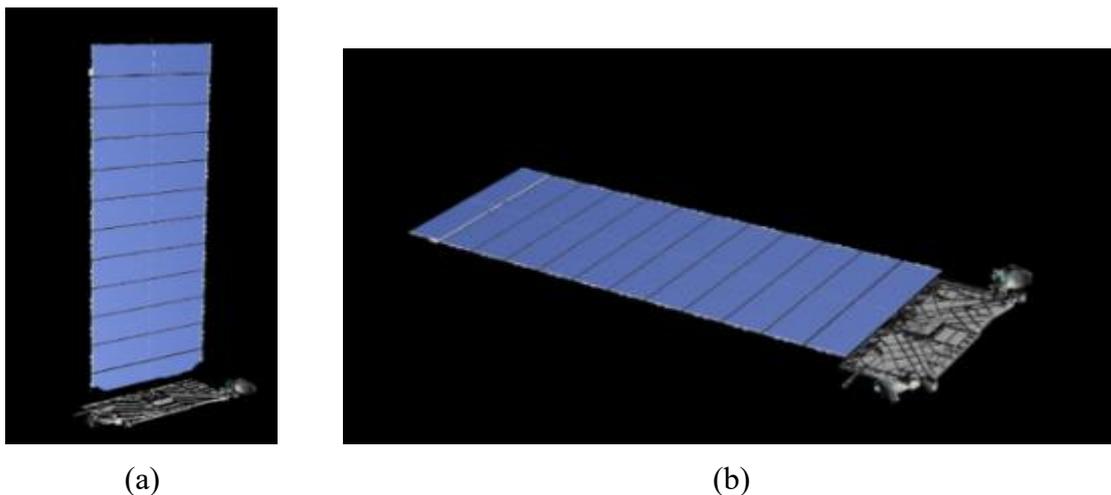


Figura 1. Satélites Starlink, na configuração de “barbatana” (a) e “livro aberto” (b).
Fonte: SpaceX (2021).

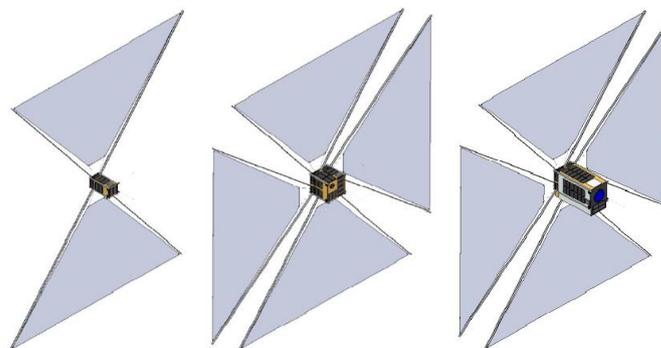


Figura 2. Conceitos de velas de arrasto para diferentes geometrias de satélites.
Fonte: Cotton, Bennett, Zee (2017).



2. Metodologia

Nesta seção, serão descritos os modelos matemáticos e parâmetros físicos considerados no desenvolvimento das simulações, de forma que na Seção 2.1. será apresentada as equações diferenciais de movimento para o P2P, a equação para o arrasto atmosférico e o modelo para a densidade atmosférica. Na Seção 2.2, apresenta-se a transformação KS aplicada às equações de movimento, enquanto nas Seções 2.3 e 2.4, as características físicas do satélite e de sua órbita e as características das velas de arrasto consideradas, respectivamente.

2.1. Problema de Dois Corpos Perturbado

Segundo Vallado (2001), a formulação de Cowell (Eq. 02) pode ser utilizada para considerar efeitos perturbativos à equação de movimento do Problema de Dois Corpos (Eq. 01), tal que, para isso, as acelerações devido a estas perturbações (\mathbf{a}_p) são somadas vetorialmente à Eq. 01.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (01)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_p \quad (02)$$

Nas Equações 01 e 02, \mathbf{r} é o vetor posição, r seu módulo, $\ddot{\mathbf{r}}$ o vetor aceleração e $\mu = GM$, em que G é a constante de gravitação universal e M a massa do corpo central, neste trabalho a Terra. A aceleração do arrasto atmosférico (\mathbf{a}_D), formulada por meio da Eq. 03 (VALLADO, 2001), foi a única perturbação considerada neste trabalho.

$$\mathbf{a}_D = -\frac{1}{2}\left(\frac{S}{m}\right)\rho C_D v_{rel}^2 \hat{\mathbf{v}}_{rel} \quad (03)$$

Na Eq. 03, S é área efetiva, m a massa do veículo espacial, ρ a densidade atmosférica, C_D o coeficiente de arrasto e v_{rel} o módulo da velocidade relativa à atmosfera. A densidade atmosférica varia de acordo com a altitude, de forma que existem diversos modelos para estimar seus valores nas diferentes faixas da atmosfera. Neste trabalho, utilizou-se o modelo TD88, proposto por Sehnal (1998), que leva em consideração, também, a variação do fluxo solar.

2.2. Transformação de Kustaanheimo-Stiefel

Para melhorar a precisão do resultado, uma transformação das equações diferenciais convencionais (Eq. 02) foi utilizada, a chamada transformação de Kustaanheimo-Stiefel (transformação KS) (STIEFEL; SCHEIFELE, 1971). Para tal, primeiro, um tempo fictício s é definido, equivalente à anomalia excêntrica, de forma que uma nova variável independente é acrescida ao problema e o tempo t torna-se uma variável de integração, conforme a Equação 04, pela chamada transformação de Sundman (BERRY; HEALY, 2002).

$$dt = r ds \quad (04)$$

Por sua vez, a transformação KS propõe a transformação da Equação 02 em um sistema do tipo oscilador harmônico, para manter a regularidade do movimento mesmo em



condições de singularidade (KOMAROV, 1993). Kustaanheimo, et al, (1965) definem um mapeamento de \mathbb{R}^3 para \mathbb{R}^4 por meio da Equação 05.

$$\mathbf{r} = L(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad (05)$$

Em que $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, 0)$ é o vetor posição para o tempo fictício e $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ é o vetor posição em \mathbb{R}^4 . A matriz de transformação $L(\mathbf{u})$ é dada pela Equação 06, enquanto a transformação da velocidade pela Equação 07 (KUSTAAHEIMO et al., 1965)

$$L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{bmatrix} \quad (06)$$

$$\mathbf{r}' = 2L(\mathbf{u})\mathbf{u}' \quad (07)$$

em que $\mathbf{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3, 0)$ é o vetor velocidade para o tempo fictício ($\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/ds$) e $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4)$ é o vetor posição em \mathbb{R}^4 , para o tempo fictício ($\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/ds$). Para este novo sistema, as equações de movimento, para o caso perturbado, são expressas por meio da Equação 08

$$\mathbf{u}'' = -\frac{H+U}{2}\mathbf{u} + \frac{u^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}} + L^T(\mathbf{u})\mathbf{P}\right) \quad (08)$$

em que H (Eq. 09) é o negativo da energia do sistema e também uma nova variável de integração do problema, conforme a Equação 10 (KUGA; RAO; CARRARA, 2011). U representa o potencial de perturbações conservativas, $u = |\mathbf{u}|$ e $\mathbf{P} = (a_{p_1}, a_{p_2}, a_{p_3}, 0)$ são as acelerações das perturbações não conservativas, como o arrasto considerado neste trabalho.

$$H = \frac{\mu}{r} - \frac{v^2}{2} \quad (09)$$

$$H' = -2(\mathbf{u}'L^T(\mathbf{u})\mathbf{P}) \quad (10)$$

Em que $v^2 = 4|\mathbf{u}'|^2/r$.

2.3. Satélites Starlink

O satélite Starlink-24 foi o considerado para as simulações deste trabalho. Ele faz parte da constelação que se encontra na altitude de operação $h = 550$ km (SPACEX, 2020). Seus elementos orbitais encontram-se na Tabela 1. Para a massa e demais dimensões na Tabela 2, foi considerada a área máxima do veículo.

Estas informações foram retiradas da aplicação de 2016 da SpaceX ao Federal Communications Commission (FCC), órgão que regula comunicações por rádio, televisão, cabo e satélites, nos Estados Unidos (FCC, 2021), para uma constelação cuja altitude de operação seria $h = 1075$ km (SPACEX, 2016). Entretanto, em 2019, a SpaceX recebeu autorização do mesmo órgão para operar seus satélites em órbitas mais baixas, abaixo dos 600 km de altitude (BRODKIN, 2021), sendo que os satélites em operação no momento, como o Starlink-24 (Tabela 1), se encontram nesta faixa de altitude. Apesar da mudança da altitude, não foram encontrados registros públicos de mudanças nas características físicas



dos satélites e, portanto, utilizou-se os valores exibidos na Tabela 2 nas simulações deste trabalho.

Tabela 1. Elementos orbitais do satélite Starlink-24. Fonte: CelesTrak, 2021.

Elementos orbitais	Valor
Semieixo maior (a , em m)	6,89337026e+06
Excentricidade (e)	0,0001184
Inclinação (i , em graus)	52,9974
Ascensão reta do nodo ascendente (Ω , em graus)	324,9374
Argumento do perigeu (ω , em graus)	89,0927
Anomalia média (M , em graus)	271,0202

Tabela 2. Dimensões dos satélites Starlink. Fonte: Traduzido de SpaceX (2016).

Dimensões do corpo do satélite	
Comprimento	4,0 m
Largura	1,8 m
Altura	1,2 m
Dimensões dos painéis solares	
Comprimento	6,0 m
Largura	2,0 m
Área	12,0 m ²
Quantidade	2
Área geral do veículo	
Área máxima do veículo	28,3 m ²
Área mínima do veículo	2,6 m ²
Área média do veículo	15,45 m ²
Massa do veículo	
Massa	386 kg

2.4. Vela de arrasto

Por conta da existência da atmosfera, ainda que rarefeita, até 1000 km de altitude, satélites nas LEOs, naturalmente decaíam e reentrariam na Terra (VISAGIE; LAPPAS; ERB, 2015), porém há a possibilidade de que esse tempo para reentrada supere os 25 anos recomendados. Desta forma, dispositivos de aumento de arrasto como as velas de arrasto apresentadas na Figura 2 são utilizadas para aumentar a área efetiva do veículo, diminuindo, assim, o tempo de decaimento do satélite, sem um grande aumento de sua massa (VISAGIE; LAPPAS; ERB, 2015).

Considerando a área efetiva da vela de arrasto como a de uma superfície quadrada, três casos foram considerados: 6x6 m, 8x8 m e 10x10 m. Escalando o projeto para CanSats de Cotton, Bennet, e Zee (2007), haverá um acréscimo de 0,720 kg, 1,28 kg e 2 kg à massa do satélite para cada um desses respectivos casos.

Para todos os casos, $C_D = 2,2$, valor comum a trabalhos semelhantes (COTTON; BENNETT; ZEE, 2017; MAESSEN, 2007; UTO; KUWAHARA; HONDA, 2019).



3. Resultados e Discussão

A Tabela 3 apresenta a razão área/massa para cada um dos casos estudados, enquanto as Figuras 3 e 4 apresentam o decaimento para cada um deles, considerando a formulação de Cowell e a transformação KS, respectivamente.

Tabela 3. Razões área/massa.

	Sem vela	Vela 6x6 m	Vela 8x8 m	Vela 10x10 m
Massa adicional	-	0,720 kg	1,28 kg	2 kg
S/m (m^2/kg)	0,0736	0,0931	0,1653	0,2577

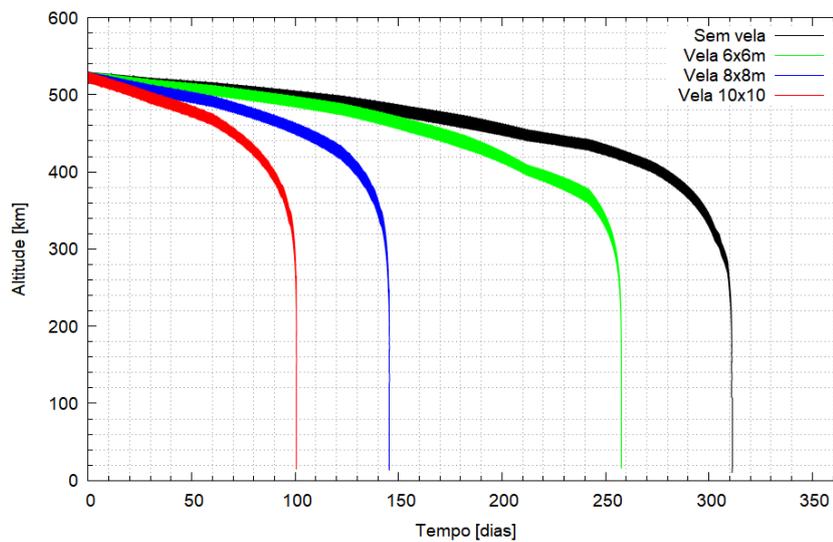


Figura 3. Decaimento via integração pela formulação de Cowell.

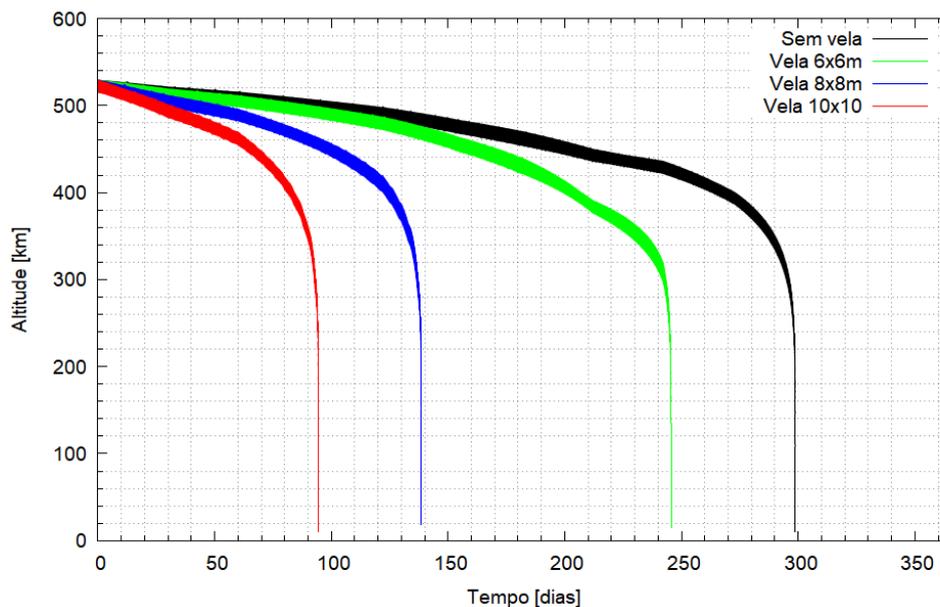


Figura 4. .



Em ambos os casos, o decaimento natural dos satélites ocorre em menos de um ano, o que já era previsto nos relatórios iniciais da constelação para casos de máximo fluxo solar (SPACEX, 2016), mesmo para a altitude inicial de 1000 km, de forma que para a altitude mais baixa considerada, o resultado das simulações se mostra verossímil.

Em relação a comparação dos métodos, houve uma diferença de 13, 12, 7 e 6 dias no tempo de integração para os casos sem vela de arrasto, com vela 6x6 m, 8x8 m e 10x10 m, respectivamente.

Além disso, percebe-se que as velas de arrasto se mostraram um dispositivo eficiente para aumentar a razão área/massa, sem grande influência na massa geral do veículo e, ainda que sem a vela de arrasto o decaimento do satélite já aconteça antes dos 25 anos recomendado, a introdução delas foi muito eficaz na redução do tempo de decaimento.

4. Conclusão

Neste trabalho, a transformação KS foi aplicada com sucesso para melhorar a qualidade da integração orbital de um satélite perturbado pelo arrasto atmosférico, dentro do Problema de Dois Corpos, utilizando um integrador Runge-Kutta de 4ª ordem.

As velas de arrasto se mostraram como dispositivos eficientes para aumentar a razão área/massa do satélite, de forma a incrementar propositalmente a perturbação do arrasto como uma estratégia para a rápida remoção dos objetos em órbita, reduzindo em até 1/3 o tempo de decaimento.

Melhorias nos modelos podem ser realizadas, seja pelo acréscimo de outras perturbações, como a não uniformidade da Terra, seja pela investigação de diversas datas de lançamento, o que implicaria diferentes fluxos solares, ou pela análise da variação do C_D durante o decaimento do objeto.

Ainda, outros efeitos, por conta do aumento da área do satélite em consequência da abertura da vela de arrasto, podem ser investigados, como o risco de colisão com outros objetos em órbita.

Agradecimentos: Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- BERRY, Matthew; HEALY, Liam. **The generalized Sundman transformation for propagation of high-eccentricity elliptical orbits**. [s.l.] : Naval Research Lab Washington DC, 2002.
- BRODKIN, Jon. **FCC lets SpaceX cut satellite altitude to improve Starlink speed and latency**. 2021. Disponível em: <https://arstechnica.com/tech-policy/2021/04/fcc-lets-spacex-cut-satellite-altitude-to-improve-starlink-speed-and-latency/>. Acesso em: 5 out. 2021.
- CELESTRAK. **Latest Starlink Satellites TLEs**. 2021. Disponível em: <https://celestrak.com/NORAD/elements/starlink.txt>. Acesso em: 8 set. 2021.
- COOPER, Keith. Astronomers raise concerns over SpaceX's Starlink. *Physics World*, [S. l.], v. 33, n. 1, p. 10, 2020.
- COTTON, Brad; BENNETT, Ian; ZEE, Robert. On-orbit results from the CanX-7 drag sail deorbit mission. [S. l.], 2017.



- FCC. **FCC - What We Do**. 2021. Disponível em: <https://www.fcc.gov/about-fcc/what-we-do>. Acesso em: 5 out. 2021.
- IADC. **Space Debris Mitigation Guidelines**. [s.l.: s.n.]. Disponível em: <https://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/library/iadc-space-debris-guidelines-revision-2.pdf>. Acesso em: 28 set. 2021.
- KOMAROV, L. I. Theory of the generalized Kustaanheimo-Stiefel transformation. **Physics Letters A**, [S. l.], v. 177, n. 2, p. 121–124, 1993.
- KUGA, Hélio Koiti; RAO, Kondapalli Rama; CARRARA, Valdemir. Satélites Artificiais–Movimento Orbital. **INPE-São José dos Campos**, [S. l.], 2011.
- KUSTAAHEIMO, Paul; SCHINZEL, A.; DAVENPORT, H.; STIEFEL, E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. [S. l.], 1965.
- MAESSEN, D. C. Development of a generic inflatable de-orbit device for CubeSats. [S. l.], 2007.
- MCDOWELL, Jonathan C. The low earth orbit satellite population and impacts of the SpaceX Starlink constellation. **The Astrophysical Journal Letters**, [S. l.], v. 892, n. 2, p. L36, 2020.
- SEHNAL, L. Thermospheric total density model TD. **Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia**, [S. l.], v. 39, p. 120–127, 1988.
- SPACE X. **Technical Attachment (CORRECTED)**. [s.l.: s.n.]. Disponível em: https://licensing.fcc.gov/myibfs/download.do?attachment_key=1159449. Acesso em: 6 set. 2021.
- SPACE X. **ASTRONOMY DISCUSSION WITH NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES**. 2020. Disponível em: <https://www.spacex.com/updates/starlink-update-04-28-2020/index.html>. Acesso em: 6 set. 2021.
- STIEFEL, Eduard L.; SCHEIFELE, Gerhard. **Linear and regular celestial mechanics**. [s.l.] : Springer, 1971.
- UTO, Hiroki; KUWAHARA, Toshinori; HONDA, Tomoyuki. Orbit verification results of the de-orbit mechanism demonstration CubeSat FREEDOM. **TRANSACTIONS OF THE JAPAN SOCIETY FOR AERONAUTICAL AND SPACE SCIENCES, AEROSPACE TECHNOLOGY JAPAN**, [S. l.], v. 17, n. 3, p. 295–300, 2019.
- VALLADO, David A. **Fundamentals of astrodynamics and applications**. [s.l.] : Springer Science & Business Media, 2001. v. 12
- VISAGIE, Lourens; LAPPAS, Vaio; ERB, Sven. Drag sails for space debris mitigation. **Acta Astronautica**, [S. l.], v. 109, p. 65–75, 2015.
- ZE, ZHANG. Space debris and present active debris removal techniques. *In*: BEIJING SPACE SUSTAINABILITY CONFERENCE 2011, **Anais [...]**. [s.l.: s.n.] p. 13–14.