

# Implementação de um controlador PID para aplicação no modelo do pêndulo invertido em uma base móvel

**Amita Muralikrishna, Marcelo Henrique Essado de Moraes**

Programa de Pós graduação em Computação Aplicada, CAP, INPE,  
12201-970, São José dos Campos, SP  
E-mail: marceloessado@gmail.com, amitamkrishna@yahoo.com.br,

**Ricardo Bravo, Lamartine Nogueira Frutuoso Guimarães**

Instituto de Estudos Avançados – Divisão de Informática – IEAv, CTA  
12228-840 – São José dos Campos, SP  
E-mail: rbravo@ieav.cta.br, guimarae@ieav.cta.br

## Introdução

A teoria de controles automáticos está cada vez mais integrada a área da computação. Cada vez mais novos algoritmos e recursos computacionais estão sendo utilizados a fim de realizar os mais diversos tipos de controle. Os sistemas de controle automático são encontrados em abundância em setores da indústria, tais como controle de qualidade e fabricação de produtos, linha de montagem automática, controle de ferramentas, tecnologia espacial e de armamento, sistemas de transporte, sistemas de potência, robôs e muitos outros. Dentro deste contexto, o presente trabalho procura desenvolver um sistema de controle de um Pêndulo Invertido utilizando um algoritmo largamente empregado na Indústria e comprovado matematicamente – o PID, devido a sua simplicidade de implementação.

Esses controladores são geralmente projetados para um determinado ponto de operação (*set point*) e normalmente apresentam bom desempenho em condições operacionais semelhantes àquela do projeto. Porém, quando ocorrem mudanças maiores no ponto de operação do sistema, o controlador pode não mais apresentar um desempenho satisfatório diante da nova condição operacional.

Dessa forma, para manter um bom desempenho numa ampla faixa de operação é necessário que, diante de uma mudança no ponto de operação, o controlador possa ter seus parâmetros automaticamente ajustados para o novo estado do sistema adaptando-se às alterações que ocorrem no sistema.

O sistema pêndulo invertido é constituído por uma base móvel sobre a qual existe uma haste articulada, ver **Figura 1**. Enfatiza-se que a haste articulada é o pêndulo. Através do deslocamento da base pretende-se manter a haste na posição vertical. O comportamento oscilante da haste tenta reproduzir o problema de estabilização existente em situações típicas tais como o controle da trajetória de um projétil, ou do movimento de equilíbrio de um bastão sobre o dedo indicador.

O objetivo, então, é equilibrar a haste na posição vertical, utilizando um controlador PID, o qual aplica uma força horizontal sobre a base. Os ganhos do controlador são então ajustados a fim de obter-se o equilíbrio.

Neste trabalho é apresentado o resultado de sintonia deste controlador PID acoplado ao modelo de um pêndulo invertido.

## Pêndulo Invertido

O Pêndulo Invertido é um processo mecânico absolutamente instável, ou seja, está sujeito a cair em qualquer direção a menos que uma força adequada seja aplicada ao carro de suporte da base pêndulo acelerando-o em uma determinada direção.

O Pêndulo foi construído de forma a ter apenas um grau de liberdade, considera-se aqui o problema bidimensional, no qual o pêndulo se move somente no plano da página. As variáveis e constantes do sistema são descritas na **Tabela 1**.

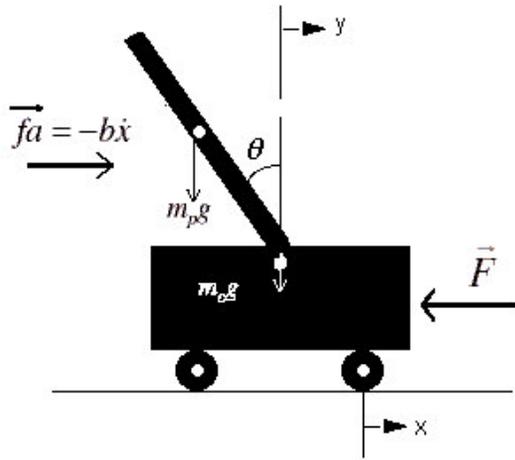


Figura 1: Sistema do Pêndulo Invertido em uma base móvel

Símbolo	Descrição	Valor
$l$	Metade do comprimento da haste do pêndulo e centro de massa	0,3m
$m_p$	Massa da haste	0,5kg
$m_c$	Massa do carrinho	0,5kg
$b$	Coefficiente de força viscosa	0,1 Ns/m
$g$	Aceleração da gravidade	9,8 m/s <sup>2</sup>
$\theta$	Ângulo do pêndulo	radianos
$\omega$	Velocidade angular do pêndulo	rad/s
$I$	Momento de inércia do pêndulo	0,06kg/m <sup>2</sup>
$x$	Posição do carrinho	metros
$v$	Velocidade do carrinho	m/s
$k_p$	Ganho Potencial	N/rd
$k_i$	Ganho integral	1/s
$k_d$	Ganho derivativo	s

Tabela 1: Descrição de variáveis e constantes

A modelagem dinâmica do sistema foi obtida com o uso da Mecânica Lagrangeana [1]. Aqui é apresentado apenas o resultado final da modelagem. A forma final do modelo do pêndulo invertido é apresentada abaixo. Estas equações foram programadas no MATLAB.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{((m_p \times l)^2 \times \text{sen}\theta \times \cos\theta \times \omega)}{\det} & 0 & \frac{m_p \times l \times b \times \cos\theta}{\det} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{(m_p \times l^2 + I) \times m_p \times l \times \text{sen}\theta \times \omega}{\det} & 0 & -\frac{b \times (m_p \times l^2 + I)}{\det} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{vet} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m_p \times l \times \cos\theta \times F}{\det} + \frac{(m_c + m_p) \times m_p \times g \times l \times \text{sen}\theta}{\det} \\ 0 \\ \frac{(m_p \times l^2 + I)}{\det} \times F - \frac{(m_p \times l)^2 \times g \times \text{sen}\theta \times \cos\theta}{\det} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ x \\ v \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ x \\ v \end{pmatrix} + \text{vet} \quad (3)$$

## Controlador PID

O controlador PID é bastante difundido na indústria de modo geral. O seu nome é uma abreviatura referente as primeiras letras das palavras proporcional, integral e diferencial, respectivamente. O significado destas palavras está assim relacionado: proporcional a um erro, proporcional à integral no tempo deste erro e proporcional à derivada no tempo deste erro.

A equação fundamental do controlador PID pode ser escrita da seguinte forma:

$$u(t) = k_p \times e(t) + k_p \times k_i \times \int_0^{t_i} e(t) dt + k_p \times k_d \times \frac{de(t)}{dt} \quad (4)$$

onde:

$u(t)$ : é o sinal de controle,

$e(t)$ : é o erro que vem do sistema,

$k_p$ : o ganho proporcional;

$k_d$ : o ganho derivativo e

$k_i$ : o ganho integral.

Pela simples inspeção da equação acima, percebe-se que a primeira parcela do lado direito da mesma está relacionada com o controle proporcional, a segunda com o integral e a terceira com o diferencial.

No caso do pêndulo invertido suponha-se que seja realizada uma medida do ângulo  $\theta$  que o pêndulo faz com a vertical. E que o erro seja produzido com relação a um valor de demanda  $\theta_D$ , fixo pelo usuário. Este erro é dado por:

$$e(t) = (\theta(t) - \theta_D). \quad (5)$$

Considerando que para a integral, tem-se:

$$i(t) = \int_0^t e(t) dt, \quad (6)$$

e tomando a sua derivada, tem-se:

$$\frac{di(t)}{dt} = e(t), \text{ ou } \frac{d^2i(t)}{dt^2} = (\theta(t) - \theta_D) \quad (7)$$

Para a parte derivativa tem-se:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{d(\theta(t) - \theta_D)}{dt} = \dot{\theta} = \omega. \quad (8)$$

Assim, a equação fundamental pode ser escrita da forma:

$$u(t) = k_p \times e(t) + k_i \times i(t) + k_d \times \omega(t) \quad (9)$$

No caso particular do pêndulo a ser equilibrado  $\theta_D = 0 \text{ rd}$ , a força restauradora é a força de controle do sistema. Desta forma tem-se:  
 $F(t) = u(t)$ .

A inclusão da equação de controle na formulação do pêndulo implica em integrar a equação (7). Isto pode ser conseguido modificando as equações (1) (2) e (3).

$$vet_c = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m_p \times l \times \cos \theta \times F}{\det} + \frac{(m_c + m_p) \times m_p \times g \times l \times \text{sen} \theta}{\det} \\ 0 \\ \frac{(m_p \times l^2 + I)}{\det} \times F - \frac{(m_p \times l)^2 \times g \times \text{sen} \theta \times \cos \theta}{\det} \\ -\theta_D \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ x \\ v \\ i \end{pmatrix} = A_c \times \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ x \\ v \\ i \end{pmatrix} + vet_c \quad (11)$$

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{((m_p \times l)^2 \times \text{sen} \theta \times \cos \theta \times \omega)}{\det} & 0 & \frac{m_p \times l \times b \times \cos \theta}{\det} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{(m_p \times l^2 + I) \times m_p \times l \times \text{sen} \theta \times \omega}{\det} & 0 & -\frac{b \times (m_p \times l^2 + I)}{\det} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

As equações acima são as respectivas: matriz do sistema, o vetor de entradas externas e a equação da dinâmica do pêndulo invertido com controle PID.

## Resultados

Foi utilizada para a realização dos testes para o problema do pêndulo invertido, a versão 6.1 do Matlab.

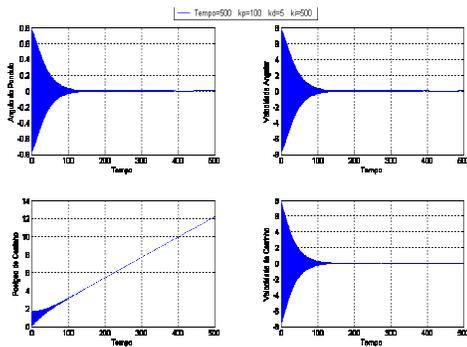
Os ganhos definem a ação do controle e devem ser ajustados de modo que o ângulo do pêndulo estabilize em  $\theta = 0 \text{ rd}$ .

Os testes realizados neste trabalho consistiram na formação de diversas combinações de valores dos ganhos do modelo. Além destes, outros testes foram realizados variando-se o ângulo inicial  $\theta$ .

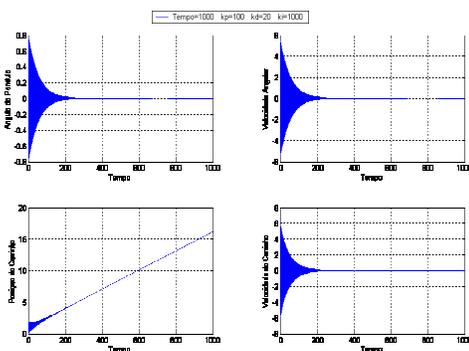
A **Tabela 2** mostra os melhores conjuntos de valores de ganhos obtidos nos testes para 100, 500 e 1000 segundos, respectivamente. Os gráficos das **Figuras 2, 3 e 4** mostram a convergência do sistema, com a devida configuração de parâmetros, com os comportamentos da posição do carrinho, da velocidade do carrinho, do ângulo do pêndulo e da velocidade angular do pêndulo.

	$tempo(s)$	$k_p$	$k_d$	$k_i$
<b>Conjunto 1</b>	500	100	5	500
<b>Conjunto 2</b>	1000	100	20	1000
<b>Conjunto 3</b>	1500	100	50	1000

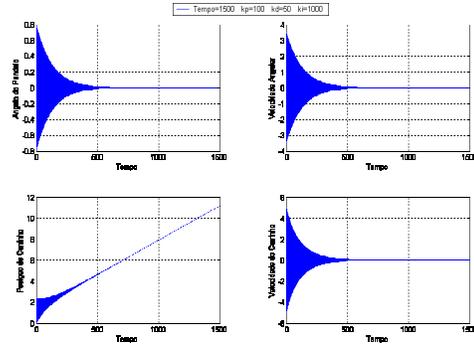
**Tabela 2:** Melhores conjuntos de ganhos



**Figura 2:** Convergência do sistema utilizando o primeiro conjunto de ganhos.



**Figura 3:** Convergência do sistema utilizando o segundo conjunto de ganhos.



**Figura 4:** Convergência do sistema utilizando o terceiro conjunto de ganhos.

## Conclusões

Nos testes realizados com o controle PID do ângulo, através de várias simulações, obteve-se o melhor conjunto de ganhos:  $k_p=100$ ,  $k_d=20$ ,  $k_i=1000$ , para o qual o sistema se estabilizava, isto é, o ângulo do pêndulo assumia o valor igual a 0 rd (zero radiano) e o valor obtido para a velocidade do carrinho é muito próximo de zero. Considera-se o resultado satisfatório tendo em vista o objetivo principal.

## Referências

- [1] Morais M. H. E., Muralikrishna A., Bravo R., Ferrari A. S., Braz I., *Pêndulo Invertido*, CAP 328 - Projeto Final, INPE, 2004.
- [2] Etter D. M., *Engineering problem solving with MATLAB*, Editora Prentice-Hall, 1993.
- [3] Kuo B. C., *Sistemas de Controle Automático*, Editora Prentice-Hall do Brasil, 1982.
- [4] Leech J. W., *Mecânica Analítica*, traduzido por Carlos Campos de Oliveira, Universidade do Estado da Guanabara, Rio de Janeiro, 1971.
- [5] Ogata K., *Modern Control Engineering*, University of Minnesota, Prentice-Hall, Inc, 1970.
- [6] Tsoukalas L.H., Uhrig R. E., *Fuzzy and Neural Approaches in Engineering*, Editora Jhon Wiley and Sons, Inc, New York, 1997.