sid.inpe.br/mtc-m19/2011/04.18.03.14-TDI

SINCRONIZAÇÃO DE FASE EM SISTEMAS CAÓTICOS E SUA APLICABILIDADE AO RECONHECIMENTO DE PADRÕES

Rosangela Follmann Bageston

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelo Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau, aprovada em 18 de maio de 2011.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/39H3BN5>

INPE
São José dos Campos
2011

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Gabinete do Diretor (GB)
Serviço de Informação e Documentação (SID)
Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/6921
Fax: (012) 3208-6919
E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):

Presidente:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Membros:

Drª Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)
Drª Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação
Drª Regina Célia dos Santos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)
Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)
Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)
Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)
Dr. Horácio Hideki Yanasse - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)
Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)
Deicy Farabello - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)
Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

sid.inpe.br/mtc-m19/2011/04.18.03.14-TDI

SINCRONIZAÇÃO DE FASE EM SISTEMAS CAÓTICOS E SUA APLICABILIDADE AO RECONHECIMENTO DE PADRÕES

Rosangela Follmann Bageston

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada, orientada pelo Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau, aprovada em 18 de maio de 2011.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/39H3BN5>

INPE
São José dos Campos
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Bageston, Rosangela Follmann.
B146s Sincronização de fase em sistemas caóticos e sua aplicabilidade ao reconhecimento de padrões / Rosangela Follmann Bageston. – São José dos Campos : INPE, 2011.
xxiv+97 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2011/04.18.03.14-TDI)

Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2011.
Orientador : Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau.

1. Sincronização de fase. 2. Sistemas caóticos. 3. Redes de osciladores. 4. Reconhecimento de padrões. I.Título.

CDU 004.93´1

Copyright © 2011 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2011 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Doutor(a) em

Computação Aplicada

Dr. Joaquim José Barroso de Castro

Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau

Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Lamartine Nogueira Frutuoso Guimarães

Membro da Banca / IEAv/CTA / SJCampos - SP

Dr. José Carlos Becceneri

Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

Dr. Epaminondas Rosa Junior

Convidado(a) / ISU / Normal - USA

Dr. José Roberto Castilho Piqueira

Convidado(a) / USP / São Paulo - SP

Este trabalho foi aprovado por:

( ) maioria simples

(X) unanimidade

Aluno (a): Rosângela Follmann Bageston

São José dos Campos, 18 de maio de 2011

"Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas".

Antoine de Saint-Exupéry
"O Pequeno Príncipe", 2006

Ao meu esposo José Valentin e aos meus pais Hugo e Dulce.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu esposo José Valentin por sua compreensão e apoio em todos os momentos, principalmente na fase final deste trabalho com seu importantíssimo auxílio. Quero agradecer a meus pais, Hugo e Dulce, pela educação, pelo incentivo e pela confiança. Também sou grata a meus irmãos Rosmeri e Rogério pela amizade e companheirismo. Aos meus sobrinhos queridos pelos momentos de descontração durante as visitas familiares.

Agradeço muito ao Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau por me orientar, por compartilhar sua experiência e pelas valiosas discussões para o bom desenvolvimento deste trabalho.

Também gostaria de agradecer ao Dr. Epaminondas Rosa Jr., da *Illinois State University* (ISU) por me receber e me orientar durante os 6 meses de estágio nos Estados Unidos. Em especial, agradeço ao Epaminondas e sua família pelo suporte e amizade durante a minha permanência em Normal, IL. Aos colegas e amigos que lá fiz pela amizade e companheirismo.

Aos colegas de curso e amigos do INPE que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. As colegas de sala pelo constante apoio. A todos os meus amigos, muito obrigado pelo companheirismo e amizade.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela bolsa de doutorado, processo nº 2007/05581-0.

RESUMO

Um importante fenômeno encontrado na natureza é o da sincronização. Ele ocorre quando sistemas acoplados têm suas dinâmicas alteradas de forma a convergirem para um ritmo comum. Este comportamento se revela de diversas formas. Em especial, quando os sistemas que se acoplam não são completamente idênticos e a força de acoplamento entre eles não é tão intensa, surge a denominada sincronização de fase, na qual a diferença de fase entre os sistemas se mantém limitada, enquanto suas amplitudes se apresentam não correlacionadas. Recentemente descobriu-se que o fenômeno da sincronização de fase é onipresente na natureza, manifestando-se mesmo entre sistemas caóticos, com fase coerentes ou não-coerentes. O presente trabalho desdobrou-se em duas frentes. Na primeira, desenvolveu-se uma metodologia que permite identificar a sincronização de fase em sistemas caóticos e séries temporais. Este método consiste em obter a fase de sistemas caóticos através de uma análise espectral baseada em mínimos quadrados. A metodologia se apresentou bastante flexível para ser aplicada mesmo a sistemas com características de fase não coerente. Essa técnica foi validada através da comparação dos resultados com os obtidos com outros métodos existentes na literatura. Essa nova metodologia se mostrou robusta a níveis moderados de ruído, podendo também ser empregada na análise de dados experimentais para identificar a sincronização de fase. Na segunda parte deste trabalho, o conceito de sincronização de fase que está presente mesmo em grandes conjuntos de osciladores caóticos, como o caso do cérebro humano, foi explorado em uma configuração de rede neural artificial, constituída de um grande conjunto de osciladores interligados. Esta rede atua como uma memória associativa e as informações são armazenadas na diferença de fase entre os osciladores do conjunto. Além disso, um experimento envolvendo identificação de padrões binários aplicado a um grupo de indivíduos apresentou um limiar similar ao da rede de osciladores para recuperação das informações.

PHASE SYNCHRONIZATION IN CHAOTIC SYSTEMS AND ITS APPLICABILITY IN PATTERN RECOGNITION

ABSTRACT

An important phenomenon found in nature is the one of synchronization. This phenomenon occurs when coupled systems have changed their dynamics in order to converge to a common rhythm. This behavior reveals itself in several ways. Especially when the coupled systems are not completely identical and the coupling force between them is not so intense, there is the so-called phase synchronization, in which the phase difference between the systems remains limited while their amplitudes are not correlated. Recently it was discovered that the phenomenon of phase synchronization is ubiquitous in nature, manifesting itself even in chaotic systems with phase-coherent or non coherent dynamics. This work is divided into two fronts. At first, we developed a methodology to identify the phase synchronization in chaotic systems from time series. This method consists in obtaining the phase through a spectral analysis based on least squares. This methodology is flexible enough to be applied even to phase non coherent systems, with consistent results. This technique is validated by comparing the results with those obtained with other methods in the literature. This new methodology is robust to moderate levels of noise and also can be employed in the analysis of experimental data to identify phase synchronization. In the second part of this work, the concept of phase synchronization is present even in large sets of chaotic oscillators, like the case of the human brain, which is exploited to set an artificial oscillatory neural network consisting of a large set of interconnected oscillators. This network acts as an associative memory and the information is stored using the phase difference between the oscillators in the set. We added a new term in the coupling function of the network of oscillators which improved the recovery of information stored in it. Furthermore, an experiment involving identification binary patterns applied to a group of subjects had result to a similar threshold to the network of oscillators for perfect retrieval of information.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

2.1 Atratores de Rössler e Lorenz com suas respectivas projeções nos planos xy, xz e yz. 7

2.2 Variáveis de estado do Sistema 2.1, para $a = 0,22$, $b = 0,4$, $c = 8,5$ . . . 8

2.3 Evolução temporal das trajetórias x_1 e x_2 do sistema condutor (Equação 2.3) e o sistema resposta (Equação 2.4), com (a) $\eta = 0,2$ e (b) $\eta = 0,3$. . 10

2.4 Sistemas acoplados idênticos com condições iniciais $x_1(0) = -10$ e $x_2(0) = 20$. (a)-(c)-(e) evolução temporal das variáveis x_1 (curva em azul) e x_2 (curva em vermelho) para diferentes acoplamentos: $\eta = 0,01$, $\eta = 0,06$ e $\eta = 0,2$, respectivamente. (b) A curva de Lissajous não apresenta estrutura, confirmando a não sincronização dos sistemas; em (d) são observadas estruturas que indicando a sincronização de fase entre os sistemas; em (f) a sincronização completa é observada. 12

2.5 Sistemas acoplados não-idênticos com condições iniciais $x_1(0) = -10$ e $x_2(0) = 20$. (a)-(c)-(e) evolução temporal das variáveis x_1 (curva em azul) e x_2 (curva em vermelho) para diferentes acoplamentos: $\eta = 0,02$, $\eta = 0,05$ e $\eta = 0,2$, respectivamente. (b) A curva de Lissajous não apresenta estrutura, confirmando a não sincronização dos sistemas; em (d) são observadas estruturas circulares indicando a sincronização de fase entre os sistemas; em (f) a sincronização com atraso de fase é observada. 13

2.6 Ilustração da definição de fase de um oscilador periódico. A fase cresce uniformemente no tempo e adquire 2π a cada período. 14

2.7 Ilustração de um atrator com origem bem definida. 15

2.8 (a) Atrator de Rössler para e linha em vermelho indica a posição da seção de Poincaré, (b) Espectro de frequência da trajetória x, (c) evolução temporal da fase para as três definições, (d) Visualização ampliada da fase indicado pelo retângulo em (c). 16

2.9 (a) Atrator de Rössler para $a = 0,22$, $b = 0,4$ e $c = 8,5$; (b) espectro de frequência da trajetória x; (c) evolução temporal da fase para as três definições; (d) Visualização ampliada da fase indicado pelo retângulo em (c). 17

2.10 Projeção do espaço de fase do sistema de Rössler em regime não coerente ($a = 0,22$) no plano $(\dot{x}, \dot{y})$. 18

2.11 Diferença de fase usando a Equação 2.8 para calcular a fase. Dois sistemas de Rössler acoplados (Equação 2.17) para os mesmos parâmetros apresentados na Figura 2.5. 18
2.12 Medida da frequência em função das frequências naturais para três acoplamentos (amplitudes) da forçante. A curva contínua (em azul) mostra as frequências do conjunto de osciladores não acoplados ($\eta = 0$). As outras curvas são obtidas forçando o sistema de Rössler com amplitudes $\eta = 0,1$ (linha tracejada) e $\eta = 1,5$ (linha traço-ponto), e ilustram um deslocamento característico da frequência em direção a frequência da forçante $\nu = 0,9$ (linha pontilhada horizontal), indicando sincronização. . 21
2.13 Resultados medida da frequência para três intensidades de acoplamentos: (a)$\eta = 0,03$; (b) $\eta = 0,09$; (c) $\eta = 0,1$; (d) $\eta = 0,2$. Analisando a coincidência dos platôs é possível concluir que há sincronização de fase em (c) e (d). 22
2.14 Resultados aplicando o método para $\omega \in [0,75; 0,95]$ para detectar a sincronização. As intensidades de acoplamento utilizadas foram: (a) $\eta = 0,03$; (b) $\eta = 0,09$; (c) $\eta = 0,1$; (d) $\eta = 0,2$. Analisando a coincidência dos platôs é possível concluir que há sincronização de fase em (d). 23
2.15 Transição para sincronização avaliando deferentes valores de acoplamento entre os sistemas. 24
2.16 Probabilidades de recorrência $P_{1,2}(\tau)$ para valores de acoplamento: (a) $\eta = 0,03$; (b) $\eta = 0,09$; (c) $\eta = 0,1$; (d) $\eta = 0,2$, e os respectivos valores do coeficiente CPR. A sincronização de fase se faz presente em (d). . . . 26
2.17 Transição para sincronização de fase. O coeficiente CPR torna-se próximo de 1 ao passo que o acoplamento é intensificado. 27

3.1 Segmentos distintos, $y(t_k)$, selecionados da trajetória x do sistema de Rössler em regime coerente de fase para: (a) $K = 280$ pontos, (b) $K = 320$ pontos e (c) $K = 640$ pontos. (d), (e) e (f) Funções $E(\omega)$ para os segmentos mostrados em (a), (b) e (c), respectivamente. No painel inferior estão identificadas as frequências associadas aos mínimos de $E(\omega)$. 32
3.2 Segmentos distintos, $y(t_k)$, selecionados da trajetória x do sistema de Rössler em regime não coerente de fase para: (a) $K = 280$ pontos, (b) $K = 320$ pontos e (c) $K = 640$ pontos. (d), (e) e (f) Funções $E(\omega)$ para os segmentos mostrados em (a), (b) e (c), respectivamente. No painel inferior estão identificadas as frequências associadas aos mínimos de $E(\omega)$. 32

3.3 Periodograma da série do sistema de Rössler (a) coerente e (b) não coerente. A linha pontilhada indica a posição dos ciclos médios. 33
3.4 Visualização esquemática do funcionamento da janela móvel. 34
3.5 Evolução temporal da diferença de fase dos osciladores de Rössler no regime de fase coerente($a = 0,16$) para três valores distintos de acoplamento, como indicado, para: (a) método SFMQ; (b) método arco tangente; (c) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 5,4$ e (d) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 5,5$. 36
3.6 Evolução temporal da diferença de fase dos osciladores de Rössler no regime de fase não coerente ($a = 0,2925$) para três valores distintos de acoplamento, como indicado, para: (a) método SFMQ, (b) método arco tangente (derivada), (c) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 5,4$, (d) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 5,5$. . . 37
3.7 (a) Variância da diferença de fase, (b) os quatro maiores expoentes de Lyapunov, (c) valor absoluto da diferença $|\Delta x|_{max}$ das trajetórias $x_{1,2}$ *versus* o parâmetro de acoplamento η para dois osciladores de Rössler acoplados em regime coerente ($a = 0,16$). Para acoplamentos pequenos tem-se dois expoentes positivos e dois próximos de zero. A transição para sincronização de fase ocorre em $\eta \approx 0,038$ e neste ponto um dos expoentes de Lyapunov nulo torna-se negativo. 39
3.8 (a) Variância da diferença de fase, (b) os quatro maiores expoentes de Lyapunov, (c) valor absoluto da diferença $|\Delta x|_{max}$ das trajetórias $x_{1,2}$ *versus* o parâmetro de acoplamento η para dois osciladores de Rössler acoplados em regime não coerente ($a = 0,2925$). 41
3.9 Variância da diferença de fase em função da janela de deslocamento. (a) Osciladores de Rössler coerente ($a = 0,16$) com intensidade de acoplamento $\eta = 0,05$ e (b) regime não coerente ($a = 0,2925$) com intensidade de acoplamento $\eta = 0,2$. 42
3.10 Variância da diferença de fase em função do passo de deslocamento. (a) Osciladores de Rössler coerente ($a = 0,16$) com intensidade de acoplamento $\eta = 0,05$; (b) regime não coerente ($a = 0,2925$) com intensidade de acoplamento $\eta = 0,2$, (c) tempo de execução em segundos em função do passo de deslocamento. 43
3.11 Componente x do sistema de Rössler coerente, com 80% de ruído Gaussiano. 44

3.12 Diferença de fase para dois osciladores de Rössler acoplados em regime coerente ($a = 0,16$) e sincronizados em fase ($\eta = 0,05$). Diferença de fase para o caso sem ruído ($\alpha = 0,0$) e com ruído $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 0,8$. 44
3.13 Variância da diferença de fase dois osciladores de Rössler acoplados no regime coerente em estado de sincronização de fase ($\eta = 0,05$) em função do nível de ruído. 45
3.14 Evolução temporal da diferença de fase para dois sistemas de Lorenz acoplados para três valores distintos de acoplamento (como indicado nos gráficos). (a) Método SFMQ, (b) arco tangente com projeção do atrator, (c) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 1$ e (d) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 2$. 46
3.15 Visualização esquemática do experimento de plasma forçado por uma ação periódica. 48
3.16 (a) Projeção do atrator do plasma em coordenadas cartesianas, (b) espectro de frequência da corrente I 48
3.17 Evolução temporal da diferença de fase para os dados de plasma para três amplitudes forçantes $A_\eta = 0,2V$, $A_\eta = 0,34V$ e $A_\eta = 0,4V$. 49
3.18 Configuração esquemática do experimento acoplando dois circuitos de Chua. 50
3.19 Foto do experimento de Chua. (a) osciloscópio destinado a mostrar a curva de Lissajous (projeção V_{C1}^1 vs V_{C1}^2); (b) osciloscópio para ilustrar o atrator do Chua 1; (c) osciloscópio para ilustrar o atrator do Chua 2; (d) resistor variável com capacitância máxima de $12,0M\Omega$. 51
3.20 (a) Séries temporais obtidas dos circuitos Chua 1 (V_{C1}^1 em azul) e Chua 2 (V_{C1}^2 em vermelho); (b) Projeção do atrator do circuito Chua 1; (b) Projeção do atrator do circuito Chua 2. 52
3.21 Evolução temporal da diferença de fase para dados dos dois circuitos de Chua acoplados para três distintas intensidades de acoplamento. 52

4.1 Mapeamento da memória associativa. 55
4.2 Exemplo da arquitetura da rede para 4 neurônios. 59
4.3 Distribuição do autovalor máximo Λ_{max} para três tipos de soluções: padrão memorizado, padrão memorizado com um bit de erro e padrões randômicos. 62
4.4 Fronteira da bacia de atração das soluções, e a influência do segundo termo na função de acoplamento. 63

4.5 *Overlap* final máximo *versus* capacidade de armazenamento (p/N), para diferentes intensidade de η. 64
4.6 Distribuição do autovalor máximo Λ_{max} para três tipos de soluções: padrão memorizado, padrão memorizado com um bit de erro e padrões randômicos. 66
4.7 Conjunto de padrões armazenados na rede de osciladores. 67
4.8 Versão distorcida o padrão P4, com 20% dos *bits* trocados. 68
4.9 Rede A: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P4 com $m_{inicial} = 0,8$. 69
4.10 RedeB: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P4 com $m_{inicial} = 0,8$. 69
4.11 Evolução da função de energia L_i e das fases θ_i durante a recuperação do padrão P4, com perturbação inicial de 20% ($m_{inicial} = 0,8$). 70
4.12 Rede A: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P1 perturbado com $m_{inicial} = 0,7$. 70
4.13 RedeB: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P1 perturbado com $m_{inicial} = 0,7$. 71
4.14 Evolução da função de energia L_i e das fases θ_i durante a recuperação do padrão P1, com perturbação inicial de 30% ($m_{inicial} = 0,7$). 71
4.15 Rede A: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P1 com $m_{inicial} = 0,55$. 72
4.16 RedeB: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P3 com $m_{inicial} = 0,55$. 72
4.17 Evolução da função de energia L_i e das fases θ_i durante o processo de recuperação do padrão P2 com $m_{inicial} = 0,55$. 73
4.18 Capacidade de armazenamento para recuperação da informação da *Rede A* e a *Rede B*, para três valores distintos de η. 74
4.19 Influência do segundo termo de intensidade η da função de acoplamento na recuperação da informação. Para uma rede composta por $N = 200$, $p = 6$ padrões armazenados e $m_{inicial} = 0,7$. 75
4.20 Rede A: Dependência dos parâmetros η e capacidade de armazenamento para recuperação de informações. 75
4.21 Rede B: Dependência dos parâmetros η e capacidade de armazenamento para recuperação de informações. 76
4.22 Overlap final versus inicial para N=200 e p=12, para diferentes valores de η. 77
4.23 Letras maiúsculas do alfabeto utilizadas no experimento. 78

4.24 Média de acertos obtida para o experimento realizado com um indivíduo. 79
4.25 Interface do experimento ilustrando a letra H com (a) 10% ($m_{inicial} = 0,9$) e (b) 30% ($m_{inicial} = 0,7$) de perturbação, e as cinco alternativas para a escolha. 79
4.26 Interface do experimento ilustrando uma perturbação de (a) 40% ($m_{inicial} = 0,6$) e (b) 50% ($m_{inicial} = 0,5$) em letras aleatórias. 80
4.27 Média de respostas corretas em função de $m_{inicial}$. 80

A.1 Circuito de Chua e função linear por partes. 95
A.2 Esquema prático para implementação do circuito de Chua usando um amplificador operacional de oito pinos integrado no circuito. 96

LISTA DE SÍMBOLOS

x, y, z	–	variáveis de estado
a, b, c	–	parâmetros do sistema de Rössler
σ, r, γ	–	parâmetros do sistema de Lorenz
$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$	–	vetores de estado n-dimensionais
$\mathbf{F}$	–	vetor de campo de $R^n \rightarrow R^n$
$\mathbf{G}$	–	função que determina uma combinação linear
η	–	intensidade de acoplamento
π	–	constante matemática
T	–	período
ϕ	–	fase
ϕ_P	–	fase definida a partir da seção de Poincaré
ϕ_A	–	fase definida a partir da projeção no atrator
ϕ_H	–	fase definida a partir da transformada de Hilbert
ζ	–	sinal analítico
$\chi(t)$	–	sinal escalar
$\chi_H(t)$	–	transformada de Hilbert de $\chi_H(t)$
A	–	amplitude
$\Delta\phi$	–	diferença de fase
ν	–	frequência da forçante
ω	–	frequência
Ω	–	frequência observada
$R_{i,j}^{(\epsilon_r)}$	–	condição de recorrência
ϵ_r	–	limiar de recorrência
$\Theta(.)$	–	função Heaviside
δt	–	deslocamento de tempo entre amostras
τ	–	passo de tempo
$\hat{P}^{(\epsilon_r)}(\tau)$	–	probabilidade de recorrência
CPR	–	coeficiente de correlação
$y(t)$	–	série temporal
$y(t_k)$	–	segmento de uma série temporal
t_k	–	tempo igualmente espaçado
K	–	comprimento de um segmento
S	–	passo de deslocamento
$\hat{y}(t_k)$	–	aproximação do segmento $y(t_k)$
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	–	parâmetros
ϵ	–	vetor de erros
$\hat{\beta}$	–	vetor de parâmetros estimados
$\mathbf{M}$	–	matriz do sistema

$\mathbf{E}$	–	função erro
$var(\Delta\phi)$	–	variância da diferença de fase
λ	–	expoente de Lyapunov
$\|\Delta x\|_{max}$	–	máximo do valor absoluto da diferença entre as trajetórias
α	–	nível de ruído
$\vartheta_{1,2}(t)$	–	ruído gaussiano
σ	–	desvio padrão
$\tilde{x_{1,2}}$	–	trajetórias com ruído
s	–	tempo de escala
R	–	resistência
C	–	capacitância
L	–	indutor
N_R	–	resistor não linear
R_η	–	resistência variável
θ	–	variável de estado da rede de osciladores de fase
N	–	número de elementos da rede
p	–	número de padrões armazenados
μ	–	índice dos padrões armazenados
ξ^μ	–	vetor do padrão armazenado
C_{ij}	–	matriz de acoplamento da rede de osciladores
Γ_{ij}	–	função de acoplamento da rede de osciladores
L	–	função de Lyapunov
J	–	matriz Jacobiana
Λ	–	autovalores da matriz Jacobiana
Λ_{max}	–	autovalor máximo
m^μ	–	parâmetro de sobreposição ou *overlap* em relação ao padrão memorizado μ
$m_{inicial}$	–	*overlap* inicial
m_{final}	–	*overlap* final

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Objetivos 3
1.2 Estrutura da Tese 3

2 SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS 5
2.1 Introdução 5
2.2 Sistemas Dinâmicos Caóticos 6
2.3 Acoplamentos 7
2.3.1 Acoplamento Unidirecional 8
2.3.2 Acoplamento Bi-direcional 9
2.4 Sincronização de Fase em Osciladores Caóticos 11
2.4.1 Definições e Estimação da Fase em Osciladores Caóticos 12
2.4.2 Método baseado no Travamento da Frequência 19
2.4.3 Método baseado em Recorrência 24

3 MÉTODO PARA IDENTIFICAR SINCRONIZAÇÃO DE FASE 29
3.1 Introdução 29
3.2 Método baseado em Mínimos Quadrados 29
3.3 Resultados 34
3.3.1 Oscilador de Rössler 35
3.3.2 Transição para Sincronização de Fase 38
3.3.3 Efeitos dos Parâmetros K e S na estimação da Fase 40
3.3.4 Efeitos do Ruído 42
3.3.5 Sistema de Lorenz 45
3.3.6 Dados Experimentais 47
3.4 Conclusões Parciais 51

4 REDES DE OSCILADORES E PROCESSAMENTO DE INFORMAÇÕES 53
4.1 Introdução 53
4.2 Armazenamento Dinâmico da Informação 54
4.3 Rede de Osciladores 56

4.3.1 Breve Introdução 56
4.3.2 Modelagem da Rede 58
4.3.3 Função de Lyapunov 60
4.3.4 Análise da Estabilidade 61
4.4 Nova Função de Acoplamento Γ_{ij} 65
4.5 Resultados 67
4.5.1 Recuperação de Padrões 67
4.5.2 Análise da Recuperação de Informações 72
4.5.3 Experimento com Padrões Binários 77
4.6 Conclusões Parciais 81

5 CONCLUSÃO 83
5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros 84

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 85

APÊNDICE A - CIRCUITO DE CHUA 95

1 INTRODUÇÃO

Uma importante característica do nosso mundo é a tendência que diversos sistemas têm de alcançar ritmos comuns, ou seja, a tendência à *sincronização*. Essencialmente, a sincronização é entendida como a capacidade que sistemas, de diferentes naturezas, têm de formar um regime comum devido a uma interação ou força (PIKOVSKY et al., 2001; OSIPOV et al., 2007). O fenômeno da sincronização ocorre se ao menos dois elementos estão acoplados, sendo também encontrado em conjuntos envolvendo centenas e até milhares de entidades dinâmicas, dos quais pode-se citar os vagalumes machos que se agrupam em árvores durante a noite, e piscam em uníssono na tentativa de atrair as fêmeas (BUCK; BUCK, 1968); as células marcapasso no coração (TORRE, 1976); as células secretoras de insulina no pâncreas (SHERMAN et al., 1988); a atividade rítmica no cérebro devido ao disparo sincronizado de um grande número de neurônios (BUZSÁKI1; DRAGUHN, 2004); a sincronização durante as crises epilépticas (KANDEL et al., 2000; ENGEL; PEDLEY, 2008).

No início dos anos 90 estudos pioneiros realizados por Yamada e Fujisaka (1984) e Pecora e Carroll (1990) revelaram que a sincronização pode existir mesmo entre sistemas com dinâmica caótica. Com isso, o fenômeno da sincronização tornou-se um dos campos de pesquisa mais ativos na dinâmica não-linear. No decorrer dos anos, diferentes tipos de sincronização foram caracterizados, tais como sincronização completa (PECORA; CARROLL, 1990; PIKOVSKY et al., 2001), de fase (ROSENBLUM et al., 1996; YALCINKAYA; LAI, 1997), imperfeita (PARK et al., 1999), com atraso de fase (PIKOVSKY et al., 1997), generalizada (BOCCALETTI et al., 2002). Em particular, destaca-se a sincronização de fase entre sistemas caóticos na qual os processos envolvidos têm travadas suas fases, enquanto as amplitudes do sinal permanecem não correlacionadas. Este fenômeno desperta grande interesse por estar relacionada com interações fracas entre os sistemas e se mostrar comumente observado na natureza (STROGATZ; STEWART, 1993; ROSENBLUM et al., 1998; TASS et al., 1998; SCHÄFER et al., 1998; MAKARENKO; LLINáS, 1998).

Um dos primeiros trabalhos a identificar sincronização de fase entre dois osciladores caóticos fracamente acoplados foi apresentado por Rosenblum et al. (1996). Para caracterizar este fenômeno eles usaram a ideia de sinal analítico baseado na transformada de Hilbert e mapa de Poincaré. Depois disso, diversos estudos envolvendo o problema de detectar a sincronização de fase em sistemas caóticos vem sendo realizados (PIKOVSKY et al., 1997; ROMANO et al., 2005; ROSENBLUM et al., 2002; PEREIRA

et al., 2007b). Em sua maioria, as técnicas para detectar sincronização de fase são diretamente aplicáveis a osciladores com atratores coerentes, nos quais a trajetória do atrator gira em torno de um centro de rotação fixo. Neste caso, a fase pode ser definida como o aumento do ângulo entre o raio da trajetória e um eixo arbitrário de referência. No entanto, um desafio é definir a fase para sistemas mais complexos, ou seja quando os atratores estão em regime não coerente de fase.

Paralelamente, motivados pela estrutura complexa do cérebro humano na sua capacidade de organizar neurônios de forma a executar certos processos, tais como aprendizagem, percepção, reconhecimento de padrões, controle motor, entre outros. Estruturas de redes de osciladores caóticos vêm sendo exploradas em modelos de redes neurais artificiais voltados para o armazenamento e processamento de informação (XIU et al., 2004; DEHMER, 2008; ZHAO et al., 2008).

Um dos trabalhos precursores de neurocomputação que tentam modelar matematicamente o cérebro humano foi apresentado pelo neurofisiologista McCulloch e pelo matemático Walter Pitts (MCCULLOCH; PITTS, 1943). O trabalho fazia uma analogia entre células vivas e processos eletrônicos, simulando o comportamento do neurônio natural, onde o neurônio possuía apenas uma saída, que era uma função limiar da soma do valor de suas diversas entradas. As conexões da rede eram do tipo excitatórias ou inibitórias. Posteriormente, Hebb (1949) postulou a primeira lei de aprendizagem específica para as sinapses do neurônio baseada na alteração da eficiência sináptica: a sinapse (conexão) somente seria reforçada se tanto as células pré-sinápticas quanto as pós-sinápticas estiverem excitadas, caso contrário a sinapse deve ser enfraquecida ou eliminada. O postulado de Hebb é um dos mais usados no estudo de redes neurais artificiais.

O celebre trabalho de Hopfield (1982), "*Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*", despertou grande interesse sobre as técnicas de se conceber redes neurais artificiais implementáveis computacionalmente. Esse movimento persiste até hoje. Em seu trabalho, Hopfield propôs um modelo de rede neural com conexões sinápticas simétricas, supondo que os sistemas devam convergir para um estado de minima energia. O significado físico de seu trabalho se encontra na proposta de se usar a função de energia e na ideia do armazenamento de informação em atratores dinamicamente estáveis.

Estudos recentes em neurociência sugerem a presença de oscilações neurais síncronas

que se encontrariam na origem e na natureza do processo cognitivo (WARD, 2003; QUIROGA; PANZERI, 2009). Isto vem estimulando estudos sobre modelos oscilatórios de memória associativa baseada na codificação temporal da informação (ISHII et al., 1996; AONISHI, 1998; NISHIKAWA et al., 2004b; XIU et al., 2004; DEHMER, 2008; ZHAO et al., 2008). Tais modelos tipicamente consistem de osciladores acoplados interagindo uns com os outros de acordo com a regra de aprendizagem Hebiana, e os padrões são armazenados nas oscilações travadas em fase. Uma vantagem deste tipo de modelo é que pode ser implementado usando uma variedade de dispositivos oscilantes, incluindo circuitos de malhas de sincronismo de fase, osciladores a laser, ressonadores MEMS, entre outros (HOPPENSTEADT; IZHIKEVICH, 2000a; HOPPENSTEADT; IZHIKEVICH, 2000b; HOPPENSTEADT; IZHIKEVICH, 2001; MIYANO; TSUTSUI, 2007; CARRILLO; HOPPENSTEADT, 2010; VASSILIEVA et al., 2011).

1.1 Objetivos

Este trabalho teve por objetivo principal o desenvolvimento de uma metodologia para detectar a sincronização de fase entre osciladores caóticos, e que seja aplicável a detecção do fenômeno a partir de séries temporais. Além disso, o presente estudo tem por meta armazenar e recuperar informações usando um conjunto de osciladores acoplados.

1.2 Estrutura da Tese

- Capítulo 2: apresenta, de forma sucinta, conceitos importantes sobre sistemas dinâmicos caóticos, tipos de acoplamentos mais usados no estudo de sincronização e, finalmente uma revisão bibliográfica das principais definições de fase e algumas das técnicas existentes para identificação de sincronização de fase em sistemas caóticos.

- Capítulo 3: é descrito o método para identificar sincronização de fase em sistemas caóticos baseado na análise espectral por meio de mínimos quadrados para obter a fase de sistemas caóticos não coerentes e de séries temporais. Além disso, apresenta os principais resultados aplicando a técnica a diferentes configurações, incluindo uma análise de dados experimentais.

- Capítulo 4: é apresentada uma descrição de redes de osciladores utilizada para processamento e armazenamento de informações. Além disso, uma modificação na função de acoplamento da rede de osciladores é apresentada.

Por fim, os resultados da recuperação da informação são apresentados, incluindo um experimento envolvendo identificação de padrões binários.

- Capítulo 5: são discutidos as principais conclusões da tese e algumas sugestões para investigações futuras.

2 SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS

2.1 Introdução

O fenômeno da sincronização está presente em todo o lugar, desde de sistemas mecânicos, como relógios de pêndulo, a sistemas biológicos, tais como os vagalumes, as células do corpo humano (HUYGENS, 1673; BUCK; BUCK, 1968; SHERMAN et al., 1988; STROGATZ; STEWART, 1993; SCHÄFER et al., 1998; PARK et al., 2010). O primeiro cientista a observar e descrever o fenômeno da sincronização foi o holandês Christiaan Huygens, famoso por seus estudos em óptica, construção de telescópios e de relógios de pêndulo ele descobriu que dois relógios de pêndulo presos a um suporte comum sincronizavam, isto é, suas oscilações coincidiam e os pêndulos sempre moviam-se em direções opostas (HUYGENS, 1673).

A sincronização em sistemas caóticos pode parecer contraditória, tendo em vista que uma pequena variação nas condições iniciais deste tipo de sistema faz com que suas trajetórias em média divirjam exponencialmente com o tempo. No entanto, se dois ou mais sistemas caóticos estão interagindo, ou seja, existe um acoplamento (comunicação) entre eles, é possível ocorrer o fenômeno da sincronização. Este fenômeno despertou grande interesse da comunidade científica e desde os primeiros estudos sobre a sincronização de sistemas caóticos por Yamada e Fujisaka (1984) e Pecora e Carroll (1990), sincronização de caos tornou-se um dos campos de pesquisa mais ativos na dinâmica não-linear. Inicialmente, a atenção foi centrada no que hoje é conhecido como *sincronização completa* (PIKOVSKY et al., 2001). Neste tipo de sincronização as trajetórias de dois sistemas caóticos idênticos propriamente acoplados irão convergir para um caminho comum e permanecerão juntos em uma mesma trajetória, independentemente das diferenças em suas condições iniciais.

Um tipo mais específico de sincronização é a *sincronização de fase* que se caracteriza quando dois, ou mais processos caóticos acoplados desenvolvem sincronismo entre suas fases, enquanto suas amplitudes continuam a evoluir de forma independente (ROSENBLUM et al., 1996; Rosa Jr. et al., 1998). A sincronização de fase desperta grande interesse por ser considerado um fenômeno comum na natureza, onde interações envolvem, via de regra, sistemas não idênticos (é praticamente impossível encontrar-se na natureza dois sistemas idênticos). Além do mais a sincronização de fase também está relacionada a interações fracas entre sistemas. Este fenômeno vem sendo observado em sistemas neuronais, sistemas ecológicos, em experimentos de

laboratório, sistemas de *laser*, sistemas eletromecânicos, entre outros (ROSENBLUM et al., 1998; STROGATZ; STEWART, 1993; PARLITZ et al., 1996; PALUS, 1997; SCHÄFER et al., 1998; TASS et al., 1998; BLASIUS; STONE, 2000; TICOS et al., 2000; DESHAZER et al., 2001).

2.2 Sistemas Dinâmicos Caóticos

Um *sistema dinâmico* consiste em um conjunto de possíveis estados e de uma regra determinística, em que o estado presente é unicamente determinado a partir do estado passado através de uma regra determinística (DEVANEY, 1992). A característica fundamental de um sistema dinâmico caótico é a sensibilidade a variações nas suas condições iniciais. Para quantificar esta sensibilidade, calculam-se os *expoentes de Lyapunov*, que medem a taxa de divergência média ao longo do tempo das trajetórias vizinhas e representam um dos critérios mais importantes utilizados para identificar caos em sistemas dinâmicos. O comportamento caótico é caracterizado pela existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. A evolução de um sistema dinâmico caótico pode ser descrita por um conjunto de equações discretas ou contínuas (diferenciais), o qual representa as regras que determinam o comportamento futuro a partir de um estado inicial. O espaço formado pelas variáveis dependentes de um sistema dinâmico é denominado *espaço de fase*. No espaço de fase de um sistema dinâmico dissipativo caótico existe uma região limitada chamada de *atrator* para o qual as trajetórias convergem.

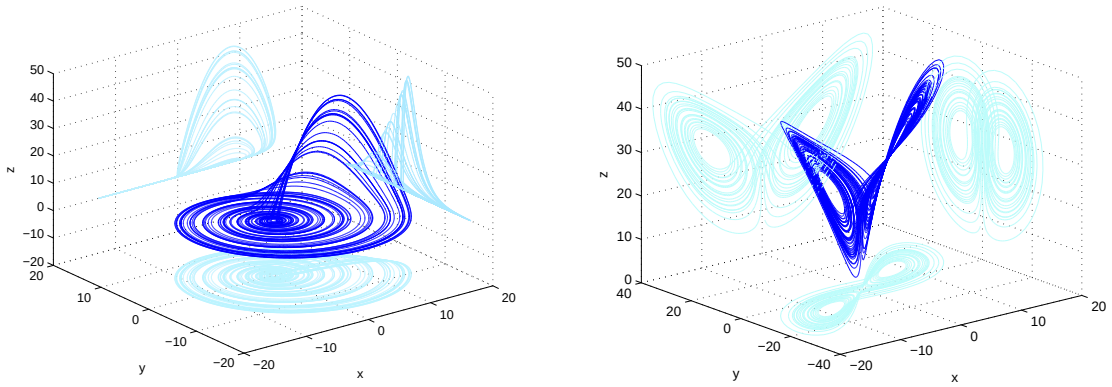
Como exemplo, seja o sistema de equações diferencias ordinárias

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y+z) \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x-c), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde a, b e c são parâmetros que regulam a dinâmica do sistema. Proposto por Rössler (1976) este sistema gera um fluxo similar ao sistema de Lorenz[1] (Figura 2.1(b)) e geometricamente, um atrator com apenas um lobo no espaço de fase (Figura 2.1(a)), sem uma interpretação física imediata. Posteriormente, Rössler, motivado pelo comportamento caótico em química cinética, juntamente com Willamowski (1980) propôs uma esquema de reações químicas cujo atrator caótico é similar ao do

[1] O sistema de Lorenz é formado pelas equações $\dot{x} = \sigma(y-x)$, $\dot{y} = x(r-z) - y$, $\dot{z} = xy - \gamma z$, onde σ, r e γ são parâmetros. Este foi proposto por Lorenz (1963) e descreve o comportamento convectivo de um fluído.

Sistema 2.1.



(a) Atrator caótico de Rössler.

(b) Atrator caótico de Lorenz

Figura 2.1 - Atratores de Rössler e Lorenz com suas respectivas projeções nos planos xy, xz e yz.

A Figura 2.2 mostra as trajetórias das variáveis de estado do Sistema 2.1 com parâmetros $a = 0,22$, $b = 0,4$, $c = 8,5$ e condição inicial $(1, 1, 1)$, (curvas em azul) e para uma nova condição inicial, $(1,000001; 1,000001; 1,000001)$ (curvas em vermelho), ligeiramente diferente da anterior. Observa-se que as trajetórias divergem ao longo do tempo evidenciando uma sensibilidade a pequenas variações na condição inicial do sistema, que é uma propriedade de sistemas caóticos. Os expoentes de Lyapunov, para esta configuração, são aproximadamente $0,072$, 0 e $-13,79$. Note que um dos expoentes de Lyapunov é positivo, confirmando a dinâmica caótica do sistema.

2.3 Acoplamentos

O estudo do processo de sincronização está relacionado a interação entre dois sistemas, o que é chamado de acoplamento. Quando a evolução de um dos sistemas acoplados permanece inalterada tem-se a configuração denominada de *acoplamento unidirecional* ou *acoplamento condutor-resposta*. Ao contrário, quando ambos os sistemas são conectados, de modo que eles se influenciam mutuamente em seus comportamentos, refere-se ao *acoplamento bidirecional*. A seguir serão apresentados esses dois tipos de acoplamentos.

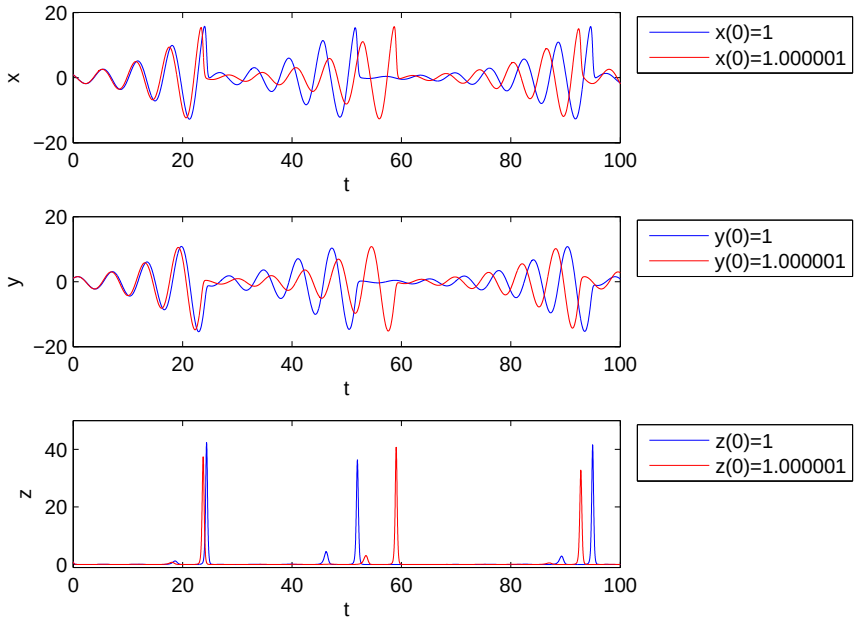


Figura 2.2 - Variáveis de estado do Sistema 2.1, para $a = 0,22$, $b = 0,4$, $c = 8,5$

2.3.1 Acoplamento Unidirecional

No acoplamento unidirecional, um sistema denominado condutor atua sobre os demais, chamados de resposta, sem reciprocidade. Matematicamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{1} &= \mathbf{F}(\mathbf{x_1}) \quad \} \quad \textit{Condutor} \\ \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{2} &= \mathbf{F}(\mathbf{x_2}) + \eta\mathbf{G}(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) \quad \} \quad \textit{Resposta}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $\mathbf{G}$, neste caso, é uma matriz que determina uma combinação linear das componentes de $\mathbf{x}$ que são usados na diferença, η determina a intensidade do acoplamento, $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ representam vetores de estado n-dimensionais dos sistemas caóticos e $\mathbf{F}$ é um vetor de campo $\mathbf{F} : R^n \rightarrow R^n$. Note que, o acoplamento apresentado, consiste de uma diferença entre as variáveis do sistema condutor e resposta. Este tipo de acoplamento é o mais usado, no entanto outros tipos de funções de acoplamento $g(x_1, x_2)$ podem ser consideradas.

Considerando o sistema de Rössler, Equação 2.1, o sistema condutor e o resposta

são dados por:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 &=& x_1 + a y_1 \\ \dot{z}_1 &=& b + z_1(x_1 - c) \end{array}\right\} Condutor \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_2 &=& -(y_2 + z_2) + \eta(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 &=& x_2 + a y_2 \\ \dot{z}_2 &=& b + z_2(x_2 - c) \end{array}\right\} Resposta \tag{2.4}$$

onde $a = 0,22$, $b = 0,4$ e $c = 8,5$ são os parâmetros que regulam a dinâmica do sistema e η quantifica a influência do sistema condutor sobre o resposta. Para ilustrar a influência do acoplamento consideram-se dois valores distintos de η. As condições iniciais de cada sistema também são distintas, sendo $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (-10, 1, 1)$ a condição inicial do sistema condutor e $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (10, 10, 10)$ do sistema resposta. Na Figura 2.3 são mostradas a evolução temporal x_1 e x_2 dos sistemas condutor e resposta, respectivamente. Quando $\eta = 0,2$, Figura 2.3(a), o sistema resposta, trajetória x_2, evolui de forma distinta ao do condutor, indicando que a intensidade de acoplamento não foi suficiente para que o sistema resposta sincronizasse com o condutor. Porém, para $\eta = 0,3$, Figura 2.3(b), as trajetórias do sistema resposta x_2 e do condutor x_1 coincidem após um certo tempo e continuam juntas, caracterizando a sincronização completa entre os sistemas.

2.3.2 Acoplamento Bi-direcional

No acoplamento bi-direcional os sistemas se influenciam mutuamente. Isto se dá adicionando-se um termo de acoplamento na dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{1} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_\mathbf{1}) + \eta\mathbf{G}(\mathbf{x}_\mathbf{2} - \mathbf{x}_\mathbf{1}) \\ \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{2} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_\mathbf{2}) + \eta\mathbf{G}(\mathbf{x}_\mathbf{1} - \mathbf{x}_\mathbf{2}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ representam vetores de estado n-dimensionais dos sistemas caóticos, $\mathbf{F}$ é um vetor de campo $\mathbf{F} : R^n \rightarrow R^n$, $\mathbf{G}$ é uma função, que pode até mesmo ser uma matriz, que determina uma combinação linear das componentes de $\mathbf{x}$ que são usadas na diferença entre as componentes e η determina a intensidade do acoplamento.

Sejam dois sistemas dinâmicos caóticos de Rössler acoplados bidirecionalmente atra-

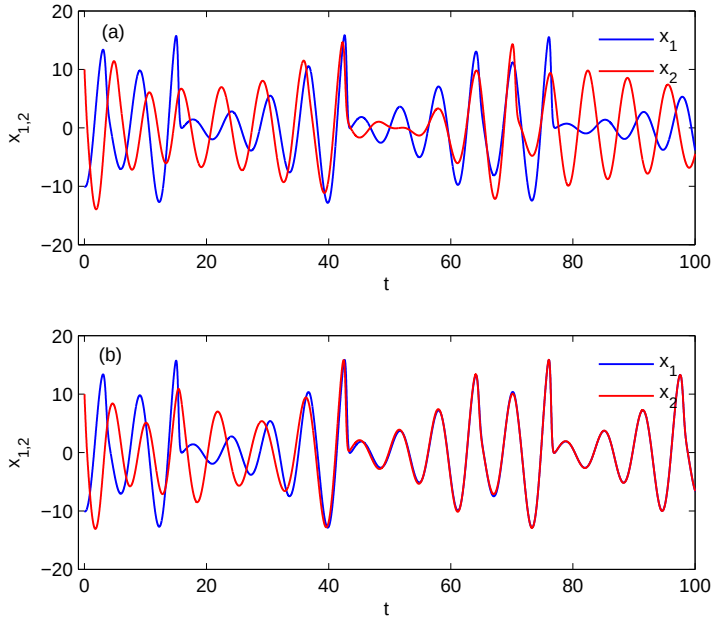


Figura 2.3 - Evolução temporal das trajetórias x_1 e x_2 do sistema condutor (Equação 2.3) e o sistema resposta (Equação 2.4), com (a) $\eta = 0,2$ e (b) $\eta = 0,3$.

vés da componente x

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \eta(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= -\omega_{1,2} x_{1,2} + a y_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= 0.1 + z_{1,2}(x_{1,2} - 8.5), \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $\omega_{1,2}$ são as frequências naturais dos sistemas 1 e 2, respectivamente. Se $\omega_1 = \omega_2$ então os sistemas são ditos *idênticos*, e se $\omega_1 \neq \omega_2$ então os sistemas são considerados *não-idênticos*.

Inicialmente, considere uma pequena interação entre os sistemas com intensidade de acoplamento $\eta = 0,01$, e $\omega_1 = \omega_2 = 1.0$ (sistemas idênticos). Sejam $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (-10, 1, 1)$ e $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (20, 10, 10)$ as condições iniciais dos sistemas 1 e 2, respectivamente. A evolução temporal das variáveis x_1 e x_2 é mostrada na Figura 2.4(a), onde observa-se que as duas trajetórias oscilam de forma descompassadas uma em relação a outra. Sendo assim, esta intensidade de acoplamento não é forte o suficiente para sincronizar as oscilações. A Figura 2.4(b) tem-se o gráfico das variáveis de estado x_1 *versus* x_2, conhecido como *curva*

de Lissajous[2], onde se visualiza um emaranhado das trajetórias, o que indica a não sincronização. Com um acoplamento mais forte, $\eta = 0,06$, pode-se verificar que os sinais x_1 e x_2 oscilam juntos, no entanto observa-se que suas amplitudes permanecem não-correlacionadas. Estes sistemas se encontram sincronizados em fase, o que pode ser observado na Figura 2.4(c)-(d). Aumentando mais a intensidade de acoplamento, $\eta = 0,2$, os sistemas entram numa regime de sincronização completa, Figura 2.4(e). Observa-se que as trajetórias tornam-se idênticas, $x_1(t) \approx x_2(t)$ e a curva de Lissajous (Figura 2.4(f)) apresenta uma reta.

Considerando $\omega_1 = 0,98$ e $\omega_2 = 1,03$ os sistemas são não idênticos. Primeiramente, os sistemas são acoplados com $\eta = 0,02$. As trajetórias e a curva de Lissajous, para esse acoplamento, pode ser vista nas Figuras 2.5(a)-(b), observa-se que esta intensidade de acoplamento não é forte o suficiente para sincronizar os sistemas. Para $\eta = 0,05$, Figura 2.5(c)-(d), a curva de Lissajous (d) apresenta uma estrutura circular, típica de sinais que oscilam em frequências iguais ou próximas e com deslocamento de fase limitada, indicando a sincronização de fase. Quando $\eta = 0,2$ as trajetórias são idênticas a menos de um atraso de fase, Figura 2.5(e), e a curva de Lissajous, mostrada na Figura 2.5(f), apresenta algum tipo de padrão, reflexo da dinâmica não idêntica dos sistemas. O atraso de fase é ilustrado no gráfico (e) pela parte ampliada (retângulo). A presença deste atraso indica um tipo de sincronização conhecida como *sincronização com atraso de fase*.

2.4 Sincronização de Fase em Osciladores Caóticos

A sincronização de fase é um tipo sutil de sincronização entre osciladores caóticos devido a uma fraca interação entre os mesmos. Neste tipo de sincronização as fases dos osciladores caóticos se mantêm correlacionadas e enquanto as amplitudes permanecem caóticas. De forma isolada a fase não apresenta novas informações sobre o sistema, mas sua vantagem torna-se evidente quando é considerada a diferença entre as fases dos osciladores acoplados. Se a diferença de fase ao longo do tempo variar em torno de um valor constante menor que 2π, os sistemas se encontram sincronizados em fase. Sendo assim, a estimação da fase de osciladores caóticos é fundamental para se identificar a sincronização de fase entre osciladores caóticos.

[2]Este tipo de gráfico é muito usado durante a realização de experimentos, a sua aparência indica relações entre as frequências dos sistemas, podendo formar elipses, círculos, retas.

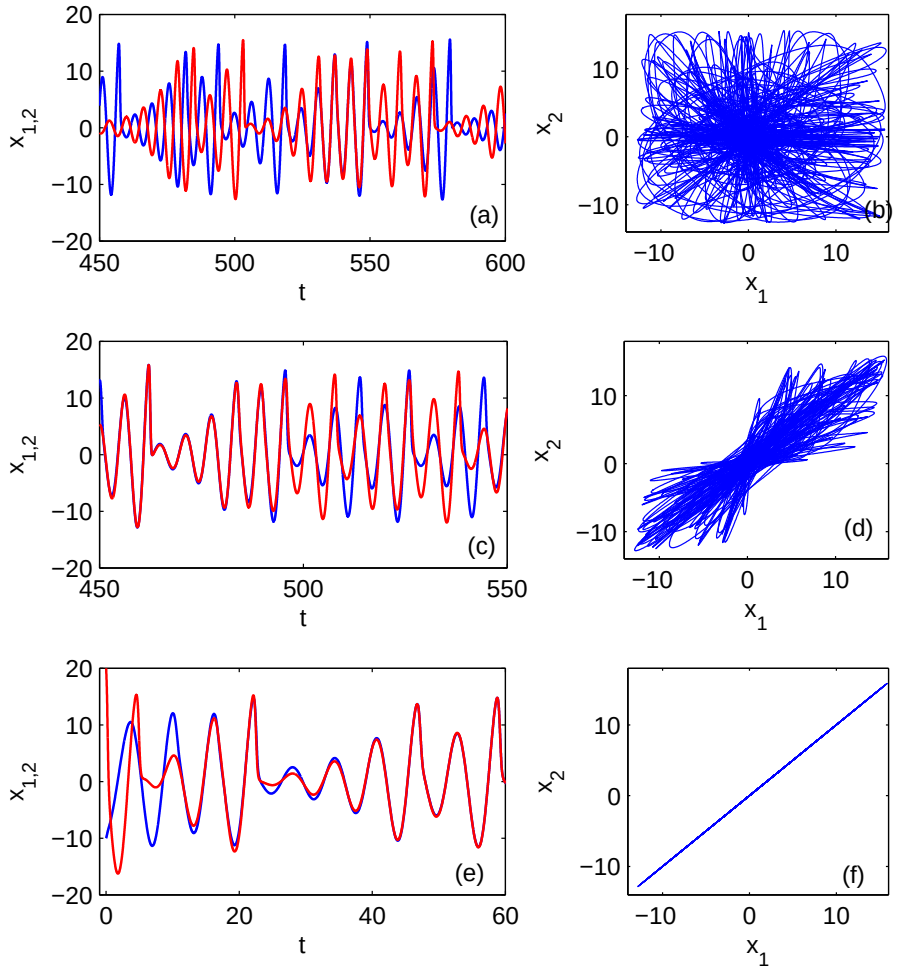


Figura 2.4 - Sistemas acoplados idênticos com condições iniciais $x_1(0) = -10$ e $x_2(0) = 20$. (a)-(c)-(e) evolução temporal das variáveis x_1 (curva em azul) e x_2 (curva em vermelho) para diferentes acoplamentos: $\eta = 0,01$, $\eta = 0,06$ e $\eta = 0,2$, respectivamente. (b) A curva de Lissajous não apresenta estrutura, confirmando a não sincronização dos sistemas; em (d) são observadas estruturas que indicando a sincronização de fase entre os sistemas; em (f) a sincronização completa é observada.

2.4.1 Definições e Estimação da Fase em Osciladores Caóticos

A fase em osciladores periódicos é uma quantidade que cresce uniformemente no tempo e adquire 2π a cada ciclo oscilatório, como ilustrado na Figura 2.6. Quando se trata de processos caóticos a definição de fase não é tão clara e geral como no

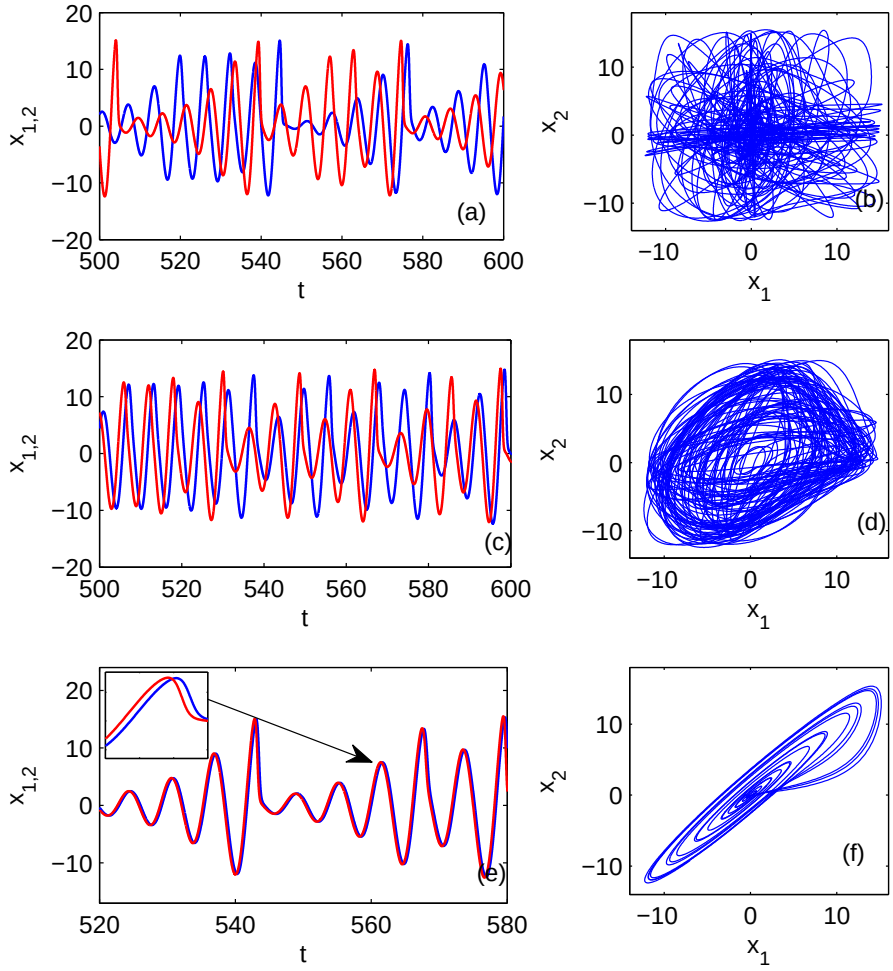


Figura 2.5 - Sistemas acoplados não-idênticos com condições iniciais $x_1(0) = -10$ e $x_2(0) = 20$. (a)-(c)-(e) evolução temporal das variáveis x_1 (curva em azul) e x_2 (curva em vermelho) para diferentes acoplamentos: $\eta = 0,02$, $\eta = 0,05$ e $\eta = 0,2$, respectivamente. (b) A curva de Lissajous não apresenta estrutura, confirmando a não sincronização dos sistemas; em (d) são observadas estruturas circulares indicando a sincronização de fase entre os sistemas; em (f) a sincronização com atraso de fase é observada.

caso periódico. A ideia é definir *fase* como uma variável que está relacionada com o expoente de Lyapunov nulo de um sistema dinâmico contínuo no tempo com comportamento caótico (PIKOVSKY et al., 2001). A seguir serão apresentadas algumas das formas de se definir a fase em sistemas caóticos.

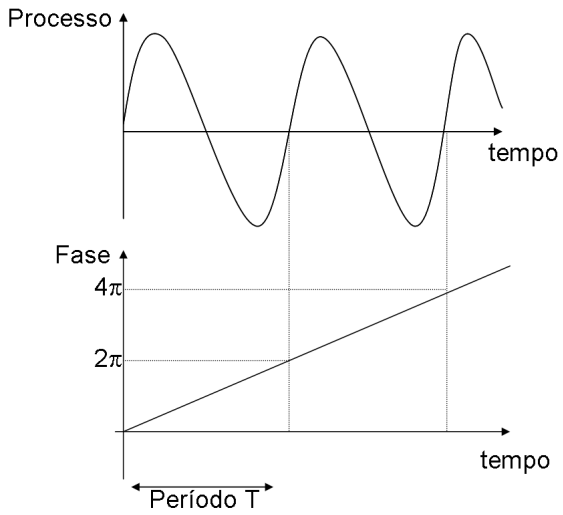


Figura 2.6 - Ilustração da definição de fase de um oscilador periódico. A fase cresce uniformemente no tempo e adquire 2π a cada período.
Fonte: Adaptado de Pikovsky et al. (2001, p.13).

Definição de Fase - Seção de Poincaré

Suponha uma projeção de um atrator no plano (x, y) que gire em torno da origem (ou algum outro ponto que pode ser tomado como origem)(Figura 2.7). Então, pode-se escolher uma seção que seja "perfurada" ou cruzada transversalmente por todas as trajetórias do atrator, ou seja, traçar uma *seção de Poincaré*. Assim, para cada parte da trajetória entre os dois cruzamentos de seção com esta superfície, define-se a fase como uma função linear no tempo e a cada rotação é atribuído 2π:

$$\phi_P(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t < t_{n+1} \tag{2.7}$$

onde t_n é o tempo do *n-ésimo* cruzamento da trajetória pela seção de Poincaré.

Definição de Fase - Transformada de Hilbert

Um sinal analítico é introduzido baseado na transformada de Hilbert, do qual se obtém a fase instantânea e a amplitude para um sinal escalar $\chi(t)$. O sinal analítico $\zeta(t)$ é uma função complexa do tempo definida como:

$$\zeta(t) = \chi(t) + i\chi_H(t) = A(t)e^{i\phi_H(t)}, \tag{2.8}$$

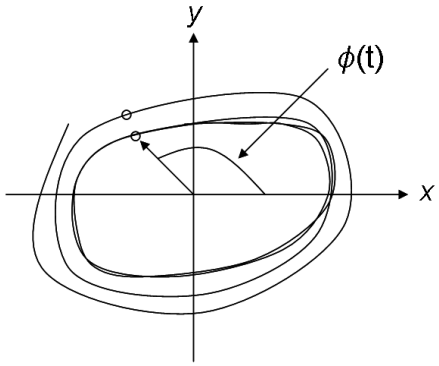


Figura 2.7 - Ilustração de um atrator com origem bem definida.

onde a função χ_H é a transformada de Hilbert de $\chi(t)$

$$\chi_H(t) = \pi^{-1} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\tau)}{t-\tau} d\tau \tag{2.9}$$

onde P.V. significa que a integral é tomada no sentido do valor principal de Cauchy. A amplitude instantânea $A(t)$ e a fase instantânea ϕ_H do sinal $\chi(t)$ são unicamente determinadas a partir da Equação 2.8.

Definição de Fase - Arco tangente

Se a trajetória do atrator tem a propriedade de rotacionar em torno de um certo ponto bem definido, a fase é denominada como o ângulo entre a projeção do ponto de fase no plano e uma direção dada no plano (Figura 2.7):

$$\phi_A(t) = arctan(y(t)/x(t)). \tag{2.10}$$

Para aplicar estas três definições, considere o sistema de Rössler (Equações 2.1) com parâmetros: $a = 0,15$, $b = 0,4$ e $c = 8,5$. Sob estas condições o atrator de Rössler possui uma origem bem definida (Figura 2.8 (a)). E o espectro de frequência da trajetória x apresenta um pico bem definido (Figura 2.8 (b)) caracterizando o que chamamos de *atrator fase-coerente*. Desta forma, um mapa de Poincaré pode ser facilmente construído. Uma escolha apropriada da superfície de Poincaré pode ser o meio plano $y = 0$, $x < 0$ (linha em vermelho na Figura 2.8(a)) e a trajetória "perfurando" a seção de valores positivos para negativos. Na Figura 2.8(c) nota-se que as três formas de calcular a fase coincidem macroscopicamente, e numa visão

microscópica o mesmo não é observado (Figura 2.8(d)), mas possuem razões de crescimento iguais. Em outras palavras, a frequência média definida como a média de $\dot{\phi}_P$ sobre um período grande de tempo coincide com a definição direta de frequência média pelo número médio de cruzamentos da superfície de Poincaré por unidade de tempo.

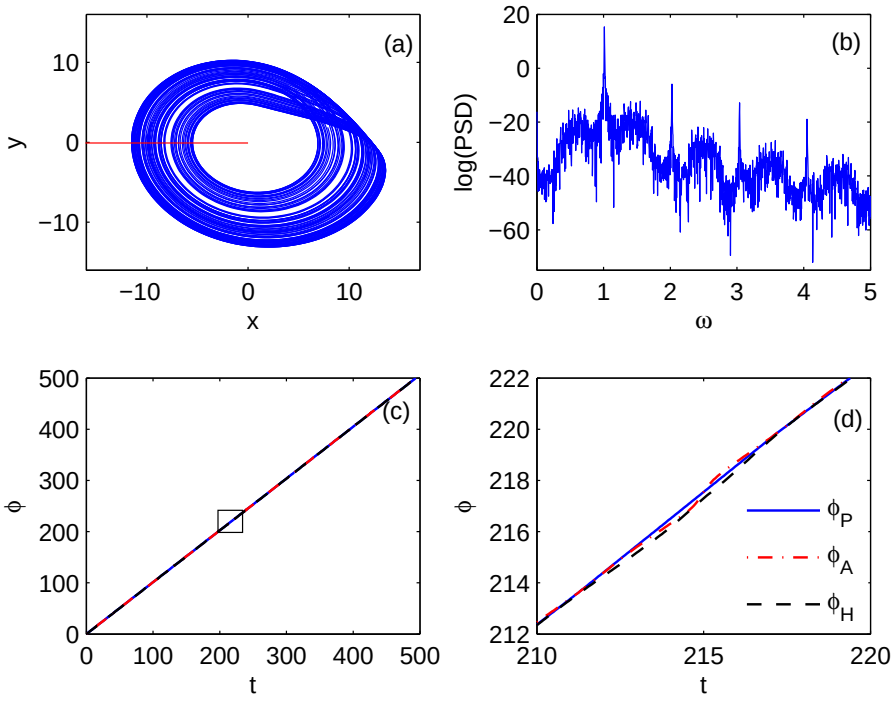


Figura 2.8 - (a) Atrator de Rössler para e linha em vermelho indica a posição da seção de Poincaré, (b) Espectro de frequência da trajetória x, (c) evolução temporal da fase para as três definições, (d) Visualização ampliada da fase indicado pelo retângulo em (c).

Agora considere o oscilador de Rössler (Equações 2.1) com $a = 0,22$, $b = 0,4$ e $c = 8,5$, para os quais o atrator caótico (Figura 2.9(a)) apresenta uma estrutura topológica mais complexa: existem pequenos e grades laços no plano (x, y) e não está claro quais deslocamentos seriam atribuídos a estes laços, lembrando um funil que é melhor observado na projeção tridimensinal ilustrada na Figura 2.1(a). Desta forma é difícil determinar uma seção que seja cortada por todas as trajetórias e o espectro de frequência não apresenta um pico bem definido (Figura 2.9(b)). Esse tipo de atrator é chamado de *atrator fase-não-coerente*. Como consequência, as de-

finições de fase vistas anteriormente implicam em resultados diferentes, que podem ser vistos na Figura 2.9(c). Lembrando que a fase deve ser uma função monotonicamente crescente, fato que não ocorre neste caso, sendo identificados deslizes de fases, como pode ser observado na ampliação ilustrada na Figura 2.9(d). Este resultado se deve ao fato do atrator não possuir um centro de rotação fixo para toda a extensão da trajetória no atrator. Quando isso ocorre dizemos que a fase do oscilador é mal definida. Para esses casos, considera-se que a trajetória tem apenas uma única direção de rotação em torno de algum ponto então a fase pode ser definida por (CHEN et al., 2001):

$$\phi_D(t) = arctan(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}) \tag{2.11}$$

Note que, comparando as Equações 2.10 e 2.11, o atrator não coerente será analisado no plano-$(\dot{x}, \dot{y})$ ao invés do plano-(x, y). No caso do sistema de Rössler com dinâmica não coerente o novo atrator (plano-$(\dot{x}, \dot{y})$) deve ter um centro de rotação em $(0, 0)$, como pode ser visto na Figura 2.10.

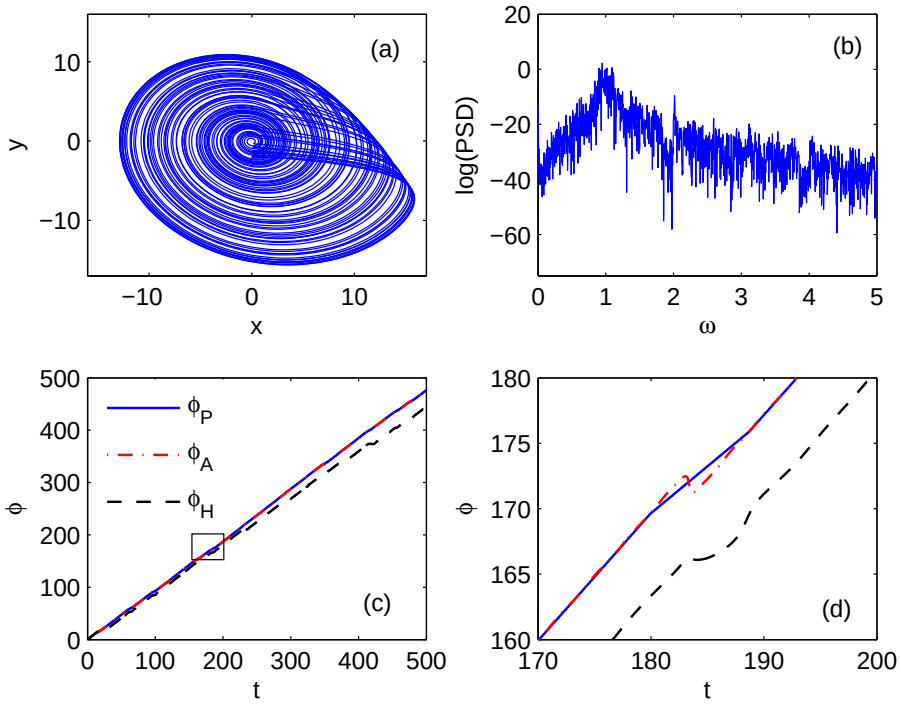


Figura 2.9 - (a) Atrator de Rössler para $a = 0,22$, $b = 0,4$ e $c = 8,5$; (b) espectro de frequência da trajetória x; (c) evolução temporal da fase para as três definições; (d) Visualização ampliada da fase indicado pelo retângulo em (c).

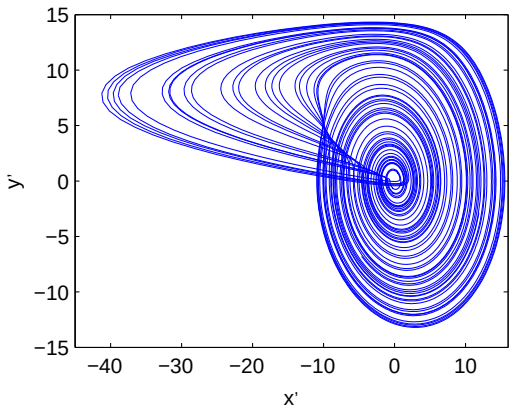


Figura 2.10 - Projeção do espaço de fase do sistema de Rössler em regime não coerente ($a = 0,22$) no plano $(\dot{x}, \dot{y})$.

Assim, a Equação 2.11 é usada para calcular a fase de dois sistemas de Rössler acoplados (Equação 2.6) em regime não coerente, com a mesma configuração utilizada para gerar a Figura 2.5. Naquela figura foram ilustradas as trajetórias para três acoplamentos distintos e as respectivas curvas de Lissajous. Na Figura 2.11 são mostrados os resultados da diferença de fase para esses mesmos acoplamentos. Quando $\eta = 0.02$ a diferença de fase cresce ao longo do tempo indicando a não sincronização, no entanto para uma interação um pouco mais intensa $\eta = 0.05$ a diferença de fase varia em torno de um valor constante caracterizando a sincronização de fase. E para um acoplamento ainda maior $\eta = 0.2$ temos a sincronização com atraso de fase.

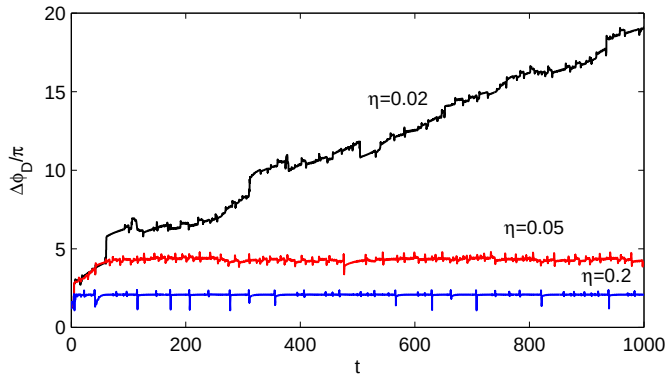


Figura 2.11 - Diferença de fase usando a Equação 2.8 para calcular a fase. Dois sistemas de Rössler acoplados (Equação 2.17) para os mesmos parâmetros apresentados na Figura 2.5.

De um modo geral, a formulação de fase proposta por Chen et al. (2001) é adequada para os casos não coerentes, mas é importante ressaltar que é necessário o conhecimento da derivada e do espaço de fase do sistema, o que o torna muitas vezes inviável quando se trata da análise de dados experimentais. Claro que é possível reconstruir o atrator a partir de uma série temporal, mas com isso será necessário o conhecimento da dimensão do sistema em questão, que geralmente é desconhecida em dados experimentais.

A seguir serão apresentados dois métodos, recentemente propostos, para detectar e quantificar sincronização de fase em sistemas caóticos acoplados aplicados ao caso não coerente e dados experimentais. O primeiro utiliza um conjunto de osciladores ciclos limites auxiliares como um dispositivo para medir as frequências de sinais complexos (ROSENBLUM et al., 2002). O outro é baseado na recorrência da trajetória dentro de uma vizinhança num estado anterior do espaço de fase (ROMANO et al., 2005).

2.4.2 Método baseado no Travamento da Frequência

O método para detectar sincronização de fase baseado no travamento da frequência foi proposto por Rosenblum et al. (2002). Esse método utiliza um conjunto de osciladores ciclos limites auxiliares como um dispositivo para medir as frequências de sinais complexos.

Primeiramente, é considerado um conjunto de ciclos limites não acoplados com frequências naturais ω_k distribuídas num intervalo $[\omega_{min}, \omega_{max}]$. Cada oscilador é conduzido por uma força periódica comum com frequência $\nu \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$. A forçante sincronizará aqueles elementos do conjunto que possuem frequências próximas a ν. No gráfico das frequências dos osciladores ciclo limite condutores (Ω_k) *versus* as frequências naturais (ω_k), a sincronização se manifesta no aparecimento de platôs. Sendo que a frequência dos elementos travados é igual a ν. A frequência desconhecida do condutor pode ser obtida determinando o ponto médio do platô, Ω_k^p, presente neste gráfico. Este ponto pode ser identificado a partir do mínimo da variância $\sum_{j=k-L}^{k+L}(\Omega_j - \bar{\Omega}_k)^2$, onde $\bar{\Omega}_k = (2L+1)^{-1}\sum_{j=k-L}^{k+L}\Omega_j$ e comprimento $L = 10$.

O método é formulado com base na Equação 2.12[3]. Seja um arranjo de N osciladores de Poincaré com um sinal $X(t)$ dado por:

$$\dot{A}_k = (1 + i\omega_k)A_k - |A_k|^2 A_k + \varepsilon X(t), \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{2.12}$$

onde $A_k = R_k e^{i\phi_k}$ é a amplitude complexa. Substituindo $\dot{A}_k = \dot{R}_k e^{i\phi_k} + R_k \dot{\phi}_k e^{i\phi_k}$ na Equação 2.12 obtém-se

$$\dot{R}_k + R_k\dot{\phi}_k = (\omega_k R_k - \varepsilon X(t) sin\phi_k)i + R_k + R_k^3 + \varepsilon X(t) cos\phi_k \tag{2.13}$$

Separando a fase ϕ_k e a amplitude real R_k da amplitude complexa, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{R}_k &= R_k - R_k^3 + \varepsilon X(t) cos\phi_k \\ \dot{\phi}_k &= \omega_k - R_k^{-1} \varepsilon X(t) sin\phi_k. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para valores pequenos de ε a amplitude R é a unidade, e omitindo suas flutuações, tem-se

$$\dot{\phi}_k = \omega_k - \varepsilon X(t) cos\phi_k, \tag{2.15}$$

sendo uma equação puramente da fase. As frequências observadas são $\Omega_k = lim_{t\to\infty}[\phi_k(t) - \phi_k(0)]/t$. Na prática, o sinal $X(t)$ é normalizado para ter média zero e variância unitária, e a intensidade de acoplamento é o único parâmetro do método. Como exemplo, considere o sistema de Rössler em regime não coerente sob a influência de uma forçante senoidal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + \eta sen(\nu t) \\ \dot{y} &= x + 0,29y \\ \dot{z} &= 0,1 + z(x - 8,5), \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde η é a intensidade de acoplamento. A trajetória $x(t)$ normalizada é aplicada no sistema 2.15, com $\varepsilon = 0,5$ e 200 frequências contidas no intervalo $[0,5; 1,3]$. As frequências dos osciladores no dispositivo conduzido por $X(t) = x(t)$ em função das frequências naturais são indicadas por $\eta = 0$ (curva contínua) na Figura 2.12. O valor de Ω^p no platô é aproximadamente $0,84$, logo uma frequência característica para sinal $x(t)$ é $\Omega^p = 0,84$. Realizando medições com o dispositivo para diferentes

[3]A Equação 2.12 pode ser obtida da equação complexa de Grinzburg-Landau (CHATE, 1999; ROSENBLUM et al., 2002)

valores do acoplamento η, observa-se um deslocamento dos platôs para a frequência da forçante. Ou seja, Ω^p se aproxima da frequência da força externa $\nu = 0,9$ (veja Figura 2.12), indicando a sincronização do sistema com a forçante.

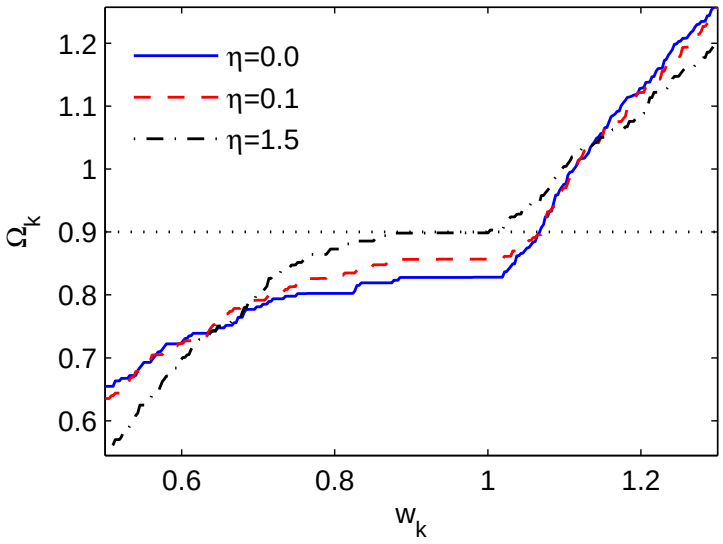


Figura 2.12 - Medida da frequência em função das frequências naturais para três acoplamentos (amplitudes) da forçante. A curva contínua (em azul) mostra as frequências do conjunto de osciladores não acoplados ($\eta = 0$). As outras curvas são obtidas forçando o sistema de Rössler com amplitudes $\eta = 0,1$ (linha tracejada) e $\eta = 1,5$ (linha traço-ponto), e ilustram um deslocamento característico da frequência em direção a frequência da forçante $\nu = 0,9$ (linha pontilhada horizontal), indicando sincronização.

No caso de dois osciladores caóticos acoplados, as trajetórias $x_{1,2}$ serão usadas como entrada de dois conjuntos de osciladores ciclo limite. Para cada conjunto tem-se o gráfico $\Omega_{k_{1,2}}$ *versus* $\omega_{k_{1,2}}$, e se os platôs coincidirem sobre um mesmo intervalo de $\omega_{k_{1,2}}$, ou seja $\Omega_1^p \cong \Omega_2^p$ então a sincronização de fase está presente entre os sistemas (ROSENBLUM et al., 2002).

Considere dois osciladores de Rössler acoplados

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \eta(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= -\omega_{1,2} x_{1,2} + a y_{1,2} + \eta(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= 0,1 + z_{1,2}(x_{1,2} - 8,5), \end{aligned} \tag{2.17}$$

em regime não coerente com $a = 0,29$ e não idênticos com $\omega_1 = 0,98$ e $\omega_2 = 1,03$. As trajetórias $x_{1,2}$ (normalizadas com média zero e variância unidade) são usadas como entradas dos dispositivos de medida de frequência.

A Figura 2.13 mostra a evolução dos resultados com o aumento da intensidade de acoplamento: (a) $\eta = 0,03$; (b) $\eta = 0,09$; (c) $\eta = 0,1$; (d) $\eta = 0,2$. Nesse caso, foi utilizado um conjunto de 100 osciladores auxiliares com frequências naturais distribuídas no intervalo $[0,6; 1,5]$. Para acoplamentos moderados $\eta = 0,03$ e $\eta = 0,09$ os platôs não coincidem, mas para intensidades mais intensas de acoplamento $\eta = 0,1$ e $\eta = 0,2$ observa-se a coincidência dos platôs indicando a sincronização entre os sistemas.

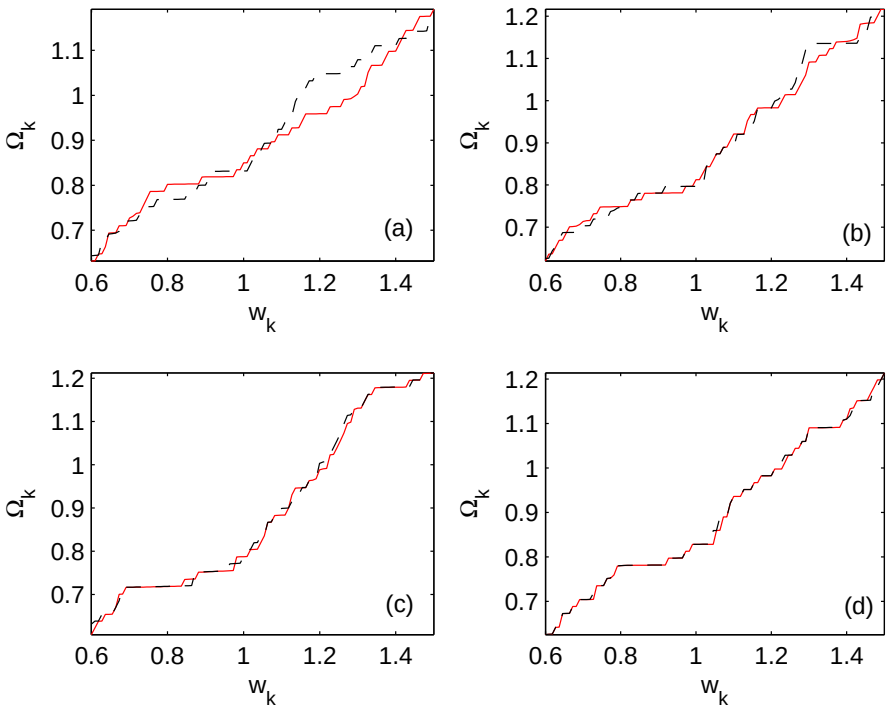


Figura 2.13 - Resultados medida da frequência para três intensidades de acoplamentos: (a)$\eta = 0,03$; (b) $\eta = 0,09$; (c) $\eta = 0,1$; (d) $\eta = 0,2$. Analisando a coincidência dos platôs é possível concluir que há sincronização de fase em (c) e (d).

Para quantificar esses resultados pode-se calcular o ponto médio dos platôs e verificar se $\Omega_1^p \cong \Omega_2^p$ é satisfeito. Na Figura 2.13 nota-se a presença de mais de um platô defi-

nido em cada sistema, o que dificulta o cálculo do platô médio. Assim, para garantir um bom resultado é selecionado um novo conjunto de osciladores cujas frequências estão distribuídas em torno de um platô específico. Portanto, aplicando o método para um novo novo intervalo de frequências naturais $\omega \in [0,75; 0,95]$ observa-se na Figura 2.14 a coincidência dos platôs apenas para $\eta = 0,2$ (Figura 2.14(d)), indicando a sincronização de fase. Calculando a diferença entre os platôs médios, $\Delta\Omega^p = \Omega_2^p - \Omega_1^p$, para diferentes intensidades de acoplamento é possível verificar a transição para a sincronização dos sistemas acoplados. Esta transição pode ser vista na Figura 2.15, onde sincronização de fase entre os sistemas se confirma para valores de $\eta \geq 0,15$.

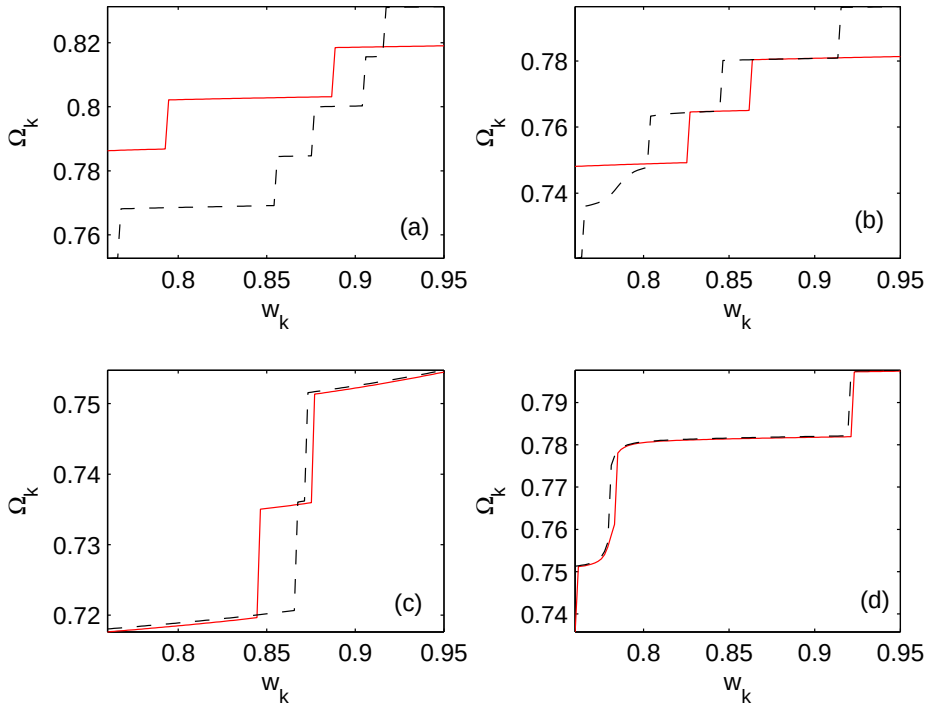


Figura 2.14 - Resultados aplicando o método para $\omega \in [0,75; 0,95]$ para detectar a sincronização. As intensidades de acoplamento utilizadas foram: (a) $\eta = 0,03$; (b) $\eta = 0,09$; (c) $\eta = 0,1$; (d) $\eta = 0,2$. Analisando a coincidência dos platôs é possível concluir que há sincronização de fase em (d).

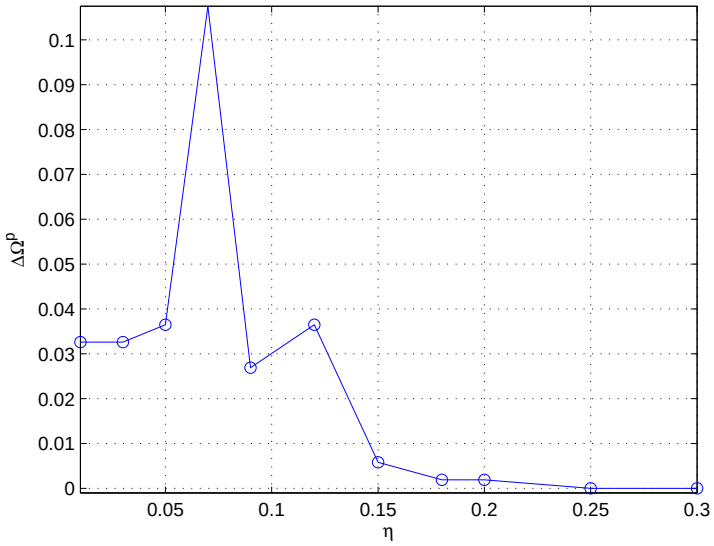


Figura 2.15 - Transição para sincronização avaliando deferentes valores de acoplamento entre os sistemas.

2.4.3 Método baseado em Recorrência

Um método proposto por Romano et al. (2005) para detectar sincronização de fase explora o conceito de Poincaré (1890) de recorrência, onde um sistema dinâmico retorna arbitrariamente próximo de cada ponto do passado após um intervalo de tempo suficientemente longo.

Considere uma trajetória $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ de um sistema dinâmico, pode-se dizer que num tempo $t = j\delta t$ a trajetória retornou próxima de uma vizinhança num tempo $t = i\delta t$ se

$$R_{i,j}^{(\epsilon_r)} = \Theta\left(\epsilon_r - \|x_i - x_j\|\right) = 1, \tag{2.18}$$

onde ϵ_r é um limiar pré definido, $\Theta(.)$ é a função Heaviside[4] e δt é o intervalo de tempo entre amostras consecutivas. Baseado nesta definição é possível estimar a probabilidade $P^{(\epsilon)}_{r}(\tau)$ do sistema retornar a vizinhança de um ponto anterior x_i da trajetória após τ passos de tempo, onde a vizinhança é definida com um quadrado de tamanho ϵ_r em torno do estado x_i. Assim tem-se

[4] A função de Heaviside é definida por:

$$\Theta(\epsilon_r - ||x_i - x_j||) = \begin{cases} 1 & se \quad ||x_i - x_j|| \leq \epsilon \\ 0 & se \quad ||x_i - x_j|| > \epsilon \end{cases}$$

$$\widehat{P}^{(\epsilon_r)}(\tau) = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau}\Theta\left(\epsilon_r - \|x_i - x_{i+\tau}\|_\infty\right) = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} R_{i,i+\tau}^{(\epsilon_r)}. \tag{2.19}$$

A probabilidade de recorrência $\widehat{P}^{(\epsilon_r)}(\tau)$ pode ser vista como uma medida estatística de quão frequente o ângulo de fase associado com a trajetória do sistema (coerente ou não coerente) no espaço de fase original aumenta em 2π dentro do intervalo de tempo τ. Analogamente para sistemas periódicos é possível atribuir um incremento de 2π no ângulo de fase ϕ quando $\|x(t+T) - x(t)\|_\infty = 0$, onde T é o período. Para uma trajetória mais complexa $x(t)$ atribui-se um incremento de 2π sempre que $\|x(t+\tau) - x(t)\|_\infty \approx 0$, ou equivalentemente quando $\|x(t+\tau) - x(t)\|_\infty < \epsilon$. Se dois sistemas estão sincronizados em fase, as fases de ambos os sistemas aumenta $k \cdot 2\pi$, onde k um número natural dentro do mesmo intervalo de tempo τ.

Portanto, examinando a coincidência das posições do máximo de $\widehat{P}^{(\epsilon_r)}(\tau)$ dos sistemas é possível identificar quantitativamente a sincronização de fase incluindo dois passos. Primeiro, calcular $P_{1,2}(\tau)$, e segundo, calcular o coeficiente de correlação cruzada entre $P_1(\tau)$ e $P_2(\tau)$ (correlação entre as probabilidades de recorrência)

$$CPR = \frac{\left\langle \overline{P}_1(\tau)\overline{P}_2(\tau)\right\rangle}{\sigma_1\sigma_2}, \tag{2.20}$$

onde $\overline{P}_{1,2}$ denota que o valor médio foi subtraído e σ_1 e σ_2 são os desvios padrões $P_1(\tau)$ e $P_2(\tau)$, respectivamente. Se os sistemas estão sincronizados as probabilidades de recorrência são máximas no mesmo tempo e $CPR \approx 1$ (MARWAN et al., 2007).

A Figura 2.16 apresenta os resultados obtidos usando a componente x de dois sistemas de Rössler acoplados (Equação 2.17) no regime não coerente ($a = 0,29$). A medida que o acoplamento η é intensificado os picos tornam-se mais próximos e paralelamente um aumento nos valores do coeficiente CPR (especificados no interior do gráfico) é caracterizado.

A dependência da sincronização de fase em relação a intensidade de acoplamento pode ser analisado através do gráfico CPR *versus* η (ver Figura 2.17). A transição para a sincronização de fase também é observada quando $\eta > 0,15$, como visto na seção anterior (Figura 2.15) utilizando outro método.

Comparando esses dois métodos observa-se que eles não fazem uso explícito da fase

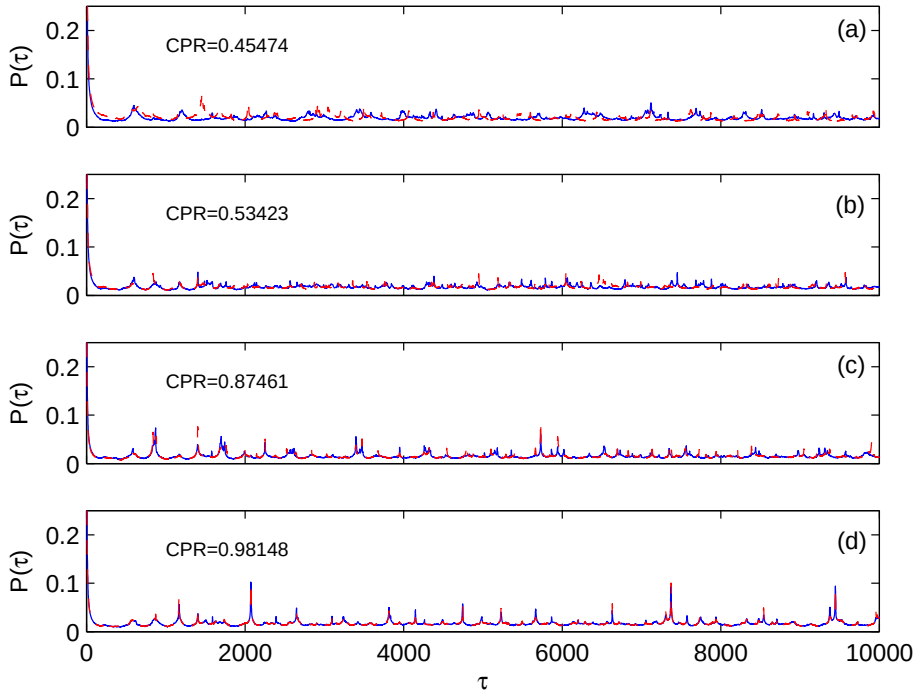


Figura 2.16 - Probabilidades de recorrência $P_{1,2}(\tau)$ para valores de acoplamento: (a) $\eta = 0,03$; (b) $\eta = 0,09$; (c) $\eta = 0,1$; (d) $\eta = 0,2$, e os respectivos valores do coeficiente CPR. A sincronização de fase se faz presente em (d).

associada as trajetórias. Ambos alcançaram bons resultados aplicados a sistemas não coerentes. Uma análise da robustez destes dois métodos é realizada em (FOLLMANN et al., 2009), bem como a aplicação dessas técnicas a dados experimentais. O método baseado no travamento da frequência apresenta melhores resultados quanto a presença de ruído na detecção da sincronização de fase em relação ao método baseado em recorrência. Já quanto ao tamanho das séries o método baseada no travamento de frequência mostrou-se mais sensível do que o método baseado em recorrência.

O fato é que não existe um método universal para a identificação da sincronização de fase, especialmente quando envolvem séries provenientes de sistemas caóticos em regimes não coerentes.

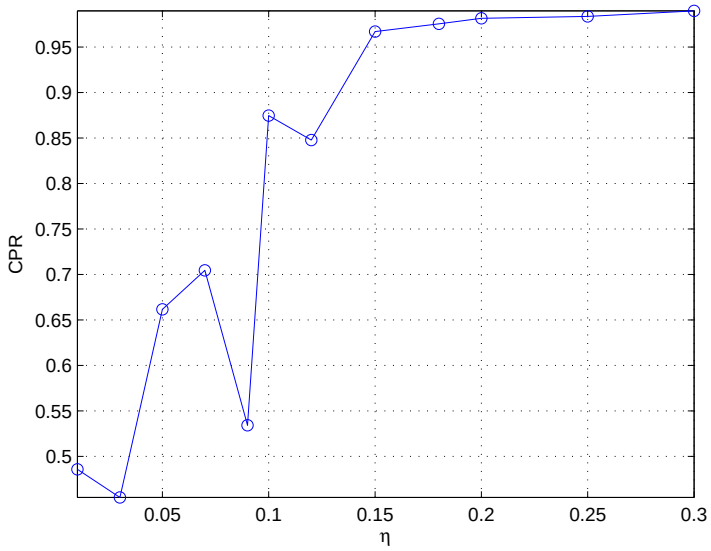


Figura 2.17 - Transição para sincronização de fase. O coeficiente CPR torna-se próximo de 1 ao passo que o acoplamento é intensificado.

3 MÉTODO PARA IDENTIFICAR SINCRONIZAÇÃO DE FASE

3.1 Introdução

A sincronização de fase é um mecanismo fundamental de interação encontrada entre muitos fenômenos naturais, gerando atualmente grande interesse da comunidade científica. Uma variedade de técnicas para detecção de sincronização de fase vem sendo desenvolvidas, incluindo medidas do ângulo diretamente do atrator (STONE, 1992), transformada de Hilbert (ROSENBLUM et al., 1996; YALCINKAYA; LAI, 1997), seção de Poincaré (PIKOVSKY et al., 1997), conjuntos localizados (PEREIRA et al., 2007b; PEREIRA et al., 2007a), *plots* de recorrência (ROMANO et al., 2005; KURTHS et al., 2006), travamento das frequências (ROSENBLUM et al., 2002), transformada de Fourier (BRUNS, 2004), e transformada de ondeletas (HRAMOV; KORONOVSKII, 2005). Todas estas técnicas são diretamente aplicáveis a osciladores com atratores coerentes, nos quais a trajetória do atrator gira em torno do centro de rotação, e a fase pode ser introduzida como o aumento do ângulo entre o raio da trajetória e um eixo arbitrário de referência. No entanto, um dos desafios consiste em definir a fase para sistemas mais complexos, ou seja quando os atratores estão em regime não coerente de fase. Para esses casos não existe uma metodologia geral que possa ser aplicada com eficiência, em especial se as séries são de dados experimentais (FOLLMANN et al., 2009).

A seguir, será apresentado e discutido um método, baseado na análise espectral por meio de mínimos quadrados, para obter a fase de sistemas caóticos não coerentes e de séries temporais. A presente metodologia consiste na estimação da frequência fundamental de segmentos (janelas) de uma série temporal, operando de forma a minimizar o erro quadrático do ajuste de uma função senoidal com o segmento analisado. Esse método é implementado de uma forma distinta daquela abordada por Choi (1997). Na sequência serão apresentados os resultados da aplicação do método para detectar sincronização de fase em sistemas caóticos acoplados e a sua utilização em dados experimentais.

3.2 Método baseado em Mínimos Quadrados

Considere uma série temporal $y(t)$ e um segmento $y(t_k)$ extraído de $y(t)$, onde t_k, com $k = 1, ..., K$, é o tempo igualmente espaçado e K é o tamanho do segmento. O

segmento $y(t_k)$ pode ser aproximado por uma função senoidal da forma:

$$\hat{y}(t_k) = \beta_1 sin(\omega\, t_k) + \beta_2 cos(\omega\, t_k) + \beta_3, \tag{3.1}$$

onde ω é a frequência da senoide, β_1, β_2 e β_3 são os parâmetros a serem estimados. A Equação 3.1 também pode ser escrita na forma matricial:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} sin(\omega\, t_1) & cos(\omega\, t_1) & 1 \\ sin(\omega\, t_2) & cos(\omega\, t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ sin(\omega\, t_K) & cos(\omega\, t_K) & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} . \tag{3.2}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}\hat{\beta} + \epsilon, \tag{3.3}$$

onde ϵ é o vetor de erros cometidos ao aproximar $\mathbf{Y}$ por $\mathbf{M}\hat{\beta}$.

O vetor de parâmetros $\hat{\beta}$, a ser estimado para um dado ω, pode ser obtido usando o método de mínimos quadrados (AGUIRRE, 2001). A base deste método é a minimização do somatório do quadrado dos erros, sendo este somatório dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k^2 = \epsilon^T \epsilon \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{M}\hat{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{M}\hat{\beta}) \\ &= \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T\mathbf{M}\hat{\beta} - \hat{\beta}^T\mathbf{M}^T\mathbf{Y} + \hat{\beta}^T\mathbf{M}^T\mathbf{M}\hat{\beta}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

A fim de minimizar a função erro $\mathbf{E}$ com respeito a $\hat{\beta}$ é necessário que $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \hat{\beta}} = 0$. Logo, diferenciando a função $\mathbf{E}$ em relação a $\hat{\beta}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \hat{\beta}} &= -(\mathbf{Y}^T\mathbf{M})^T - \mathbf{M}^T\mathbf{Y} + \mathbf{M}^T\mathbf{M}\hat{\beta} + (\mathbf{M}^T\mathbf{M})^T\hat{\beta} \\ &= -\mathbf{M}^T\mathbf{Y} - \mathbf{M}^T\mathbf{Y} + \mathbf{M}^T\mathbf{M}\hat{\beta} + \mathbf{M}^T\mathbf{M}\hat{\beta} \\ &= -2\mathbf{M}^T\mathbf{Y} + 2\mathbf{M}^T\mathbf{M}\hat{\beta}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Igualando $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \hat{\beta}}$ a zero tem-se:

$$\begin{aligned} -2\mathbf{M}^T\mathbf{Y} + 2\mathbf{M}^T\mathbf{M}\hat{\beta} &= 0 \\ 2\mathbf{M}^T\mathbf{M}\hat{\beta} &= 2\mathbf{M}^T\mathbf{Y} \\ \hat{\beta} &= [\mathbf{M}^T\mathbf{M}]^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{Y}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para que o vetor de parâmetros estimado $\hat{\beta}$ seja um mínimo da função $\mathbf{E}$ é necessário que $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \hat{\beta}^2} > 0$. Calculando a derivada segunda da função E em relação a $\hat{\beta}$ obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \hat{\beta}^2} = 2\mathbf{M}^T\mathbf{M} > 0. \tag{3.7}$$

Logo, $\hat{\beta} = [\mathbf{M}^T\mathbf{M}]^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{Y}$ minimiza o erro quadrático $\mathbf{E}$.

A função $E(\omega)$ é o erro quadrático mínimo da aproximação de um segmento $y(t_k)$ por uma senoide de frequência ω sobre todas as possíveis amplitudes e fases de tais senoides. O propósito dessa aproximação é determinar uma frequência apropriada para a componente senoidal que minimiza a função $E(\omega)$, de modo que cada vale significante corresponde a uma componente senoidal do segmento $y(t_k)$ em questão. O valor de ω no mínimo do vale é aproximadamente igual à frequência da componente senoidal correspondente.

Na Figura 3.1 são ilustrados três segmentos selecionados da trajetória x do sistema de Rössler no regime coerente ($a = 0,16$) de tamanhos $K = 280$ (a), $K = 320$ (b) e $K = 640$ (c), e os respectivos gráficos da função $E(\omega)$, (d), (e) e (f), para 800 valores de $\omega \in [0;\ \ 6]$. As frequências estimadas para estes três segmentos estão indicadas nos gráficos por ω^* e não apresentam valores discrepantes em relação ao aumento do segmento. No entanto, para segmentos provenientes do sistema de Rössler em regime não coerente ($a = 0,2925$) as frequências estimadas apresentam valores distintos em relação ao tamanho dos segmentos, como pode ser visto na Figura 3.2. Sendo assim, a escolha do tamanho dos segmentos está diretamente relacionada com uma boa estimação da frequência, e por isso deve levar em consideração detalhes como a taxa de amostragem da série e o número médio de pontos por oscilação.

Intuitivamente, um segmento deve conter ao menos uma oscilação (ciclo) da série, e com uma análise do periodograma pode-se obter o número de pontos contido em um ciclo médio, para ser usado como referência na escolha do tamanho apropriado

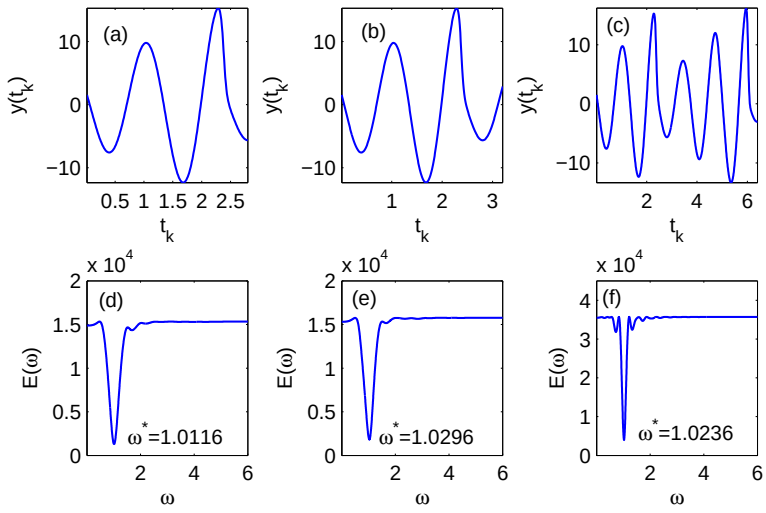


Figura 3.1 - Segmentos distintos, $y(t_k)$, selecionados da trajetória x do sistema de Rössler em regime coerente de fase para: (a) $K = 280$ pontos, (b) $K = 320$ pontos e (c) $K = 640$ pontos. (d), (e) e (f) Funções $E(\omega)$ para os segmentos mostrados em (a), (b) e (c), respectivamente. No painel inferior estão identificadas as frequências associadas aos mínimos de $E(\omega)$.

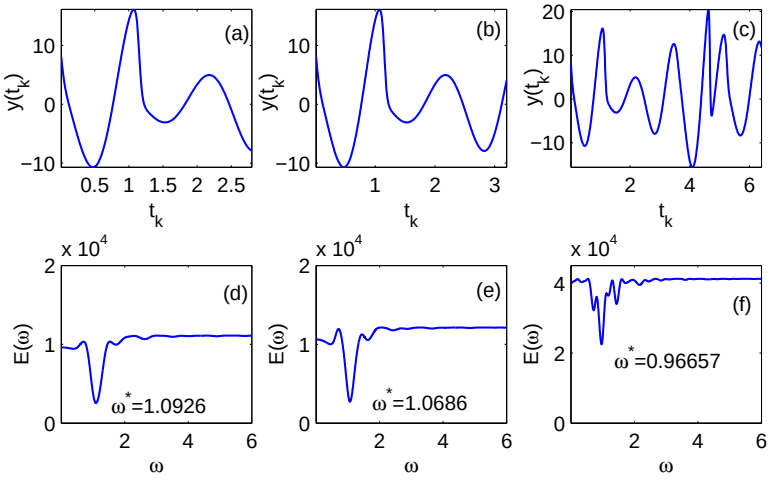


Figura 3.2 - Segmentos distintos, $y(t_k)$, selecionados da trajetória x do sistema de Rössler em regime não coerente de fase para: (a) $K = 280$ pontos, (b) $K = 320$ pontos e (c) $K = 640$ pontos. (d), (e) e (f) Funções $E(\omega)$ para os segmentos mostrados em (a), (b) e (c), respectivamente. No painel inferior estão identificadas as frequências associadas aos mínimos de $E(\omega)$.

do segmento. Na Figura 3.3 são apresentados os periodogramas para a componente x do sistema de Rössler em regime coerente (a) e em regime não coerente (b). A linha pontilhada indica a posição dos ciclos médios. Neste caso, quando se trata do regime coerente um ciclo contém 120 pontos e no regime não coerente 150 pontos. Outro ponto importante é a escolha apropriada de um intervalo de frequências para o cálculo da função $E(\omega)$, que pode ser obtido usando o próprio método, através da estimação da função $E(\omega)$ para um intervalo maior de frequências e reduzindo esse intervalo em torno do vale predominante.

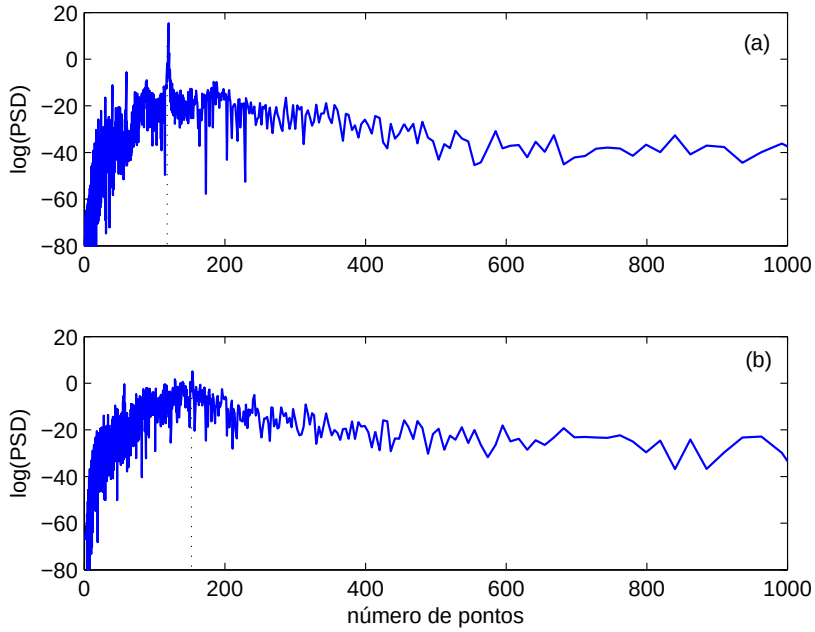


Figura 3.3 - Periodograma da série do sistema de Rössler (a) coerente e (b) não coerente. A linha pontilhada indica a posição dos ciclos médios.

Uma vez determinada a frequência do segmento, a fase é estimada usando a relação $\omega = \frac{d\phi}{dt}$, ou seja, a variação da fase no tempo é diretamente proporcional a frequência do segmento de série. De modo geral, a série temporal $y(t)$ é analisada segmento a segmento com o auxílio de uma janela móvel. Os segmentos são selecionados seguindo a regra $y(t_{k+n.S})$, $n = 0, ..., N$, $k = 1, ..., K$, onde N é o tamanho da série temporal, K é o tamanho do segmento (janela) e S é passo de deslocamento. Esse procedimento é ilustrado na Figura 3.4. Assim, se $K = 100$ e $S = 5$ então o segmento da série a ser analisado será $y(1), ..., y(100)$, o próximo segmento será $y(6), ..., y(106)$, e assim

por diante. Após percorrer toda a série, tem-se um vetor de frequências e aplicando um integrador cumulativo sobre essas frequências, a fase é determinada. Portanto, para aplicar o método é necessário definir (i) um tamanho para os segmentos; (ii) um intervalo de frequências; (iii) um passo de deslocamento; (iv) um método de integração. Neste trabalho o método de integração usado foi a regra dos trapézios. A complexidade do algoritmo implementado no método proposto é proporcional aos parâmetros de entrada, comprimento da série temporal a ser analisada (N) e ao tamanho do segmento (K). Dessa forma, o custo computacional envolvido nesse método é proporcional a esses parâmetros. No decorrer do texto este método será referenciado como método SFMQ, acrônimo de *Sincronização de Fase baseado em Mínimos Quadrados*.

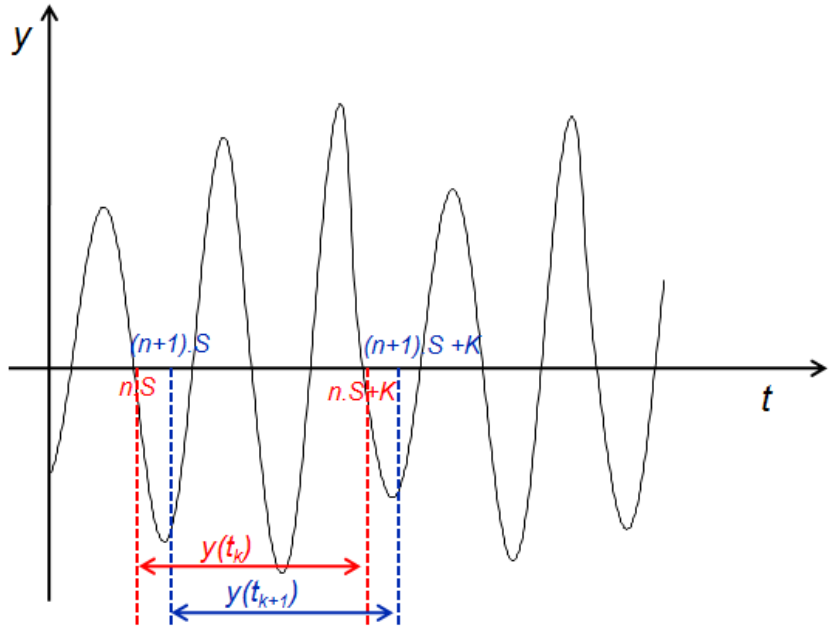


Figura 3.4 - Visualização esquemática do funcionamento da janela móvel.

3.3 Resultados

O regime de sincronização de fase em osciladores caóticos acoplados pode ser identificado obtendo-se as fases ϕ_1 e ϕ_2 dos osciladores, e checando quando a condição $\Delta\phi\,(t) \equiv |\phi_1(t) - \phi_2(t)| \;\leq\; const \;\leq\; 2\pi$ é satisfeita.

3.3.1 Oscilador de Rössler

Considere dois osciladores de Rössler acoplados (RÖSSLER, 1976; STONE, 1992),

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + \eta(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= -\omega_{1,2} x_{1,2} + a y_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= 0.1 + z_{1,2}(x_{1,2} - 8.5), \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde a governa a topologia do atrator, η é a intensidade de acoplamento, e $\omega_1 = 0,98$, $\omega_2 = 1,02$ são as frequências predominantes dos dois osciladores.

Para $a = 0,16$ o atrator se encontra no regime de fase coerente e os resultados aplicando o método SFMQ para três valores distintos do acoplamento η são mostrados na Figura 3.5(a). Esta figura ilustra a diferença de fase entre os dois osciladores acoplados, indicando claramente a tendência à sincronização com o aumento de η. As fases são estimadas usando uma janela móvel de tamanho $K = 540$ pontos, contendo aproximadamente quatro oscilações da componente x do Rössler. Para as frequências ω usou-se 200 valores igualmente espaçados entre 0,6 e 1,4. A fim de validar o método proposto comparou-se esses resultados com os resultados obtidos da definição padrão de fase $\phi(t) = \arctan(y/x)$ (ROSENBLUM et al., 1996), e da transformada contínua de ondeletas[1] para duas escalas de tempo s (HRAMOV; KORONOVSKII, 2005), apresentados nos gráficos (b), (c) e (d), respectivamente da Figura 3.5.

Os resultados usando o arcotangente são mostrados na Figura 3.5(b), e usando a transformada de ondeleta com escala de tempo $s = 5,4$ são mostrados na Figura 3.5(c) demostrando concordância entre os três métodos. Basicamente, as três técnicas mostram que para um acoplamento intenso ($\eta = 0,05$), os dois sistemas de Rössler apresentam suas fases travadas, mostrando sincronização, mantendo sua diferença de fase pequena e menor que 2π. Para acoplamentos menos intensos ($\eta = 0,035$ e $0,020$), a sincronização é quebrada gradativamente com aumentos de 2π na diferença de fase $\Delta\phi$. Assim como no caso do método SFMQ, a transformada de ondeleta não requer uma busca por um centro de rotação do atrator. Contudo, contrário ao método SFMQ, a transformada de ondeleta é muito sensível a mudanças no parâ-

[1] Um conjunto contínuo de fases $\phi_s(t)$ correspondendo a escala de tempo s de um sinal caótico pode ser determinado usando a transformada contínua de ondeleta $W(s,t_0) = |W(s,t_0)|e^{j\phi_s}$. A ondeleta mãe usada é a ondeleta de Morlet $\Psi_0(\alpha) = (1/\sqrt[4]{\pi})exp(j\omega_0\alpha)exp(-\alpha^2/2)$. O parâmetro $\omega_0 = 2\pi$ garante a relação $s \cong 1/f$ entre a escala de tempo s e a frequência f da transformada de Fourier.

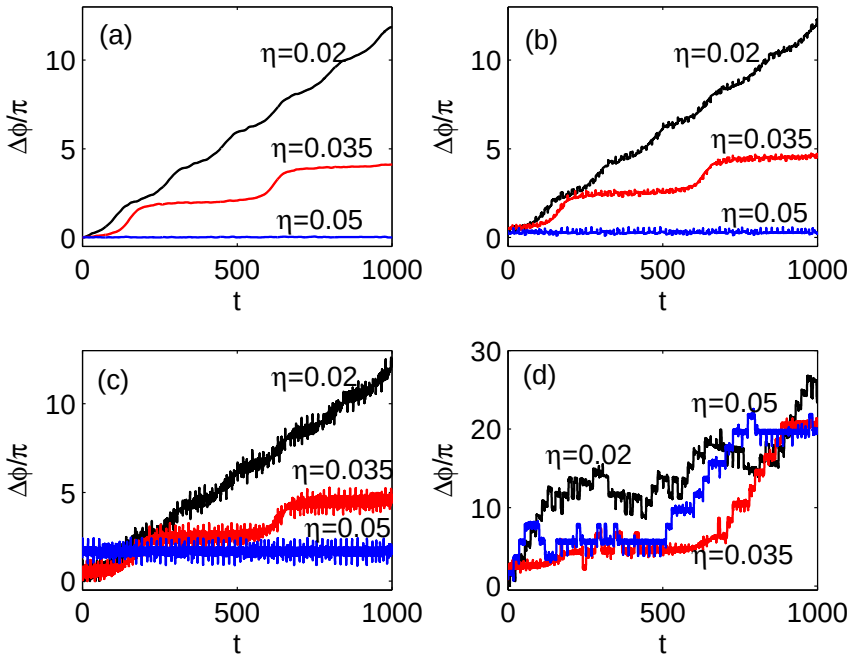


Figura 3.5 - Evolução temporal da diferença de fase dos osciladores de Rössler no regime de fase coerente($a = 0,16$) para três valores distintos de acoplamento, como indicado, para: (a) método SFMQ; (b) método arco tangente; (c) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 5,4$ e (d) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 5,5$.

metro de escala de tempo. Por exemplo, utilizando $s = 5,5$, ao invés de $s = 5,4$, obtém-se resultados completamente alterados, como pode ser visto na Figura 3.5(d).

No caso do regime de fase não coerente ($a = 0,2925$), o atrator de Rössler entra num regime chamado "funil" em que não existe um centro de rotação bem definido (STONE, 1992). Neste caso o método SFMQ é aplicado de forma análoga ao caso coerente. A maior variabilidade da componente x do Rössler não coerente requer uma janela menor, no caso $K = 280$, para o mesmo intervalo de frequências ω ($[0,6; 1,4]$). Os resultados para os três valores de acoplamentos são ilustrados na Figura 3.6(a). Para $\eta = 0,05$ a diferença de fase cresce com o tempo e a medida que o acoplamento é aumentado para $\eta = 0,179$ são observados platôs de sincronização, indicando a proximidade de uma transição para a sincronização de fase ($\eta = 0,2$). Na Figura 3.6(b) são mostrados os resultados utilizando o método arcotangente, para comparação com o resultado apresentado na Figura 3.6(a). Neste último caso, não se pode usar a definição de fase dada anteriormente para o caso coerente, sendo

necessária a projeção das trajetórias no plano $(\dot{x}, \dot{y})$ (CHEN et al., 2001). Assim, a fase é calculada nesta nova projeção usando a Equação 2.8. Os resultados da diferença de fase para as três intensidades de acoplamento mostram-se consistentes com o método SFMQ proposto. As Figuras 3.6(c)-(d) ilustram os resultados obtidos usando a transformada de ondeletas com $s = 5,4$ e $s = 5,5$, respectivamente. De modo similar ao caso coerente, os resultados com a transformada de ondeletas é muito sensível ao parâmetro de escala de tempo s, com um pequeno intervalo de $s \in [5,1; 5,4]$. Contudo, o método SFMQ possui uma grande variabilidade na escolha dos parâmetros, como será mostrado mais adiante na Seção 3.3.3. Além disso, é importante ressaltar que o método proposto não requer cálculo de derivadas nem reconstrução do atrator.

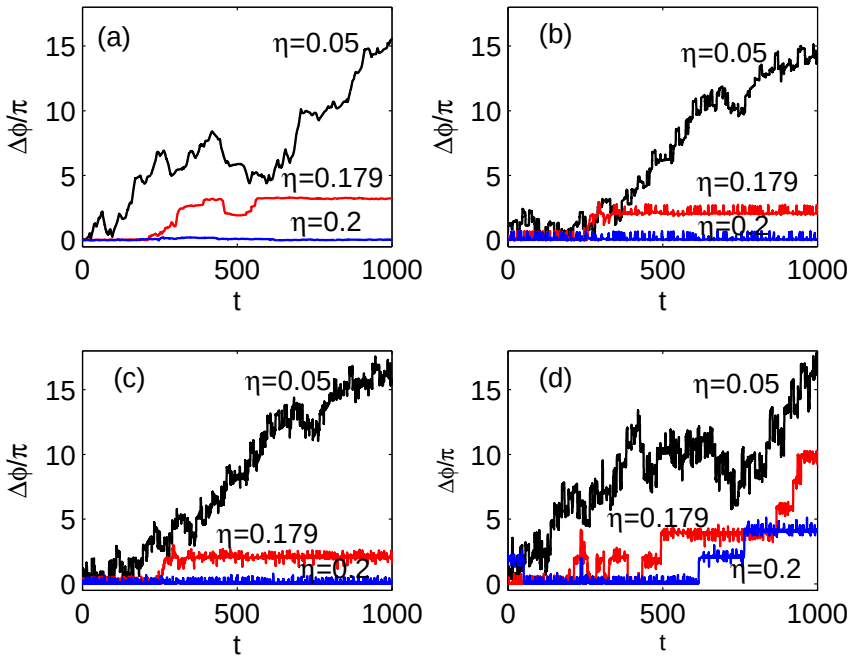


Figura 3.6 - Evolução temporal da diferença de fase dos osciladores de Rössler no regime de fase não coerente ($a = 0,2925$) para três valores distintos de acoplamento, como indicado, para: (a) método SFMQ, (b) método arco tangente (derivada), (c) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 5,4$, (d) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 5,5$.

3.3.2 Transição para Sincronização de Fase

A sincronização de fase pode ser quantificada em termos da dispersão da diferença de fase dos sistemas acoplados em torno da média. Assim, introduz-se variância da diferença de fase, dada por:

$$var(\Delta\phi) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\Delta\phi_i - \bar{\Delta\phi})^2 \tag{3.9}$$

onde $\bar{\Delta\phi}$ é o valor médio da diferença de fase e N é o tamanho de $\Delta\phi$. A variância da diferença de fase pode ser usada como um índice de sincronização para a distinção entre regimes sincronizados e não sincronizados. Além disso, esse índice indica um limiar para a sincronização de fase. Para exemplificar esta condição são considerados dois casos, ou seja, dois sistemas de Rössler acoplados, um em regime coerente ($a = 0,16$) e um não coerente ($a = 0,2925$). Em ambos os casos o valor da intensidade de acoplamento η é intensificada gradativamente e para cada valor de η o índice $var(\Delta\phi)$ é calculado. Nos dois casos citados as fases foram calculadas usando o método SFMQ.

A variação de $var(\Delta\phi)$ para o caso coerente em relação a intensidade de acoplamento é ilustrada na Figura 3.7(a). A medida que o acoplamento é intensificado a variância da diferença de fase diminui, indicando a transição para sincronização de fase entre os sistemas. Essa transição dos sistemas acoplados para uma região de sincronização também é refletida no espectro de Lyapunov (PECORA; CARROLL, 1990; BOCCALETTI et al., 2002). O sistema de Rössler acoplado (Equação 3.8) possui 6 expoentes de Lyapunov. Quando o acoplamento é nulo tem-se uma situação degenerada, isto é, cada sistema possui um expoente positivo, um nulo e um negativo. Na Figura 3.7(b) são apresentados os quatro maiores expoentes de Lyapunov do sistema acoplado. Os dois expoentes nulos correspondem a duas fases independentes. A partir do acoplamento as fases tornam-se dependentes e a degeneração é eliminada, restando apenas um expoente nulo. Contudo, observa-se que para intensidades pequenas de acoplamento o segundo expoente de Lyapunov permanece extremamente pequeno. Ao passo que a intensidade de acoplamento aumenta, quando a sincronização está presente ($\eta \approx 0,038$), o segundo expoente torna-se negativo e neste caso as fases são dependentes e com uma relação estável entre elas. Os dois expoentes positivos permanecem positivos indicando que as amplitudes permanecem caóticas e independentes. Intensificando mais o acoplamento, um dos expoentes positivos torna-se nulo

e o expoente nulo torna-se negativo ($\eta \approx 0,08$), indicado uma transição de um regime de sincronização intermitente para a sincronização com atraso de fase em torno de $\eta \approx 0,095$. O valor absoluto da diferença $|\Delta x|_{max}$ das trajetórias $x_{1,2}$, ilustrado na Figura 3.7(c), decresce a medida que o acoplamento é aumentado, mostrando que as trajetórias estão correlacionadas na transição da sincronização de fase.

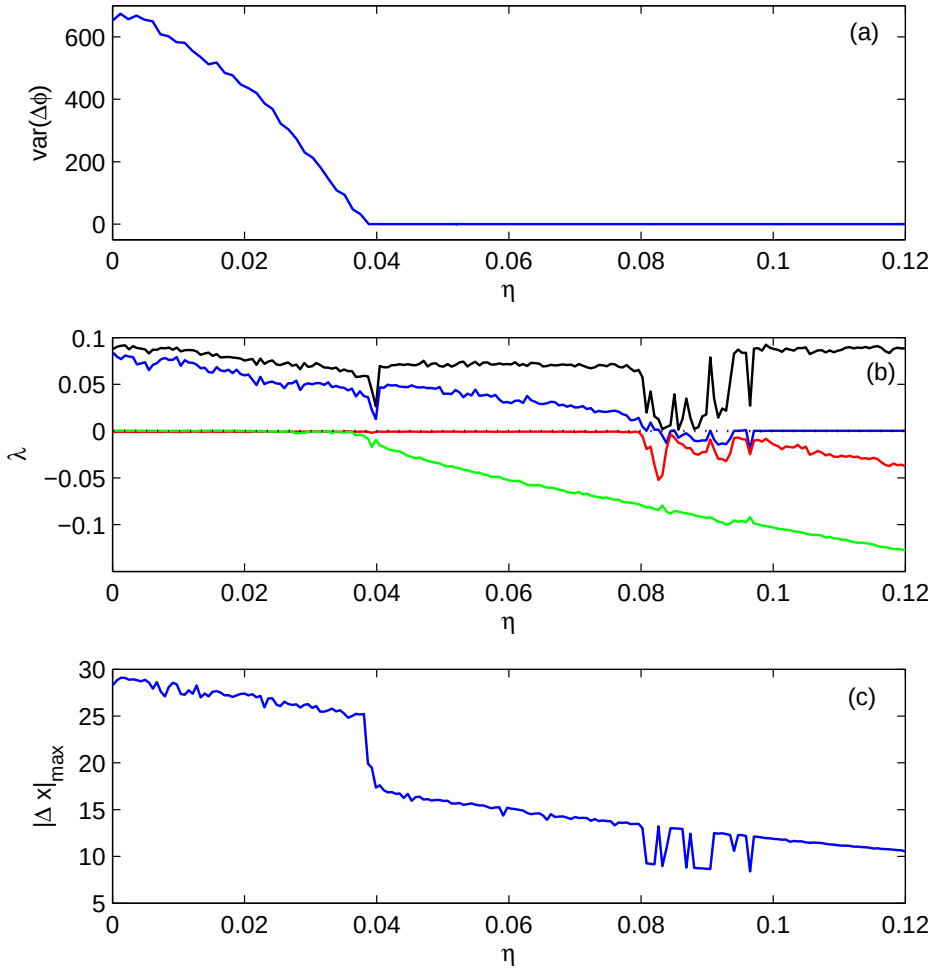


Figura 3.7 - (a) Variância da diferença de fase, (b) os quatro maiores expoentes de Lyapunov, (c) valor absoluto da diferença $|\Delta x|_{max}$ das trajetórias $x_{1,2}$ *versus* o parâmetro de acoplamento η para dois osciladores de Rössler acoplados em regime coerente ($a = 0,16$). Para acoplamentos pequenos tem-se dois expoentes positivos e dois próximos de zero. A transição para sincronização de fase ocorre em $\eta \approx 0,038$ e neste ponto um dos expoentes de Lyapunov nulo torna-se negativo.

Para o caso mais complexo, regime não coerente ($a = 0,2925$), a variação de $var(\Delta\phi)$ *versus* η é apresentada na Figura 3.8(a). Os quatro maiores expoentes de Lyapunov são mostrados na Figura 3.8(b) e o valor absoluto da diferença $|\Delta x|_{max}$ das trajetórias $x_{1,2}$ é mostrado na Figura 3.8(c). Primeiro, observa-se que um dos expoentes nulos torna-se negativo para $\eta = 0,04$, enquanto que a variância $var(\Delta\phi)$ continua grande, indicando que os sistemas ainda não estão sincronizados. A transição para sincronização de fase ocorre em $\eta \approx 0,18$, quando $var(\Delta\phi)$ atinge valores pequenos. Próximo a este ponto um dos expoentes de Lyapunov positivo torna-se nulo e o expoente de Lyapunov nulo torna-se negativo, correspondendo a uma transição entre a interação dos sistemas. Além disso, o valor máximo absoluto da diferença das trajetórias $x_{1,2}$ decresce, mostrando que as trajetórias estão mais correlacionadas.

3.3.3 Efeitos dos Parâmetros K e S na estimação da Fase

Os efeitos da escolha do tamanho do segmento (janela) K e do passo de deslocamento, S, entre janelas consecutivas pode ser analisado avaliando a variação de $var(\Delta\phi)$ em relação a esses parâmetros, num regime de sincronização de fase. Todas as fases são calculadas utilizando o método SFMQ.

A variância da diferença de fase $var(\Delta\phi)$ em relação ao tamanho da janela, para dois sistemas de Rössler acoplados em regime coerente e sincronizados em fase com acoplamento $\eta = 0,05$ é ilustrada na Figura 3.9(a). Neste caso existe um vasto intervalo de janelas com variância pequena, indicando que uma escolha apropriada do tamanho da janela pode ser entre 160 e 1000 pontos. No entanto, no caso não coerente o intervalo de janelas é reduzido, restrito entre 180 e 670 pontos, como pode ser observado na Figura 3.9(b).

O passo de deslocamento, S, entre segmentos consecutivos usado neste trabalho foi sempre 1. No entanto, uma escolha adequada deste parâmetro reduz exponencialmente o custo computacional. Portanto, foi investigada a influência do aumento do parâmetro S na variância da diferença de fase. Isto foi feito aplicando o método SFMQ com uma janela $K = 320$ usando as trajetórias $x_{1,2}$ com 20.000 pontos provenientes de dois sistemas de Rössler. Estes sistemas estavam acoplados em regime coerente e sincronizados em fase com $\eta = 0,05$. O passo de deslocamento foi acrecido da unidade até 340. Os resultados da variância da diferença de fase em relação a variação do parâmetro S podem ser vistos na Figura 3.10(a). Observa-se que o aumento de S não reflete grandes variações em $var(\Delta\phi)$ até $S \cong 240$, indicando

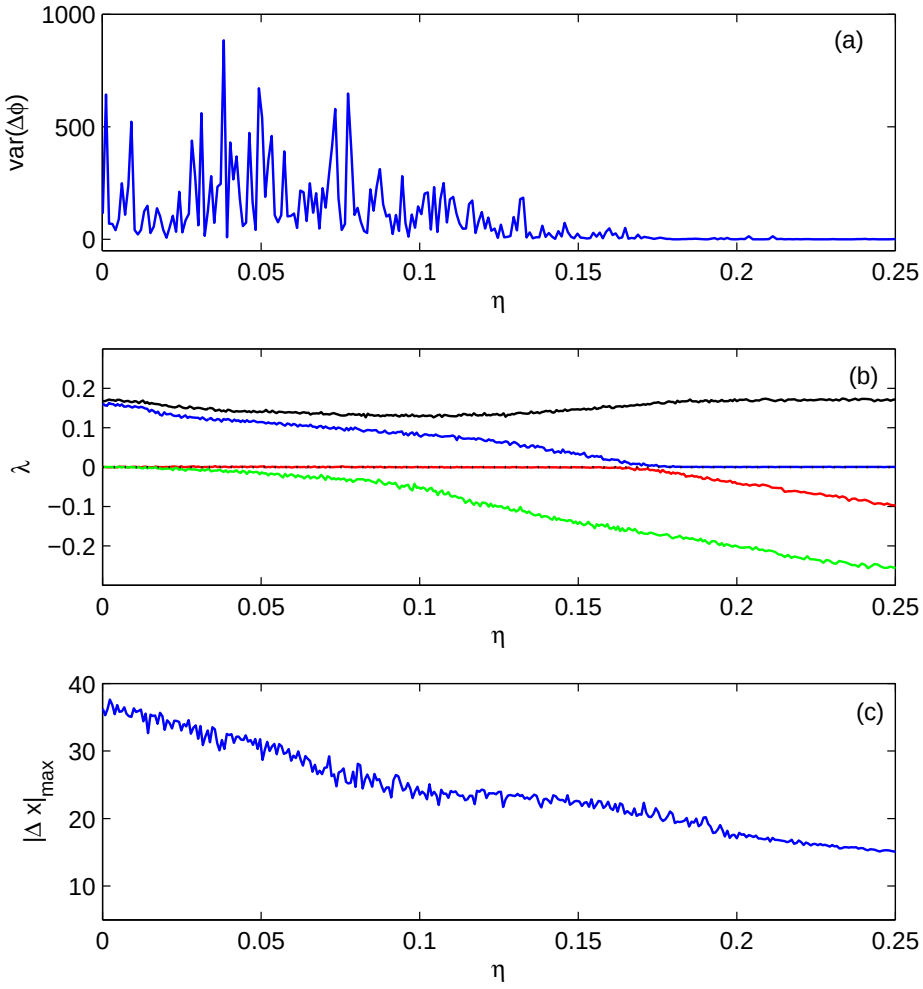


Figura 3.8 - (a) Variância da diferença de fase, (b) os quatro maiores expoentes de Lyapunov, (c) valor absoluto da diferença $|\Delta x|_{max}$ das trajetórias $x_{1,2}$ *versus* o parâmetro de acoplamento η para dois osciladores de Rössler acoplados em regime não coerente ($a = 0,2925$).

a possibilidade de um passo de deslocamento de até este tamanho. No caso não coerente, Figura 3.10(b), esse limite é reduzido para $S \cong 60$. No entanto, vale ressaltar que se está interessado em detectar a sincronização de fase entre sistemas e considerando que a sincronização de fase é quebrada para valores maiores que 2π, é conveniente usar passos de deslocamento pequenos. Realizando simulações com sistemas próximos da transição para a sincronização de fase confirmam a necessidade de passos pequenos de deslocamento. A partir disso, para que não haja perda de

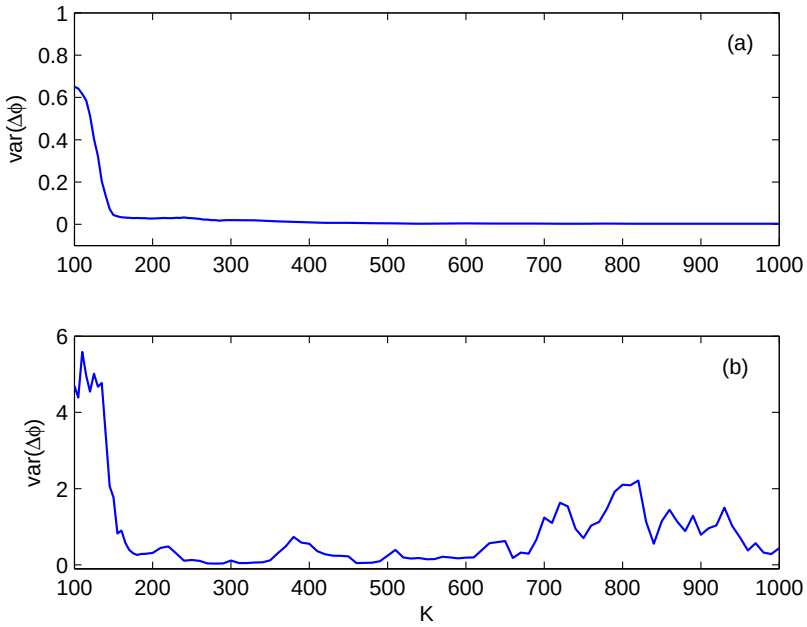


Figura 3.9 - Variância da diferença de fase em função da janela de deslocamento. (a) Osciladores de Rössler coerente ($a = 0,16$) com intensidade de acoplamento $\eta = 0,05$ e (b) regime não coerente ($a = 0,2925$) com intensidade de acoplamento $\eta = 0,2$.

informação é conveniente usar no máximo $\frac{1}{4}$ de ciclo como passo de deslocamento. Considerando os ciclos médios identificados na Figura 3.3, os valores apropriados de S para o caso coerente é 30 e no caso não coerente $S = 40$. Na Figura 3.10(c) é apresentado o tempo de execução em segundos, como função do passo de deslocamento. Este resultado mostra um decaimento exponencial no tempo execução em função do passo S.

3.3.4 Efeitos do Ruído

A fim de investigar a robustez do método SFMQ foi adicionado um ruído gaussiano às trajetórias do sistema de Rössler acoplado em regime coerente. Assim as trajetórias desse sistema são representadas pela seguinte equação:

$$\tilde{x}_{1,2}(t) = x_{1,2}(t) + \alpha\sigma_{1,2}\vartheta_{1,2}(t), \tag{3.10}$$

onde $\vartheta_{1,2}(t)$ é um ruído gaussiano uniformemente distribuído com média zero e desvio padrão unitário, $\sigma_{1,2}$ são os desvios padrões das componentes x_1 e x_2, respectiva-

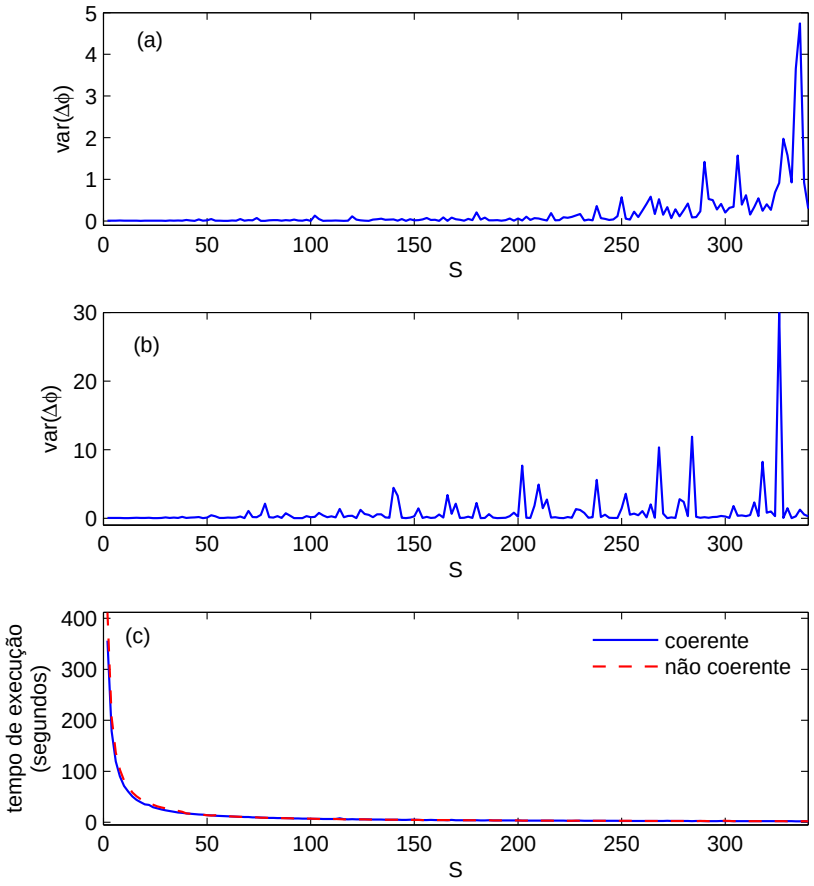


Figura 3.10 - Variância da diferença de fase em função do passo de deslocamento. (a) Osciladores de Rössler coerente ($a = 0,16$) com intensidade de acoplamento $\eta = 0,05$; (b) regime não coerente ($a = 0,2925$) com intensidade de acoplamento $\eta = 0,2$, (c) tempo de execução em segundos em função do passo de deslocamento.

mente, e α é o nível de ruído.

Na Figura 3.11 é mostrada a componente x do sistema de Rössler coerente com ruído $\alpha = 0,8$, ou seja 80% de ruído gaussiano adicionado à série original.

Considere as trajetórias $x_{1,2}$ do sistema de Rössler sincronizadas em fase, com acoplamento $\eta = 0,05$. A essas trajetórias foram adicionados ruídos de 50% e 80%. Os resultados da diferença de fase entre as duas séries ruidosas ($\tilde{x}_{1,2}$) foram obtidos a partir do método SFMQ, e da mesma forma para séries sem ruído. A Figura 3.12

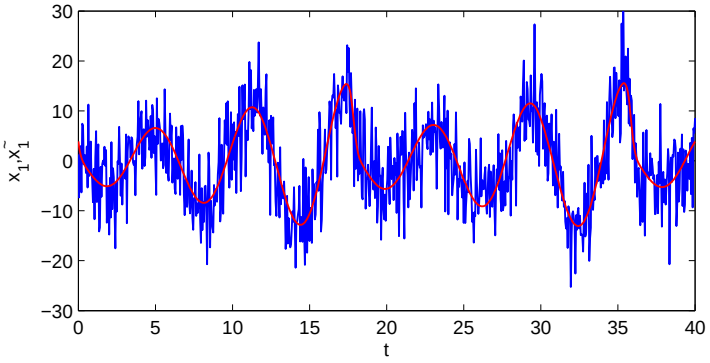


Figura 3.11 - Componente x do sistema de Rössler coerente, com 80% de ruído Gaussiano.

apresenta os resultados para as séries ruidosas ($\alpha = 0,5$ e $\alpha = 0,8$), em comparação com a série não ruidosa ($\alpha = 0$). Observa-se que existe apenas um pequeno aumento na diferença de fase entre os resultados, com e sem ruído, indicando a robustez do método em relação a níveis moderados de ruído ($\alpha = 0,5$). Tais níveis de ruído foram avaliados, utilizando a variância da diferença de fase em relação ao nível de ruído α. A Figura 3.13 apresenta a variância da diferença de fase em relação ao nível de ruído. Valores elevados da variância indicam uma maior variação da diferença de fase. Assim, pela Figura 3.13 é possível identificar que valores moderados de α vão aproximadamente de 0 a 0,5. Tal resultado se deve ao fato do método SFMQ ser baseado na estimação de parâmetros por mínimos quadrados.

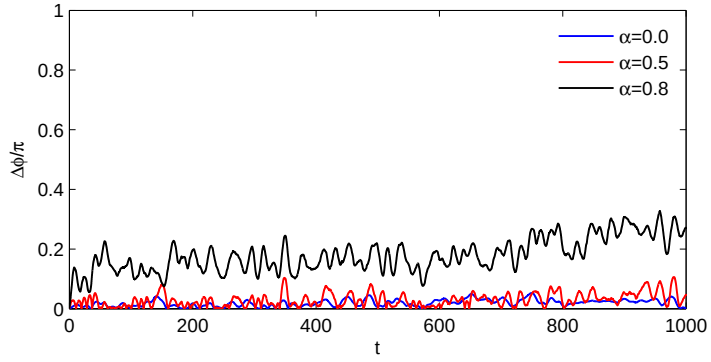


Figura 3.12 - Diferença de fase para dois osciladores de Rössler acoplados em regime coerente ($a = 0,16$) e sincronizados em fase ($\eta = 0,05$). Diferença de fase para o caso sem ruído ($\alpha = 0,0$) e com ruído $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 0,8$.

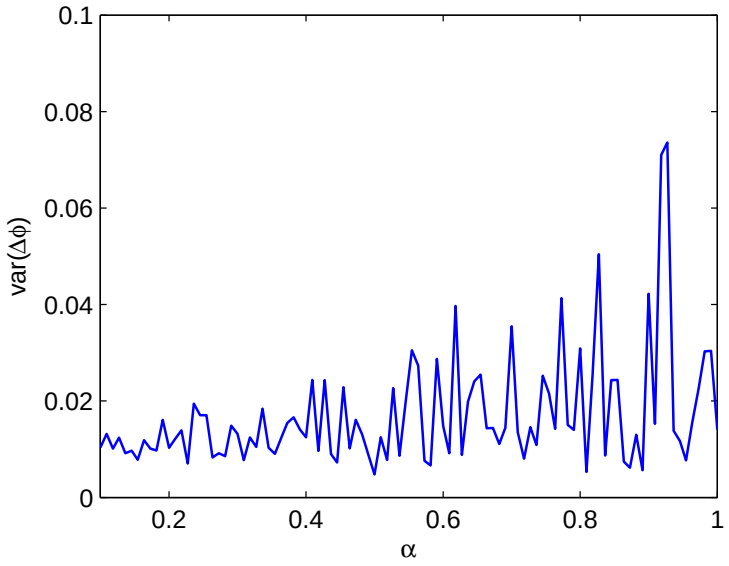


Figura 3.13 - Variância da diferença de fase dois osciladores de Rössler acoplados no regime coerente em estado de sincronização de fase ($\eta = 0,05$) em função do nível de ruído.

3.3.5 Sistema de Lorenz

O bem conhecido atrator de Lorenz (LORENZ, 1963) é outro caso de atrator não coerente para o qual uma definição correta da fase pode ser desafiadora. A característica de dois lóbulos do atrator (lembrando uma borboleta) não permite a ocorrência de sincronização de fase entre sistemas de Lorenz acoplados (PARK et al., 1999; LIU et al., 2003). No entanto, a sincronização completa existe e será avaliada neste estudo pela utilização do método SFMQ.

Considere dois sistemas de Lorenz acoplados, dados por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= 10(y_{1,2} - x_{1,2}) + \eta(x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= 28x_{1,2} - y_{1,2} - z_{1,2}x_{1,2} \quad , \\ \dot{z}_{1,2} &= \omega_{1,2}(x_{1,2}y_{1,2} - \frac{8}{3}z_{1,2}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $\omega_1 = 0,9831$ e $\omega_2 = 1,018$ introduzem uma pequena diferença entre os dois sistemas, tornando-os não idênticos, e η é a intensidade de acoplamento.

Para aplicar o método SFMQ às trajetórias do sistema de Lorenz é necessário definir um intervalo de frequências e o tamanho dos segmentos a serem analisados. Portanto,

pela análise do periodograma das trajetórias do sistema inferiu-se o tamanho dos segmentos (janela) em $K = 130$, e serão considerados 800 frequências igualmente distribuídas no intervalo $\omega \in [6; 12]$.

Na Figura 3.14(a) são mostrados os resultados das diferenças de fase de dois sistemas acoplados para três diferentes valores de acoplamento, usando o método SFMQ sobre a componente z. Quando $\eta = 0,4$ tem-se uma interação fraca entre os sistemas e a diferença de fase cresce indicando que os sistemas não estão sincronizados. Para um acoplamento mais intenso, $\eta = 4,2$, são observados platôs de sincronização indicando que os sistemas estão próximos da região de sincronização. Por fim, quando $\eta = 6,0$ os sistemas se encontram sincronizados.

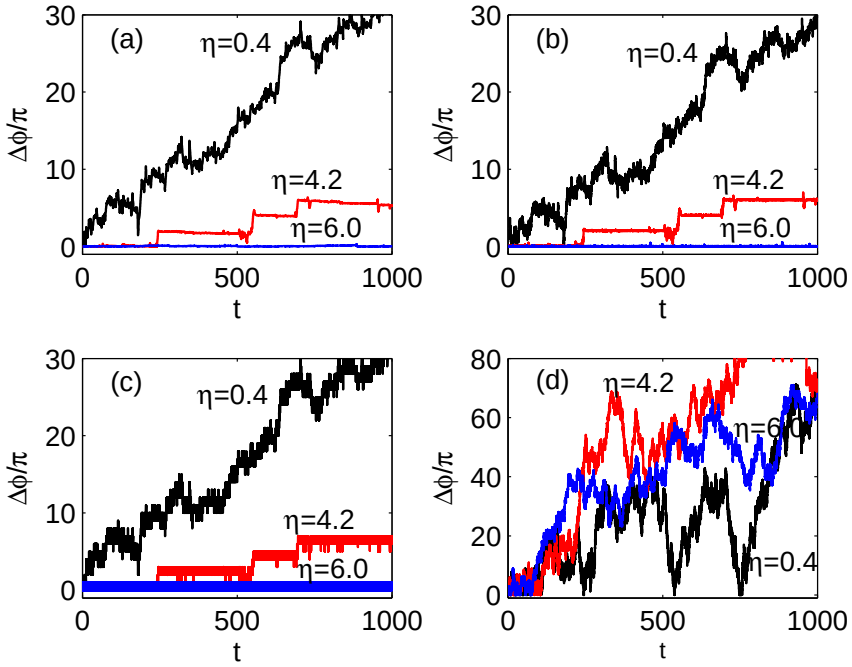


Figura 3.14 - Evolução temporal da diferença de fase para dois sistemas de Lorenz acoplados para três valores distintos de acoplamento (como indicado nos gráficos). (a) Método SFMQ, (b) arco tangente com projeção do atrator, (c) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 1$ e (d) transformada de ondeletas com escala de tempo $s = 2$.

Para efeito de comparação, é levado em conta a simetria de (x, y) para $(-x, y)$ nas equações de Lorenz e o atrator é projetado sobre um novo plano (u, z), com

$u = \sqrt{x^2 + y^2}$. A fase é então definida pelo ângulo $\phi = \arctan\left(\frac{z(t)-z_0}{u(t)-u_0}\right)$, onde $u_0 = 12$ e $z_0 = 27$ são introduzidos de forma a transladar os eixos de referência para o centro do atrator (PIKOVSKY et al., 1997). Na Figura 3.14(b) são mostrados os resultados da diferença de fase obtidas pela definição do arcotangente. Observa-se que este resultado é muito similar ao obtido com o método SFMQ.

A comparação com transformada de ondeleta sobre a componente z, para um tempo de escala $s = 1$, é mostrada na Figura 3.14(c). Estes resultados são similares aos obtidos com método SFMQ para as três intensidades de acoplamento. No entanto, para uma mudança na escala de tempo para $s = 2$, Figura 3.14(d), obtêm-se resultados totalmente distintos. De um modo geral, a consistência entre os resultados obtidos é evidente, mostrando a eficácia do método implementado neste trabalho. Além disso, a conveniência desse método é que o mesmo não exige nenhum tipo de transformação do atrator para ser aplicado.

3.3.6 Dados Experimentais

A fim de ilustrar a aplicabilidade do método proposto a dados experimentais serão utilizados dois conjuntos de dados: plasma forçado e dois circuitos de Chua acoplados.

Plasma Forçado

Para este experimento foram utilizados dados de um dispositivo caótico de plasma, sujeito a ação de um gerador de ondas periódicas (TICOS et al., 2000). Os terminais positivo e negativo do tubo, contendo gás Hélio, são conectados a uma alta voltagem ($\sim$ 850 volts) através de um resistor ($R = 30\ k\Omega$). No circuito também são utilizados um capacitor ($C = 3,5\ pF$) que corta a alta voltagem e um transformador que eleva a amplitude do sinal. O sinal de saída do dispositivo pode ser medido através de uma corrente I. Uma visualização esquemática do experimento pode ser visto na Figura 3.15. Na Figura 3.16(a) é ilustrada a projeção do atrator do plasma e a Figura 3.16(b) apresenta o espectro de frequência do sinal, com um pico predominante em 6.960,0 Hz.

As fases da corrente de saída do experimento são estimadas utilizando uma janela (K) de 500 pontos, contendo aproximadamente quatro oscilações, e um intervalo de frequências de 6.660,0 Hz a 7.160,0 Hz. Os resultados das diferenças de fase entre a corrente de saída e da forçante senoidal para três intensidades dessa forçante são

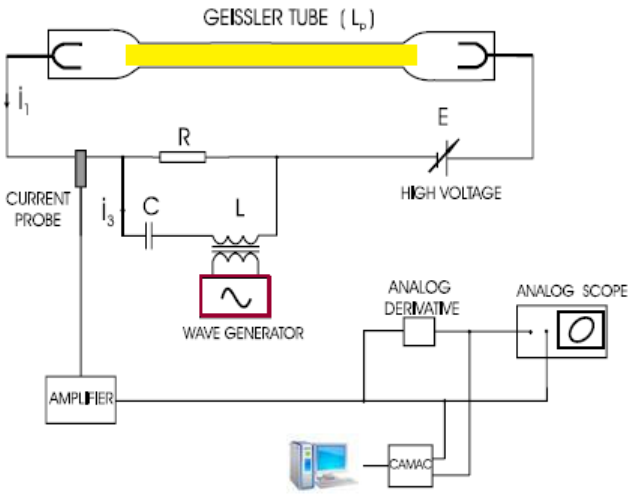


Figura 3.15 - Visualização esquemática do experimento de plasma forçado por uma ação periódica.
Fonte: Adaptada de Ticos et al. (2000, p.3).

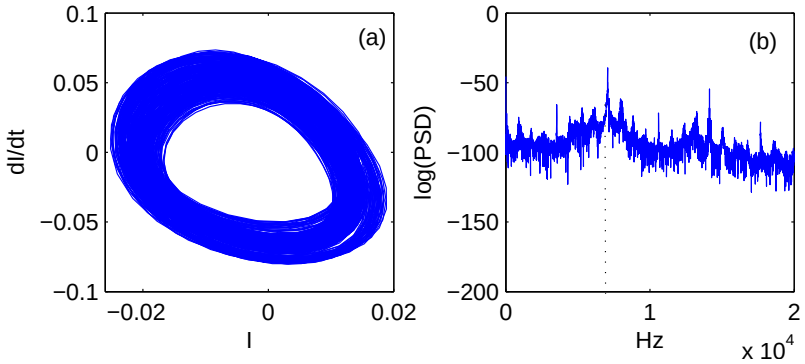


Figura 3.16 - (a) Projeção do atrator do plasma em coordenadas cartesianas, (b) espectro de frequência da corrente I

apresentados na Figura 3.17. Quando o plasma é forçado por uma onda senoidal de frequência de 6.960,0 Hz e amplitude de 0,2 V, pode-se observar um aumento da diferença de fase ao longo do tempo, indicando nenhuma sincronização de fase. Por outro lado, existe um pequeno efeito da onda senoidal no atrator que é uma diferença de fase constante em um curto intervalo de tempo. Quando uma diferença de potencial de 0,34 V é aplicada ao plasma, a evolução da diferença de fase apresenta alguns platôs caracterizando sincronização de fase intermitente. Para um aumento na amplitude da onda senoidal de 0,4 V, observa-se que a diferença de fase oscila em

torno de um valor constante menor que 2π, implicando a presença da sincronização de fase.

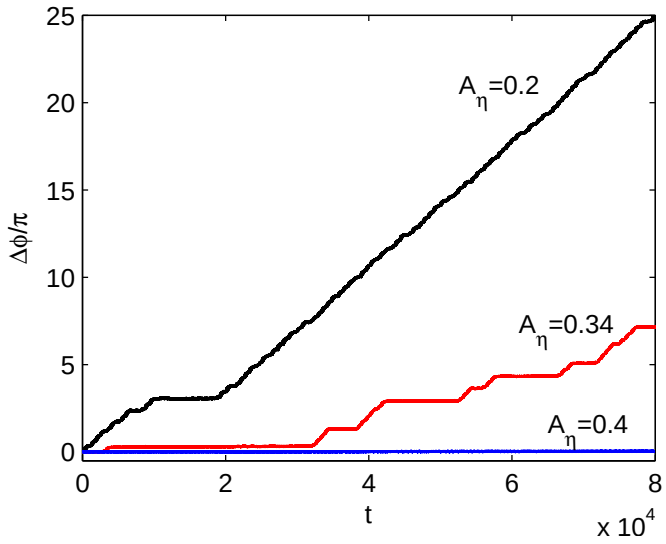


Figura 3.17 - Evolução temporal da diferença de fase para os dados de plasma para três amplitudes forçantes $A_\eta = 0,2V$, $A_\eta = 0,34V$ e $A_\eta = 0,4V$.

Circuito de Chua

O circuito de Chua é um circuito eletrônico que exibe uma variedade de bifurcações e caos (MATSUMOTO, 1984; CHUA et al., 1993). Neste trabalho foram implementados dois circuitos de Chua acoplados, com o objetivo de investigar a sincronização de fase. Cada circuito de Chua foi projetado com base no trabalho de Kennedy (1992). No Apêndice A são apresentados mais detalhes sobre o circuito de Chua.

A configuração do experimento é representada esquematicamente na Figura 3.18. Nesta figura observa-se dois circuitos de Chua acoplados através de um resistor com resistência R_η variável, utilizado para controlar a interação entre os dois circuitos. Cada circuito de Chua é composto por um indutor linear L, dois capacitores lineares C_1 e C_2, um resistor linear R e um resistor não linear N_R. Os dois circuitos são acoplados bidirecionalmente pela componente V_{C1}. Os circuitos são ligados a um osciloscópio para visualização em tempo real do resultado do experimento. A aquisição dos dados foi realizada utilizando-se uma placa *PCI-MIO-16E4* conectada a um computador. Para a coleta foi usada uma taxa de amostragem de 10^5, com

60.000 pontos em cada série de dados. A variável analisada foi a voltagem através do capacitor C1, para ambos os circuitos.

Na Figura 3.19 pode ser vista uma foto obtida durante a realização do experimento. Este experimento foi realizado durante o estágio de doutorado (*sanduíche*) no grupo de Sincronização e Caos da *Illinois State University*, USA.

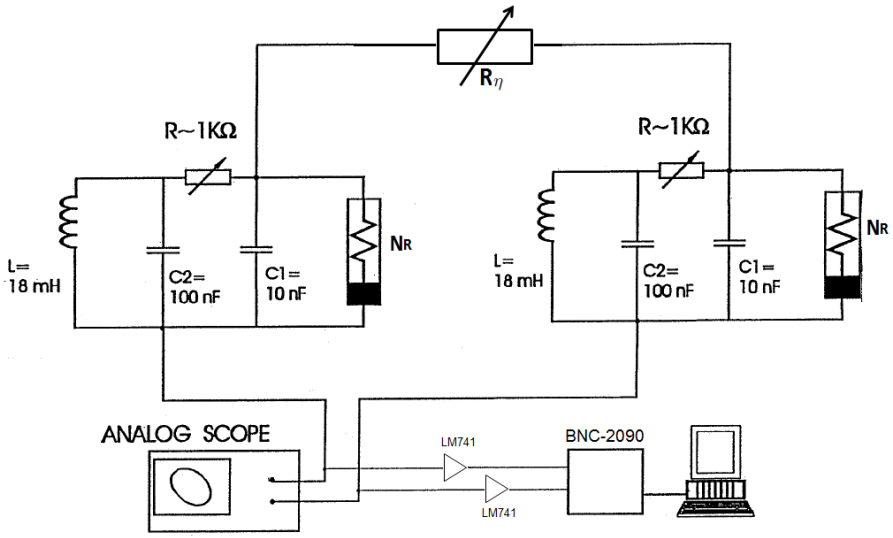


Figura 3.18 - Configuração esquemática do experimento acoplando dois circuitos de Chua. Fonte: Adaptada de Chua et al. (1993, p.98).

Na Figura 3.20(a) são apresentadas duas séries temporais (V_{C1}^1 e V_{C1}^2) obtidas do circuito de Chua sem acoplamento, ou seja $R_\eta \to \infty$. As projeções do atrator reconstruído para cada uma dessas séries são ilustradas na Figura 3.20(b) e (c), referentes aos circuitos Chua 1 e Chua 2, respectivamente.

As fases foram estimadas usando o método SFMQ com tamanho de segmento $K = 120$ e 800 frequências igualmente distribuídas entre 12.000 e 25.000. Os resultados para três intensidades de acoplamento podem ser vistos na Figura 3.21. Para valores grandes de resistência, $R_\eta = 12,0M\Omega$, uma menor interação é permitida, o que pode ser observado na diferença de fase que cresce ao longo do tempo, mostrando que não existe sincronização. Conforme a resistência é reduzida, mais intensa é a comunicação entre os circuitos. Observa-se platôs de sincronização quando $R_\eta = 522,1k\Omega$ e quando resistência é diminuída para $R_\eta = 90,3k\Omega$ é observada a

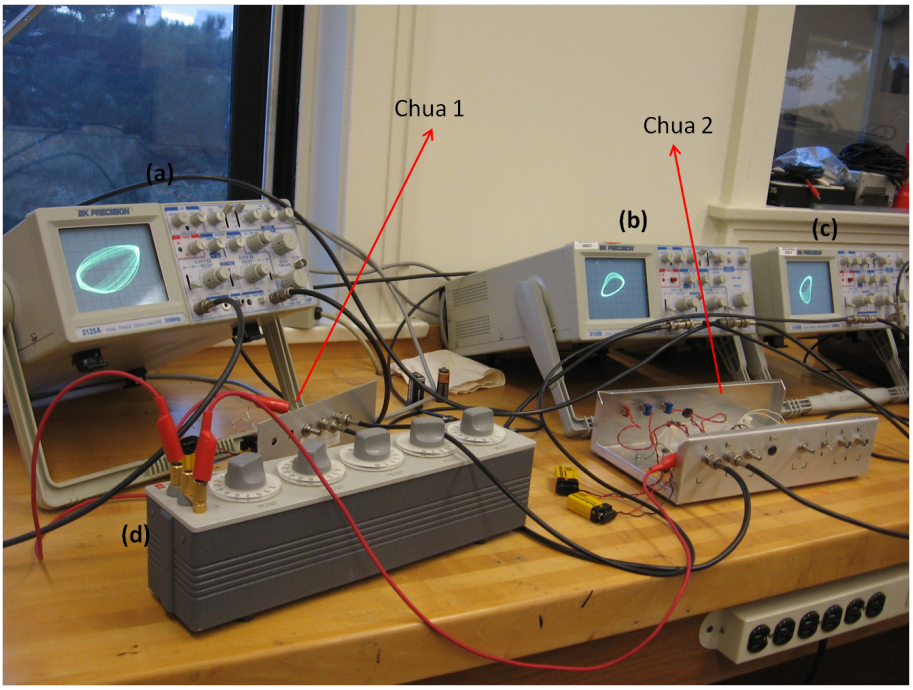


Figura 3.19 - Foto do experimento de Chua. (a) osciloscópio destinado a mostrar a curva de Lissajous (projeção V_{C1}^1 vs V_{C1}^2); (b) osciloscópio para ilustrar o atrator do Chua 1; (c) osciloscópio para ilustrar o atrator do Chua 2; (d) resistor variável com capacitância máxima de $12,0M\Omega$.

sincronização de fase.

3.4 Conclusões Parciais

O método SFMQ descrito neste trabalho teve por objetivo encontrar a fase de séries temporais, obtendo o melhor ajuste senoidal possível para segmentos selecionados de uma dada série. Utilizando esse método não há necessidade de projeção ou reconstrução do atrator, sendo esta a principal vantagem do método. A escolha dos parâmetros a serem utilizados no método pode ser obtida através de uma análise prévia na série temporal a ser analisada. Este método mostrou-se facilmente aplicável a diferentes tipos de sistemas, e também a dados experimentais como descrito nas seção anteriores. A comparação entre o método SFMQ e outras abordagens de análise em sincronização de fase mostrou-se consistente, de modo que tem-se uma boa confiabilidade nos resultados obtidos pelo método implementado neste estudo.

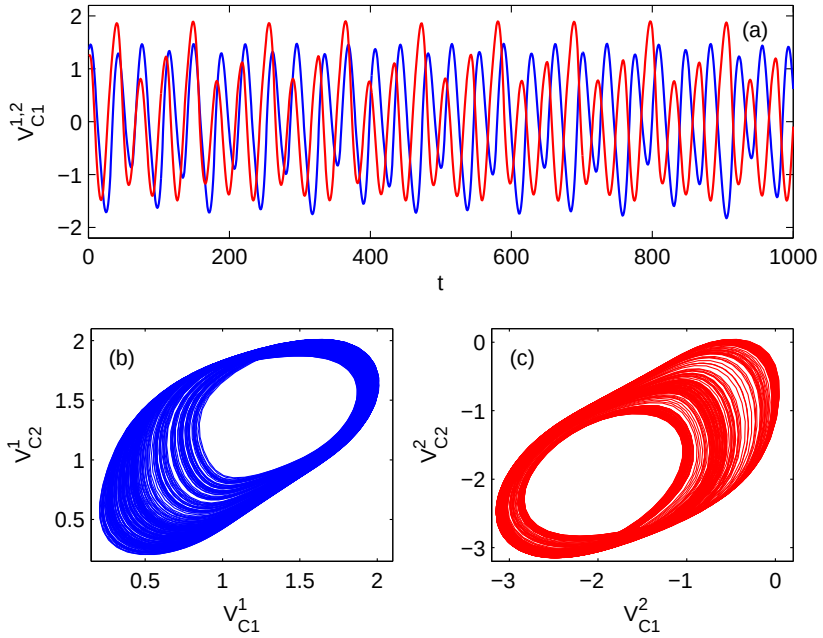


Figura 3.20 - (a) Séries temporais obtidas dos circuitos Chua 1 (V_{C1}^{1} em azul) e Chua 2 (V_{C1}^{2} em vermelho); (b) Projeção do atrator do circuito Chua 1; (b) Projeção do atrator do circuito Chua 2.

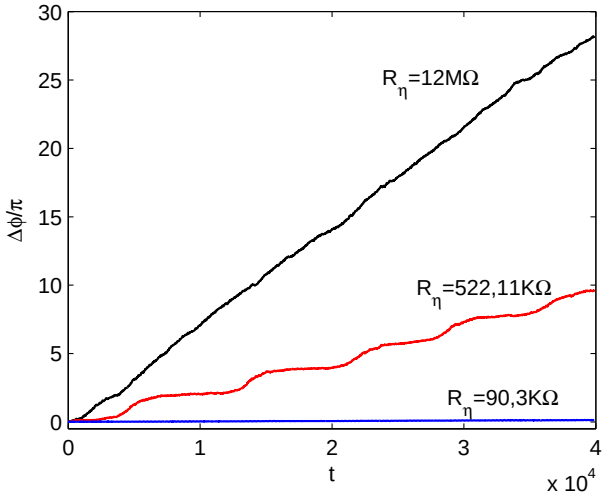


Figura 3.21 - Evolução temporal da diferença de fase para dados dos dois circuitos de Chua acoplados para três distintas intensidades de acoplamento.

4 REDES DE OSCILADORES E PROCESSAMENTO DE INFORMAÇÕES

4.1 Introdução

Compreender o cérebro humano é um dos maiores desafios da ciência (SKARDA; FREEMAN, 1987; FREEMAN, 1991; BURWICK, 2008; KO et al., 2011). Graças ao cérebro, o ser humano é capaz de reconhecer a face e a voz de um amigo no meio de uma multidão em fração de segundos, muito mais rápido do que qualquer modelo computacional. Baseada nos mecanismos funcionais neurológicos, a neurociência computacional implementa modelos e técnicas apreendidos da neurociência objetivando compreender e dar sentido ao conteúdo das informações transmitidas pelos sinais neurais, e processadas pelo cérebro.

O cérebro é altamente complexo, não linear, e possui a capacidade de organizar os neurônios e executar processos altamente especializados, como reconhecimento de padrões, percepção, controle do processo motor, entre outros. Estima-se que existem cerca de 86 bilhões de neurônios no sistema nervoso. Em um neurônio, a informação é transmitida através de processos eletroquímicos. A unidade elementar de transmissão de informação é o potencial de ação ou pulso (*spike*), que se inicia no corpo celular e se desloca pelo axônio até a ocorrência das sinapses. Os primeiros registros da atividade elétrica no cérebro revelaram o predomínio de atividades oscilatórias (BERGER, 1929), e posteriormente, medições de flutuações no campo potencial, com macro-eletrodos no couro cabeludo, indicaram que um grande número de neurônios se envolvem em descargas rítmicas sincronizadas, em uma respectiva frequência de oscilação. Já a atividade sináptica e o potencial de ação de um único neurônio, estaria associado a correntes fracas, o que não possibilitaria tal registro (SINGER, 1993). Esses disparos síncronos nas atividades oscilatórias mostram-se presente durante crises epilépticas (ENGEL; PEDLEY, 2008) e durante o processo cognitivo (codificação e recuperação da informação) (AXMACHER et al., 2006; SAUSENG; KLIMESCH, 2008; DüZEL et al., 2010).

O modelo neural artificial de Hopfield (1982) proporcionou ensaios fundamentais no problema da computação neural com informações ou padrões. A rede de Hopfield consiste de um conjunto de neurônios formando um sistema realimentado com estados binários e regra de aprendizagem Hebbiana (HEBB, 1949). Neste modelo, a rede de neurônios assume valores discretos (por exemplo, -1 e 1) e um conjunto de pa-

drões é armazenado tal que, quando é apresentado um novo padrão, a rede responde produzindo um padrão armazenado que mais se assemelhe ao novo padrão. O significado físico do trabalho de Hopfield reside na sua proposta da função de energia e sua ideia de que memórias são atratores dinamicamente estáveis. A capacidade de armazenamento da rede de Hopfield com recuperação livre de erro é $1/2log(N)$ padrões memorizados por neurônios, onde N é o número de neurônios (MCELIECE et al., 1987).

Os aspectos temporais da atividade neural motivou o estudo de redes oscilatórias artificiais. As redes oscilatórias consistem em um conjunto de osciladores acoplados, seguindo uma regra de aprendizagem, que evoluem para regiões sincronizadas ou travadas em fase e a informação é armazenada nas suas trajetórias (estados) (ISHII et al., 1996; AONISHI, 1998; NISHIKAWA et al., 2004b; XIU et al., 2004; DEHMER, 2008; ZHAO et al., 2008).

No presente trabalho será investigado um conjunto de osciladores configurados em forma de rede neural para armazenar e recuperar informações na diferença de fase entre suas trajetórias. Esta nossa proposta se baseia no trabalho de Nishikawa et al. (2004b), cujo modelo foi modificado na função de acoplamento com a inserção de mais um termo. O propósito dessa alteração foi aumentar o desempenho da rede neural, como se verá a seguir.

4.2 Armazenamento Dinâmico da Informação

A memória é a capacidade que um organismo tem de adquirir, armazenar, e recuperar informações ou experiências (BORISYUK; HOPPENSTEADT, 2004; DüZEL et al., 2010). Do ponto de vista de processamento de informação exitem três estágios na formação e recuperação da memória: i) codificação ou registro, em que ocorre o processamento da informação recebida; ii) armazenamento, processo de criação permanente da informação codificada; iii) recuperação, estágio em que a informação armazenada é recuperada em resposta a um estímulo (BORST; THEUNISSEN, 1999).

A proposta de uma memória associativa é comumente usada em modelos neurais artificiais, em resposta a habilidade humana de recuperar informações a partir de estímulos associados com essa informação. Assim, uma memória associativa tem por função restaurar uma informação armazenada, em resposta a apresentação de uma versão incompleta desta informação. Por exemplo, suponha um item memorizado

“H. A. Kramer & G. H. Wannier *Phys. Rev.* **60**, 252 (1941)”, logo uma memória associativa deve ser capaz de recuperar esse item a partir da entrada “ & Wannier, (1994)”.

Uma questão central nesse contexto é como escolher as interações acoplando N neurônios de modo que a rede possa memorizar um conjunto arbitrário de informações. Hopfield (1982) foi o primeiro a implementar um modelo neural com essa capacidade. Isso foi feito a partir de uma configuração inicial de atividade neural induzida por algum estímulo externo e, neste caso, a rede evoluirá de acordo com a dinâmica interna até atingir o estado final, que por definição é um atrator ou um estado estacionário. Se as interações forem escolhidas corretamente esse estado será um dos padrões armazenados e então a rede funcionará como uma memória associativa. Desse modo, a rede pode reconhecer estímulos incompletos e restaurar a informação perdida. O modelo de Hopfield considera conexões simétricas entre os neurônios, possibilitando atribuir uma função de energia à dinâmica da rede. Cada padrão a ser armazenado fica localizado em um vale da superfície de energia, que representa pontos de equilíbrio estáveis da rede.

A essência da memória associativa é mapear um item de informação a ser armazenado, ξ^{μ}, a um ponto de equilíbrio estável do sistema dinâmico, que é representado pela rede. A Figura 4.1 ilustra este mapeamento da memória associativa[1].

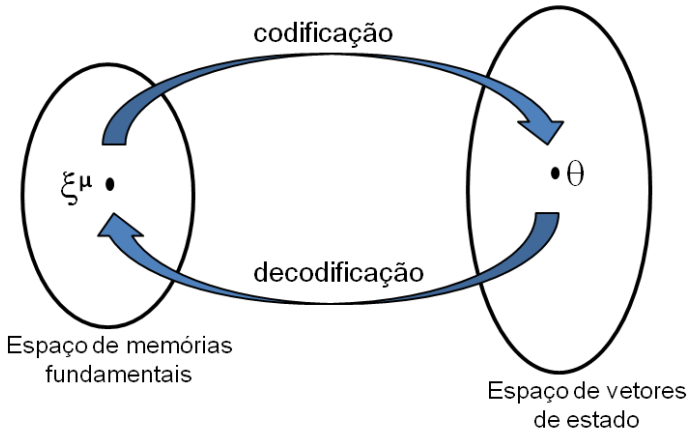


Figura 4.1 - Mapeamento da memória associativa.

[1]O termo memória associativa também é utilizado em sistemas operacionais, definido como um dispositivo de *hardware* cujo propósito é mapear endereços virtuais em endereços físicos sem passar pela tabela de páginas (MADNICK, 1974).

O armazenamento da informação pode ser realizado usando a regra hebbiana de aprendizagem (HEBB, 1949). A aprendizagem Hebiana representa mecanismos de aprendizagem biologicamente plausíveis e ecologicamente válidos. O princípio da aprendizagem Hebiana em redes neurais é que "unidades que disparam juntas, se fortalecem juntas". Esta ideia é consistente com mecanismos neurais de potenciação e depressão a longo prazo, sendo que a potenciação a longo prazo é um aumento da eficácia sináptica, enquanto a depressão a longo prazo é um enfraquecimento da eficácia sináptica (HEBB, 1949; MUNAKATA; PFAFFLY, 2004).

A regra de Hebb pode ser implementada em modelos neurais a partir de mudanças na intensidade (peso) das conexões entre os neurônios (unidades). A intensidade de uma conexão determina a eficácia com que um neurônio transmissor ativa um neurônio receptor, e assim capturar seus aspectos de eficácia sináptica. Neste tipo de aprendizagem os pesos refletem as regularidades estatísticas do meio e como as redes são auto-organizadas, unidades distintas têm capacidade de aprendizagem e representam tais regularidades. A formulação matemática da regra de Hebb será apresentada na próxima seção.

De modo geral, qualquer sistema físico cuja dinâmica no espaço de fase é dominado por um número substancial de estados localmente estáveis, para o qual é atraído, pode ser considerado como uma memória associativa. Desde que escolhendo interações seguindo a regra de Hebb, a dinâmica do sistema evoluirá para um estado final que possivelmente poderá estar associada a um dos padrões armazenados.

4.3 Rede de Osciladores

4.3.1 Breve Introdução

Como visto anteriormente, a sincronização é observada em abundância na natureza e uma definição do fenômeno da sincronização é " um ajuste de ritmos de objetos oscilantes devido a sua fraca interação" (PIKOVSKY et al., 2001). Os "objetos oscilantes" são descritos como sistemas que oscilam naturalmente e são estáveis em suas oscilações sob influência de pequenas perturbações. Esses objetos são chamados de osciladores auto-sustentáveis. Em duas dimensões e para sistemas contínuos no tempo, descritos por EDOs, a evolução de um estado estacionário de um oscilador auto-sustentado corresponde a uma curva fechada do espaço de fase, chamada de ciclo limite. Assim, quando osciladores auto-sustentados possuem ciclos limites es-

táveis, isto significa que todas as trajetórias próximas do ciclo limite são atraídas para o ciclo limite.

Motivado pelo fenômeno da sincronização coletiva, Winfree (1967) propôs um modelo matemático envolvendo um grande conjunto de osciladores ciclo limite acoplados, com o intuito de modelar essa sincronização coletiva em grandes grupos, como por exemplo entre os vagalumes. Winfree (1967) construiu o modelo assumindo que: i) os osciladores seriam quase idênticos e ii) o acoplamento entre os osciladores seria fraco. Estas suposições simplificam a matemática do problema, separando as escalas de tempo lenta e rápida. Em uma escala de tempo rápida, os osciladores rapidamente são atraídos para seus ciclos limites desde que as perturbações sejam fracas. Como o estado nunca se afasta do ciclo limite, cada estado do oscilador pode ser aproximado apenas pela sua *fase*. Então, numa escala de tempo lenta pode-se discutir como a fase de cada oscilador é alterada devido aos efeitos dos outros osciladores. Assim, a única variável que se precisa rastrear é a fase de cada oscilador, ao contrário de todas as variáveis de estado.

Kuramoto (1984), com base nos estudos de Winfree, considerando as mesmas suposições provou que a dinâmica de longo prazo de qualquer sistema quase idêntico de osciladores ciclo limite fracamente acoplados pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) \quad i = 1, ..., N, \tag{4.1}$$

onde Γ_{ij} é a função de interação e determina a forma do acoplamento entre o oscilador i e o oscilador j. Este modelo de fase é uma equação geral que permite qualquer tipo de acoplamento. A interação considerada por Kuramoto é dada por:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{\kappa}{N} sen(\theta_j - \theta_i), \tag{4.2}$$

com interações de mesma intensidade e dependentes da diferença de fase de uma senoide. O parâmetro κ é o acoplamento constante e N é o número de osciladores. Cada oscilador opera independentemente com uma frequência própria, e o acoplamento pode levá-lo a sincronizar com os demais osciladores.

O modelo de osciladores proposto por Kuramoto pode ser usado como um modelo de memória associativa para armazenar e recuperar informações. As informações

podem ser codificadas nos *desvios de fase* das trajetórias. Para isso, cada oscilador é considerado como sendo a unidade básica de processamento, o neurônio, e a função de acoplamento Γ_{ij} determina o acoplamento entre o neurônio i e j. A intensidade das conexões é dada pela matriz de acoplamento C_{ij}. Cada elemento da rede neural é dado por:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} C_{ij} sen\ (\theta_j - \theta_i) \quad i = 1, ..., N, \tag{4.3}$$

onde N é o número de neurônios. Considerando uma matriz de acoplamento C_{ij} que segue a regra de aprendizagem Hebbiana, a informação pode ser codificada nos agrupamentos travados em fase. Esta rede com recuperação de padrões livre de erros possui uma capacidade de armazenamento $2/N$ padrões por neurônio, que é aproximadamente um terço da capacidade da rede de Hopfiled (MCELIECE et al., 1987; COOK, 1989). Surpreendentemente, nesse tipo de rede as soluções com recuperação livre de erro parecem ser tipicamente instáveis, independente do tamanho da rede, desde que o número de padrões memorizados exceda 2 (AONISHI, 1998). Isto implica, que este tipo de rede não seria adequada para aplicações que requerem recuperação de padrões livre de erros.

Contudo, Nishikawa et al. (2004b) introduziram o segundo modo da expansão de Fourier na função de acoplamento aumentando a capacidade de armazenamento para $2\eta^2/logN$, onde η é a intensidade do segundo termo e N o número de elementos da rede. Uma análise detalhada deste modelo será vista a seguir.

4.3.2 Modelagem da Rede

Considerando a rede oscilatória do tipo Kuramoto, a função de acoplamento, Γ_{ij}, incluindo o segundo modo da expansão de Fourier, é dada por:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = C_{ij} sen\ (\theta_j - \theta_i) + \frac{\eta}{N} sen\ 2(\theta_j - \theta_i), \tag{4.4}$$

onde η é a intensidade de acoplamento do segundo termo, C_{ij} é a intensidade de acoplamento do oscilador j para i. Para este modelo apresentar uma memória associativa, cada elemento da matriz de acoplamento é dada pela regra de Hebb:

$$C_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \tag{4.5}$$

onde $\xi^{\mu} = (\xi_1^{\mu}, ..., \xi_N^{\mu})$, com $\xi_i^{\mu} = +1$ ou -1 para $\mu = 1, ..., p$ e $i = 1, ..., N$, representa um conjunto de p padrões a ser memorizado. A Equação 4.5 pode ser interpretada como um mecanismo de aumento da eficácia sináptica em função da correlação existente entre as atividades pré e pós-sinápticas.

Os padrões a serem armazenados são escolhidos aleatoriamente de modo que ξ_i^{μ} são variáveis independentes e aleatoriamente distribuídas com $P(\xi_i^{\mu} = 1) = P(\xi_i^{\mu} = -1) = \frac{1}{2}$. Considerando uma rede constituída de elementos idênticos, $(\omega_i = \omega)$, e uma mudança de variável $\theta_i \rightarrow \theta_i + \omega t$, a dinâmica de cada oscilador é dada por:

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} sen\ (\theta_j - \theta_i) + \frac{\eta}{N} \sum_{j=1}^{N} sen\ 2(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, ..., N \tag{4.6}$$

onde N é o número de elementos (neurônios) da rede. Na Figura 4.2 é ilustrada a arquitetura de uma rede formada por quatro neurônios $(N = 4)$. Basicamente, a saída de cada neurônio é realimentada para cada um dos neurônios da rede, inclusive com auto-realimentação. De modo geral, a partir de um estado inicial a rede de osciladores evoluirá para os desvios de fase em que a informação é armazenada.

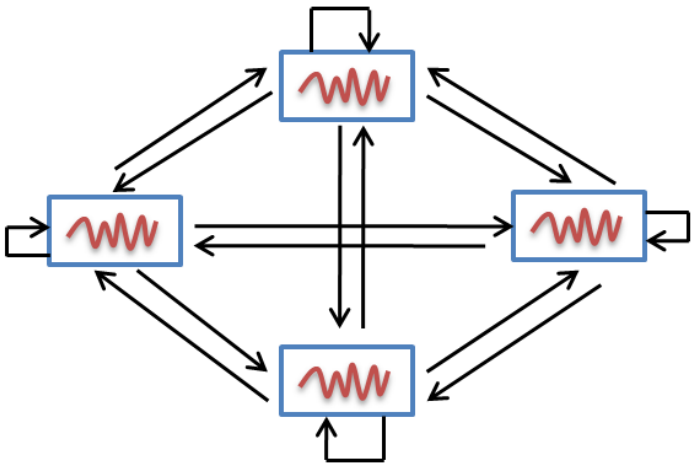


Figura 4.2 - Exemplo da arquitetura da rede para 4 neurônios.

As Equações 4.1 e 4.6 são invariantes sob translação constante, ou seja, para qualquer solução $\theta(t)$ e uma constante $c \in \Re$, $\theta(t) + (c, ..., c)^T$ também é solução. Isto implica que existe pelo menos uma direção no espaço de fase em que a solução é neutralmente

estável.

A Equação 4.6 possui 2^N soluções do tipo ponto fixo, correspondendo a todos os possíveis padrões bipolares de tamanho N. Seja $I = (I_1, ..., I_N)^T$ um desses padrões bipolares, então existe uma solução única, $\theta(I)$, correspondente ao padrão I, caracterizada por:

$$|\theta_i - \theta_j| = \begin{cases} 0 & se \quad I_i = I_j \\ \pi & se \quad I_i \neq I_j \end{cases} \tag{4.7}$$

A Equação 4.7 em coordenadas originais representa soluções oscilatórias travadas em fase, onde os padrões binários são codificados nos desvios de fase dos osciladores.

4.3.3 Função de Lyapunov

O método direto de Lyapunov (também chamado de segundo método de Lyapunov) permite determinar a estabilidade de um sistema sem a integração explicita do sistema dinâmico (LAKSHMIKANTAM; MARTYNYUK, 1992). O método é uma generalização da ideia que existe uma "medida de energia" do sistema, e então pode-se analisar a razão de mudança da energia para verificar a estabilidade. O fato singular é que se um sistema possuir um estado de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada no interior do domínio de atração decai à medida que o tempo evolui e finalmente assume seu valor mínimo no estado de equilíbrio. Portanto, a estabilidade garante a existência de uma função de energia cujo valor se reduz ao longo do tempo. A simetria da matriz C nas conexões garante que Equação 4.6 pode ser escrita como um sistema gradiente, com uma função de Lyapunov (energia) dada por:

$$L(\theta_i; \eta, C) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} C_{ij} cos\ (\theta_i - \theta_j) - \frac{\eta}{4N}\sum_{j=1}^{N} cos\ 2(\theta_i - \theta_j). \tag{4.8}$$

A dinâmica da rede é tal que, a partir de um padrão de entrada (estado inicial) as soluções movimentam-se em direção aos mínimos de energia do sistema. Logo, quando a evolução das energias parciais de cada elemento da rede estabilizar num mínimo, o padrão é recuperado. A função de energia pode ser reescrita em função dos padrões armazenados (usando Equação 4.5) da forma:

$$L(\theta_i; \eta, \Xi) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_i^\mu \xi_j^\mu e^{i\theta_j} e^{-i\theta_i} - \frac{\eta}{4N}\sum_{j=1}^{N} e^{2i\theta_j} e^{-2i\theta_i}, \tag{4.9}$$

onde $\Xi = (\xi^1, ..., \xi^p)$, e define-se os parâmetros de ordem

$$m^\mu(\theta) = |\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_j^\mu e^{i\theta_j}|, \quad \mu = 1, ..., p, \tag{4.10}$$

$$q(\theta) = |\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{2i\theta_j}|, \tag{4.11}$$

como uma medida da dinâmica coletiva da rede. O parâmetro m^μ é chamado de sobreposição, ou *overlap*, e mede a proximidade da solução em relação ao padrão memorizado ξ^μ e o parâmetro q revela a proximidade da solução com o padrão binário mais próximo.

4.3.4 Análise da Estabilidade

A estabilidade de uma solução $\theta(I)$ é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana. A matriz Jacobiana de N osciladores com N variáveis é dada por:

$$J(\theta_1, ..., \theta_N) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_N}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial \theta_N} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

onde $y_1 = f_1(\theta_1, ..., \theta_N) = \dot{\theta_1}, y_2 = f_2(\theta_1, ..., \theta_N) = \dot{\theta_2}, \cdots, y_N = f_N(\theta_1, ..., \theta_N) = \dot{\theta_N}$. Cada elemento da matriz Jacobiana J_{ij} é dado por:

$$J_{ij} = C_{ij} cos\ (\theta_j - \theta_i) + \frac{2\eta}{N} cos\ 2(\theta_j - \theta_i), \quad se \quad i \neq j \tag{4.13}$$

$$J_{ii} = -\sum_{j=1}^{N} C_{ij} cos\ (\theta_j - \theta_i) - \frac{2\eta}{N}\sum_{j=1}^{N} cos\ 2(\theta_j - \theta_i), \quad se \quad i = j \tag{4.14}$$

Os autovalores são obtidos resolvendo $|\Lambda \mathbf{I} - J| = 0$, onde Λ são os autovalores a serem determinados e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Uma solução é dita estável se todos os autovalores são negativos. A condição da estabilidade das soluções pode ser dada em termos do autovalor máximo da matriz J, denotado por Λ_{max}. Uma solução da rede de osciladores dada pela Equação 4.6, codificando um padrão I, será

assintoticamente estável se $\Lambda_{max} < 2\eta$ e instável se $\Lambda_{max} > 2\eta$ (NISHIKAWA et al., 2004a).

A Figura 4.3 ilustra a distribuição dos autovalores máximos, Λ_{max}, para três tipos de soluções $\theta(I)$: padrões memorizados, padrões com um *bit* de erro e padrões aleatórios. Para esta simulação foram realizados 500 execuções (amostras) considerando uma rede composta por $N = 1000$ osciladores e $p = 60$ padrões bipolares escolhidos aleatoriamente com probabilidades iguais. Observa-se que mesmo quando as soluções são escolhidas entre os padrões memorizados, os autovalores são sempre positivos, o que corresponde à soluções instáveis mesmo para $\eta = 0$. De fato isto ocorre para qualquer combinação de $p > 2$ e N (AONISHI, 1998). O papel do segundo termo na função de acoplamento é deslocar os autovalores em 2η para cada solução correspondente ao padrão armazenado (NISHIKAWA et al., 2004a). A linha pontilhada na Figura 4.3 indica a fronteira de estabilidade.

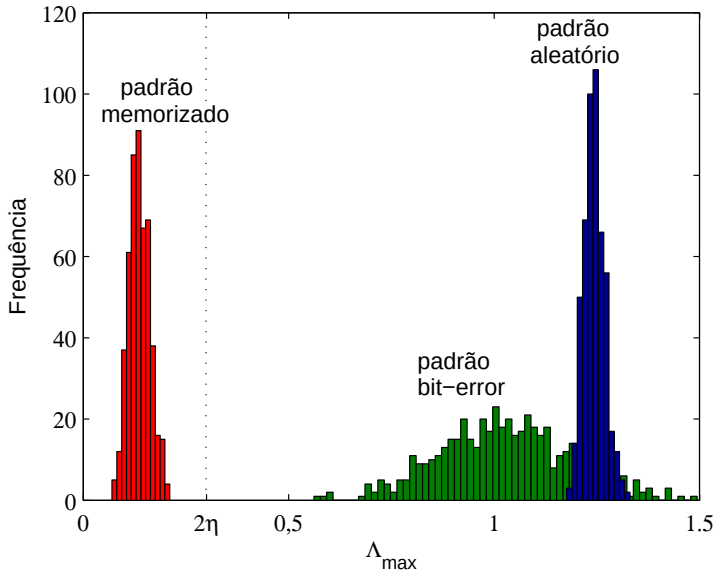
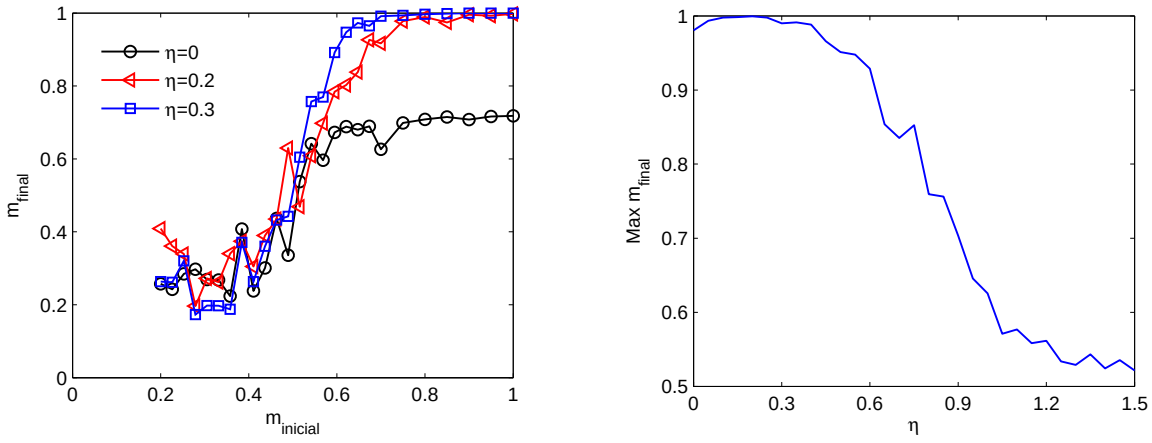


Figura 4.3 - Distribuição do autovalor máximo Λ_{max} para três tipos de soluções: padrão memorizado, padrão memorizado com um bit de erro e padrões randômicos.

A existência da função de energia garante que qualquer solução do sistema converge para uma solução travada em fase com $t \to \infty$. Além disso, a estabilidade local das soluções que representam um padrão memorizado implica na existência de uma bacia de atração para cada uma destas soluções. Assim, para quantificar o tamanho

dessas bacias pode-se investigar a proximidade necessária da condição inicial com o padrão armazenado, de modo que a rede consiga evoluir para os desvios de fase que codificam o padrão. Para isso, avalia-se a relação entre os *overlaps* final e inicial de θ. O *overlap* inicial, $m_{inicial}$, mede a proximidade do estado inicial ($\theta(0)$) com um dos padrões memorizados e é calculado utilizando a Equação 4.10. A proximidade do estado final ($\theta(t)$) com um dos padrões armazenados é denominado de *overlaps* final, m_{final}, e é determinado a partir da Equação 4.10. Se as soluções estão próximas dos padrões armazenados então o $m_{final} \approx 1$, ou seja, as soluções correspondem a padrões praticamente idênticos. Se as soluções estão distantes dos padrões armazenados então $m_{final} \approx 0$, o que significa que as soluções equivalem a padrões totalmente diferentes.

A Figura 4.4(a) apresenta o *overlap* final em função do *overlap* inicial, após 2000 iterações, para uma rede de $N = 200$ osciladores e p=12 padrões aleatórios armazenados. O m_{final} é a média sobre as soluções de 10 condições iniciais diferentes com o mesmo $m_{inicial}$. Para valores pequenos de $m_{inicial}$, isto é, para condições iniciais distantes dos padrões armazenados, a solução da rede também apresenta um m_{final} pequeno. A partir de um certo valor de $m_{inicial}$, em torno de $m_{inicial} = 0,6$, o m_{final} adquire valores próximos da unidade (recuperação perfeita). Esse valor de $m_{inicial}$ marca a fronteira da bacia de atração da solução de cada padrão armazenado.



(a) *Overlap* final em função do *overlap* inicial após 2000 iterações, para uma rede de $N = 200$ osciladores e $p = 12$ padrões aleatórios armazenados.

(b) *Overlap* final máximo *versus* parâmetro η, para uma rede de $N = 200$ osciladores e $p = 6$ padrões aleatórios armazenados.

Figura 4.4 - Fronteira da bacia de atração das soluções, e a influência do segundo termo na função de acoplamento.

Também é fundamental avaliar a influência do segundo termo na função de acoplamento Γ_{ij}, para tanto o *overlap* final máximo em relação aos padrões memorizados (média sobre 10 condições iniciais distintas) é calculado para diferentes intensidades η do segundo termo. Os resultados para uma rede de $N = 200$ osciladores, $p = 6$ padrões armazenados e $m_{inicial} = 0,7$ é ilustrado na Figura 4.4(b), e observa-se que o segundo termo aumenta a eficiência da rede, apresentando uma recuperação da informação perfeita para $\eta \in [0,1; 0,3]$.

Na teoria, a capacidade de armazenamento da rede dada pela Equação 4.6 é de $2\eta^2/logN$ padrões por neurônio (NISHIKAWA et al., 2004a), no entanto simulações sugerem que este valor seja maior. Por exemplo, na teoria uma rede $N = 200$ osciladores e $\eta = 0,3$ apresenta a capacidade de 0,034 padrões por neurônio, e nas simulações essa capacidade se mostra como sendo igual a $0,06$ padrões por neurônio. Esse resultado pode ser visto na Figura 4.5, onde são mostradas as mudanças do $Max\ m_{final}$ (média sobre 10 condições iniciais) em relação a capacidade de armazenamento (número de padrões por neurônio). Quando $\eta = 0$ não existe a influência do segundo termo da função de acoplamento Γ_{ij}, e claramente observa-se uma capacidade reduzida da rede, que é aumentada com a influência do segundo termo ($\eta = 0,2$ e $\eta = 0,3$) em Γ_{ij}.

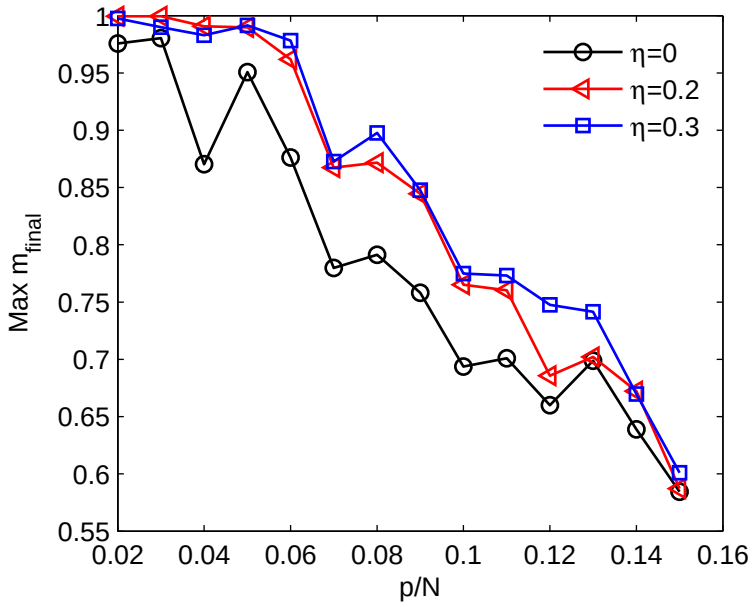


Figura 4.5 - *Overlap* final máximo *versus* capacidade de armazenamento (p/N), para diferentes intensidade de η.

4.4 Nova Função de Acoplamento Γ_{ij}

Com o propósito de aumentar a capacidade de armazenamento da rede apresentada por Nishikawa et al. (2004b), vista na seção anterior, propõe-se uma nova função de acoplamento, Γ_{ij}, dado por:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = C_{ij} sen\ (\theta_j - \theta_i) + \frac{\eta}{N}(sen\ 2(\theta_j - \theta_i) - sen\ 3(\theta_j - \theta_i)), \qquad (4.15)$$

onde o segundo termo desta equação é uma combinação do segundo e terceiro modo de Fourier. Com essa configuração, o segundo termo de Γ_{ij} possuirá uma influência mais sutil na evolução dos estados da rede em relação a rede mostrada na seção anterior.

Assim, a nova dinâmica de cada elemento da rede será dada por

$$\dot{\theta}_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} sen\ (\theta_j - \theta_i) + \frac{\eta}{N}\sum_{j=1}^{N}(sen\ 2(\theta_j - \theta_i) - sen\ 3(\theta_j - \theta_i)). \qquad (4.16)$$

onde C_{ij} é dada pela regra de Hebb (Equação 4.5). A simetria da matriz de conexões garante que o sistema 4.16 possa ser escrito como um sistema gradiente, com uma função de Lyapunov dada por:

$$L(\theta_i; \eta, C) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} C_{ij} cos\ (\theta_i - \theta_j) - \frac{\eta}{12N}\sum_{j=1}^{N}(3\ cos\ 2(\theta_i - \theta_j) - 2\ cos\ 3(\theta_i - \theta_j)). \qquad (4.17)$$

Uma solução, possivelmente, irá convergir para um ponto fixo do sistema localizado em um mínimo local desta função de energia.

A condição da estabilidade das soluções pode ser dada em termos dos autovalores da matriz Jacobiana, J. Cada elemento da matriz Jacobiana, J_{ij}, para uma solução $\theta(I)$ da rede de osciladores modificada é dado por:

$$J_{ij} = C_{ij} cos\ (\theta_j - \theta_i) + \frac{\eta}{N}(2\ cos\ 2(\theta_j - \theta_i) - 3\ cos\ 3(\theta_j - \theta_i)), \quad se\ \ i \neq j \qquad (4.18)$$

$$J_{ii} = -\sum_{j=1}^{N} C_{ij} cos\,(\theta_j - \theta_i) - \frac{\eta}{N}\sum_{j=1}^{N}(2\,cos\,2(\theta_j - \theta_i) - 3\,cos\,2(\theta_j - \theta_i)),\ \ se\ \ i = j \quad (4.19)$$

A estabilidade das soluções que correspondem a padrões binários em termos do autovalor máximo, Λ_{max} foi avaliada para três tipos de soluções: padrão memorizado, padrão memorizado com um bit de erro e padrões randômicos. As simulações foram implementadas com 500 realizações considerando uma rede de 1000 osciladores e 60 padrões bipolares armazenados. Os resultados das distribuições de Λ_{max} pode ser vista na Figura 4.6. Observa-se que as distribuições são similares às mostradas na Figura 4.3. Quando as soluções são escolhidas entre os padrões memorizados, os autovalores são sempre positivos, também correspondendo à soluções instáveis, mesmo para $\eta = 0$. Na rede mostrada anteriormente (Equação 4.6), o segundo termo na função de acoplamento tinha o papel de deslocar os autovalores em 2η para cada solução correspondente ao padrão armazenado. Para esta nova configuração (Equação 4.16), o segundo termo desloca os autovalores em 3η para cada solução, como indicado pela linha pontilhada na Figura 4.6. Dessa forma, obtém-se um novo limiar para a fronteira de estabilidade, onde as soluções serão estáveis para valores de $\Lambda_{max} < 3\eta$.

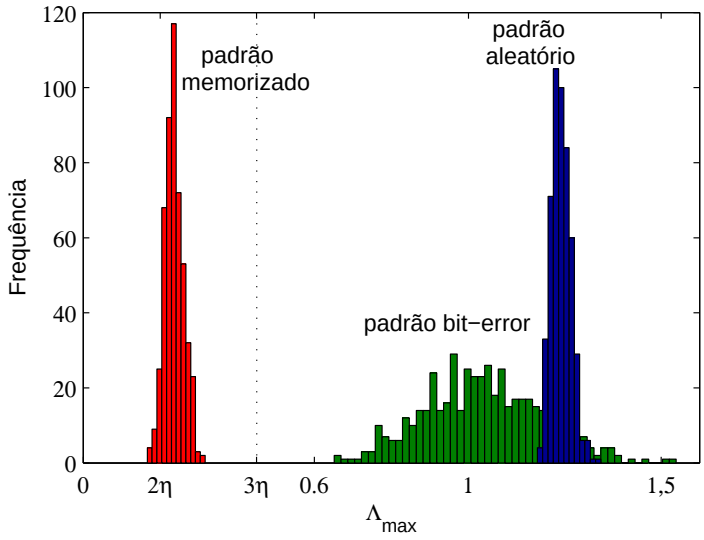


Figura 4.6 - Distribuição do autovalor máximo Λ_{max} para três tipos de soluções: padrão memorizado, padrão memorizado com um bit de erro e padrões randômicos.

Os resultados utilizando essa nova proposta, em comparação com a rede de osciladores mostrada na Seção 4.3, será apresentada a seguir.

4.5 Resultados

Nesta seção serão apresentados os resultados da segunda parte deste trabalho. No decorrer do texto quando se tratar da rede de osciladores dada pela Equação 4.6, a mesma será referenciada por *Rede A*, e quando se tratar da rede de osciladores modificada, dada pela Equação 4.16, a mesma será referenciada por *Rede B*.

4.5.1 Recuperação de Padrões

Primeiramente, é considerado um conjunto de quatro padrões bipolares (formados por $1's$ e $-1's$) para formar a memória da rede. Na Figura 4.7 podem ser visualizados estes padrões na forma de imagens 10×10.

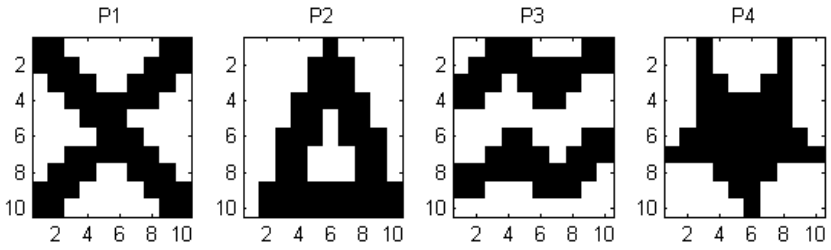


Figura 4.7 - Conjunto de padrões armazenados na rede de osciladores.

O estado inicial de cada oscilador é obtido a partir de uma codificação inicial do vetor de entrada, I, dada por:

$$\theta_0(I_i) = \begin{cases} 0 & se \quad I_i = 1 \\ \pi/2 & se \quad I_i = -1 \end{cases} \tag{4.20}$$

Para as simulações foi implementado um critério de parada para ambas as redes. O critério deve satisfazer as seguintes condições: (i) todas as energias parciais devem estar estabilizadas num mínimo de energia, e (ii) o m_{final} máximo deve ser maior que $0,99$, isto é a solução deve estar próxima à dos padrões armazenados.

Um versão distorcida do padrão P4 é apresentado como entrada para a *Rede A* e para

a *Rede B*. A perturbação é dada em termos do *overlap* inicial com $m_{inicial} = 0,8$, indicando que o padrão foi apresentado com 20% dos *bits* trocados. Esse padrão (P4), com 20% de perturbação é apresentado na Figura 4.8. Os *bits* a serem trocados são escolhidos aletóriamente, com a mesma semente para ambas as redes avaliadas. E também utlilizou-se o mesmo valor $\eta = 0,3$ como intensidade do segundo termo da função de acoplamento Γ para as duas redes.

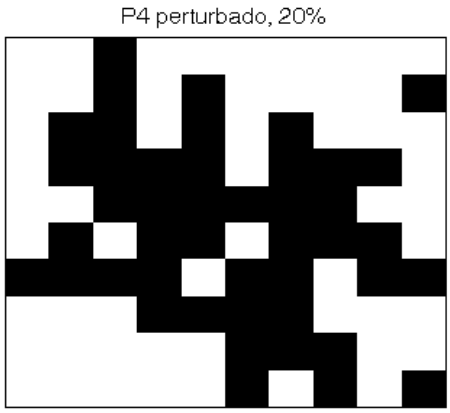


Figura 4.8 - Versão distorcida o padrão P4, com 20% dos *bits* trocados.

A Figura 4.9 apresenta os resultados da evolução dos estados, em forma de imagem, obtidos com a *Rede A* a cada 30 iterações. Cada célula da imagem representa um oscilador e é colorida de acordo com sua fase. Em t=1 tem-se o padrão inicial (P4 perturbado) que foi apresentado para a rede, e após 781 iterações tem-se a recuperação perfeita deste padrão P4.

O mesmo estado inicial utilizado na *Rede A* é apresentado para a *Rede B*, e os resultados da evolução dos estados podem ser vistos na Figura 4.10. Observa-se que os estados convergem mais rapidamente na *Rede B* do que na *Rede A* para os desvios de fase, realizando a recuperação do padrão P4 perturbado em 571 iterações.

Na Figura 4.11 são mostradas a evolução das energias L_i e dos estados θ_i ao longo do tempo para a *Rede A* e *Rede B*. Em ambas as redes ao passo que os estados evoluem, as energias convergem para um mínimo, e as fases tornam-se travadas. Ao observar a evolução dos estados θ_i de ambas as redes em t=400 (indicado pela linha pontilhada nos gráficos), verifica-se que na *Rede B* as energias já encontram-se praticamente

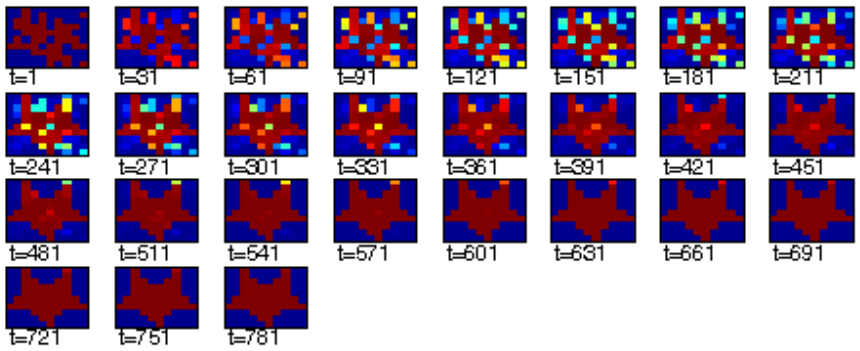


Figura 4.9 - Rede A: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P4 com $m_{inicial} = 0,8$.

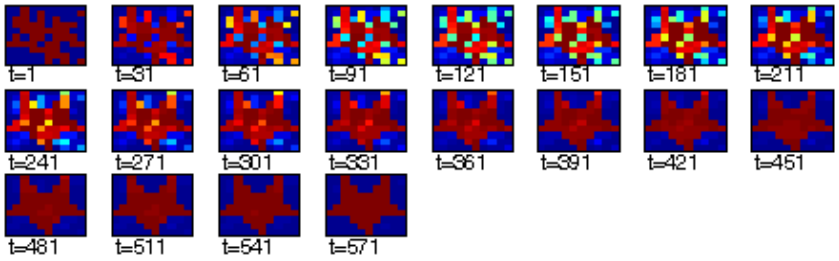
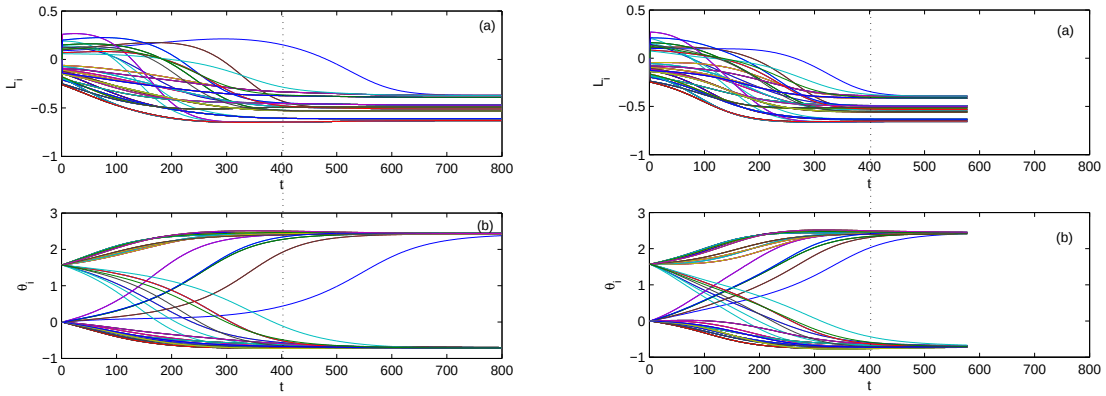


Figura 4.10 - RedeB: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P4 com $m_{inicial} = 0,8$.

estabilizadas enquanto na *Rede A* alguns osciladores ainda não convergiram para um mínimo de energia. Este resultado indica que a nova função de acoplamento usada na *Rede B* faz com que a evolução da dinâmica dos osciladores convirja em menos iterações para os atratores.

Uma perturbação de 30% ($m_{inicial} = 0,7$) é atribuida ao padrão P1, e este é apresentado como estado incial para a *Rede A* e *Rede B*. Os resultados das evoluções das fases da *Rede A* e *Rede B* podem ser vistos ns Figuras 4.12 e 4.13, respectivamente. Ambas as redes conseguem recuperar corretamente a informação armazenada (padrão P1) a partir do padrão inicial apresentado. Novamente a *Rede B* se destaca por apresentar uma recuperação perfeita após 571 iterações (ver Figura 4.13), enquanto que a *Rede A* leva um número maior de iterações (661 iterações), como pode ser visto na Figura 4.12. A evolução das energias L_i e das fases θ_i de cada oscilador para as Redes A e B, durante a recuperação deste padrão P1 perturbado, é ilustrada na



(a) Rede A (b) Rede B

Figura 4.11 - Evolução da função de energia L_i e das fases θ_i durante a recuperação do padrão P4, com perturbação inicial de 20% ($m_{inicial} = 0,8$).

Figura 4.14. Observa-se que as energias da *Rede B* se estabilizam antes das energias da *Rede A*.

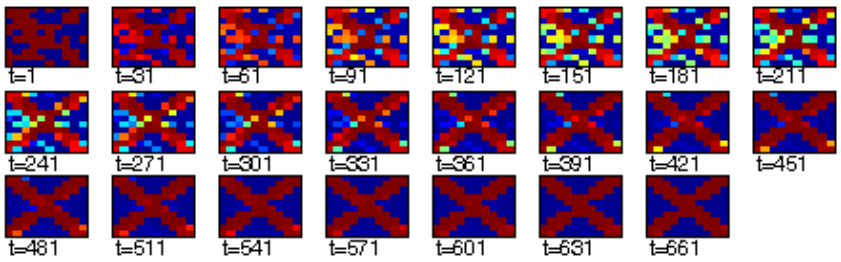


Figura 4.12 - Rede A: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P1 perturbado com $m_{inicial} = 0,7$.

A Figura 4.15 ilustra os resultados da evolução das fases, quando o padrão P2 com 45% ($m_{inicial} = 0,55$) dos *bits* trocados aletóriamente foi apresentado como entrada da *Rede A*. Os resultados, com a mesma condição inicial, aplicada a *Rede B* podem ser vistos na Figura 4.16. Comparativamente, observa-se que a recuperação com a *Rede B* é melhor do que a obtida com a *Rede A*. Nos gráficos da evolução das energias L_i e dos estados θ_i mostrados na Figura 4.17, pode-se observar o que ocorre durante o processo de recuperação dessa informação (padrão P2 perturbado) na dinâmica da

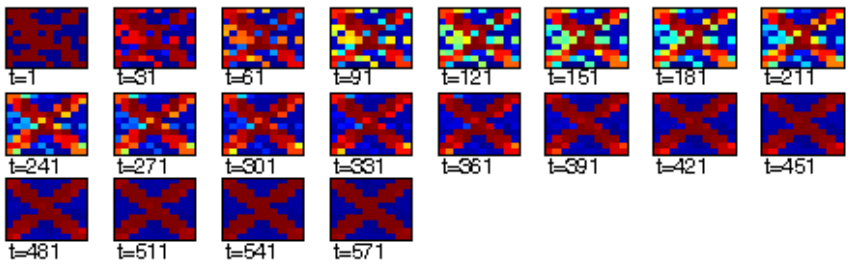
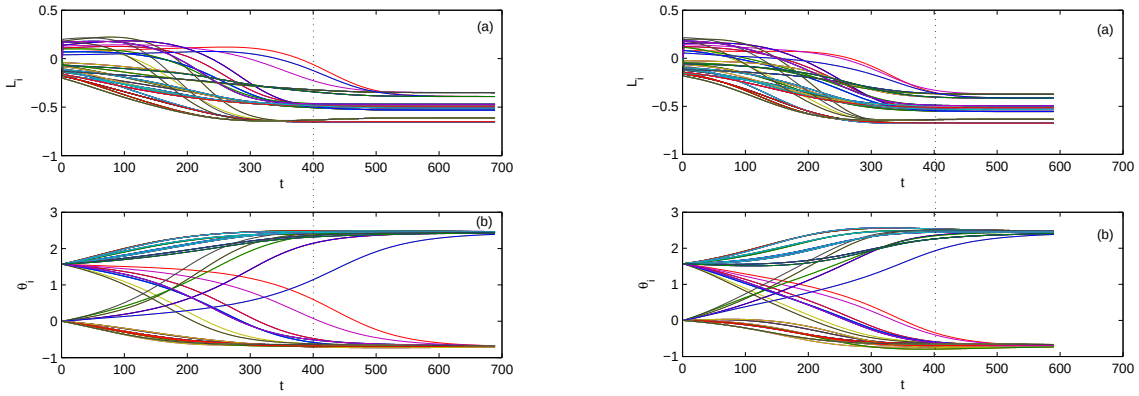


Figura 4.13 - RedeB: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P1 perturbado com $m_{inicial} = 0,7$.



(a) Rede A

(b) Rede B

Figura 4.14 - Evolução da função de energia L_i e das fases θ_i durante a recuperação do padrão P1, com perturbação inicial de 30% ($m_{inicial} = 0,7$).

Rede A e *Rede B*. A linha pontilhada nos gráficos ilustra o $t = 500$, onde observa-se que na *Rede B* as energias estão quase estabilizadas nos mínimos de energia, enquanto que na *Rede A* dois osciladores ainda não convergiram para um mínimo. Após 1261 iterações os estados da *Rede A* convergem para três regiões, no caso π, 0 e $-\pi$, onde o padrão é armazenado. Note que a *Rede B* atinge a recuperação perfeita em praticamente metade das iterações, no caso 661 iterações. Uma das explicações plausíveis para o melhor desempenho da *Rede B* em relação a *Rede A* é devido a pequena perturbação do termo modificado sobre a função de acoplamento Γ a cada iteração. Assim, essa pequena perturbação deve influenciar com mais ponderação na eficácia sináptica, e assim fazer com que os osciladores evoluam para os desvios de fase que armazenam a informação com menos iterações.

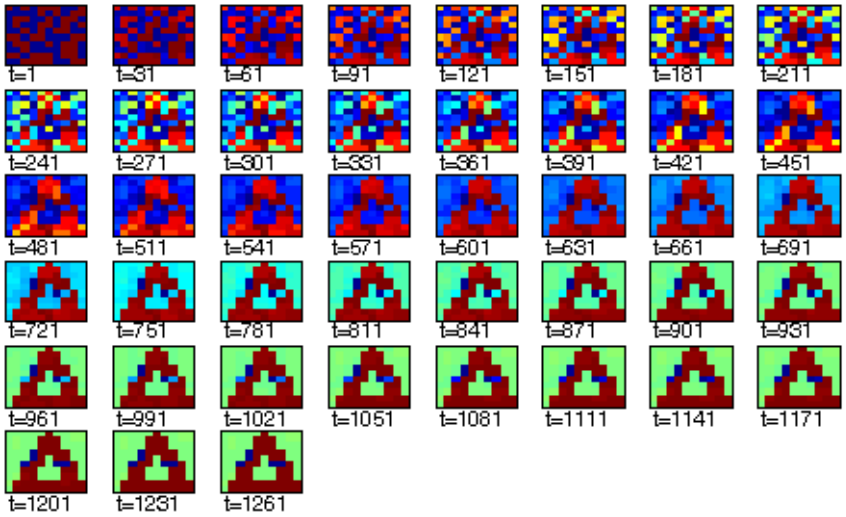


Figura 4.15 - Rede A: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P1 com $m_{inicial} = 0,55$.

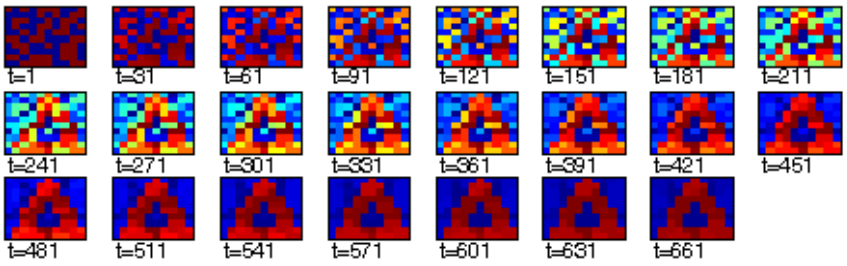
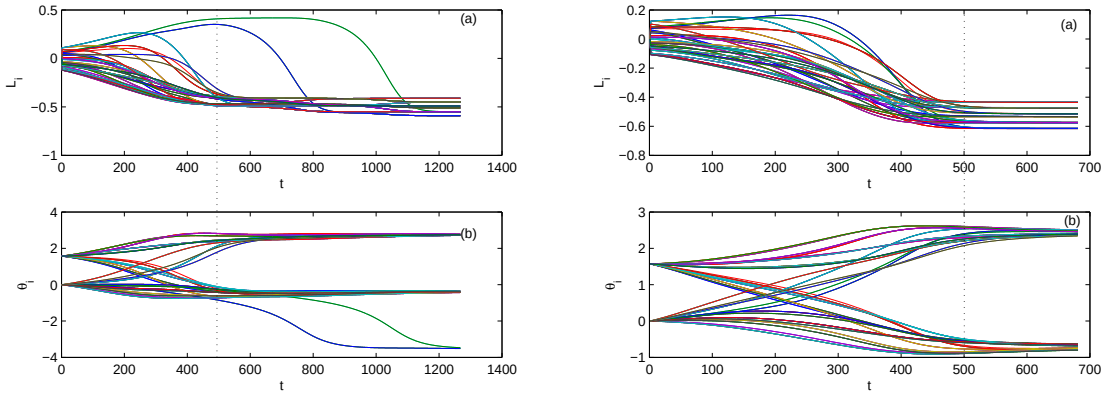


Figura 4.16 - RedeB: Evolução da rede de osciladores de fase durante a recuperação de P3 com $m_{inicial} = 0,55$.

4.5.2 Análise da Recuperação de Informações

A fim de investigar a quantidade de informação armazenada por neurônio, de modo que a rede de osciladores recupere perfeitamente a informação, foram realizadas simulações com diferentes capacidades de armazenamento para ambas as redes. Nas simulações foram considerados 200 osciladores e diferentes tamanhos de conjuntos de memórias formadas por padrões bipolares aleatórios e com mesma probabilidade de ocorrência. Para cada simulação foram usados 10 estados iniciais perturbados em 30% e o m_{final} máximo, em relação aos padrões armazenados, é calculado para cada uma dessas condições. O mesmos conjuntos de memórias foram utilizados na *Rede A*



(a) Rede A (b) Rede B

Figura 4.17 - Evolução da função de energia L_i e das fases θ_i durante o processo de recuperação do padrão P2 com $m_{inicial} = 0,55$.

e *Rede B*.

Na Figura 4.18 são ilustrados os resultados obtidos com a *Rede A* e a *Rede B* para três valores de η. Quando $\eta = 0$, a influência do segundo termo na função de acoplamento é nula, ou seja, as duas redes são iguais. Nesse caso, observa-se que a capacidade de armazenamento com recuperação da informação é reduzida. Ao passo que quando o segundo termo é considerado essa capacidade é aumentada. A linha pontilhada nos gráficos, em $0,06$, destaca a capacidade máxima de armazenamento das duas redes, considerando $\eta = 0,3$. Quando o parâmetro η é modificado para 0,6 a *Rede A* não consegue recuperar corretamente os padrões armazenados, enquanto que a *Rede B* consegue recuperar os padrões com a capacidade de armazenamento reduzida para $0,05$.

De modo geral, a modificação realizada na função de acoplamento da *Rede B* não aumentou a capacidade de armazenamento como se esperava. Por outro lado, a proximidade da solução encontrada com os padrões memorizados (m_{final}) é muito maior na *Rede B* do que na *Rede A*. Este resultado pode ser visto na Figura 4.18(b), com m_{final} máximo muito próximo de 1 para $\eta = 0,3$ e $\eta = 0,6$.

Um ponto importante a verificar é a influência do segundo termo de intensidade η da função de acoplamento na recuperação da informação. Assim, a Figura 4.19 ilustra a variação do m_{final} máximo em relação ao parâmetro η para as redes A e B. As

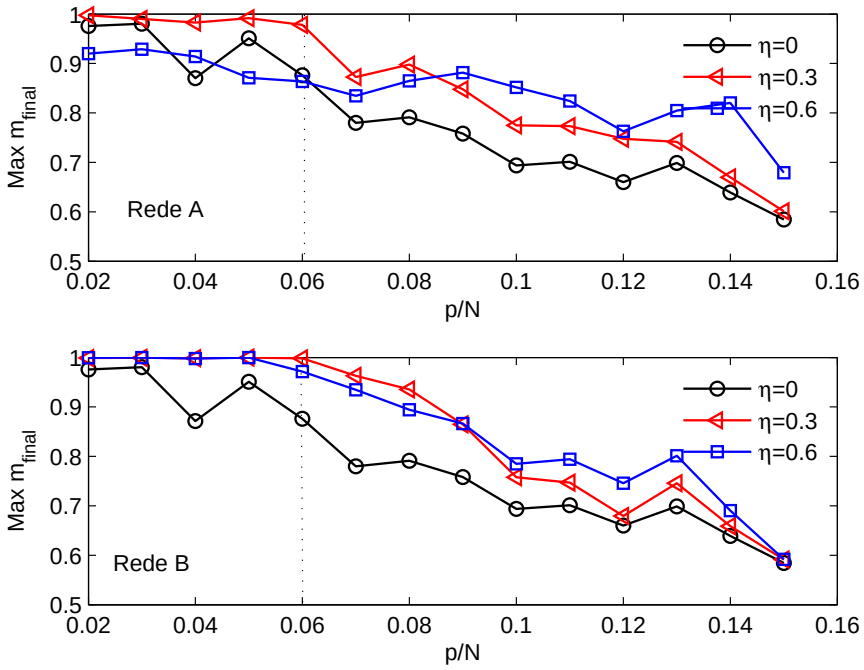
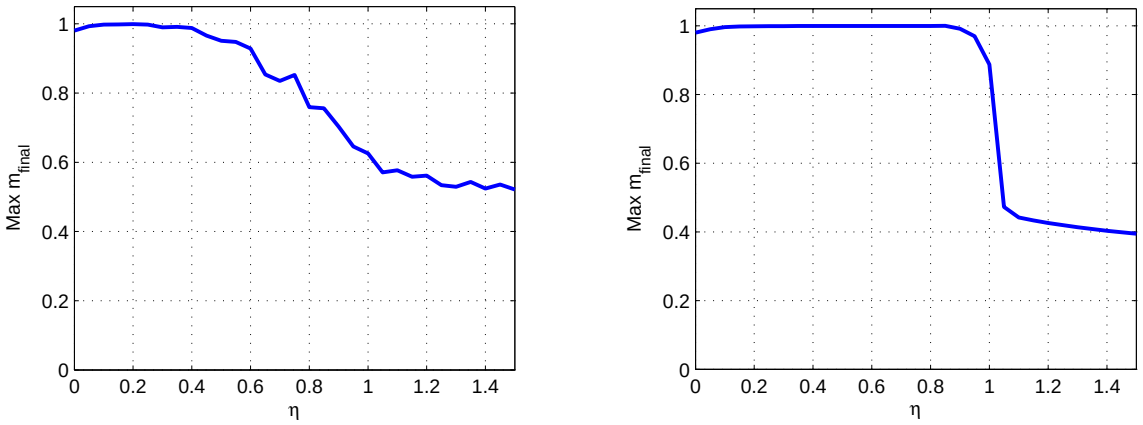


Figura 4.18 - Capacidade de armazenamento para recuperação da informação da *Rede A* e a *Rede B*, para três valores distintos de η.

duas redes são compostas por $N = 200$ osciladores, $p = 6$ padrões armazenados e $m_{inicial} = 0,7$. Observa-se que na *Rede A* o m_{final} máximo está próximo de 1, para uma variação do parâmetro η de 0,1 a 0,4. Por outro lado, na *Rede B* a variação deste parâmetro vai de 0,1 a 0,9 para a mesma condição de m_{final} máximo (~ 1), indicando que pode-se escolher uma gama maior de valores para η de forma a resultar numa recuperação perfeita dos padrões armazenados.

Uma forma mais completa de visualizar as relações entres os parâmetros η e capacidade de armazenamento, em relação a recuperação das informações, pode ser vista nas Figuras 4.20 e 4.21 referentes as redes A e B, respectivamente. As intensidades de cores estão associadas a recuperação dos padrões armazenados, sendo que a recuperação perfeita está relacionada ao vermelho intenso.

Na Figura 4.20 pode ser vista a região no espaço dos parâmetros η e p/N para o qual a *Rede A* apresenta recuperação perfeita da informação, onde o *overlap* final está próximo da unidade. A Figura 4.21 apresenta os resultados obtidos com a *Rede B*. Observa-se que a região de influência para uma recuperação da informação é maior



(a) Rede A (b) Rede B

Figura 4.19 - Influência do segundo termo de intensidade η da função de acoplamento na recuperação da informação. Para uma rede composta por $N = 200$, $p = 6$ padrões armazenados e $m_{inicial} = 0,7$.

na *Rede B* do que na *Rede A*, evidenciado pela maior área em vermelho.

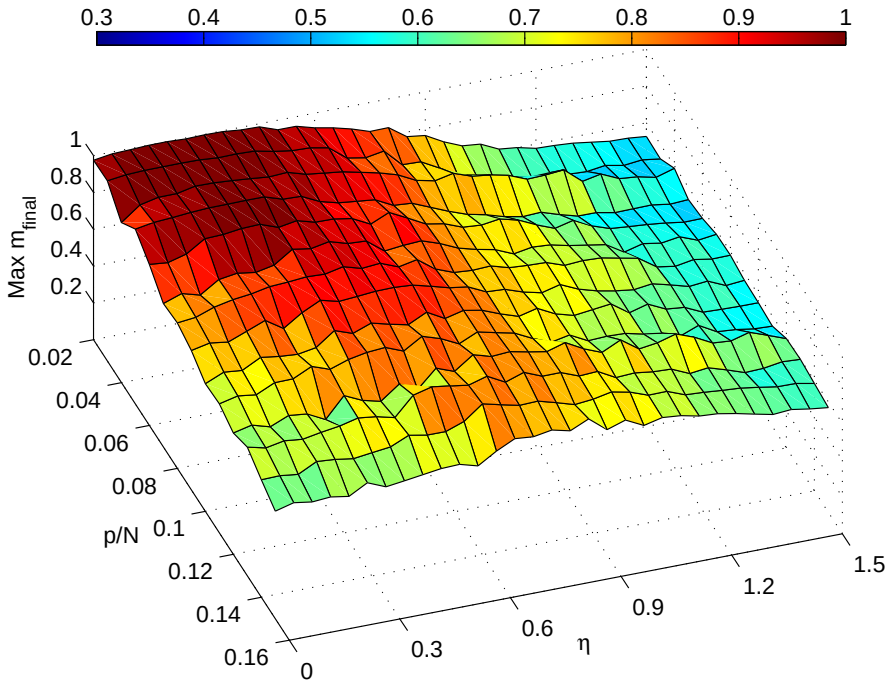


Figura 4.20 - Rede A: Dependência dos parâmetros η e capacidade de armazenamento para recuperação de informações.

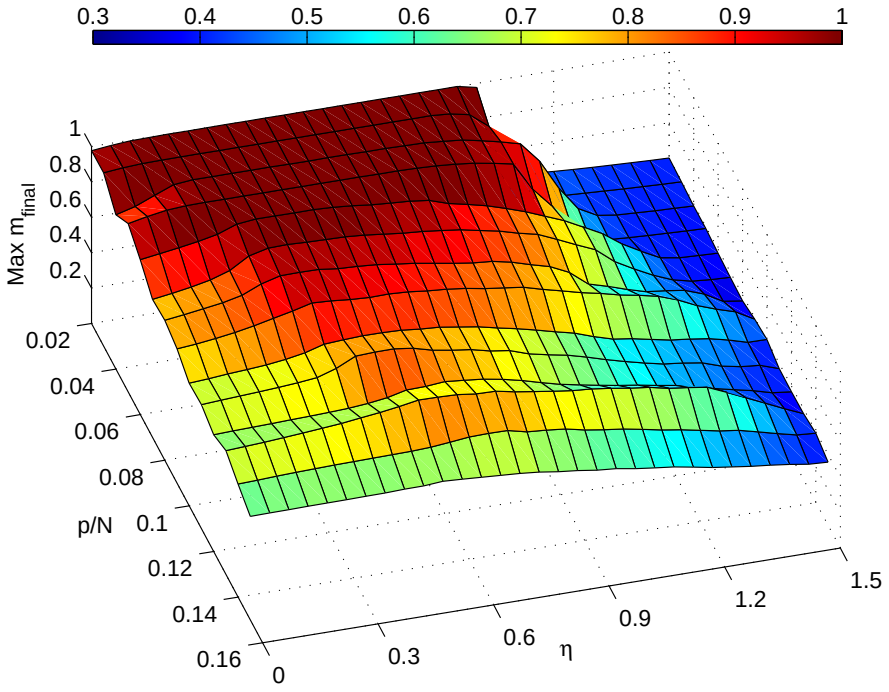
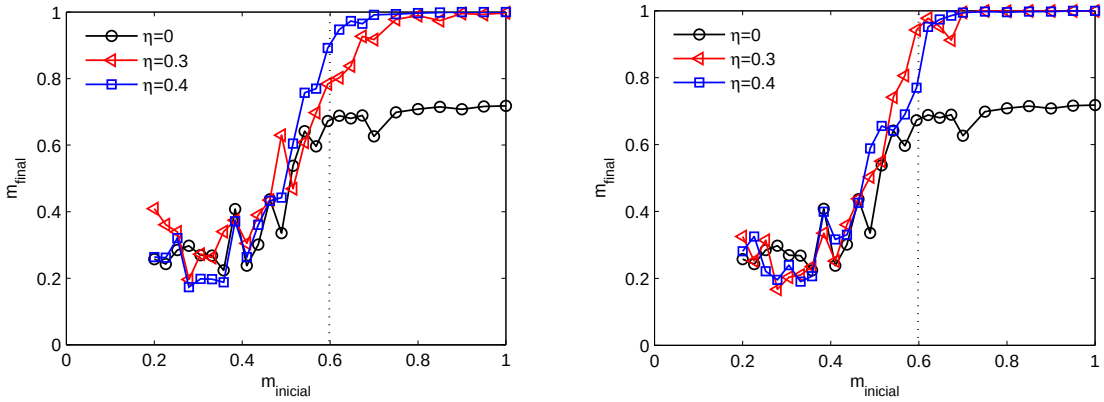


Figura 4.21 - Rede B: Dependência dos parâmetros η e capacidade de armazenamento para recuperação de informações.

Outro ponto de análise é investigar a proximidade necessária da condição inicial com o padrão armazenado de modo que a rede consiga evoluir para os desvios de fase que codificam o padrão, ou seja, a bacia de atração das soluções que representam um padrão memorizado. Para isso, investiga-se a relação entre os *overlaps* final (m_{final}) e inicial ($m_{inicial}$) dos estados θ_i.

A Figura 4.22 apresenta os gráficos do m_{final} *versus* $m_{inicial}$ da *Rede A* e da *Rede B* para três valores de η. As redes são formadas por $N = 200$ osciladores e $p = 8$ padrões aleatórios armazenados. O m_{final} é a média sobre as soluções de 10 condições iniciais distintas, com o mesmo $m_{inicial}$. Para valores pequenos de $m_{inicial}$, as soluções de ambas as redes geram valores de m_{final} também pequenos, indicando que as soluções estão distantes dos padrões memorizados. Para $\eta = 0$, as duas redes são idênticas e apresentam o mesmo comportamento. A partir de um certo valor de $m_{inicial}$, em torno de $m_{inicial} = 0,6$, o m_{final} adquire valores próximos de 1 ($\eta = 0,3$ e $\eta = 0,4$). Este valor de $m_{inicial}$ marca a fronteira da bacia de atração da solução de cada padrão armazenado. Observa-se que para $\eta = 0,4$ as redes apresentam resultados próximos. Porém, para $\eta = 0,3$ observa-se que os resultados são distintos, com m_{final} tendendo

a 1 para valores de $m_{inicial}$ em torno de 0,7 para a *Rede A*, enquanto que para a *Rede B* o m_{final} tende a 1 a partir de $m_{inicial} \sim 0,6$.



(a) Rede A (b) Rede B

Figura 4.22 - Overlap final versus inicial para N=200 e p=12, para diferentes valores de η.

A seguir será apresentado um experimento envolvendo a capacidade humana de identificar padrões perturbados, além de comparar tais resultados com a saída da *Rede B*.

4.5.3 Experimento com Padrões Binários

O objetivo deste experimento é investigar a habilidade humana de reconhecer padrões binários perturbados, ou seja, determinar o limiar de $m_{inicial}$ a partir do qual um indivíduo consiga reconhecer o padrão apresentado de forma correta, além de verificar se existe uma concordância com os resultados obtidos a partir da rede de osciladores.

Para tanto, o conjunto de memórias fundamentais será formado pelas letras maiúsculas do alfabeto, que pressupõe-se fazer parte da memória permanente de qualquer indivíduo. Esses padrões são apresentados para o indivíduo antes do início do teste. A Figura 4.23 ilustra o conjunto de imagens das letras do alfabeto que compõe as memórias.

O experimento teve duas etapas, na primeira foi desenvolvida uma interface interativa desenvolvida com a ferramenta *GUI Development* do *Matlab*, e na segunda

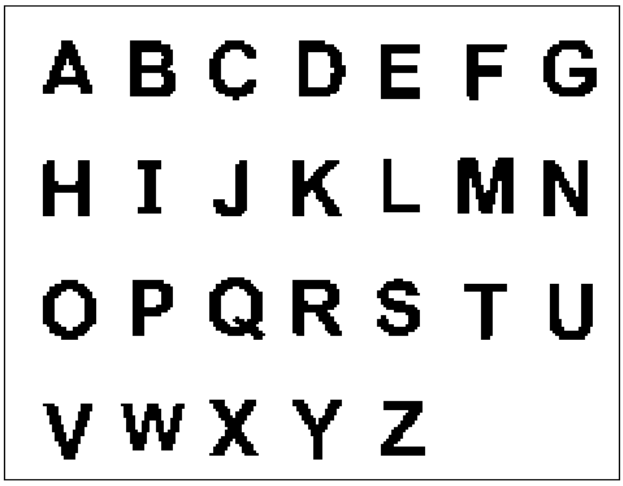


Figura 4.23 - Letras maiúsculas do alfabeto utilizadas no experimento.

etapa 20 indivíduos foram convidados a realizar o teste. Na Figura 4.25(a) é ilustrada a interface do experimento mostrando a letra H com 10% de perturbação e as alternativas para o indíduo marcar a resposta. Para cada experimento (respostas de um indivíduo), foram geradas 45 perturbações em letras escolhidas aletoriamente do cojunto de memórias fundamentais. Esse conjunto de perturbações está contido no intervalo $m_{inicial} \in [0,3; 1.0]$ e cada perturbação se repetiu três vezes ao longo do teste, de forma que o resultado é uma média de 3 pontos para cada perturbação.

A Figura 4.24 apresenta o resultado do teste realizado por um dos indivíduos. Observa-se a variação do número de acertos até $m_{inicial} = 0,65$ é aleatória, uma vez que as letras geradas com até esse valor de perturbação são difíceis de serem identificadas. Para exemplificar este fato observe a Figura 4.25, onde é possível identificar a letra H, mas para perturbações maiores, $m_{inicial} = 0,6$ (40%) e $m_{inicial} = 0,5$ (50%), a identificação torna-se muito difícil, como pode ser visto na Figura 4.26. Assim, a escolha da alternativa correspondente à letra perturbada neste último caso, torna-se aleatória.

O resultado geral do experimento obtido a partir das respostas de 20 pessoas é apresentado na Figura 4.27, em comparação com o resultado gerado pela rede de osciladores definida na Equação 4.16 e discutida na seção anterior (*Rede B*). A curva em azul representa a média das respostas de todos os indivíduos, enquanto que a curva em vermelho é resultado da simulação da *Rede B* composta por 200 osciladores, 12 padrões armazenados e perturbações análogas às inseridas no experimento.

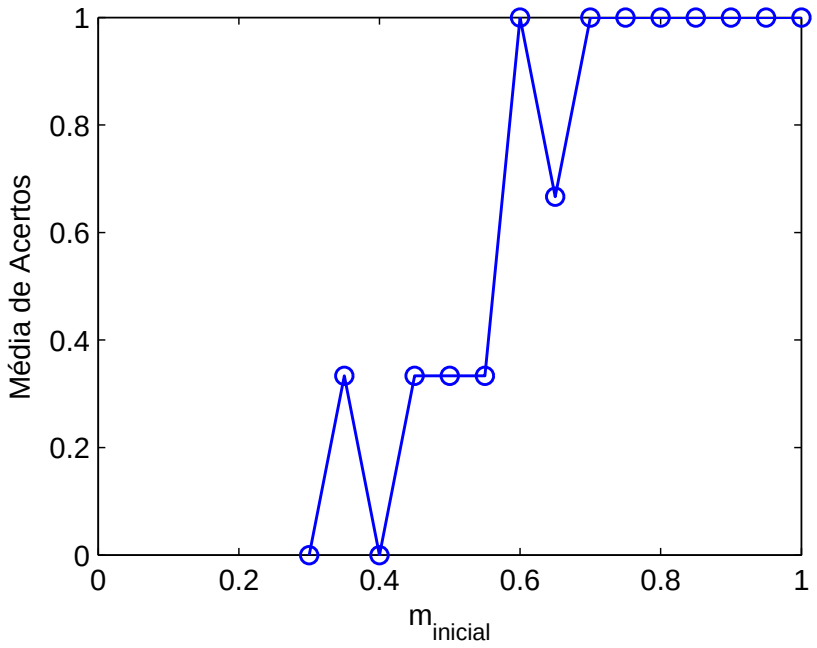
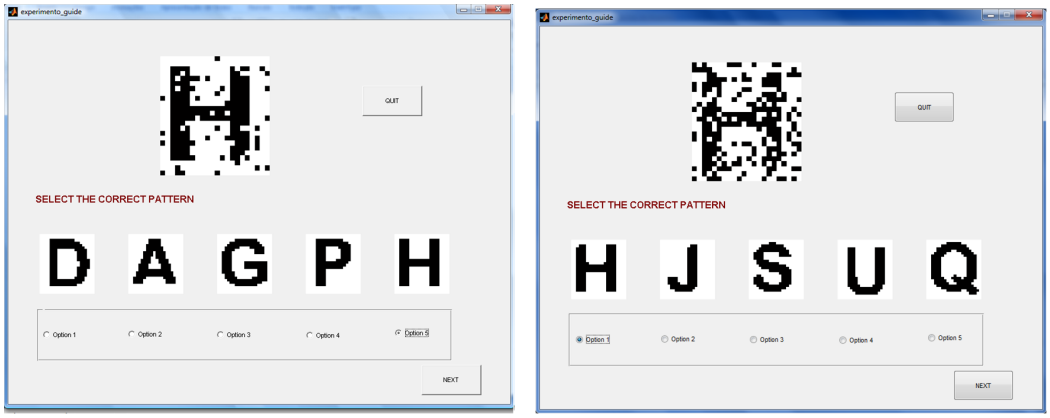


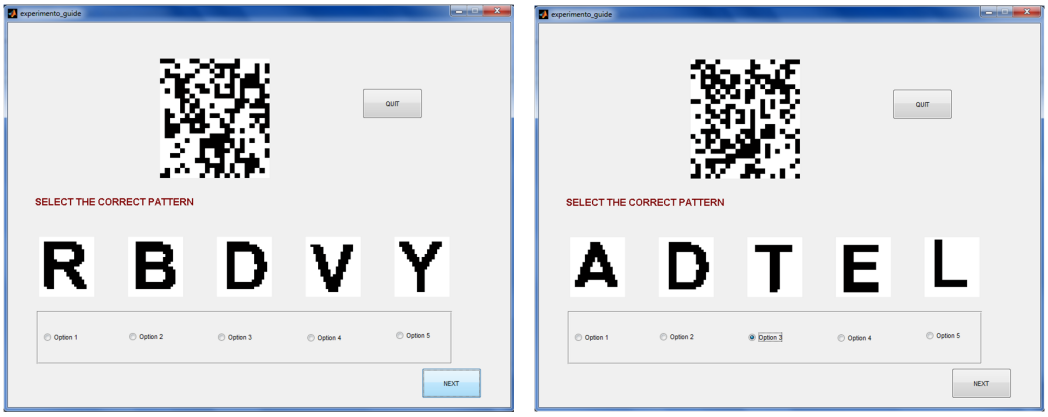
Figura 4.24 - Média de acertos obtida para o experimento realizado com um indivíduo.



(a) (b)

Figura 4.25 - Interface do experimento ilustrando a letra H com (a) 10% ($m_{inicial} = 0,9$) e (b) 30% ($m_{inicial} = 0,7$) de perturbação, e as cinco alternativas para a escolha.

A partir da Figura 4.27 é possível verificar que o resultado gerado pela *Rede B* está em concordância com os resultados experimentais, divergindo ligeiramente no limite da perturbação mínima a partir da qual é possível recuperar totalmente os padrões memorizados pela rede. Esta perturbação mínima ocorre em $m_{inicial} \sim 0,6$



(a) (b)

Figura 4.26 - Interface do experimento ilustrando uma perturbação de (a) 40% ($m_{inicial} = 0,6$) e (b) 50% ($m_{inicial} = 0,5$) em letras aleatórias.

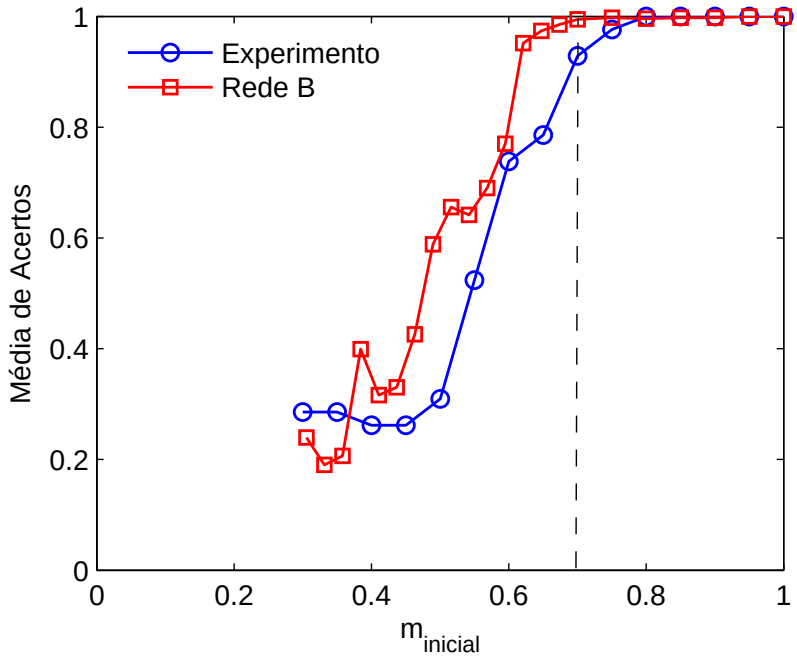


Figura 4.27 - Média de respostas corretas em função de $m_{inicial}$.

para a rede de osciladores, enquanto no experimento observa-se que esse limiar é de $m_{inicial} \sim 0,7$ para a média de acertos equivalente à obtida pela rede de osciladores. Essa diferença se deve ao fato da rede ser capaz de ponderar as informações armazenadas na memória, através da função de acoplamento, chegando ao padrão

armazenado com níveis de perturbação maiores em relação ao obtido no experimento.

4.6 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi explorado o travamento das fases em estruturas de redes de osciladores em uma configuração de "rede neural artificial", que atua com uma memória associativa permitindo o armazenamento dinâmico de padrões. A modificação da função de acoplamento na rede de osciladores melhorou o intervalo de tempo necessário a recuperação das informações armazenadas aproximadamente de 10% a 20%, dependendo dos parâmetros utilizados. Entretanto, a rede apresentou apenas uma melhora marginal da capacidade de armazenamento dos padrões. Um experimento envolvendo identificação de padrões binários, aplicado a um grupo de 20 indivíduos, apresentou um limiar similar ao da rede de osciladores para recuperação das informações.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo explorar o fenômeno da sincronização de fase entre osciladores caóticos visando: (1) introduzir uma metodologia simples e eficiente aplicável à detecção deste fenômeno a partir de séries temporais; (2) explorar esse fenômeno no armazenamento de informações no contexto de redes oscilatórias neurais artificiais. Para cumprir o objetivo (1) foi desenvolvida uma metodologia, baseada na análise espectral por meio de mínimos quadrados, de forma a obter a fase de sistemas caóticos não coerentes e de séries temporais. No que tange ao objetivo (2), introduziu-se um modelo de redes oscilatórias neurais artificiais baseada no modelo de Kuramoto, onde padrões de informação ficam armazenados em atratores estáveis da rede.

Dentre as principais contribuições deste trabalho destaca-se o método SFMQ implementado para identificar a sincronização de fase. Os resultados obtidos com este método mostram uma boa consistência em relação a métodos já existentes para este fim. Deve-se ressaltar que essa metodologia não requer projeções ou reconstrução do atrator, sendo esta uma das principais vantagens do método. É importante notar que este trabalho também contribuiu com a investigação da sincronização de fase em dados experimentais provenientes de dois circuitos de Chua acoplados. Este trabalho também contribuiu no sentido de aprimorar uma rede de osciladores através da modificação da função de acoplamento, o que resultou numa melhor recuperação das informações armazenadas. Por fim, a metodologia de reconhecimento de padrões foi validada a partir de um experimento no qual foi verificada a habilidade humana de reconhecer padrões binários perturbados.

De modo geral, a implementação do método SFMQ é relativamente simples e ao mesmo tempo tal método mostrou-se robusto. A escolha dos parâmetros apropriados para aplicar essa técnica pode ser realizada através de uma análise prévia da série temporal a ser investigada. Um índice de sincronização foi introduzido para analisar a transição para a sincronização de fase entre dois osciladores de Rössler acoplados. Este método também mostrou-se aplicável na investigação da sincronização de fase em diferentes tipos de sistemas caóticos e a dados experimentais.

Uma rede de osciladores baseada no modelo de Kuramoto foi concebida para armazenar e recuperar informações em suas trajetórias. Os resultados referentes à recuperação das informações sugerem uma capacidade de armazenamento maior do

que prevê a teoria. Além disso, a inclusão de um novo termo na função de acoplamento mostrou um resultado significativo, melhorando a recuperação da informação. A habilidade humana de reconhecer padrões binários perturbados foi investigada durante a realização de um experimento. O resultado mostrou que uma perturbação inicial de no máximo 30% nos padrões armazenados, possibilitou o reconhecimento da informação. Esse resultado é muito similar ao obtido pela rede de osciladores.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Em relação a estudos futuros envolvendo a sincronização de fase, sugere-se:

- Expandir o método SFMQ para verificar a sincronização de fase em grandes conjuntos de sistemas acoplados;
- Inferir um índice de sincronização capaz de diferenciar a ocorrência da sincronização de fase e os demais tipos de sincronização;
- Investigar o desempenho da rede de osciladores durante a recuperação de informações com altos índices de correlação;
- Avaliar outros tipos de funções de acoplamento;
- Investigar aplicabilidade de uma rede heterogênea de osciladores para o processamento e armazenamento de informações;
- Realizar o experimento com padrões binários para um maior número de indivíduos;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas**: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. Minas Gerais: UFMG, 2001. 30

AONISHI, T. Phase transitions of an oscillator neural network with a standard hebb learning rule. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 58, n. 4, p. 4865–4871, Oct 1998. 3, 54, 58, 62

AXMACHER, N.; MORMANN, F.; FERNáNDEZ, G.; ELGER, C. E.; FELL, J. Memory formation by neuronal synchronization. **Brain Research Reviews**, v. 52, n. 1, p. 170 – 182, 2006. ISSN 0165-0173. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6SYS-4JHMRPB-1/2/e4c77e77b1af3a324a03cde34ff72d64>. 53

BERGER, H. Über das elektrenkephalogramm des menschen. **European Archives of Psychiatry and Clinical Neuroscience**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 87, p. 527–570, 1929. ISSN 0940-1334. 10.1007/BF01797193. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01797193>. 53

BLASIUS, B.; STONE, L. Chaotic and phase synchronization in ecological systems. **Int. Jour. Bif. and Chaos**, v. 10, n. 10, p. 2361, 2000. 6

BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.; ZHOU, C. The synchronization of chaotic systems. **Physics Reports**, v. 366, p. 1–101, January 2002. Disponível em: <http://www.elsevier.com/locate/physrep>. 1, 38

BORISYUK, R.; HOPPENSTEADT, F. A theory of epineuronal memory. **Neural Networks**, v. 17, n. 10, p. 1427 – 1436, 2004. ISSN 0893-6080. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6T08-4DGW39N-3/2/883a7464be874d5c92b25492746311c7>. 54

BORST, A.; THEUNISSEN, F. Information theory and neural coding. **Nature neuroscience**, NATURE AMERICA, v. 2, p. 947–958, 1999. ISSN 1097-6256. 54

BRUNS, A. Fourier-, hilbert- and wavelet-based signal analysis: are they really different approaches? **Journal of Neuroscience Methods**, v. 137, n. 2, p. 321 – 332, 2004. ISSN 0165-0270. 29

BUCK, J.; BUCK, E. Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies. **Science**, v. 159, n. 3821, p. 1319–1327, 1968. 1, 5

BURWICK, T. Temporal coding with synchronization and acceleration as complementary mechanisms. **Neurocomputing**, v. 71, p. 1121–1133, Jan 2008. 53

BUZSÁKI1, G.; DRAGUHN, A. Neuronal oscillations in cortical networks. **Science**, v. 304, n. 5679, p. 1926 – 1929, 2004. 1

CARRILLO, H.; HOPPENSTEADT, F. Unfolding an electronic integrate-and-fire circuit. **Biological Cybernetics**, Springer Berlin / Heidelberg, v. 102, p. 1–8, 2010. ISSN 0340-1200. 10.1007/s00422-009-0358-x. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00422-009-0358-x>. 3

CHATE, H. Forcing oscillatory media: phase kinks vs. synchronization. **Physica D-nonlinear Phenomena**, v. 131, p. 17–30, 1999. 20

CHEN, J. Y.; WONG, K. W.; SHUAI, J. W. Properties of phase locking with weak phase-coherent attractors. **Phys. Lett. A**, v. 285, p. 312, 2001. 17, 19, 37

CHOI, A. Real-time fundamental frequency estimation by least-square fitting. **IEEE Transactions on Speech and Audio Processing**, v. 5, n. 2, p. 201–205, 1997. 29

CHUA, L. O.; ITOH, M.; KOCAREV, L.; ECKERT, K. Chaos synchronization in chua's circuit. **Journal of Circuits, Systems and Computers**, v. 3, n. 1, p. 93–108, 1993. 49, 50

COOK, J. The mean-field theory of a q-state neural network model. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 22, n. 12, p. 2057–, 1989. 58

DEHMER, M. Information processing in complex networks: graph entropy and information functionals. **Applied Mathematics and Computation**, v. 201, n. 1-2, p. 82 – 94, 2008. ISSN 0096-3003. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TY8-4R9Y75J-1/2/bba8221622c72cdfbc5e9c3af6c8b8cf>. 2, 3, 54

DESHAZER, D. J.; BREBAN, R.; OTT, E.; ROY, R. Detecting phase synchronization in chaotic laser array. **Phys. Rev. Lett.**, v. 87, p. 044101, 2001. 6

DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems**. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1992. 6

DüZEL, E.; PENNY, W. D.; BURGESS, N. Brain oscillations and memory. **Current Opinion in Neurobiology**, v. 20, n. 2, p. 143 – 149, 2010. ISSN 0959-4388. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VS3-4YFS5RK-1/2/69205837fa4788ae95c4b3276337f10d>. 53, 54

ENGEL, J.; PEDLEY, T. A. **Epilepsy**: a comprehensive textbook. 2nd. ed. Philadelphia: Copyright, 2008. 1, 53

FOLLMANN, R.; MACAU, E. E.; JR., E. R. Detecting phase synchronization between coupled non-phase-coherent oscillators. **Physics Letters A**, v. 373, n. 25, p. 2146 – 2153, 2009. ISSN 0375-9601. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVM-4W4TXW8-2/2/58967564a1aca62880c95d4fab2b2cfd>. 26, 29

FREEMAN, W. J. The physiology of perception. **Scientific American**, 264, n. 2, p. 78–85, Feb 1991. 53

HEBB, D. **The organization of behavior**. 1th. ed. [S.l.]: New York, 1949. 2, 53, 56

HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. **Proc. NatL Acad. Sci.**, v. 79, p. 2554–2558, April 1982. 2, 53, 55

HOPPENSTEADT, F.; IZHIKEVICH, E. Pattern recognition via synchronization in phase-locked loop neural networks. **IEEE Transactions on Neural Networks**, IEEE, v. 11, n. 3, p. 734–738, 2000. ISSN 1045-9227. 3

_____. Synchronization of laser oscillators, associative memory, and optical neurocomputing. **Physical Review Letters**, APS, v. 78, p. 4745–4748, 2000. 3

_____. Synchronization of mems resonators and mechanical neurocomputing. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, IEEE, v. 48, n. 2, p. 133–138, 2001. ISSN 1057-7122. 3

HRAMOV, A. E.; KORONOVSKII, A. A. Time scale synchronization of chaotic oscillators. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 206, n. 3-4, p. 252 – 264, 2005. ISSN 0167-2789. 29, 35

HUYGENS, C. **Horologium Oscillatorium**. Parisis: Apud F. Muguet, 1673. 5

ISHII, S.; FUKUMIZU, K.; WATANABE, S. A network of chaotic elements for information processing. **Neural Networks**, v. 9, n. 1, p. 25–40, 1996. 3, 54

KANDEL, E. R.; SCHWARTZ, J. H.; JESSELL, T. M. **Principles of neural science**. 4th. ed. New York: McGraw-Hill, 2000. 1

KENNEDY, M. P. Robust op amp realization of chua's circuit. **Frequenz**, v. 46, n. 3-4, p. 66–80, 1992. 49, 95, 96, 97

KO, H.; HOFER, S. B.; PICHLER, B.; BUCHANAN, K. A.; SJOSTROM, P. J.; MRSIC-FLOGEL, T. D. Functional specificity of local synaptic connections in neocortical networks. **Nature**, p. 1476–4687, April 2011. 53

KURAMOTO, Y. **Chemical oscillations, wave and turbulence**. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 57

KURTHS, J.; ROMANO, M. C.; THIEL, M.; OSIPOV, G. V.; IVANCHENKO, M. V.; KISS, I. Z.; HUDSON, J. L. Synchronization analysis of coupled noncoherent oscillators. **Nonlinear Dynamics**, v. 44, n. 1, p. 135–149, 2006. 29

LAKSHMIKANTAM, V.; MARTYNYUK, A. A. Lyapunov's direct method in stability theory (review). **International Applied Mechanics**, Springer New York, v. 28, p. 135–144, 1992. ISSN 1063-7095. 10.1007/BF00848201. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00848201>. 60

LIU, Z.; LAI, Y.-C.; MATIAS, M. A. Universal scaling of lyapunov exponents in coupled chaotic oscillators. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 67, n. 4, p. 045203, Apr 2003. 45

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of Atmospheric**, v. 20, p. 130–141, 1963. 6, 45

MADNICK, S. E. **Operating systems**. Tokyo,Japan: McGraw-Hill, 1974. 55

MAKARENKO, V.; LLINáS, R. Experimentally determined chaotic phase synchronization in a neuronal system. **PNAS**, v. 95, n. 26, p. 15747–15752, December 1998. 1

MARWAN, N.; ROMANO, M. C.; THIEL, M.; KURTHS, J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. **Physics Reports**, v. 438, n. 5-6, p. 237–329, January 2007. 25

MATSUMOTO, T. A chaotic attractor from chua's circuit. **IEEE Transactions on Circuit and Systems**, v. 31, n. 12, p. 1055–1058, December 1984. 49, 95

MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. **Bulletin of Mathematical Biophysics**, v. 5, p. 115–137, 1943. 2

MCELIECE, R.; POSNER, E.; RODEMICH, E.; VENKATESH, S. The capacity of the hopfield associative memory. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 33, n. 4, p. 461–482, Jul 1987. 54, 58

MIYANO, T.; TSUTSUI, T. Data synchronization in a network of coupled phase oscillators. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 98, n. 2, p. 024102, Jan 2007. 3

MUNAKATA, Y.; PFAFFLY, J. Hebbian learning and development. **Developmental Science**, Wiley Online Library, v. 7, n. 2, p. 141–148, 2004. ISSN 1467-7687. 56

NISHIKAWA, T.; HOPPENSTEADT, F. C.; LAI, Y.-C. Oscillatory associative memory network with perfect retrieval. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 197, n. 1-2, p. 134 – 148, 2004. ISSN 0167-2789. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVK-4D5KT0C-2/2/47cc43c7519918f8f59ee68567b431fa>. 62, 64

NISHIKAWA, T.; LAI, Y.-C.; HOPPENSTEADT, F. C. Capacity of oscillatory associative-memory networks with error-free retrieval. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 92, n. 10, p. 108101, Mar 2004. 3, 54, 58, 65

OSIPOV, G. V.; KURTHS, J.; ZHOU, C. **Synchronization in oscillatory networks**. Berlin: Spring, 2007. 1

PALUS, M. Detecting phase synchronization in noisy systems. **Phys. Lett. A**, v. 235, p. 341, 1997. 6

PARK, C.; WORTH, R. M.; RUBCHINSKY, L. L. Fine temporal structure of beta oscillations synchronization in subthalamic nucleus in parkinson's disease. **J Neurophysiol**, v. 103, n. 5, p. 2707–2716, 2010. 5

PARK, E.-H.; ZAKS, M. A.; KURTHS, J. Phase synchronization in the forced lorenz system. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 60, n. 6, p. 6627–6638, Dec 1999. 1, 45

PARLITZ, U.; JUNGE, L.; LAUTERBORN, W.; KOCAREV, L. Experimental observation of phase synchronization. **Phys. Rev. E**, v. 54, p. 2115, 1996. 6

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 8, p. 821–825, February 1990. 1, 5, 38

PEREIRA, T.; BAPTISTA, M.; KURTHS, J. Phase and average period of chaotic oscillators. **Physics Letters A**, v. 362, n. 2-3, p. 159 – 165, 2007. ISSN 0375-9601. 29

PEREIRA, T.; BAPTISTA, M. S.; KURTHS, J. General framework for phase synchronization through localized sets. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 75, n. 2, p. 026216, Feb 2007. 1, 2, 29

PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; KURTHS, J. **Synchronization**: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 1, 5, 13, 14, 56

PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; OSIPOV, G. V.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. **Physica D**, v. 104, p. 219, 1997. 1, 2, 29, 47

POINCARÉ, H. Sur le problème des trios corps et les equations de la dynamique. **Acta Mathmatica**, v. 13, p. 1, 1890. 24

QUIROGA, R. Q.; PANZERI, S. Extracting information from neuronal populations: information theory and decoding approaches. **Nature Reviews Neuroscience**, v. 10, n. 3, p. 173–185, 2009. 3

ROMANO, M. C.; THIEL, M.; KURTHS, J.; KISS, I. Z.; HUDSON, J. L. Detection of synchronization for non-phase-coherent and non-stationary data. **Europhys. Lett.**, v. 71, p. 237–329, 2005. 1, 2, 19, 24, 29

Rosa Jr., E.; OTT, E.; HESS, M. H. Transition to phase synchronization of chaos. **Phys. Rev. Lett**, v. 80, n. 8, p. 1642, Feb 1998. 5

ROSENBLUM, M.; FIRSOV, G.; KUUZ, R.; POMPE, B. Human postural control: force plate experiments and modelling. **Nonlinear Analysis of Physiological Data**, p. 283–306, 1998. 1, 6

ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 11, p. 1804–1807, March 1996. 1, 5, 29, 35

ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G. V.; KISS, I. Z.; HUDSON, J. L. Locking-based frequency measurement and synchronization of chaotic oscillators with complex dynamics. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, n. 26, p. 264102, Dec 2002. 1, 2, 19, 20, 21, 29

RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 57, n. 5, p. 397–398, 1976. 6, 35

SAUSENG, P.; KLIMESCH, W. What does phase information of oscillatory brain activity tell us about cognitive processes? **Neuroscience and Biobehavioral Reviews**, v. 32, n. 5, p. 1001 – 1013, 2008. ISSN 0149-7634. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6T0J-4S9P5RB-1/2/6f42cda93f58c9bfa0cd1bda5fff9f78>. 53

SCHÄFER, C.; ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. Heartbeat synchronized with ventilation. **Nature**, v. 392, p. 239, 1998. 1, 5, 6

SHERMAN, A.; RINZEL, J.; KEIZER, J. Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing. **Biophysical Journal**, v. 54, n. 3, p. 411–425, 1988. 1, 5

SINGER, W. Synchronization of cortical activity and its putative role in information processing and learning. **Annual Review of Physiology**, v. 55, n. 1, p. 349–374, 1993. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.ph.55.030193.002025>. 53

SKARDA, C. A.; FREEMAN, W. J. How brains make chaos in order to make sense of the world. **Behavioral and Brain Sciences**, Cambridge Univ Press, 40 West 20th Street, New York, NY, 10, n. 2, p. 161–173, JUN 1987. 53

STONE, E. F. Frequency entrainment of phase coherent attractor. **Phys. Lett. A**, v. 163, n. 5-6, p. 367–374, 1992. 29, 35, 36

STROGATZ, S. H.; STEWART, I. Coupled oscillators and biological synchronization. **Scientific American**, v. 269, n. 6, p. 68–74, December 1993. 1, 5, 6

TASS, P.; ROSENBLUM, M. G.; WEULE, J.; KURTHS, J.; PIKOVSKY, A. S.; VOLKMANN, J.; SCHNITZLER, A.; FREUND, H. J. Detection of $n : m$ phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography. **Physical Review Letters**, v. 81, n. 15, p. 3291–3294, October 1998. 1, 6

TICOS, C. M.; ROSA Jr., E.; PARDO, W. P.; WALKENSTEIN, J. A.; MONTI, M. Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge. **Phys. Rev. Lett.**, v. 85, p. 2929, 2000. 6, 47, 48

TORRE, V. A theory of synchronization of heart pace-maker cells. **Journal of Theoretical Biology**, v. 61, n. 1, p. 55 – 71, 1976. ISSN 0022-5193. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WMD-4F1SV94-1TV/2/336cf044229ad36497082397d964ef7c>. 1

VASSILIEVA, E.; PINTO, G.; BARROS, J. Acacio de; SUPPES, P. Learning pattern recognition through quasi-synchronization of phase oscillators. **Neural Networks, IEEE Transactions on**, v. 22, n. 1, p. 84 –95, jan. 2011. ISSN 1045-9227. 3

WARD, L. R. Synchronous neural oscillations and cognitive processes. **Trends in Cognitive Sciences**, v. 7, n. 12, p. 553–559, 2003. 3

WILLAMOWSKI, K. D. Irregular oscillations in a realistic abstract quadratic mass action system. **Z Naturforsch A**, v. 35, p. 317–318, 1980. 6

WINFREE, A. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators* 1. **Journal of theoretical biology**, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 15–42, 1967. ISSN 0022-5193. 57

XIU, C.; LIU, X.; TANG, Y.; ZHANG, Y. A novel network of chaotic elements and its application in multi-valued associative memory. **Physics Letters A**, v. 331, n. 3-4, p. 217 – 224, 2004. ISSN 0375-9601. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVM-4DB50G5-2/2/f5d8c509372b5e65de8b7ba1b250b93c>. 2, 3, 54

YALCINKAYA, T.; LAI, Y.-C. Phase characterization of chaos. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 79, n. 20, p. 3885–3888, Nov 1997. 1, 29

YAMADA, T.; FUJISAKA, H. Stability theory of synchronized motion in coipled-oscillator systems. **Progress of Theoretical Physics**, v. 72, n. 5, p. 885–894, 1984. 1, 5

ZHAO, L.; CUPERTINO, T. H.; JR., J. R. B. Chaotic synchronization in general network topology for scene segmentation. **Neurocomputing**, v. 71, n. 16-18, p. 3360 – 3366, 2008. ISSN 0925-2312. Advances in Neural Information Processing (ICONIP 2006) / Brazilian Symposium on Neural Networks (SBRN 2006). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V10-4T0MMGB-2/2/9dba65d007c0635dde6cf721086d82a5>. 2, 3, 54

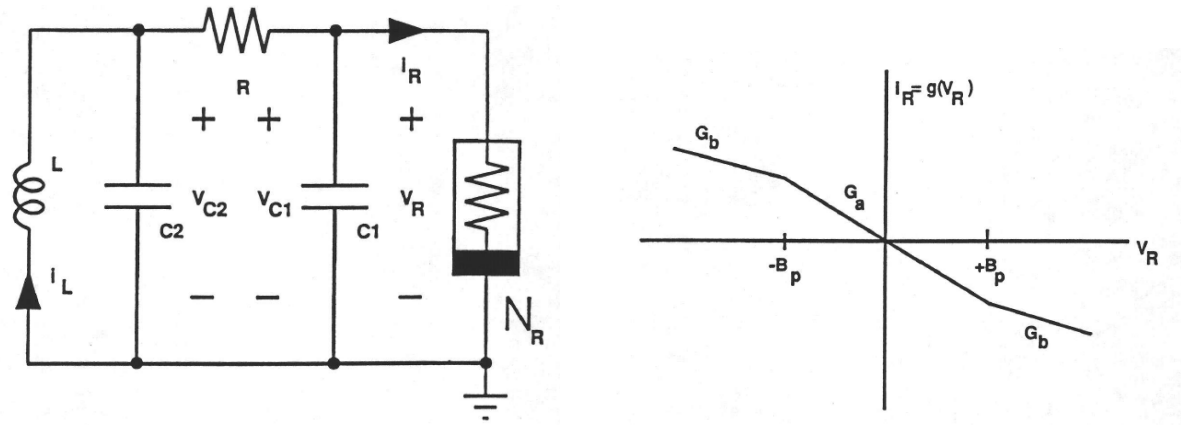
APÊNDICE A - CIRCUITO DE CHUA

O circuito de Chua mostrado na Figura A.1(a) é um circuito eletrônico que exibe uma variedade de bifurcações e caos (MATSUMOTO, 1984). Este circuito contém um indutor, dois capacitores, um resistor linear e um resistor não linear. As equações de estado do circuito são dadas por:

$$\begin{aligned} C1\frac{dV_{C1}}{dt} &= G(V_{C2} - V_{C1}) - g(V_{C1}) \\ C2\frac{dV_{C2}}{dt} &= G(V_{C1} - V_{C2}) + i_L \\ L\frac{di_L}{dt} &= -V_{C2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde $G = \frac{1}{R}$, V_{C1}, V_{C2} e i_L denotam a voltagem através do capacitor C_1, a voltagem através do capacitor C_2 e a corrente através do indutor linear L, respectivamente. A função $g(.)$ é linear por partes e definida por:

$$g(V_{C1}) = m_0 V_{C1} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)[|V_{C1} + B_p| - |V_{C1} - B_p|] \tag{A.2}$$



(a) O circuito de Chua consiste de um indutor linear L, um resistor linear R, dois capacitores lineares C_1 e C_2 e um resistor não linear N_R.

(b) Função linear por partes característica do resistor não linear do circuito de Chua. As partes externas possuem inclinações m_0, e a região interna possui inclinação m. Os dois pontos de quebra são $\pm B_p$.

Figura A.1 - Circuito de Chua e função linear por partes.
Fonte: Kennedy (1992, p.2).

A implementação prática do circuito de Chua pode ser realizada usando componentes eletrônicos padrões. Na Figura A.2 é ilustrado os esquema prático para a construção do circuito de Chua. Para implementação do circuito são utilizados um amplificador operacional (*op amps*) *TL082 dual JFET*, duas baterias (9V), seis resistores para implementar o resistor negativo, dois capacitores, um indutor, e um resistor variável. A lista de componentes é mostrada na Tabela A.1.

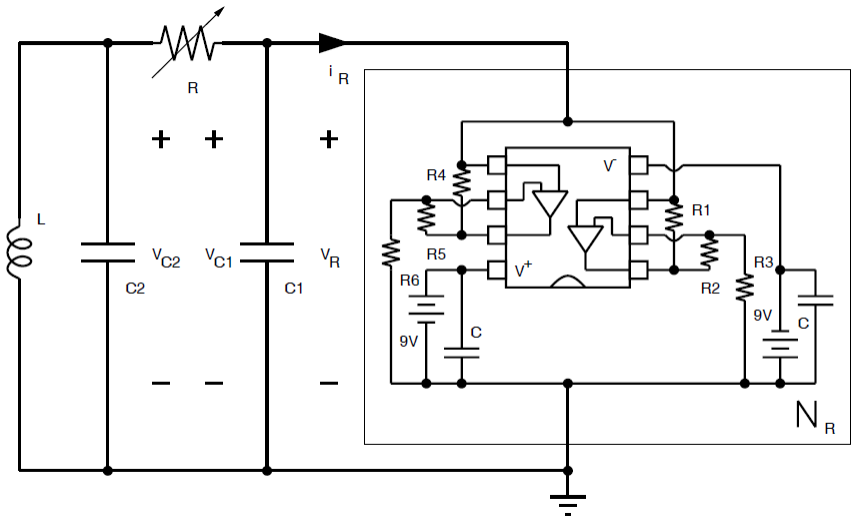


Figura A.2 - Esquema prático para implementação do circuito de Chua usando um amplificador operacional de oito pinos integrado no circuito.
Fonte: Kennedy (1992, p.13).

Elemento	Descrição	Valor	Tolerância
A_1	Amp. Op ($\frac{1}{2}$ AD712, TL082, ou equivalente)		
R_1	$\frac{1}{4}$ W do Resistor	220 Ω	±5%
R_2	$\frac{1}{4}$ W do Resistor	220 Ω	±5%
R_3	$\frac{1}{4}$ W do Resistor	2,2 kΩ	±5%
A_2	Amp. Op ($\frac{1}{2}$ AD712, TL082, ou equivalente		
R_4	$\frac{1}{4}$ W do Resistor	22 kΩ	±5%
R_5	$\frac{1}{4}$ W do Resistor	22 kΩ	±5%
R_6	$\frac{1}{4}$ W do Resistor	3,3 Ω	±5%
C_1	Capacitor	10 nF	±5%
R	Potenciômetro	2 kΩ	
C_2	Capacitor	100 nF	±5%
L	Indutor (tipo *TOKO* 10RB ou equivalente	18 mH	±10%

Tabela A.1 - Lista de Componentes

Fonte: Kennedy (1992, p.13).

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.