



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/05.10.22.40-TDI

COMPORTAMENTO DO SLOSHING EM AMBIENTE DE MICROGRAVIDADE

Delfim Pinto Carneiro Junior

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Ijar Milagre da Fonseca, aprovada em 26 de maio de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3NS5DM8>>

INPE
São José dos Campos
2017

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

E-mail: pubtc@inpe.br

COMISSÃO DO CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE (DE/DIR-544):

Presidente:

Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Membros:

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Dr. André de Castro Milone - Coordenação de Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dra. Carina de Barros Melo - Coordenação de Laboratórios Associados (CTE)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação de Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Hermann Johann Heinrich Kux - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Dr. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Silvia Castro Marcelino - Serviço de Informação e Documentação (SID)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Serviço de Informação e Documentação (SID)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Duca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Marcelo de Castro Pazos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

André Luis Dias Fernandes - Serviço de Informação e Documentação (SID)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/05.10.22.40-TDI

COMPORTAMENTO DO SLOSHING EM AMBIENTE DE MICROGRAVIDADE

Delfim Pinto Carneiro Junior

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Ijar Milagre da Fonseca, aprovada em 26 de maio de 2017.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34P/3NS5DM8>>

INPE
São José dos Campos
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Carneiro Junior, Delfim Pinto.

C215c Comportamento do sloshing em ambiente de microgravidade / Delfim Pinto Carneiro Junior. – São José dos Campos : INPE, 2017.

xx + 123 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/05.10.22.40-TDI)

Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2017.

Orientador : Dr. Ijar Milagre da Fonseca.

1. Sloshing. 2. Comportamento de líquido. 3. Microgravidade. 4. Navier-stokes. 5. Método SOR. I.Título.

CDU 629.7.018:629.7.031.8



Esta obra foi licenciada sob uma Licença [Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

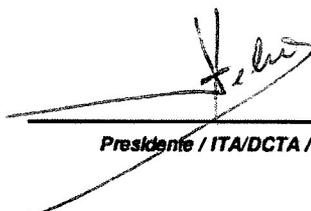
This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/).

Aluno (a): *Delfim Pinto Carneiro Junior*

"COMPORTAMENTO DO SLOSHING EM AMBIENTE DE MICROGRAVIDADE".

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de *Doutor(a)* em
*Engenharia e Tecnologia Especiais/Mecânica
Espacial e Controle*

Dr. Helio Kolti Kuga



Presidente / ITA/DCTA / SJC Campos - SP

Dr. Ijar Milagre da Fonseca



Orientador(a) / ITA/DCTA / SJC Campos - SP

Dr. Evandro Marconi Rocco



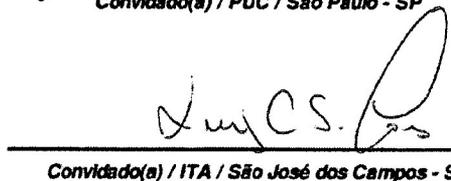
Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Mauricio Nacib Pontuschka



Convidado(a) / PUC / São Paulo - SP

Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes



Convidado(a) / ITA / São José dos Campos - SP

Este trabalho foi aprovado por:

maioria simples

unanimidade

São José dos Campos, 26 de maio de 2017

A meus pais, esposa, filhos e netos.

AGRADECIMENTOS

A meus pais, Delfim e Tereza, porque, sem eles eu não existiria e, principalmente, sem a presença deles eu não seria o que sou.

A meus irmãos, José Roberto, Sérgio, Marina, Eugênio, Antônio, Terezinha e Cecília, com os quais aprendi que viver em comunidade é a melhor forma de viver.

A minha esposa, Neusa, que, com sua família não menos numerosa que a minha, ampliou o universo de minha existência.

A meus filhos, Artur, Heitor, Débora e Sara, sem os quais eu seria menos feliz.

A meus netos, Lívia e Caio com sua mãe, Rosângela; Benjamin com seu pai, Ricardo; Valentina com sua mãe, Noelia; e com Tomás com seu pai, Sérgio, que me mostraram que sempre é possível ser mais feliz.

A minha neta Letícia que nos deixou assim que nasceu e nem por isso deixou de fazer parte de minha existência e de quem sempre me lembro com carinho.

A meus sobrinhos e sobrinhas que juntamente com meus filhos e netos mostram-me que é possível ter esperança no ser humano.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

Ao Prof. Dr. Ijar Milagre da Fonseca que além de orientador, função que exerceu com dedicação e sabedoria, tornou-se um amigo.

Aos professores do INPE, em especial Dr. Antonio Bertachini, Dr. Evandro Rocco, Dr. Hélio Kuga, Dr. Marcelo Lopes, Dr. Mário Ricci e Dr. Valdemir Carrara.

Ao Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes, professor do ITA e ao Dr. Maurício Nacib Pontuschka, professor da PUC-SP, que aceitaram participar como membros da banca examinadora.

Ao Prof. Dr. Daniel Couto Gatti, Diretor da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, que gentil e prontamente ofereceu os recursos computacionais desta conceituada instituição acadêmica para que fossem realizadas algumas das simulações.

À Valdirene, Secretária do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia

Espaciais - ETE, por estar sempre disponível a ajudar no que fosse necessário.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram neste processo, em especial aos amigos que se citados aqui formariam uma lista além do razoável e sem levar em conta que eu poderia cometer alguma injustiça ao esquecer-me de alguns.

RESUMO

Este trabalho trata do comportamento de líquidos contidos em contêineres parcialmente cheios, em ambiente de microgravidade. Inicialmente é feito um estudo comparativo entre os modelos equivalentes Massa-Mola e Pêndulo em ambiente com gravidade $g = 9,81m/s^2$, ambiente com baixa gravidade ($g = 0,07m/s^2$) e ambiente de microgravidade ($g \approx 0$) utilizando a formulação de Lagrange. A análise dos resultados obtidos mostra que os dois modelos são semelhantes. Em seguida, é apresentada uma abordagem para a solução do problema do *sloshing* associado com o movimento de líquidos dentro de contêineres utilizando-se as equações de Navier-Stokes. Nesta abordagem, a velocidade relativa ao fluxo do fluido é discretizada utilizando-se o método de diferenças finitas e a equação de Poisson para a pressão é resolvida pelo método SOR (*Successive Over Relaxation*). Os resultados das simulações são apresentados por meio de gráficos da velocidade da massa líquida e das velocidades angulares do sistema em função do tempo.

Palavras-chave: Sloshing. Comportamento de líquido. Microgravidade. Navier-Stokes. Método SOR.

SLOSHING BEHAVIOR IN A MICROGRAVITY ENVIROMENT

ABSTRACT

This work deals with fluid behavior in partially filled tanks, considering the environment of microgravity. Firstly it is carried out a comparative study between the Mass-Spring and Pendulum equivalent models in an environment with gravity $g = 9.81m/s^2$, environment with low gravity ($g = 0.07m/s^2$) and microgravity environment ($g \approx 0$) using the Lagrange formulation. The analysis of the obtained results shows that the two models are similar. Next, an approach is presented for solving the *sloshing* problem associated with the movement of liquids inside containers using the Navier-Stokes equations. In this approach, the fluid relative velocity with respect to the tank is discretized using the finite difference method and the Poisson equation for the pressure is solved by the SOR (Successive Over Relaxation) method. The results of the simulations are presented through of graphs of the fluid velocity and the angular velocities of the system in time function.

Keywords: Sloshing. Fluid behavior. Microgravity. Navier-Stokes. SOR method.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Esquema do modelo mecânico equivalente	12
2.2 Massa e constante elástica do <i>slosh</i> fundamental	13
2.3 Simulação Tridimensional de ruptura de barragem (<i>dambreak</i>).	16
2.4 Pressões de impacto oscilatório observado experimentalmente (esquerda) e por meio de simulações numéricas (direita)	17
2.5 O Satélite Sloshsat FLEVO: à esquerda exterior; à direita vista esque- mática interna.	27
3.1 modelo físico da estrutura	31
3.2 modelo Mecânico Equivalente para o modo 1 para o sistema massa-mola	33
3.3 Ilustração tri-dimensional do modelo mecânico equivalente	34
3.4 Modelo Mecânico Equivalente para o sistema de pêndulo planar corres- pondente ao modo 1	37
3.5 Massa e constante elástica do <i>slosh</i> fundamental	44
3.6 Comportamento do deslocamento da massa m_1 no tempo para $g =$ $9,81m/s^2$ de 0 a $100s$	46
3.7 Comportamento do deslocamento da massa m_1 no tempo para $g =$ $9,81m/s^2$ de 0 a $4.000s$	47
3.8 Decaimento das velocidades angulares transversais w_x e w_y no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a $100s$	48
3.9 Decaimento da velocidade angular transversal w_x no tempo para $g =$ $9,81m/s^2$ de 0 a $4.000s$	49
3.10 Decaimento da velocidade angular transversal w_y no tempo para $g =$ $9,81m/s^2$ de 0 a $4.000s$	50
3.11 Decaimento do ângulo de nutação, θ e H_z no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a $100s$	51
3.12 Decaimento do ângulo de nutação, θ e H_z no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a $4.000s$	52
3.13 Comportamento das componentes transversais da quantidade de movi- mento angular para $g = 9,81m/s^2$	53
3.14 Comportamento da massa m_1 no tempo decorrente de uma força impul- siva externa para $g = 9,81m/s^2$	55
3.15 Comportamento do deslocamento da massa m_1 na direção x no tempo para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a $500s$	57

3.16	Comportamento do deslocamento da massa m_1 na direção x no tempo para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 5.000s	58
3.17	Decaimento das velocidades angulares transversais w_x e w_y para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 500s	59
3.18	Decaimento da velocidade angular transversal w_x para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 5.000s	60
3.19	Decaimento da velocidade angular transversal w_y para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 5.000s	61
3.20	Decaimento do ângulo de nutação, θ e H_t no tempo para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 500s	62
3.21	Decaimento do ângulo de nutação, θ e H_t no tempo para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 5.000s	63
3.22	Comportamento das componentes transversais da quantidade de movimento angular para $g = 0,07m/s^2$	64
3.23	Comportamento da massa m_1 no tempo decorrente de uma força impulsiva externa para $g = 0,07m/s^2$	65
3.24	Posição da massa m_1 no tempo para pequenas velocidades angulares transversais em $g = 10^{-4}m/s^2$	67
3.25	Comportamento das Velocidades angulares transversais w_x e w_y em $g = 10^{-4}m/s^2$	67
3.26	Componentes transversais da quantidade de movimento angular em $g = 10^{-4}m/s^2$	68
3.27	Posição da massa m_1 no tempo para velocidades angulares transversais iguais a zero e $0 < \phi < 90^\circ$ em $g = 10^{-4}m/s^2$	69
3.28	Comportamento das Velocidades angulares transversais w_x e w_y para $0 < \phi < 90^\circ$ em $g = 10^{-4}m/s^2$	70
3.29	Componentes transversais da quantidade de movimento angular para $0 < \phi < 90^\circ$ em $g = 10^{-4}m/s^2$	71
3.30	Mudança da posição da massa m_1 após aplicação de uma força externa sobre o pêndulo para na configuração de microgravidade com $g = 10^{-4}m/s^2$	72
3.31	Mudança do comportamento de w_x e w_y após aplicação de força externa na configuração de microgravidade com $g = 10^{-4}m/s^2$	73
3.32	Componentes transversais da quantidade de movimento angular após aplicação de uma força externa na configuração de microgravidade com $g = 10^{-4}m/s^2$	73
3.33	Mudança da posição da massa m_1 após aplicação de uma força externa sobre o pêndulo na configuração com $g = 0,0421m/s^2$	75
4.1	Representação física do modelo proposto	77

4.2	Malha computacional tridimensional	83
4.3	Célula tridimensional deslocada	84
5.1	Velocidade inicial para todas as simulações	92
5.2	Detalhe da velocidade inicial na base para todas as simulações	93
5.3	Detalhe da velocidade inicial em $z = 0$ e na superfície para todas as simulações	94
5.4	Comportamento do líquido sem perturbações no instante $t = 3\Delta t$ ($g = 10^{-4}m/s^2$)	95
5.5	Comportamento do líquido sem perturbações no instante que atinge o modo estacionário ($g = 10^{-4}m/s^2$)	96
5.6	Comportamento do líquido sem perturbações no instante $t \approx 250s$ ($g = 10^{-4}m/s^2$)	97
5.7	Comportamento do líquido sem perturbações no instante final ($g = 10^{-4}m/s^2$)	98
5.8	Comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y sem perturbações para $g = 10^{-4}m/s^2$	99
5.9	Comportamento do líquido com $\omega_x = \omega_y = 0, 1rpm$ no instante $t = 3\Delta t$ ($g = 10^{-4}m/s^2$)	100
5.10	Comportamento do líquido $c/\omega_x = \omega_y = 0, 1rpm$ no instante que atinge o modo estacionário ($g = 10^{-4}m/s^2$)	101
5.11	Comportamento do líquido $c/\omega_x = \omega_y = 0, 1rpm$ no instante $t \approx 250s$ ($g = 10^{-4}m/s^2$)	102
5.12	Comportamento do líquido com $\omega_x = \omega_y = 0, 1rpm$ no instante final ($g = 10^{-4}m/s^2$)	103
5.13	Comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y para $g = 10^{-4}m/s^2$	104
5.14	Comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y para $g = 10^{-4}m/s^2$ e com uma aceleração com Δt de duração na direção X	105
5.15	Comportamento do líquido sem perturbações no instante $t = 3\Delta t$ ($g = 0, 07m/s^2$)	107
5.16	Comportamento do líquido sem perturbações no instante que atinge o modo estacionário ($g = 0, 07m/s^2$)	108
5.17	Comportamento do líquido sem perturbações no instante $t \approx 250s$ ($g = 0, 07m/s^2$)	109
5.18	Comportamento do líquido sem perturbações no instante final ($g = 0, 07m/s^2$)	110
5.19	Comportamento de ω_x e ω_y sem perturbações para $g = 0, 07m/s^2$	111
5.20	Comportamento do líquido com $\omega_x = \omega_y = 0, 1rpm$ no instante $t = 3\Delta t$ ($g = 0, 07m/s^2$)	112

5.21	Comportamento do líquido $c/\omega_x = \omega_y = 0,1rpm$ no instante que atinge o modo estacionário ($g = 0,07m/s^2$)	113
5.22	Comportamento do líquido com $\omega_x = \omega_y = 0,1rpm$ no instante $t \approx 250s$ ($g = 0,07m/s^2$)	114
5.23	Comportamento do líquido no instante final ($g = 0,07m/s^2$)	115
5.24	Comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y para $g = 0,07m/s^2$	116
5.25	Comportamento de ω_x e ω_y para $g = 0,07m/s^2$ e com uma aceleração com Δt de duração na direção X (à esquerda $a = 0,1m/s^2$ e à direita $a = 0,01m/s^2$)	117

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Parâmetros da estrutura e do recipiente com líquido	43
5.1 Parâmetros do Sistema envolvendo a estrutura e o recipiente com líquido	91

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Definição do Problema de <i>Sloshing</i>	4
1.2 Objetivos	5
1.3 Justificativas	5
1.4 Organização do trabalho	7
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
3 MODELOS MECÂNICOS EQUIVALENTES PARA REPRESENTAR O <i>SLOSHING</i>	31
3.1 Modelo Físico da Estrutura com Tanque	31
3.2 Equações do movimento rotacional	32
3.2.1 modelo Massa-mola	32
3.2.2 Modelo Pêndulo	37
3.3 Simulações	43
3.3.1 Ambiente de gravidade normal	44
3.3.1.1 <i>Sloshing</i> atuando como amortecedor de nutação	44
3.3.1.2 Massa líquida em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa	54
3.3.1.3 Comentários sobre os modelos em ambiente de gravidade normal	54
3.3.2 Ambiente de baixa gravidade ($g = 0,07m/s^2$)	56
3.3.2.1 <i>Sloshing</i> atuando como amortecedor de nutação	56
3.3.2.2 Massa líquida em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa	65
3.3.2.3 Comentários sobre os modelos em ambiente de baixa gravidade ($g = 0,07m/s^2$)	66
3.3.3 Ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$)	66
3.3.3.1 Massa líquida com pequenas velocidades angulares trasversais	66
3.3.3.2 Massa líquida com $0 < \phi < 90^\circ$ e velocidades angulares transversais iguais a zero	68
3.3.3.3 Massa líquida referente ao modelo mecânico equivalente do Pêndulo em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa	72

3.3.3.4	Comentários sobre o modelo em ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$)	74
3.3.4	Análise dos resultados	74
4	PROBLEMA DO <i>SLOSHING</i> MODELADO PELAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	77
4.1	Equações do movimento	77
4.2	Equações de Navier-Stokes	79
4.3	Equações modificadas de Euler	79
4.4	Solução Numérica	83
5	SIMULAÇÕES E ANÁLISE DE RESULTADOS	91
5.1	Simulação em ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$)	91
5.1.1	Comportamento do líquido sem perturbações	92
5.1.2	Comportamento do líquido com $w_x = 0, 1rpm$, $w_y = 0, 1rpm$	99
5.1.3	Comportamento do líquido com perturbações	104
5.2	Simulação em ambiente de baixa gravidade ($g = 0,07m/s^2$)	106
5.2.1	Comportamento do líquido sem perturbações para ambiente de baixa gravidade	106
5.2.2	Comportamento do líquido com $w_x = 0, 1rpm$, $w_y = 0, 1rpm$ em ambiente de baixa gravidade	111
5.2.3	Comportamento do líquido com perturbações	116
5.2.4	Análise dos resultados	118
6	CONCLUSÕES	119
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121

1 INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico dos líquidos em recipientes em movimento sob ação de força e/ou torque ou em regime estacionário tem sido motivo de estudo de pesquisadores em diversas áreas como, geofísica, sismologia, engenharias dentre outras. Conforme Ibrahim (2005) em seu livro "*Liquid sloshing dynamics, theory and applications*", o problema de *sloshing* em recipientes móveis ou estáticos é uma grande preocupação da indústria aeroespacial e civil, para engenheiros nucleares, físicos, projetistas de caminhões tanques e navios petroleiros, e para matemáticos. Estudos dos efeitos do *sloshing* em grandes represas, tanques de petróleo e torres de água têm sido feitos por engenheiros civis e sismólogos. Reservatórios de líquidos no topo de edifícios de muitos andares com o objetivo de controlar oscilações devidas a terremotos são exemplos de aplicação destes estudos.

Desde os anos 60 a dinâmica do movimento de líquido tem preocupado os engenheiros aeroespaciais que estudam a influência do *sloshing* em veículos lançadores de satélites e em espaçonaves. A teoria moderna da dinâmica não linear tem incentivado novos estudos e descobertas de fenômenos não lineares complexos como, *sloshing* rotativo, ondas de Faraday, interação não linear de *sloshing* com estruturas elásticas (FSI - Fluid Structure Interaction - Interação de fluido com a Estrutura), efeitos de ressonância interna, dinâmica de *sloshing* estocásticos, impacto da hidrodinâmica do *sloshing* e *g-jitter* em ambiente de microgravidade. A estabilidade dinâmica de navios tanque de carga de gás natural liquefeito e petroleiros e o impacto hidrodinâmico de carga líquida são problemas de atual interesse para os projetistas de sistemas. Em cidades populosas, caminhões tanque que transportam gasolina e outros líquidos inflamáveis derivados do petróleo estão propensos a acidentes devido ao efeito *sloshing*.

A interação de fluido com estruturas (FSI) tem sido nos últimos anos objeto de estudo de diversos pesquisadores. Dentre eles, Peskin (1977) e Peskin (2002) que juntamente com sua equipe são considerados por Roy et al. (2013) pioneiros no assunto. Eles propõem uma abordagem chamada de método da fronteira imersa (*Immersed Boundary Method* - IBM), onde as equações que governam o movimento do fluido contêm termos referentes à força exercida pela estrutura que excita o líquido e constitui o que se chama FSI. As equações são integradas por meio do método de diferenças finitas (FD - *Finite Difference*) e os termos da força da estrutura são computados por meio da modelagem da estrutura como uma rede de fibras elásticas. Turek et al. (2010) apresentam resultados comparativos para os diferentes métodos de solução

para problemas de interação entre fluido e estrutura. Hou et al. (2012) reveem métodos numéricos representativos baseados em malhas conformes e não-conformes que estão disponíveis atualmente para resolver problemas de interação fluido-estrutura.

Todos os pesquisadores concordam que os problemas relacionados com o comportamento dos líquidos, em especial o *sloshing* em suas várias formas, bem como sua interação dinâmica com as estruturas que os contém ou neles imersas, são de difícil resolução analítica, dada a não linearidade nas condições de contorno na dinâmica da superfície livre. Outro fato que impõe dificuldade é o desconhecimento, a priori, da posição em que está a superfície. A superfície livre do líquido, em recipientes parcialmente cheios podem experimentar uma ampla gama de movimentos, tais como planar, não-planar, movimento de rotação, movimento quasi periódico, caótico e de desintegração.

Na área espacial, este estudo tem particular importância devido a sua influência no comportamento dos veículos espaciais, tanto para foguetes quanto para satélites em órbita da Terra. A presença de líquido na estrutura das espaçonaves requer cuidadosa análise uma vez que seu movimento dissipa energia interna no veículo além de alterar as propriedades de inércia e simetria da espaçonave. Em alguns casos podem ocorrer problemas de estabilidade nas espaçonaves, associados ao *sloshing*. Como exemplos Veldman (2006) cita que o primeiro pouso lunar da missão Apollo 11 quando, pouco antes do pouso, o *sloshing* do combustível restante provocou um movimento oscilatório do Módulo Lunar (de cerca de 2-3 graus), prejudicando seriamente a segurança da manobra de aterrissagem. Cita ainda que outro exemplo bem documentado, a missão NEAR (*Near Earth Asteroid Rendezvous*). Durante a correção final da missão de rendezvous com o asteroide Eros, a espaçonave experimentou um movimento inesperado e entrou para o modo operacional de segurança. O centro de controle de Terra conseguiu recuperar a missão mas a custo de 13 meses de atraso. O *sloshing* do combustível foi considerado como a provável causa do incidente.

Em fevereiro de 2005 foi lançado o mini-satélite Sloshsat FLEVO construído pela Dutch National Aerospace Laboratory NLR com o objetivo de realizar diversos experimentos para estudar o *sloshing* de líquido embarcado em ambiente de microgravidade. A massa seca deste satélite é 95 kg e seu interior contém um tanque de fluido de forma cilíndrica com extremidades semi-esférica, com um volume de 86,9 litros. Este tanque foi parcialmente preenchido com 33,5 kg de água destilada, o que permitiu o movimento de *sloshing* durante os experimentos. Estes experimentos são

descritos por Veldman (2006) e Luppés et al. (2006).

Tem-se que destacar também que, por outro lado, o fenômeno de dissipação interna de energia associada ao *sloshing* pode ser utilizado para efeitos de estabilização passiva dos veículos estabilizados por rotação, como é o caso dos amortecedores de nutação. A aprendizagem e uso dos amortecedores de nutação líquido-viscosos decorreram do acidente com o satélite ATS-5 (*Application Technological Satellite*) - Satélite de Aplicação Tecnológica, cuja missão se perdeu por causa da dissipação interna de energia provocada pelo sistema de refrigeração (*heat pipe*). O satélite possuía um sistema de controle de nutação ativo para evitar deriva do eixo de spin uma vez que, na fase transitória, o satélite tinha em sua estrutura um motor de apogeu que seria descartado após as manobras orbitais. A presença desse motor fazia com que, durante a queima do combustível, o eixo de rotação fosse o de menor momento de inércia. Esse eixo é sabidamente um eixo instável na presença de dissipação interna de energia (neste caso, causada pela queima do combustível), condição prevista no projeto do subsistema de controle. Porém, como não foi prevista no projeto a dissipação interna de energia provocada pelo seu subsistema de dissipação de calor (*heat pipe*), o subsistema de controle não conseguiu manter a atitude especificada para esta fase. Nestas circunstâncias, o subsistema de dissipação de calor funcionou como um excelente amortecedor de nutação, levando o satélite à configuração de *flat spin*, ou seja, o eixo de *spin* desviou buscando o eixo estável de maior momento de inércia. Quando o motor de apogeu foi ejetado, o eixo antes instável, tornou-se o eixo de maior momento de inércia. Novamente a dissipação interna de energia, causada pelo *heat pipe*, levou o eixo de *spin* a migrar para o eixo de maior momento de inércia. Porém o eixo de *spin* orientou-se na direção do zênite e não havia mais combustível para nova manobra para a reorientação correta do eixo de *spin*. Perdeu-se, portanto, a missão (KAPLAN, 1976).

No caso do ATS o subsistema de controle projetado para o satélite não conseguiu efetuar o controle na presença da dissipação causada pelo *heat pipe*. Na verdade, desde 1958, com a perda do Explorer-I (primeiro satélite americano) foi constatado que na presença do fenômeno de dissipação interna de energia o eixo de menor momento de inércia se torna instável. A lição aprendida com o incidente do Explorer I foi a de usar sempre o eixo de maior momento de inércia para a estabilização passiva por rotação. Eventuais movimentos de nutação causados por perturbação são corrigidos automaticamente pela dissipação interna de energia quando se usa estabilização passiva por *spin*. Caso se use o eixo de menor momento de inércia a dissipação de energia faz com que o veículo espacial entre em *flat spin*, ou seja, o

eixo de rotação se transfere para o maior eixo de inércia. Poder-se-ia então pensar em usar a dissipação interna de energia para manobrar o eixo de *spin* do menor para o maior momento de inércia. Mas há um risco em tal manobra pois a estabilidade não tem direção preferencial, ou seja, a estabilidade da rotação pode ser tanto na direção do Zênite quanto na direção do Nadir. A presença de antenas de comunicação pode restringir o apontamento na direção da Terra (Nadir) e o satélite se estabilizar com a antena para o Zênite, como foi o caso do ATS-5. Recomenda-se que todos os satélites estabilizados por rotação incluam amortecedores de nutação. Os amortecedores de nutação líquido-viscosos são muito eficientes nesses casos.

Os satélites brasileiros SCDs são estabilizados por rotação em torno do eixo de maior momento de inércia e contêm eficientes amortecedores de nutação líquido-viscosos em sua estrutura. Os satélites científicos da família SACI também contêm amortecedores de nutação líquido-viscosos.

1.1 Definição do Problema de *Sloshing*

O problema é definido como uma nave espacial contendo líquido com superfície livre em sua estrutura. O movimento de *sloshing* é então considerado quando de sua excitação causadas pelas ações de controle de órbita e atitude. Portanto trata-se de um problema mais geral de CSI (*Control structure Interaction* - interação de estrutura e controle), quando se considerando o fluido/tanque como parte da estrutura da espaçonave e, mais especificamente, um problema de CFI (*Control Fluid Interaction* - Interação de fluido com controle), uma vez que o controle excita o fluido e o movimento do fluido, por sua vez pode sobrecarregar o sistema de controle. O modelo matemático associado ao *sloshing* é não linear e considera o acoplamento do movimento do fluido (*sloshing*) com o movimento da espaçonave como um todo. O sistema de equações é híbrido no sentido que se tem equações diferenciais parciais e equações diferenciais ordinárias acopladas. O movimento do fluido é descrito pelas equações de Navier-Stokes. Os propulsores usados para controle de órbita e mesmo controle de atitude excitam o *sloshing* que por sua vez afeta o movimento de atitude. Essa situação pode ser definida como interação do sistema de controle com o movimento do fluido, ou seja Interação de controle e fluido (CFI - *Control Fluid Interaction*). Não existe solução analítica para o problema. Nesta tese o programa desenvolvido, inclui a habilidade para solução numérica de sistemas híbridos de equações diferenciais e utiliza o pacote MatLab para a solução numérica das equações de Navier-Stokes.

1.2 Objetivos

O objetivo geral da tese é apresentar uma solução numérica para o comportamento do *sloshing* para diferentes condições baseada nas equações de Navier-Stokes e compará-la às soluções obtidas por meio dos modelos equivalentes Massa-Mola e Pêndulo. Para atingir esse objetivo definem-se os seguintes objetivos específicos:

- a) Realizar simulações utilizando os modelos mecânicos equivalentes Massa-Mola e Pêndulo, comparando-os entre si, a fim de se verificar similaridades;
- b) Modelar matematicamente as equações de Navier-Stokes utilizando o método de diferenças finitas para a discretização da quantidade de movimento da massa líquida e solucionar a equação de Poisson para a pressão utilizando o método SOR (*Successive Over Relaxation*); e
- c) Realizar simulações com o modelo matemático obtido e compará-las com as dos modelos mecânicos equivalentes.

1.3 Justificativas

O *sloshing* continua sendo uma preocupação para o desempenho de sistemas de controle de órbita e atitude. Embora o *sloshing* possa funcionar como um amortecedor passivo de nutação, trata-se de uma aplicação restrita à estabilização por rotação. Em caso de estabilização em três eixos o *sloshing* pode representar um risco para a missão caso o subsistema de controle não seja robusto o suficiente para controlar os efeitos do acoplamento entre o *sloshing* e o movimento de atitude. Acrescenta-se a este fato que as ações de controle podem excitar o movimento de *sloshing* que por sua vez afeta a atitude, caindo-se no problema de interação do controle com o fluido (*Control Fluid Interaction - CFI*). Portanto a análise dinâmica de sistemas que contenham fluido com superfície livre é de fundamental importância e pode servir de orientação para o projeto de sistema de controles robustos e com melhor desempenho. Os testes em laboratórios são muito importantes para a validação de leis e algoritmos de controle, entretanto, tais testes são de difícil implementação uma vez que não se consegue em terra ambiente de microgravidade suficientemente longo para execução dos testes. Somente hoje com a Estação Espacial Internacional tais testes podem de fato ser realizados.

A evolução do programa para as diversas aplicações espaciais resultou em vários pacotes computacionais voltados para a dinâmica e controle de órbita e atitude.

Entretanto a evolução do programa para dinâmica dos fluidos e para estrutura tomou rumos diferentes e é necessário integrar o programa desenvolvido para dinâmica de órbita e atitude com os pacotes computacionais de estrutura e fluido. As diferenças são inclusive em linguagem de programação. Para superar dificuldades inerentes à integração de programa, técnicas de aproximação, utilizando-se de procedimentos de discretização, são amplamente utilizadas na literatura. São muitos os trabalhos acadêmicos que apresentam resultados de controle de atitude, por exemplo, para sistemas modelados via método dos modos admitidos. Tal método e outros discretizam o sistema de equações do movimento para representar a dinâmica do sistema via equações diferenciais ordinárias. Os modelos mecânicos equivalentes fazem parte da gama de métodos para se obter um sistema descrito por equações diferenciais ordinárias. Os métodos de discretização para aplicações de controle de atitude e órbita passam por otimização do posicionamento de sensores e atuadores e são discutíveis em termos de aplicações práticas. Por exemplo, se consideram apenas os primeiros modos de vibração em um processo de discretização, o que ocorre com os modos de ordem mais alta? Quantos modos são necessários para se ter um modelo consistente/eficiente? Onde posicionar e quantos sensores e atuadores são necessários? Esses são problemas ainda em aberto, foco de pesquisa acadêmica e pouco ou nunca implementados na prática. Neste trabalho utiliza-se as técnicas de discretização via modelos mecânicos equivalentes para analisar o comportamento do *sloshing* na presença e ausência de gravidade. Notar que tudo se passa na área de modelagem matemática e simulação computacional de equações diferenciais ordinárias. Após a análise e discussão desses casos, o modelo descrito pelas equações de Navier-Stokes é então obtido e implementado com o sistema de equações híbrido (ordinárias e parciais) para ser comparados com os modelos mecânicos equivalentes.

No cenário real as espaçonaves possuem uma dinâmica acoplada e, sabe-se hoje, que as frequências de controle e aquelas do movimento de *sloshing* precisam ser mantidas amplamente separadas para evitar problemas de ressonância e a consequente deterioração do desempenho do controle ou mesmo perda completa de missões espaciais. Para tornar o problema mais complicado as estações espaciais são caracterizadas por grandes estruturas espaciais flexíveis sob o ponto de vista elástico. Neste tipo de espaçonave as frequências de controle, do movimento do fluido e do movimento elástico têm que ser mantidas longe uma da outra devido ao risco de ocorrência de ressonância. Neste cenário as análises requerem uso das novas tecnologias que transformaram os micro computadores em supercomputadores com programas de recursos gráficos para a simulação de sistemas dinâmicos muito mais complexos. Por outro lado, dados de testes em órbita que devem vir da Estação Espacial Inter-

nacional e aqueles do SLOSHSAT permitirão aprimorar modelos implementados em programas existentes, melhorando os resultados da análise dinâmica.

1.4 Organização do trabalho

No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica de trabalhos que estão direta ou indiretamente relacionados com o assunto em questão. No Capítulo 3, é apresentado um estudo comparativo entre os sistemas aproximados Massa-Mola e Pêndulo (modelos mecânicos equivalentes) que servirão para complementar os resultados obtidos no Capítulo 4 onde são apresentados o desenvolvimento da formulação para o modelo proposto baseado nas equações de Navier-Stokes, bem como a abordagem utilizada na solução numérica das equações obtidas. O Capítulo 5 é dedicado à descrição das simulações executadas e análise de resultados. E finalmente as conclusões bem como sugestões para novos trabalhos são apresentadas no Capítulo 6.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como já citado, o comportamento dinâmico dos líquidos em recipientes em movimento tem sido motivo de estudo de pesquisadores em diversas áreas do conhecimento. Na área aeroespacial este estudo começa a ter relevância na década de 60, quando surgem as primeiras publicações com experimentos com dispositivos que procuram minimizar o efeito do *sloshing* em veículos espaciais, porém, devido a complexidade ou até talvez a impossibilidade de se tratar o problema analiticamente e a dificuldade de se conceber um modelo que representasse o fenômeno de forma apropriada, somente recentemente tem surgido trabalhos que prometem uma abordagem mais adequada. Assim, apresentamos a seguir, em ordem cronológica, um resumo dos trabalhos encontrados na literatura especializada que julgamos ser os mais importantes e que de uma maneira ou de outra estão relacionados com o objeto da tese.

Stofan e Pavli (1962) apresentam os resultados obtidos em experimento realizado pelo NASA *Lewis Research Center* para avaliar a eficácia de amortecimento de *sloshing* para um sistema com fluido contido em bolsa de expulsão positiva (*positive-expulsion bags*) e diafragmas em tanques esféricos que são recursos utilizados para reduzir os efeitos do *sloshing* na dinâmica do veículo espacial. No experimento foram utilizadas bolsas de expulsão positiva e diafragmas de borracha butílica, com espessura variando de 0,010 a 0,020 de polegada em um tanque esférico de 9,5 polegadas de diâmetro modelados em um bloco de lucite e montado em rolamentos livre para oscilar em uma plataforma horizontal. O movimento oscilatório do bloco é fornecido por um motor elétrico que pode impor amplitudes de 0 a 0,100 de polegada e frequências de 0 a 5 Hz. A maior parte dos testes foi feita com uma taxa de profundidade (profundidade do líquido/diâmetro do tanque) de 0,50, a fim de se obter forças de *sloshing* máximas para uma dada amplitude de excitação. Também foram feitos teste com taxa de profundidade de 0,25 de polegadas. As forças máximas de *sloshing*, usando-se as configurações com bolsa e diafragma, ocorreram na frequência natural do primeiro modo e foram aproximadamente de 50% a 60% menores do que as forças com o líquido sem restrição, ou seja, líquido em tanques sem bolsas e diafragmas. Dentro do intervalo das variáveis examinadas, a eficácia de supressão do *sloshing* das configurações com bolsa e diafragma foi essencialmente similar e pareceu ter sido afetada somente pela espessura da bolsa ou diafragma. Quando a espessura do material foi aumentada, as forças de *sloshing* tenderam a diminuir, e a frequência natural do primeiro modo tendeu a aumentar. O experimento mostrou também que o aumento da espessura da bolsa ou diafragma aumenta a taxa de

amortecimento.

Stofan e Sumner (1963) apresentam os resultados de uma investigação experimental para avaliar a eficácia do amortecimento de *sloshing* das bolsas de expulsão positiva (*positive-expulsion bags*) e diafragmas em tanques esféricos de 9,5 a 32 polegadas de diâmetro. Os tanques são montados em uma plataforma de teste livre para oscilar no plano horizontal. Um sistema de pistão hidráulico fornece a força de controle. As amplitudes e frequências podem variar continuamente de 0 a 1 polegada e de 0 a 20 Hz, respectivamente. É usada uma forma de onda senoidal para a excitação. É usado como líquido o tetrabrometo de acetileno, com densidade específica de 2,96 para aumentar o potencial de precisão dos dados. Bolsas e diafragmas de borracha butílica, com espessura variando de 0,010 a 0,040 de polegada são instaladas no interior dos tanques esféricos. Para cada bolsa e diafragma, o tanque é submetido a um movimento oscilatório com amplitude e frequência pré-selecionadas, o movimento é então instantaneamente interrompido, e as forças horizontais de *sloshing* residuais são registradas. Os resultados registrados mostram que amplitude varia de 0 a 0,60 de polegada e a frequência varia desde zero passando pelas frequências dos dois primeiros modos do líquido contido no tanque para *sloshing* sem restrição. Todos os testes foram conduzidos com uma taxa de profundidade de líquido de 0,50.

Seguem abaixo alguns dos resultados obtidos:

- a) a força parametrizada, $F_s/\rho g d^3$, onde F_s é a força de sloshing parametrizada, ρ a densidade do líquido, g a aceleração da gravidade e d o diâmetro do tanque, aumenta quando a frequência de oscilação parametrizada, $\alpha/\sqrt{R/g}$, onde α é a frequência, R o raio do tanque e g a aceleração da gravidade, aumenta para um valor de pico próximo ao do primeiro modo para *sloshing* não restrito, obtidos em tanques sem bolsas e diafragmas, e então decresce com o aumento da frequência. Para os valores maiores de amplitude de excitação, existe uma pequena diferença nos valores de pico da força parametrizada entre os tanques de 20,5 e 32 polegadas de diâmetro;
- b) a taxa de amortecimento é essencialmente independente da amplitude de excitação para o tanque de 32 polegadas de diâmetro. A taxa de amortecimento decresce quando o diâmetro do tanque cresce;
- c) quando a espessura do diafragma cresce, a força de *sloshing* parametrizada decresce e as forças de pico ocorrem no maior valor da frequência de

oscilação parametrizada. Existe uma pequena diferença na magnitude da força de *sloshing* parametrizada entre os tanques de 20,5 e 32 polegadas de diâmetro; e

- d) quando a espessura do diafragma aumenta, a taxa de amortecimento aumenta. A frequência de oscilação parametrizada essencialmente não afeta a taxa de amortecimento para o tanque de 20,5 polegadas de diâmetro. Há algum efeito da frequência de oscilação na taxa de amortecimento para o tanque de 32 polegadas de diâmetro.

(SILVERMAN; ABRAMSON, 1966) apresentam um estudo referente ao comportamento de *sloshing* de líquidos em contêineres rígidos de diversos formatos. Eles começam com uma introdução teórica assumindo algumas simplificações, uma vez que uma solução "exata" para o problema de oscilações de fluidos em contêineres em movimento é inexistente. Tais simplificações são:

- a) tanque rígido;
- b) fluido não viscoso;
- c) fluido incompressível;
- d) pequenos deslocamentos, velocidades, e inclinações da superfície livre do líquido;
- e) campo de fluxo não-rotacional;
- f) fluido homogêneo; e
- g) sem escoamento ou fonte, ou seja, volume do líquido constante.

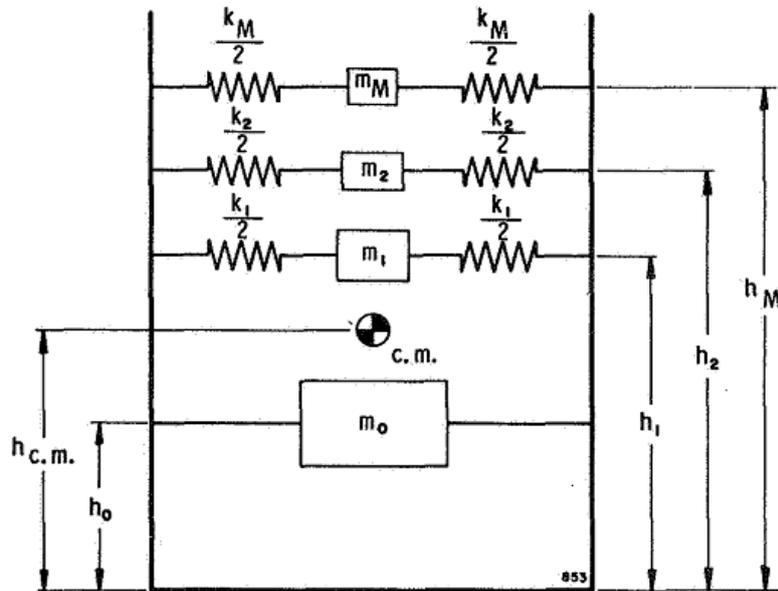
Na sequência, Silverman e Abramson apresentam um estudo para tanques retangulares. A partir da escolha apropriada de um sistema de referências ortogonal xyz , eles analisam o efeito de um movimento horizontal ao longo do eixo x , "*pitching*" sobre o eixo y e "*yawing*" sobre o eixo z . Continuam com o estudo de tanques cilíndricos circulares, dando a este caso maior importância devido a sua relação com a maioria dos veículos lançadores. Apresentam ainda, estudos sobre tanques esféricos, toroidais e esferoidais oblatos.

O trabalho de Dodge e Garza (1967) apesar de antigo tem sido citado por centenas de trabalhos e continua sendo citado. Nele, os autores apresentam análises

e comparações experimentais para *sloshing* de líquidos em um tanque cilíndrico rígido sob condições de acelerações axiais moderadamente pequenas. Os resultados analíticos são postos na forma de um modelo mecânico equivalente, mostrando que a massa em *sloshing* e a frequência natural do primeiro modo, para um líquido que tenha um ângulo de contato de zero grau em relação às paredes do tanque, são menores que para as condições de alta gravidade onde o *sloshing* é muito importante para o caso de foguetes lançadores.

O modelo proposto por Dodge e Garza (1967) para microgravidade é mostrado na Figura 2.1 e é similar ao modelo para alta gravidade. Inclui um oscilador massa-mola para cada um dos modos do *sloshing*. Os parâmetros do modelo (m_0, m_n, h_0, h_n, k_n) são calculados para igualarem-se as forças e momentos reais às forças e momentos causados pelo modelo para uma mesma excitação.

Figura 2.1 - Esquema do modelo mecânico equivalente



Fonte: Dodge e Garza (1967)

Ao final os autores apresentam as seguintes equações:

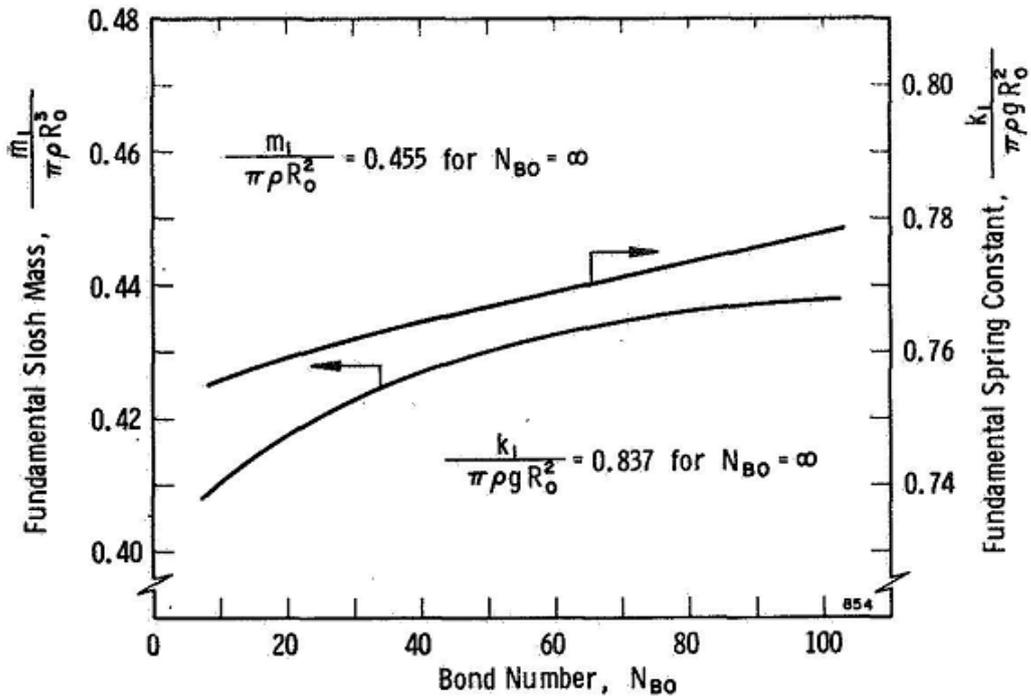
$$\frac{k_n}{m_n} = \Omega_n^2 \frac{g}{R_0} \quad (2.1)$$

$$m_0 + \sum_{n=1}^M m_n = m_T = \pi \rho R_0^3 (h/R_0 + 0,264\beta) \quad (2.2)$$

onde h é a altura do líquido.

De acordo com estas equações, pode-se calcular m_n e k_n para cada um dos enésimos modos de *sloshing* e onda de superfície. A Figura 2.2 mostra a massa do *sloshing* fundamental m_1 e a constante elástica fundamental k_1 , em função do número de Bond.

Figura 2.2 - Massa e constante elástica do *slosh* fundamental



Fonte: Dodge e Garza (1967)

Os dados experimentais, obtidos para tanques de diversos diâmetros pequenos

e três líquidos diferentes, são comparados aos previstos pelo modelo matemático. Na maioria dos casos, foi encontrada uma boa correlação para as forças de *sloshing* e frequências naturais em função do número de Bond.

Conforme [Peskin \(1977\)](#) o padrão de fluxo de sangue no coração está intimamente relacionado com o desempenho do coração. Neste artigo [Peskin \(1977\)](#) mostra uma expansão e aperfeiçoamento do método numérico, relatado por ele em um trabalho anterior, para resolver as equações de Navier-Stokes na presença de contornos móveis imersos (membranas da válvula de coração), que se movem com o fluido e exercem forças sobre o fluido. Ele generaliza a representação de contorno de modo a incluir não apenas as membranas das válvulas do coração, mas também a parede muscular do coração. Ele utiliza o método de Newton para resolver as equações que implicitamente definem as forças de contorno, e explora a topologia fixa da representação de contorno para gerar uma fatoração de Cholesky eficaz da matriz em questão. O autor introduz uma representação numérica melhorada da função- δ com propriedades notáveis que levam a aproximar a invariância por translação na interação entre os pontos de contorno. Finalmente, o autor conserva o método de diferenças finitas de Chorin para as equações de Navier-Stokes, incorporando o método solucionador de Laplace rápido. A possibilidade da utilização do solucionador de Laplace rápido com contornos móveis de geometria complicada surge por causa da sua representação do contorno como um campo de forças definidas na malha retangular do fluido.

[Nichols et al. \(1980\)](#) apresenta um simples, mas eficaz, programa de computador para a solução de fluxo de fluido transiente bidimensional com limites livres. O programa SOLA-VOF (*SOLution Algorithm - Volume Of Fluid - SOLA-VOF*), que se baseia no conceito de um volume parcial de fluido (VOF), é mais flexível e mais eficiente do que outros métodos para o tratamento de limites arbitrários livres. SOLA-VOF tem uma variedade de opções do usuário que oferecem recursos para uma ampla gama de aplicações. Seu modo básico de operação é para cálculos de fluido único com múltiplas superfícies livres. No entanto, SOLA-VOF também pode ser usado para os cálculos que envolvem dois fluidos separados por uma interface fina. Em qualquer caso, os líquidos podem ser tratados como incompressível ou como tendo compressibilidade limitada. Forças de tensão superficial com adesão de parede são permitidas em ambos os casos. Obstáculos internos podem ser definidos para bloquear qualquer combinação desejada de células da malha, que é composta de células retangulares de tamanhos variáveis. Conforme [Nichols et al. \(1980\)](#), SOLA-VOF é um programa fácil de usar. Suas partes lógicas são isoladas em sub-rotinas

separadas, e inúmeras características especiais foram incluídas para simplificar o seu funcionamento, tal como, um controle de passo de tempo automático, um gerador de malha flexível, grande capacidade de saída, uma variedade de condições de contorno opcionais e documentação com instruções interna.

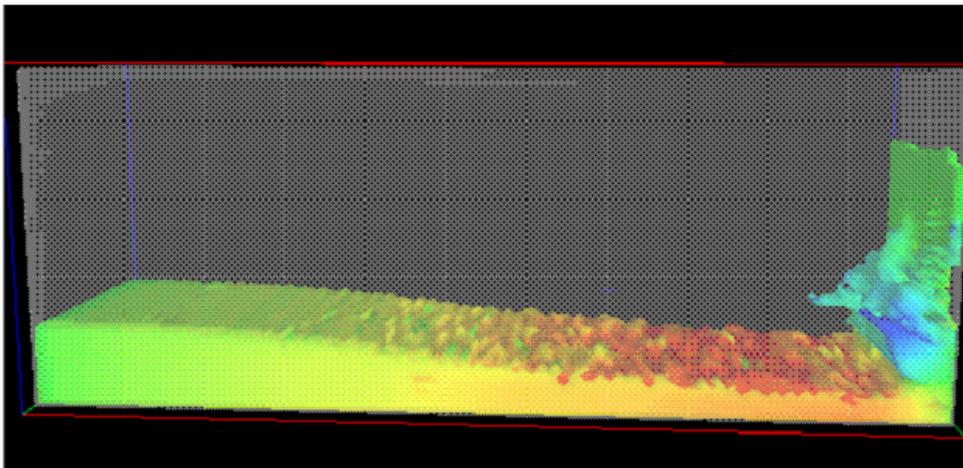
Conforme [Hirt e Nichols \(1981\)](#), na dinâmica estrutural, costuma-se empregar as coordenadas de Lagrange como base para algoritmos de solução numérica. Na dinâmica de fluidos, no entanto, ambas as coordenadas de Lagrange e Euler têm sido utilizadas com sucesso considerável. Isto porque cada representação tem vantagens e desvantagens, e a escolha de qual representação utilizar depende das características do problema a ser resolvido. O autor considera contornos livres as superfícies sobre as quais existem descontinuidades em uma ou mais variáveis. Cita como exemplos: interfaces de materiais, ondas de choque, ou as interfaces entre fluidos e estruturas deformáveis. Três tipos de problemas surgem no tratamento numérico dos contornos livres: (1) a sua representação discreta, (2) a sua evolução no tempo, e (3) a forma como são aplicadas as condições de contorno sobre eles. [Hirt e Nichols \(1981\)](#) apresenta uma breve revisão sobre os diferentes métodos que têm sido utilizados para aplicar contornos livres em diferenças finitas ou grades de elementos finitos; descreve o método Volume de Fluido (*Volume Of Fluid - VOF*); descreve detalhes de como tem sido implementado o método VOF em um código de hidrodinâmica euleriano; ilustra a utilização do novo código, SOLA-VOF, com vários exemplos que mostram a força da técnica VOF para o tratamento de problemas que envolvem escoamentos livres altamente complicados; e finalmente, fornece um breve resumo que enfatiza as vantagens do novo código.

Conforme [Fekken \(1998\)](#), quando um navio no mar está navegando entre as ondas, ele pode pegar água na proa. Essa água, que flui na plataforma em ondas altas, quando o movimento relativo ao redor do arco é superior ao nível do convés, é chamado de *água verde (green water)*. Como resultado desta carga de água verde, danos das superestruturas no convés ainda é uma ocorrência comum. O *Maritime Research Institute Netherlands* (MARIN) fez uma extensa pesquisa para a modelagem deste fenômeno durante os últimos anos. Em geral, fluxo de fluido pode ser melhor descrito pelas equações de Navier-Stokes. Em 1995, no RuG, foi iniciado o desenvolvimento de um programa de computador chamado ComFlo capaz de resolver o fluxo de fluido com superfícies livres em geometrias complexas 3D, onde as equações de Navier-Stokes são resolvidas em uma grade Cartesiana. [Fekken \(1998\)](#) cita que o principal objetivo deste projeto foi descobrir as possibilidades de simular a água verde, e se a dinâmica de fluidos da água verde no convés, como concluído nos

testes do modelo, também é visível na simulação. Para isso, as condições de afluência para os limites do domínio foram determinadas pelos dados dos ensaios com o modelo. No documento, Fekken (1998) explica o modelo matemático, e mostra como o modelo numérico é aplicado no ComFlo. Na sequência o autor discute os resultados: Primeiro o teste de aceitação feito com uma situação simples de ruptura de barragem (*dambreak*), em seguida, faz uma comparação entre a simulação de uma *dambreak* num tanque, e o ensaio correspondente realizado pelo MARIN. Finalmente, discute os resultados do problema da água verde e compara com os ensaios com modelo.

Conforme Sabeur et al. (1998), a simulação do fluxo de superfície livre dentro de limites confinados é um problema numérico de destaque no CFD (Computational Fluid Dynamics), pois os métodos matemáticos padrões muitas vezes levam à instabilidade numérica quando a interface líquido-ar é mal representada no impacto com a parede. No entanto, as recentes tentativas de modelagem de fluxo de superfície livre com o método do volume de fluido (*Volume Of Fluid* - VOF), mostrou a possibilidade de modelagem de capotamento de ondas com boa estabilidade numérica e representação da superfície livre em contato com as estruturas sólidas. No trabalho os autores realizam uma simulação de ruptura de barragem (*dambreak*) onde um metro cúbico de água é libertado subitamente para uma queda livre em um tanque retangular de $2,5m \times 1,25m$ durante aproximadamente 0,45 s (ver Figura 2.3).

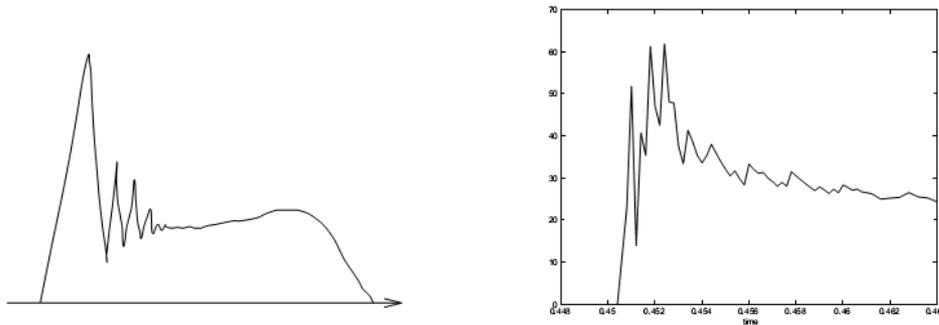
Figura 2.3 - Simulação Tridimensional de ruptura de barragem (*dambreak*).



Fonte: Sabeur et al. (1998)

Os autores investigam numericamente uma previsão teórica das forças do impacto de curta duração nas bordas utilizando as equações de Navier-Stokes para a formulação matemática. O modelo numérico é baseado no método VOF onde as equações do movimento da superfície livre do fluxo são obtidas com a discretização das equações de Navier-Stokes no tempo e no espaço por meio de técnicas de diferenças finitas. Na Figura 2.4 é mostrado um esboço da pressão do impacto experimentalmente observado, bem como, a pressão do impacto resultante de uma simulação numérica VOF (grade 96x48). É possível notar a semelhança entre os dois gráficos.

Figura 2.4 - Pressões de impacto oscilatório observado experimentalmente (esquerda) e por meio de simulações numéricas (direita)



Fonte: Sabeur et al. (1998)

Conforme Gerrits e Veldman (2000) o contínuo aumento dos recursos computacionais, bem como a melhoria dos algoritmos numéricos, estudos experimentais de fluxo de fluido estão cada vez mais acompanhados (ou mesmo substituídos) por simulações numéricas. Especialmente na área de fluxo de fluido em órbita da Terra, a Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD - *Computational Fluid Dynamics*), tornou-se essencial , uma vez que, na Terra , um ambiente de micro- gravidade pode ser alcançado apenas por alguns segundos (por exemplo, durante um vôo parabólico ou em uma torre de queda). No entanto, as experiências continuam sendo cruciais para a validação de códigos CFD e uma melhor compreensão física do movimento líquido no espaço. Por isso, o satélite experimental SloshSat foi uma grande oportunidade para comparar os resultados da simulação e os resultados experimentais. O SloshSat é um pequeno satélite de vôo livre (*free-flying*) que contém um tanque de experiência que está parcialmente cheio de água. Ele foi projetado para executar

um número de manobras , a fim de estudar o movimento de líquido em um ambiente em que as forças capilares são dominantes, bem como para investigar a interação dinâmica entre o movimento de líquido e o movimento do próprio satélite. Em 1995 os autores iniciaram o desenvolvimento de um código CFD, chamado ComFlo, que é capaz de simular o cenário do experimento SloshSat. Este código permite simular o fluxo de superfície livre em ambiente de órbita da Terra em um tanque de geometrias tridimensionais complexas, levando em conta a interação entre o movimento do líquido e o movimento do corpo sólido.

No método proposto por [Gerrits e Veldman \(2000\)](#) resolvem-se as equações de Navier-Stokes (incompressível), utilizando o método de volumes finitos, em uma malha cartesiana estacionária, evitando assim a geração demorada de uma grade de uma malha ajustada ao corpo. Para ser capaz de lidar com geometrias arbitrárias complexas eles usaram de uma abordagem de célula de corte (*cut-cell*). Neste método, o domínio do fluxo é simplesmente cortado da malha Cartesiana, criando células irregulares perto da borda do domínio do fluxo. A superfície livre é descrita por uma função de Volume de Fluido (VOF), o que pode ser considerado como função indicadora discreta do fluido. No entanto, conforme [Gerrits e Veldman \(2000\)](#) o método VOF padrão pode gerar pequenos pedaços de fluido separados (não fisicamente) do corpo principal do líquido. No método de [Gerrits e Veldman \(2000\)](#) isso é evitado por advecção da superfície livre usando uma função de altura local. Neste artigo [Gerrits e Veldman \(2000\)](#) discutem a modelagem matemática e numérica da dinâmica líquidos, realçando as principais características do método numérico.

[Gerrits e Veldman \(2000\)](#) também consideram a interação entre o movimento do fluido e o movimento do corpo sólido (no qual o fluido está contido). Com isso, eles resolvem (para cada intervalo de tempo) um conjunto de equações para a quantidade de movimento linear e a quantidade de movimento angular do corpo sólido. Nestas equações aparecem termos representando as forças e os torques exercidos sobre o corpo sólido pelo movimento do líquido. Por outro lado, devem ser adicionadas nas equações de Navier-Stokes, as forças aparentes exercidas sobre o fluido pelas acelerações angular e linear e pela rotação do corpo sólido fazendo com que a interação se complete. Eles alertam que alguns cuidados devem ser tomados na integração das equações acopladas, para evitar um método instável quando a massa de líquido torna-se demasiadamente maior que a massa de corpo sólido. No método apresentado, o sistema é estável para qualquer razão de massa líquido/sólido. A modelagem da interação entre o movimento do fluido e o movimento do corpo sólido é explicada por [Gerrits e Veldman \(2000\)](#) em detalhes, bem como, apresentam a título

de ilustração, um modelo simples de massa-mola.

Dodge (2000) apresenta uma atualização do documento de autoria de Dr. Norm Abramson do *SwRI's Department of Mechanical Sciences*, Dr. Douglas Michel da NASA-OAST, Dr. George Brooks da *NASA-Langley*, e Dr. Helmut Bauer da *Georgia Tech*, publicado em 1966 como NASA SP-106 "*The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*". Este documento tornou-se através dos anos uma referência no estudo do comportamento dos líquidos e ainda hoje em dia existe uma grande demanda de cópias deste trabalho.

Dodge concluiu ser necessária uma revisão no documento NASA SP-106 tendo em vista que: (a) nem sempre, neste documento, as informações são apresentadas de uma forma de fácil entendimento; (b) muitos dos resultados numéricos são apresentados como gráficos e tabelas decorrentes de métodos analíticos aproximados devido aos poucos recursos computacionais dos anos 60; (c) hoje estes resultados estão disponíveis de um modo mais preciso; e (d) o contínuo avanço no estudo do *sloshing* e da tecnologia associada, sobre tudo no que se refere à mecânica e gerenciamento dos fluidos sob baixa gravidade.

Nem todos os assuntos abordados no documento SP-106 foram incluídos na revisão de Dodge, alguns por terem sido tratados marginalmente, outros por serem muito especializados ou por não parecerem tão importantes hoje como foram em 1966. Esta revisão foca principalmente os seguintes capítulos do documento SP-106: Capítulo 2 - *Sloshing* Lateral em Contêineres em Movimento, Capítulo 3 - Efeitos Não-lineares em *Sloshing* Lateral, Capítulo 4 - Amortecimento Dos Movimentos do Líquido e do *Sloshing* Lateral, Capítulo 6 - Representação Analítica do *Sloshing* Lateral por Modelos Matemáticos Equivalentes, Capítulo 7 - Estabilidade e Controle do Veículo (mas extremamente condensado) e Capítulo 11 - Comportamento do Propelente Líquido para Baixo G e G Zero (incrementado com grande quantidade de novas matérias sobre dispositivos de gerenciamento de *sloshing* e propelentes). Além disso, um novo capítulo foi incluído, Movimentos do Líquido em Tanques Girantes, devido à importância deste assunto na estabilidade de uma espaçonave. Todos os capítulos na revisão feita por Dodge são extensos e contêm uma abordagem matemática complexa.

Em sua tese, Gerrits (2001) apresenta um método numérico para simulação de fluxo de fluido em condições de micro-gravidade e para a simulação da dinâmica de sólido-líquido acoplado. O autor introduz um método numérico para a discretização das equações de Navier-Stokes em uma grade cartesiana tridimensional, que

conforme o autor, é relativamente fácil (em comparação com uma grade desestruturada) para advecção de uma superfície livre.

Para incorporar geometrias complexas Gerrits (2001) utilizou a técnica de corte de célula (*cut-cell*), o que, conforme o autor, significa que os limites do corpo sólido cortam a grade cartesiana, criando pequenas células irregulares. O autor conseguiu representar uma geometria complexa em uma grade cartesiana através da introdução de aberturas, que indicam a parte de uma célula e suas faces de células que podem ser fechadas para o fluxo. A simulação do fluxo que adere à parede em um cilindro circular mostrou que o uso da técnica de corte de células é crucial para a simulação de fluxo de fluido em geometrias complexas. Na verdade, afirma Gerrits (2001), a mesma simulação em uma aproximação em escada do cilindro circular mostra desvios e resultados incorretos.

Gerrits (2001) utilizou o método de volumes finitos para a discretização das equações de Navier-Stokes, tendo como ponto de partida uma formulação fraca das equações governantes para o método numérico. Nas aproximações discretizadas (ou discretas) dos operadores divergente e gradiente, ele incluiu aberturas para representar geometrias complexas. Gerrits (2001) realizou a discretização de tal modo que os operadores discretizados para difusão e convecção têm as mesmas propriedades de simetria que suas contrapartes contínuas, isto é, o operador discretizado para a convecção é uma matriz anti-simétrica e o operador discretizado para a difusão é uma matriz simétrica, negativa definida. Além disso, conforme Gerrits (2001), o operador gradiente discretizado é igual a pelo menos à transposição do operador divergente discretizado. A partir destas propriedades de simetria segue-se que, na ausência de forças externas, a energia cinética do fluxo não pode crescer, tornando o método numérico extremamente robusto.

Gerrits (2001) esclarece que as equações de Navier-Stokes discretizadas parecem muito complexas devido à inclusão de aberturas e a incorporação de redes esticadas (*stretched*). No entanto, continua, quando aplicada a uma geometria em forma de escada de uma grade uniforme, a discretização espacial reduz-se a uma familiar discretização de diferenças finitas de segunda ordem.

Gerrits (2001) explica que, apesar da presença de células pequenas, não foram encontradas limitações severas no passo de tempo. Na verdade, ele afirma que pode ser provado que a discretização dos termos convectivos por ele explorado leva a uma restrição do passo de tempo que está baseado no tamanho da malha da grade cartesiana; células pequenas não fazem esta restrição mais rigorosas. No entanto,

conforme Gerrits (2001), usando um limite inferior para o tamanho do volume de controle para discretização da difusão, esta limitação é mantida dentro de limites. Efetivamente, esta precaução desloca o contorno do sólido de uma distância pequena (menor do que o tamanho de uma célula computacional) antes de aplicar a condição de contorno de não deslizamento.

Gerrits (2001) estudou dois métodos para advecção de interface, o método de Hirt e Nichols e o método de Youngs. No método de Hirt e Nichols a interface é reconstruída por partes constantes alinhadas com as direções cartesianas. Na advecção da interface reconstruída usa-se limitadores para evitar grandes subdimensionamentos e superdimensionamentos na função VOF e para evitar inclinação indesejada ou manchas da interface. No método de Youngs uma reconstrução é computada por partes lineares da interface. Com base na interface reconstituída, são calculados os fluxos que são transportados inalterados de uma célula doadora para uma célula aceitadora. Gerrits (2001) mostrou que ambos os métodos de advecção têm graves problemas com a conservação de massa. Além disso, o método de Hirt e Nichols cria um monte de destroços (*flotsam*) e sucatas (*jetsam*). Os problemas encontrados nos dois métodos de advecção podem ser resolvidos com a introdução de uma função altura local perto da superfície livre. Em cada célula de superfície, uma função altura é localmente definida num bloco 3x3 (duas dimensões) ou 3x3x3 (três dimensões) de células da grade. Os fluxos que foram calculados para as faces da célula não são diretamente transportados a partir de uma célula doadora para uma célula aceitadora, em vez disso é atualizado o valor da função altura local. Este método de advecção da superfície livre, continua Gerrits (2001), conserva a massa rigorosamente e cria muito menos destroços e sucatas.

Conforme Gerrits (2001), em problemas de fluxo de fluido com um campo de velocidade estabelecido, a utilização de uma função altura local melhora muito o método de Hirt e Nichols, enquanto que o método de Youngs é menos beneficiado. Nestes problemas, o método de Youngs (com ou sem uma função altura) tem desempenho superior. No entanto, continua Gerrits (2001), em simulações onde o campo de velocidade é resolvido a partir das equações de Navier-Stokes, o método de Youngs (com ou sem uma função altura) dá resultados piores do que o método de Hirt e Nichols combinado com uma função altura local. Isto é devido à reconstrução linear da interface. Para isso, a normal da interface é prevista utilizando o campo VOF em torno da célula em questão. Uma vez que o campo de velocidade é calculado até uma precisão definida pelo usuário, pequenos erros ocorrem na distribuição do campo VOF, para os quais o cálculo do valor normal, e assim o algoritmo ad-

vecção total, é muito sensível. Tipicamente, o método de de Youngs perde simetria rapidamente em problemas de fluxo simétrico. O método de Hirt e Nichols não é sensível a pequenas variações no campo VOF desde que a interface seja reconstruída por partes constante. Por isso, Gerrits (2001) preferiu o método de Hirt e Nichols combinado com uma função altura local em sua tese.

Gerrits (2001) leva em conta as forças de capilaridade, tais como a tensão superficial e aderência da parede, dado a necessidade de um modelo numérico de simulação da dinâmica de líquidos no espaço, o que, conforme ele, é necessário muita atenção às condições de contorno na superfície livre, sendo crucial a correta aplicação das condições de contorno para a pressão e o ângulo de contato para a obtenção de resultados precisos. De fato, continua Gerrits (2001), nas várias simulações de adesão de parede descritas em sua tese, o ângulo de contato e a tensão superficial direcionam o fluxo e determinam a solução de estado estacionário. A pressão na superfície livre depende da sua curvatura, que ele calcula utilizando a função altura local. Por meio do refinamento da malha e comparando os resultados de simulações (com vários ângulos de contacto) com a teoria, Gerrits (2001) valida o método numérico. Em duas dimensões, tanto em geometrias simples e complexas, os resultados são bem próximos. Na simulação tridimensional de aderência de uma esfera na parede, Gerrits (2001) observou que a superfície livre não é perfeitamente de simetria axial. Contudo, a solução no estado estacionário foi prevista de forma adequada, considerando o fato de que toda a informação nestas simulações vem da linha de contato, que é um subconjunto unidimensional do domínio do fluxo.

Gerrits (2001) estende o modelo descrito até aqui para um modelo que inclui o acoplamento da dinâmica do líquido com a dinâmica do corpo sólido, no qual o líquido está contido. Isto requer um modelo para a dinâmica de corpo sólido em que os termos aparecem representando a força que o *sloshing* induz no corpo sólido. Além disso, o modelo para a dinâmica do líquido foi ampliado com uma força de corpo virtual que eleva em conta o movimento de corpo sólido.

As equações governantes para a dinâmica de corpo sólido, continua Gerrits (2001), são naturalmente escritas em relação a um sistema de referencial inercial, bem como, a força devida ao *sloshing*. No entanto, a discretização destas equações resulta em um método numérico que é instável se a massa de líquido tornar-se demasiado grande em relação à massa do corpo sólido. Ele resolve este problema de estabilidade escrevendo a força do *sloshing* como uma soma de duas contribuições; a primeira, é a força resultante das acelerações lineares e angulares do fluido, devido ao

movimento do corpo sólido; e a segunda, é a força devido à aceleração do fluido relativamente ao sistema de referência móvel. A contribuição resultante é então tratada simultaneamente com o movimento do corpo sólido. A discretização desse modelo matemático alternativo resultou em um modelo numérico que é estável para relações de massa líquido/sólido arbitrárias. Gerrits (2001) exemplifica esta estabilidade incondicional com um modelo de massa-mola e com a demonstração de simulações onde a relação da massa líquido/sólido variaram de 0,1 a 100.

Gerrits (2001) cita como exemplo importante da dinâmica de sólido-líquido acoplado o movimento *flat-spin* de uma nave espacial (parcialmente) cheia de líquido. Ele simulou um movimento de *flat-spin* de um recipiente de três dimensões, rectangular parcialmente cheio com líquido. Esta simulação mostrou que o método numérico pode prever um *flat-spin* corretamente. A comparação quantitativa de um *flat-spin* foi feito através da simulação do experimento WSM (*Wet Satellite Model*), que foi realizada no espaço em 1992. Conforme Gerrits (2001), ComFlo foi o primeiro método de dinâmica de fluidos computacional que realizou uma simulação do experimento WSM. Embora a geometria do WSM (um anel fino) não seja muito adequada para um método numérico baseado em grades cartesianas, os resultados da simulação estão adequadamente conformes com a experiência.

Finalmente, a partir dos resultados das diversas simulações que foram discutidas em sua tese (e a partir de muitas outras simulações que foram realizados no desenvolvimento do método numérico, mas não constam em sua tese), Gerrits (2001) conclui que o método por ele apresentado é capaz de simular a dinâmica de líquido em ambiente de micro-gravidade e pode prever os acoplamentos dinâmicos em naves espaciais que contém líquido. Ele conclui ainda que o método é muito robusto e também aplicável para simulação de problemas de fluxo de fluido em terra. No entanto, para uma maior compreensão (física) do comportamento do líquido no espaço - especialmente no que diz respeito à dinâmica da linha de contato - e validação de métodos numéricos, os experimentos continuam extremamente valiosos. Assim, autor espera que o sucesso do experimento do satélite SlochSat FLEVO possa ajudar no desenvolvimento futuro de sistemas computacionais da dinâmica de fluidos em ambiente de micro-gravidade.

Conforme Peskin (2002), o método de contorno imerso (IB - *Immersed Boundary*) foi introduzido para estudar os padrões de fluxo em torno de válvulas cardíacas e evoluiu para um método geral, útil para os problemas de interação fluido-estrutura. O método IB é tanto uma formulação matemática como um esquema numérico. A

formulação matemática emprega uma mistura de variáveis de Euler e de Lagrange. Elas estão relacionados por meio de equações de interação em que a função delta de Dirac desempenha um importante papel. No esquema numérico motivado pela formulação IB, [Peskin \(2002\)](#) afirma que as variáveis de Euler são definidas em uma malha cartesiana fixa, e as variáveis de Lagrange são definidas em uma malha curvilínea que se move livremente através da malha cartesiana fixa, sem ser obrigada a se adaptar a ela. Neste artigo, [Peskin \(2002\)](#) discute as equações de interação do sistema numérico que envolve uma aproximação suavizada para a função delta de Dirac, construídas de acordo com certos princípios. O autor está preocupado principalmente com a estrutura matemática do método IB que inclui tanto a forma IB das equações de movimento como o esquema numérico IB.

[Ibrahim \(2005\)](#), no capítulo 12, de seu livro discute a dinâmica do *sloshing* em microgravidade. Ele começa afirmando que o efeito do potencial gravitacional regular sobre a massa de um líquido é de estabilização levando seu volume para o fundo do seu contêiner. Quando a força sobre o líquido diminui, seu volume assume qualquer posição dentro de seu contêiner de uma maneira imprevisível. Assim os problemas da dinâmica do *sloshing* do líquido sob microgravidade são diferentes daqueles encontrados sob um campo gravitacional regular. Sob microgravidade as forças de tensão superficial começam predominar em detrimento da força gravitacional. A razão entre a força gravitacional e a força de capilaridade é chamada de número de Bond. Valores muito pequenos do número Bond, indicam que as forças de capilaridade predominam e neste caso a superfície livre do líquido não será plana, mas subirá ao redor das paredes verticais de um contêiner. Afirma ainda que, o estudo do comportamento do líquido em microgravidade envolve a mecânica e a termodinâmica dos sistemas capilares. Neste capítulo ele apresenta importantes tópicos referentes à física dos fluidos em microgravidade como: a mecânica de uma superfície livre do líquido sob microgravidade; a estabilidade estática e dinâmica da superfície livre do líquido; linha de contato; e ângulos de contato entre outros.

[Vreeburg \(2006\)](#) descreve o Slososat FLEVO como sendo um satélite para o estudo experimental da dinâmica de líquidos e dos problemas de gerenciamento de líquidos no espaço, que foi lançado em GTO, como parte da carga de teste do Ariane 5 ECA, em 12 de fevereiro de 2005. Conforme [Vreeburg \(2006\)](#), dos 129 kg de massa do Slososat, 33,5 kg é água em estado líquido contido em um tanque de 87 litros. A operação de Slososat foi controlada com um conjunto ortogonal de 12 propulsores de gás de nitrogênio de 0,785 N cada. A resposta do Slososat aos propulsores de controle foi previsto a partir do Simulador de Movimento do Slososat.

Sloshsat FLEVO, continua Vreeburg (2006), foi equipado com seis acelerômetros lineares e três giroscópios para fornecer dados do movimento do tanque. Uma vez que são conhecidas as propriedades inerciais da Sloshsat vazio, pode-se calcular a força e o torque no tanque. Vreeburg (2006) informa que durante um período de oito dias, o Sloshsat foi operado durante aproximadamente 57 horas. As ativações dos propulsores foram realizadas variando desde pulsos de perturbação até manobras de ciclo fechado, a partir de condições iniciais em repouso ou girando. O autor faz uma discussão a partir da avaliação da condição do Sloshsat FLEVO a partir de seus estados medidos. O autor dá ainda, especial atenção para a localização do centro de massa do líquido e a resposta do líquido às ações de controle, bem como, formula algumas conclusões preliminares sobre as oscilações observadas e o comportamento de amortecimento.

Conforme Veldman (2006) os fenômenos não-lineares de superfície livre de líquidos, como ondas extremas e *sloshing* violentos, e seus impactos sobre a resposta dinâmica dos recipientes que os contêm são assuntos que até então só podiam ser estudados com métodos experimentais. Hoje em dia, ferramentas computacionais CFD (*Computational Fluid Dynamics*) podem contribuir significativamente no estudo dos problemas de fluxo. Veldman (2006) começa com um breve resumo dos métodos numéricos mais comuns para simular fenômenos de superfície livre altamente não-lineares, com ênfase no método de Navier-Stokes. Em seguida, descreve os esforços de desenvolvimento feitos no projeto SAFE-FLOW marítimo e no Projeto SloshSat FLEVO para ambiente de microgravidade. Ele mostra o método de simulação da superfície livre do Volume do Fluido melhorado (*improved Volume-of-Fluid- iVOF*) ComFlo. Apresenta ainda, exemplos de dinâmica de fluidos violentos em ambas as áreas de aplicação.

Veldman (2006) informa que seu Grupo de pesquisa está envolvido em uma série de projetos onde se estuda os fenômenos de fluxo citados. Desde o final da década de 70, em conjunto com o *National Aerospace Laboratory* NLR, são realizados estudos teóricos para investigar o *sloshing* de líquido a bordo de naves espaciais. Esta pesquisa culminou na concepção, construção e voo do Sloshsat FLEVO, um mecanismo para a experimentação do comportamento de líquidos em órbita. O projeto foi liderado pelo NLR e patrocinado por agências nacionais e internacionais. Na área marítima, Veldman (2006) menciona a cooperação com MARIN, levando aos projetos de cooperação industrial ComFLOW-2 e SAFE-FLOW. Neste trabalho, Veldman (2006) descreve algumas questões relacionadas com a modelagem computacional do movimento violento da superfície livre nos projetos mencionados.

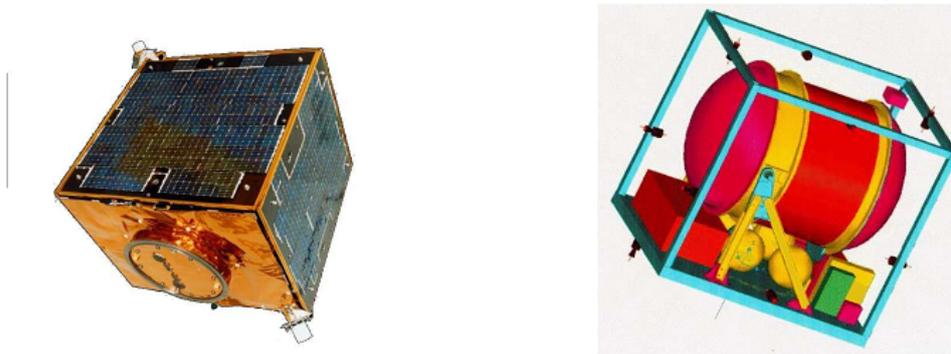
O modelo matemático para fluxos de água complexos, continua [Veldman \(2006\)](#), data da primeira metade do século 19, conhecido como as equações de Navier-Stokes. No entanto, é apenas há uma década que essas equações de campo podem ser resolvidas para a grande parte dos problemas de fluxo complexo de superfície livre, graças a novos algoritmos numéricos e o aumento da capacidade dos computadores. Este é um desenvolvimento importante, no futuro próximo, ele deve fornecer, além de testes de modelo, uma ferramenta adicional para problemas de projeto envolvendo estes tipos de fluxos. Esta ferramenta numérica é relativamente barata (em comparação com os custos das instalações experimentais), por isso, pode ser utilizada numa fase precoce do processo de projeto.

O documento de [Veldman \(2006\)](#) dá uma visão do estado-da-arte dos métodos hidrodinâmicos para descrever fluxos altamente não-lineares. Ele começa com um breve resumo dos métodos básicos existentes para os fluxos de superfície livre complexos. Depois disso, é demonstrado o potencial do método de simulação ComFlo, que foi desenvolvido durante as cooperações por ele já mencionadas. O autor baseia-se na técnica de volume-de-fluido (*Volume-of-Fluid* - VOF), desenvolvido por Hirt e Nichols. Uma série de melhorias necessárias encontrada para superar os pontos fracos da abordagem VOF, é discutida no artigo. Originalmente, o método foi desenvolvido para simular o *sloshing* de líquidos a bordo de espaçonaves, neste ambiente as forças capilares e a dinâmica da linha de contato podem ser predominantes. Mais tarde, o método foi estendido para aplicações em engenharia marítima e aplicações biomédicas. São apresentados diversos tipos de simulações. Na área marítima é mostrado um fluxo de ruptura de barragem (*dambreak*) e caso de fluxo de "água verde". Como um exemplo de aplicação em ambiente de micro-gravidade é apresentada uma das manobras do Sloshsat FLEVO. Em todos os exemplos foi incluído uma comparação com os dados experimentais.

Há de se destacar no artigo de [Veldman \(2006\)](#) o capítulo dedicado ao *Sloshing* em ambiente de micro-gravidade com o exemplo de fluxo de superfície livre referente ao *sloshing* de líquido embarcado em uma espaçonave. Os experimentos foram realizados com o satélite Sloshsat FLEVO (ver Fig. 2.5), lançado em 12 fevereiro de 2005. Este mini-satélite foi construído pela *Dutch National Aerospace Laboratory* NLR. A massa seca deste satélite é 95 kg e seu interior contém um tanque de fluido de forma cilíndrica com extremidades semi-esférica, com um volume de 86,9 litros. Este tanque foi parcialmente preenchido com 33,5 kg de água destilada, o que permitiu o movimento de *sloshing* livremente durante os experimentos. Devido às propriedades físicas do material do tanque, um ângulo de contacto do 90 graus é considerado como

uma hipótese razoável. O movimento do Sloshsat é controlado por 12 propulsores. Ele informa que, durante um período de 8 dias foram realizadas várias experiências e uma quantidade relevante de medidas para o movimento do Sloshsat, tal como o velocidade angular a aceleração linear.

Figura 2.5 - O Satélite Sloshsat FLEVO: à esquerda exterior; à direita vista esquemática interna.



Fonte: Veldman (2006)

As experiências com Sloshsat foram suportadas por um modelo teórico/computacional implementado em ComFlo, combinado com um modelo para acoplar a interação dinâmica sólido-líquido.

Neste artigo, Veldman (2006) apresenta alguns resultados para a chamada manobra de *flat-spin*. O Sloshsat é inicialmente forçados a girar em torno do eixo de momento de inércia intermediário, durante a qual se estabelece a condição de equilíbrio do fluido. Depois de algum tempo, a ação do propulsor é interrompida e o Sloshsat começa a cair livremente. Durante a queda livre, a orientação de rotação do Sloshsat (lentamente) move-se para o eixo de máximo momento de inércia, com uma quantidade significativa de nutação e de ação do fluido em grande escala, mostrando que tal manobra é adequada para a validação do modelo numérico considerado no artigo.

Entre as conclusões de Veldman (2006) destaca-se o exemplo do *flat-spin* que inclui física capilar, bem como a interação líquido-espçonave, onde se mostra que a frequência do sloshing no interior do tanque foi adotada corretamente para o movimento do satélite, embora o amortecimento foi um pouco superestimado. O autor

ênfatiza ainda que os resultados das simulações dão muita confiança no desempenho do método que deverá desenvolver-se nos próximos anos, estendendo-o para escoamentos bifásicos compressíveis (projeto ComFLOW-2). Conforme Veldman (2006), a principal vantagem de um modelo de bifásico é que as condições de contorno para as velocidades de superfície livre, que têm uma grande influência sobre a robustez e precisão do método, não são mais necessárias. Além disso, deste modo, bolsas de ar aprisionadas na região de impacto da onda podem ser modeladas, isto pode ter uma influência substancial sobre as pressões de impacto.

Luppés et al. (2006) investigaram a influência do *sloshing* de líquidos embarcados em espaçonaves e satélites. Conforme os autores deste trabalho o aumento da quantidade de líquido embarcados em espaçonaves, o gerenciamento do líquido e sua influência sobre a dinâmica global da espaçonaves está se tornando cada vez mais importante. A influência do *sloshing* pode prejudicar as manobras críticas no espaço, tais como a acoplagem de veículos de transporte de carga de líquido ou o ponto de observação do satélites. Luppés et al. (2006) ressaltam que o estudo experimental da interação entre o *sloshing* e a dinâmica de espaçonaves, por meio de torre de queda ou vôo parabólico, é difícil por causa da curta duração da queda livre terrestre. Assim, as experiências foram efetuadas recentemente com o satélite SlosHSat FLEVO em uma órbita em torno da Terra como já descrito em Veldman (2006).

Como também já descrito por Veldman (2006), os experimentos com SlosHSat foram apoiados por um modelo teórico/computacional baseado nas equações de Navier-Stokes para fluxo de superfície livre incompressível 3D. Este modelo inclui a física da superfície capilar, bem como a dinâmica da interação líquido-sólido acoplados. Neste artigo, Luppés et al. (2006) detalham o modelo matemático da dinâmica do líquido, da dinâmica do corpo sólido e da dinâmica do líquido-sólido acoplados, bem como a modelagem numérica para discretização do líquido, do deslocamento da superfície livre e do corpo sólido, apresentando ao final uma comparação entre os experimentos e as simulações realizadas.

Conforme Hou et al. (2012) as interações entre os fluxos de fluido incompressível e estruturas imersas são fenômenos físicos não-lineares que têm aplicações em uma ampla gama de disciplinas científicas e de engenharia. Neste artigo, eles reveem métodos numéricos representativos baseados em malhas conformes e não-conformes que estão disponíveis atualmente para calcular problemas de interação fluido-estrutura, com ênfase em alguns dos recentes desenvolvimentos no campo. O objetivo é classificar os métodos selecionados e avaliar sua precisão e eficiência.

Hou et al. (2012) discutem os desafios enfrentados pelos pesquisadores da área, e enfatizando a importância do esforço interdisciplinar para o avanço do estudo em interações fluido-estrutura.

Conforme Barcarolo et al. (2009) a modelagem da interação entre estrutura e fluido (FSI) na presença de fluxos de superfície livre fornece uma oportunidade para abordar uma grande variedade de fenômenos físicos com aplicações em diversas áreas da engenharia. Salientam que a tendência atual de cada vez mais explorar petróleo em águas ultra-profundas, torna evidente a necessidade de compreender os fenômenos da interação fluido-estrutura focada na estabilidade e resposta de corpos flutuantes. Neste trabalho, Barcarolo et al. (2009) abordam alguns desenvolvimentos recentes no tratamento da malha em movimento sob abordagem ALE em problemas de elementos finitos levando em conta a descrição dos corpos imersos submetido a forças hidrodinâmicas. Modelam o fluido através de uma formulação de elementos finitos estabilizados para o tratamento das equações de Navier-Stokes incompressíveis. Finalmente apresentam alguns resultados dinâmicos dos corpos imersos em fluidos viscosos.

Barcarolo et al. (2009) dividem o trabalho em 4 sub-problemas: (a) avaliação dos campos de pressão e velocidade, (b) mapeamento da superfície livre, (c) cálculo do movimento do corpo rígido e finalmente (d) atualizar a malha de elementos finitos do domínio da análise. Todos estes sub-problemas estão acoplados e são resolvidos a cada passo de tempo da análise transiente.

O sub-problema (a), conforme Barcarolo et al. (2009), é normalmente tratado como a solução de um escoamento incompressível governado pelas equações de Navier-Stokes (NS). O mapeamento da superfície livre, sub-problema (b), continuam os autores, é o principal desafio computacional nos problemas de FSI para corpos flutuantes. Para tratar este problema, eles utilizam uma técnica de captura de interfaces, isto é, o método VOF (Volume of Fluid Method), primeiramente proposto por Hirt e Nichols (1981). Citam ainda que, enquanto os sub-problemas (a) e (b) são resolvidos, é necessário integrar no tempo as equações que regem o movimento do corpo rígido que são consequência da ação das forças induzidas pelo escoamento ao redor dele. Contudo, continuam os autores, estas forças são dependentes do movimento do corpo, o que leva à um problema acoplado altamente não linear. Eles concluem que a modelação numérica ou experimental destas forças ainda é um desafio devido a certos aspectos, como o arrasto devido à rugosidade da superfície do corpo em contato com a água, que modifica de forma considerável a camada limite

ao redor do corpo. Finalmente, conforme [Barcarolo et al. \(2009\)](#), O sub-problema (d) é responsável por rearranjar as forças nodais internas da malha. Este passo da análise trata o movimento do corpo como uma condição de contorno para o operador de suavização. Assim, os autores utilizam uma equação potencial de suavização no tratamento de problemas de interação fluido-estrutura com o objetivo de manter a qualidade da malha constante a cada passo de tempo.

[Roy et al. \(2013\)](#) apresentam uma implementação de uma formulação totalmente variacional de um método imerso para problemas de interação fluido-estrutura com base no método dos elementos finitos. Conforme os autores, embora a implementação típica de métodos imersos sejam caracterizados pela utilização de distribuições aproximadas de delta de Dirac, formulação inteiramente variacional do método não requer o uso destas distribuições. A implementação proposta por [Roy et al. \(2013\)](#) do sólido imerso é geral no sentido de que não é necessário ter a mesma densidade de massa e a mesma resposta de viscosidade do fluido circundante. Os autores Assumem que o sólido imerso pode ser ou viscoelástico do tipo diferencial, ou hiperelástico. Eles se concentram na validação do método através de vários pontos de referência para esquemas numéricos de interação fluido-estrutura. Conforme [Roy et al. \(2013\)](#), esta é a primeira vez que a interação de sólidos compressíveis puramente elásticos e um fluido incompressível é abordada através de um método de imersão, permitindo uma comparação direta com os valores de referência estabelecidos.

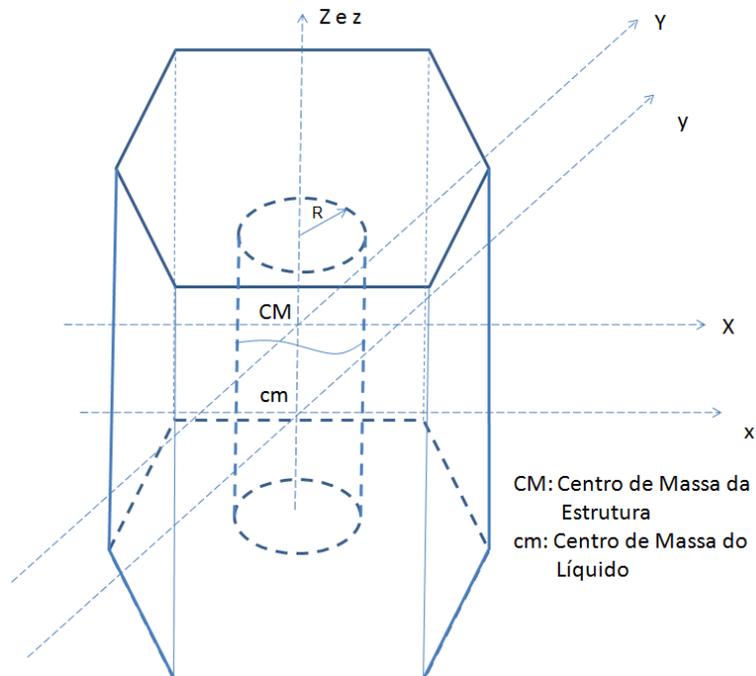
3 MODELOS MECÂNICOS EQUIVALENTES PARA REPRESENTAR O *SLOSHING*

Neste capítulo apresentamos um estudo comparativo dos sistemas aproximados massa-mola e pêndulo para os ambientes de gravidade e de micro-gravidade. Para a obtenção das equações aqui apresentadas foi utilizada a ferramenta de tratamento simbólico disponível no aplicativo MATLAB.

3.1 Modelo Físico da Estrutura com Tanque

Para o estudo aqui apresentado foi considerado uma estrutura que suporta um tanque em seu interior com as características físicas indicadas na Figura 4.1 que inclui um recipiente cilíndrico preenchido parcialmente com líquido. Na figura também estão indicados os sistemas de referências utilizados para escrever as equações da dinâmica.

Figura 3.1 - modelo físico da estrutura



Fonte: Produção do autor

3.2 Equações do movimento rotacional

As equações do movimento rotacional da estrutura são obtidas por meio da formulação lagrangiana para quase-coordenadas e para coordenadas generalizadas (MEIROVITCH, 1980). A formulação lagrangiana para quase-coordenadas permite a obtenção das Equações Modificadas de Euler, contendo os termos de acoplamento do sistema mecânico equivalente. A formulação lagrangiana para coordenadas generalizadas é utilizada para a modelagem matemática do sistema mecânico equivalente. A abordagem lagrangiana parte da definição da posição de uma massa elementar no corpo ou da posição de uma massa concentrada. A partir da posição é escrita a expressão da velocidade e da energia cinética associada a cada parte do sistema. A energia potencial também é determinada e com as energias cinética e potencial define-se a função lagrangiana L . Uma vez obtida a função lagrangiana pode-se utilizar a fórmula de Lagrange para coordenadas generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.1)$$

onde L é a função lagrangiana, q_i representa cada uma das coordenadas generalizadas do problema e Q_i as forças externas associadas a cada uma dessas coordenadas. A equação de Lagrange para quase-coordenadas pode ser escrita na forma que se segue quando a energia potencial independe do tempo. Quando nenhum potencial é considerado L se resume na Energia Cinética T .

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial w} \right\} + [\tilde{w}] \left\{ \frac{\partial L}{\partial w} \right\} = \{N\} \quad (3.2)$$

onde w representa o vetor velocidade angular e N é o vetor torque externo associado ao problema.

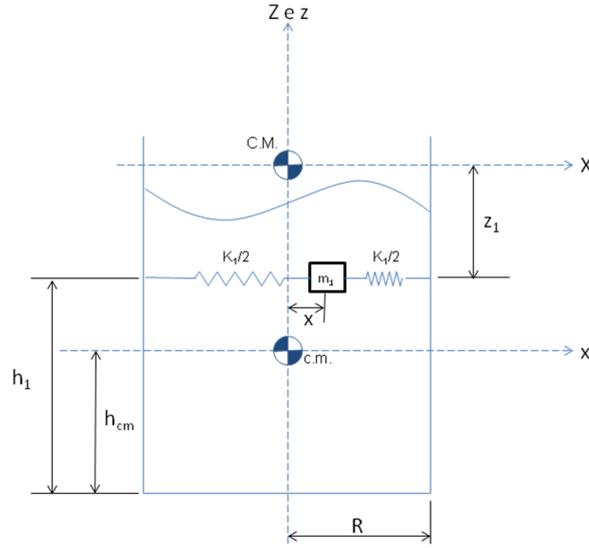
A função lagrangiana é dada por $L = T - V$, onde T é a Energia Cinética do sistema e V a Energia Potencial.

3.2.1 modelo Massa-mola

Para o modelo massa-mola foi utilizado o modelo proposto por Dodge e Garza (1967), onde o líquido é modelado por um conjunto de massa-mola associado a cada modo de oscilação de *sloshing*, esquematicamente representado na Figura 3.2.

A Figura 3.3 mostra uma ilustração tri-dimensional do modelo massa-mola

Figura 3.2 - modelo Mecânico Equivalente para o modo 1 para o sistema massa-mola



Fonte: Produção do autor

para representar o primeiro modo (modo fundamental) do sloshing do líquido.

A Energia Cinética do líquido, aproximado por um sistema massa-mola equivalente pode ser obtida a partir do vetor posição da massa m em relação ao CM da estrutura, como segue:

$$\vec{r} = x\hat{i} - Z\hat{k} \quad (3.3)$$

e o vetor velocidade como:

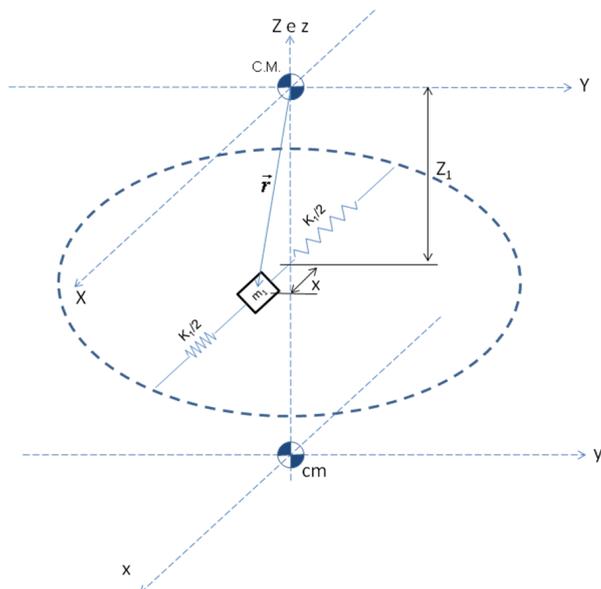
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} = (\dot{x} - Zw_y)\hat{i} + (xw_z + Zw_x)\hat{j} - xw_y\hat{k} \quad (3.4)$$

que na forma de vetor coluna pode ser escrita como:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} - Zw_y \\ xw_z + Zw_x \\ -xw_y \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A Energia Cinética referente à massa m é dada por:

Figura 3.3 - Ilustração tri-dimensional do modelo mecânico equivalente



Fonte: Produção do autor

$$T_m = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} \dot{x} - Zw_y \\ xw_z + Zw_x \\ -xw_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x} - Zw_y \\ xw_z + Zw_x \\ -xw_y \end{bmatrix} = \frac{m}{2} [x^2w_y^2 + (xw_z + Zw_x)^2 + (\dot{x} - Zw_y)^2] \quad (3.6)$$

Considerando A , B , e C como sendo os momentos principais de inércia da estrutura pode-se escrever que a Energia Cinética total é dada por:

$$T = \frac{1}{2} (Aw_x^2 + Bw_y^2 + Cw_z^2) + \frac{m}{2} [x^2w_y^2 + (xw_z + Zw_x)^2 + (\dot{x} - Zw_y)^2] \quad (3.7)$$

A Energia Potencial a ser considerada é aquela devida apenas à ação das molas na massa m é dada por:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{2}x^2 \right) = \frac{k}{2}x^2 \quad (3.8)$$

Então, a função lagrangiana dada por $L = T - V$ pode ser escrita como:

$$L = \frac{1}{2} (Aw_x^2 + Bw_y^2 + Cw_z^2) + \frac{m}{2} [x^2w_y^2 + (xw_z + Zw_x)^2 + (\dot{x} - Zw_y)^2] - \frac{k}{2}x^2 \quad (3.9)$$

Com isso pode-se obter a equação do sistema massa-mola utilizando a função lagrangiana e a fórmula de Lagrange para coordenadas generalizadas como segue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x} - mZw_y) = m\ddot{x} - mZ\dot{w}_y \quad (3.10)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mx(w_y^2 + w_z^2) + mZw_xw_z - kx \quad (3.11)$$

então

$$m\ddot{x} - mZ\dot{w}_y - mx(w_y^2 + w_z^2) - mZw_xw_z + kx = q_x\dot{x} \quad (3.12)$$

e

$$\ddot{x} = Z\dot{w}_y + x(w_y^2 + w_z^2) + Zw_xw_z - \frac{k}{m}x + \frac{q_x}{m}\dot{x} \quad (3.13)$$

Da equação de Lagrange para quase-coordenadas pode-se obter as Equações Modificadas de Euler como segue:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial w} \right) \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial w_x} \\ \frac{\partial L}{\partial w_y} \\ \frac{\partial L}{\partial w_z} \end{array} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{l} (A + mZ^2)w_x + mZxw_z \\ (B + mZ^2 + mx^2)w_y - mZ\dot{x} \\ (C + mx^2)w_z + mZxw_x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (A + mZ^2)\dot{w}_x + mZ(\dot{x}w_z + x\dot{w}_z) \\ (B + mZ^2 + mx^2)\dot{w}_y + 2m\dot{x}w_y - mZ\ddot{x} \\ (C + mx^2)\dot{w}_z + 2m\dot{x}w_z + mZ\dot{x}w_x + mZx\dot{w}_x \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

$$[\tilde{w}] \left\{ \frac{\partial L}{\partial w} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial w_x} \\ \frac{\partial L}{\partial w_y} \\ \frac{\partial L}{\partial w_z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} mw_x Z^2 + mw_z x Z + Aw_x \\ mw_y Z^2 - mxptoz + mw_y x^2 + Bw_y \\ mw_z x^2 + Zmw_x x + Cw_z \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A\dot{w}_x - Bw_y w_z + Cw_y w_z + Zm\dot{w}_x + Zm\dot{w}_z x + 2Zmw_z \dot{x} - Z^2mw_y w_z + Zmw_x w_y x \\ B\dot{w}_y + w_z(Aw_x + Zm(Zw_x + w_z x)) - w_x(Cw_z + mx(Zw_x + w_z x)) + m\dot{w}_y x^2 - Zm\ddot{x} + Z^2m\dot{w}_y + 2mw_y x \dot{x} \\ C\dot{w}_z + m\dot{w}_z x^2 - Aw_x w_y + Bw_x w_y + Zm\dot{w}_x x + 2mw_z x \dot{x} + mw_x w_y x^2 - Zmw_y w_z x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_z \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

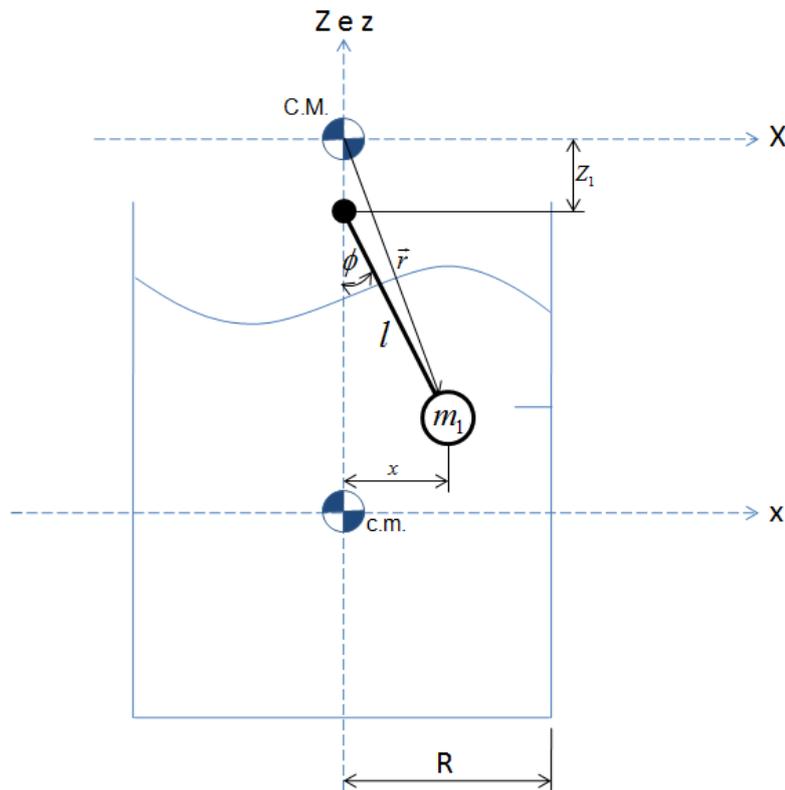
Considerando que não há torques externos, e fazendo $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\ddot{x}_2 = x_3$, $\dot{w}_x = x_4$, $w_x = x_5$, $\dot{w}_y = x_6$, $w_y = x_7$, $\dot{w}_z = x_8$, e $w_z = x_9$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 \\ x_1 x_4^2 + x_1 x_5^2 - \frac{kx_1 + q_x x_2}{m} + Zx_3 x_5 + \frac{Z(Cx_3 x_5 - Ax_3 x_5 - Zkx_1 + Zq_x x_2 - 2mx_1 x_2 x_4 + Zmx_1 x_2^2 + Zmx_1 x_4^2 + mx_1^2 x_3 x_5)}{mx_1^2 + B} \\ - \frac{(C^2 - BC - CZ^2 m)x_4 x_5 + m(C - B)x_1^2 x_4 x_5 + 2CZmx_2 x_5 + Zm(A - B + C)x_1 x_3 x_4}{(Amx_1^2 + CmZ^2 + AC)} \\ \frac{mx_3 x_5 x_1^2 + (Zmx_3^2 + Zmx_4^2 - 2mx_2 x_4 - Zk)x_1 - Ax_3 x_5 + Czq_x x_2}{mx_1^2 + B} \\ \frac{(A - B)x_3 x_4}{C} - \frac{m((A^2 - AB + AC)x_1 x_3 x_4 + 2ACx_2 x_5 + (BCZ - ACZ + C^2 Z)x_4 x_5)x_1}{C(CZ^2 m + Amx_1^2 + AC)} \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

3.2.2 Modelo Pêndulo

Para o modelo pêndulo foi utilizado o modelo proposto por Dodge (2000) esquematicamente representado na Figura 3.4.

Figura 3.4 - Modelo Mecânico Equivalente para o sistema de pêndulo planar correspondente ao modo 1



Fonte: Produção do autor

Analogamente à seção 4.2.1 a Energia Cinética do líquido aproximado por um sistema pêndulo equivalente pode ser obtida a partir do vetor posição da massa m em relação ao CM da estrutura, como segue:

$$\vec{r} = l \sin \phi \hat{i} - (Z + l \cos \phi) \hat{k} \quad (3.18)$$

e o vetor velocidade como:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}l \cos \phi - w_y(Z + l \cos \phi) \\ w_x(Z + l \cos \phi) + lw_z \text{sen } \phi \\ \dot{\phi}l \text{sen } \phi - lw_y \text{sen } \phi \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

A Energia Cinética associada ao pêndulo é dada por:

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{m}{2} \begin{bmatrix} \dot{\phi}l \cos \phi - w_y(Z + l \cos \phi) \\ w_x(Z + l \cos \phi) + lw_z \text{sen } \phi \\ \dot{\phi}l \text{sen } \phi - lw_y \text{sen } \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\phi}l \cos \phi - w_y(Z + l \cos \phi) \\ w_x(Z + l \cos \phi) + lw_z \text{sen } \phi \\ \dot{\phi}l \text{sen } \phi - lw_y \text{sen } \phi \end{bmatrix} \\ &= \frac{m}{2} \left[(w_x(Z + l \cos \phi) + lw_z \text{sen } \phi)^2 + (w_y(Z + l \cos \phi) - \dot{\phi}l \cos \phi)^2 + (\dot{\phi}l \text{sen } \phi - lw_y \text{sen } \phi)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Considerando A , B , e C como sendo os momentos principais de inércia da estrutura pode-se escrever que a Energia Cinética total é dada por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (Aw_x^2 + Bw_y^2 + Cw_z^2) + \\ &\quad \frac{m}{2} \left[(w_x(Z + l \cos \phi) + lw_z \text{sen } \phi)^2 + (w_y(Z + l \cos \phi) - \dot{\phi}l \cos \phi)^2 + (\dot{\phi}l \text{sen } \phi - lw_y \text{sen } \phi)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

A Energia Potencial a ser considerada é dada por:

$$V = mgl(1 - \cos \phi) \quad (3.22)$$

Então, a função lagrangiana dada por $L = T - V$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (Aw_x^2 + Bw_y^2 + Cw_z^2) + \\ &\quad \frac{m}{2} \left[(w_x(Z + l \cos \phi) + lw_z \text{sen } \phi)^2 + (w_y(Z + l \cos \phi) - \dot{\phi}l \cos \phi)^2 + (\dot{\phi}l \text{sen } \phi - lw_y \text{sen } \phi)^2 \right] \\ &\quad - mgl(1 - \cos \phi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Com isso pode-se obter a equação do pêndulo utilizando a função lagrangiana e a fórmula de Lagrange para coordenadas generalizadas como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(-lm(lw_y - \dot{\phi}l + Zw_y \cos \phi) \right) \\
&= lm(l\ddot{\phi} - l\dot{w}_y - Z\dot{w}_y \cos \phi + Z\dot{\phi}w_y \sin \phi)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= -lmZ \sin \phi (w_x^2 + w_y^2) - \frac{l^2 m \sin 2\phi}{2} (w_x^2 - w_z^2) + lmZ \dot{\phi} w_y \sin \phi \\
&+ lm(Z \cos \phi + l \cos 2\phi) w_x w_z - lmg \sin \phi
\end{aligned} \tag{3.25}$$

então

$$\begin{aligned}
ml^2 \ddot{\phi} - l^2 m \dot{w}_y + lmg \sin \phi + lmZ \sin \phi (w_x^2 + w_y^2) + \frac{l^2 m \sin 2\phi}{2} (w_x^2 - w_z^2) - \\
lmZ \dot{w}_y \cos \phi - lm(Z \cos \phi + l \cos 2\phi) w_x w_z = q_\phi \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

e

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= -\frac{g}{l} \sin \phi + \left(1 + \frac{Z}{l} \cos \phi \right) \dot{w}_y - \frac{Z}{l} \sin \phi (w_x^2 + w_y^2) - \frac{(\sin 2\phi)}{2} (w_x^2 - w_z^2) \\
&+ \left(\cos 2\phi + \frac{Z}{l} \cos \phi \right) w_x w_z + \frac{q_\phi}{l^2 m} \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Da equação de Lagrange para quase-coordenadas pode-se obter as Equações Modificadas de Euler como segue:

$$\left\{ \frac{\partial L}{\partial w} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial w_x} \\ \frac{\partial L}{\partial w_y} \\ \frac{\partial L}{\partial w_z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} Aw_x + m(Z + l \cos \phi)((Z + l \cos \phi)w_x + l \sin \phi w_z) \\ Bw_y + l^2 m \dot{w}_y + Z^2 m w_y - l^2 m \dot{\phi} - Zlm \cos \phi \dot{\phi} + 2Zlm \cos \phi w_y \\ Cw_z + lm \sin \phi (w_x(Z + l \cos \phi) + lw_z \sin \phi) \end{array} \right\} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial w} \right) \right\} &= \frac{d}{dt} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial w_x} \\ \frac{\partial L}{\partial w_y} \\ \frac{\partial L}{\partial w_z} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} A\dot{w}_x + m(Z + l \cos \phi)(\dot{w}_x(Z + l \cos \phi) + l\dot{w}_z \text{sen } \phi + l\dot{\phi} \cos \phi w_z - l\dot{\phi} \text{sen } \phi w_x) - l m \dot{\phi} \text{sen } \phi (w_x(Z + l \cos \phi) + l \text{sen } \phi w_z) \\ B\dot{w}_y + Z^2 m \dot{w}_y - l^2 m \ddot{\phi} + l^2 m \dot{\phi} + Z l m \ddot{\phi} \cos \phi + 2 Z l m \dot{w}_y \cos \phi + Z l m \dot{\phi} \text{sen } \phi \dot{\phi} - 2 Z l m \dot{\phi} \text{sen } \phi w_y \\ C\dot{w}_z + l m \text{sen } \phi (\dot{w}_x(Z + l \cos \phi) + l\dot{w}_z \text{sen } \phi + l \dot{\phi} \text{sen } \phi w_x) + l m \dot{\phi} \cos \phi (w_x(Z + l \cos \phi) + l \text{sen } \phi w_z) \end{array} \right\} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{w}] \left\{ \frac{\partial L}{\partial w} \right\} &= \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial w_x} \\ \frac{\partial L}{\partial w_y} \\ \frac{\partial L}{\partial w_z} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} w_y (C w_z + (l^2 m w_x \text{sen } 2\phi) / 2 + l^2 m w_z \text{sen } \phi^2 + Z l m w_x \text{sen } \phi) - w_z (B w_y + l^2 m w_y + Z^2 m w_y - \dot{\phi} l^2 m - Z \dot{\phi} l m \cos \phi + 2 Z l m w_y \cos \phi) \\ w_z (A w_x + m(Z + l \cos \phi)(Z w_x + l w_x \cos \phi + l w_z \text{sen } \phi)) - w_x (C w_z + (l^2 m w_x \text{sen } 2\phi) / 2 + l^2 m w_z \text{sen }^2 \phi + Z l m w_x \text{sen } \phi) \\ B w_x w_y - A w_x w_y - \dot{\phi} l^2 m w_x + l^2 m w_x w_y - l^2 m w_x w_y \cos \phi^2 - l^2 m w_x w_y \cos \phi \text{sen } \phi - Z \dot{\phi} l m w_x \cos \phi - Z l m w_y w_z \text{sen } \phi \end{array} \right\} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [A\dot{w}_x + w_y(Cw_z + \frac{l^2mw_x \text{sen } 2\phi}{2} + l^2mw_z \text{sen}^2 \phi + Zlmw_x \text{sen } \phi) - w_z(Bw_y + l^2mw_y + Z^2mw_y - \phi l^2m - Z\phi lm \cos \phi + 2Zlmw_y \cos \phi) + \\ m(Z + l \cos \phi)(Z\dot{w}_x + l\dot{w}_x \cos \phi + l\dot{w}_z \text{sen } \phi + \phi l w_z \cos \phi - \phi l w_x \text{sen } \phi) - \phi lm \text{sen } \phi(Zw_x + lw_x \cos \phi + lw_x \text{sen } \phi)] \\ [B\dot{w}_y + w_z(Aw_x + m(Z + l \cos \phi)(Zw_x + lw_x \cos \phi + lw_z \text{sen } \phi)) - w_x(Cw_z + (l^2mw_x \text{sen } 2\phi)/2 + l^2mw_z \text{sen } \phi^2 + Zlmw_x \text{sen } \phi) + l^2m\dot{w}_y + Z^2m\dot{w}_y - \\ \phi l^2m + Z\phi^2lm \text{sen } \phi - Z\phi lm \cos \phi + 2Zlm\dot{w}_y \cos \phi - 2Z\phi lmw_y \text{sen } \phi] \\ [C\dot{w}_z - Aw_xw_y + Bw_xw_y + (l^2m\dot{w}_x \text{sen } 2\phi)/2 + l^2m\dot{w}_z \text{sen } \phi^2 + \phi l^2mw_z \text{sen } 2\phi - 2\phi l^2mw_x \text{sen } \phi^2 - (l^2mw_yw_z \text{sen } 2\phi)/2 + \\ l^2mw_xw_y \text{sen } \phi^2 + Zlm\dot{w}_x \text{sen } \phi - Zlmw_yw_z \text{sen } \phi] \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Considerando que não há torques externos, e fazendo $\phi = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\ddot{x}_1 = \dot{x}_3$, $w_x = x_3$, $w_y = x_4$, $w_z = x_5$, temos:

x_2

$$\left. \begin{aligned}
& -(4gl^3m^2 \text{sen } x_1 - 4Bqx_2 - 4Z^2mqx_2 - 4l^2mqx_2 - 4Zgl^2m^2 \text{sen } 2x_1 + 4Zl^3m^2x_2^2 \text{sen } x_1 + 4Z^3l^3m^2x_3^2 \text{sen } x_1 + 4Zl^3m^2x_4^2 \text{sen } x_1 + 4Z^3l^3m^2x_5^2 \text{sen } 3x_1 - Zl^3m^2x_3^2 \text{sen } 3x_1 + 4Z^2l^2m^2x_3x_5 + 4Z^2glm^2 \text{sen } x_1 + 4A^2mx_3x_5 - 4C^2mx_3x_5 + 4Bglm \text{sen } x_1 + 2Zl^2m^2x_2^2 \text{sen } 2x_1 + 4Z^2l^2m^2x_3^2 \text{sen } 2x_1 + 2Bl^2mx_3^2 \text{sen } 2x_1 - 2Bl^2mx_3^2 \text{sen } 2x_1 - 4Bl^2mx_3x_5 \cos 2x_1 + 2Zl^3m^2x_2x_4 \text{sen } x_1 - 8Zl^3m^2x_2x_4 \text{sen } x_1 - 8Zl^3m^2x_3x_5 \cos x_1 - 4BZl^2mx_3x_5 \cos x_1 - 4BZl^2mx_3x_5 \cos x_1 - 4Z^2l^2m^2x_3x_5 \cos 2x_1 - 4Z^2l^2m^2x_2x_4 \text{sen } 2x_1 + 4AZl^2mx_3x_5 \cos x_1 - 4BZl^2mx_3x_5 \cos x_1 - 4CZl^2mx_3x_5 \cos x_1)/(2l^2m \cos 2x_1)) \\
& -(2C^2x_4x_5 - 2BCx_4x_5 - 2CZ^2mx_4x_5 - Bl^2mx_4x_5 + 2Cl^2mx_2x_5 + Bl^2mx_4x_5 \cos 2x_1 + 2Cl^2mx_2x_5 \cos 2x_1 - 2Cl^2mx_4x_5 \cos 2x_1 + 2AZl^2mx_3x_4 \text{sen } 2x_1 - Bl^2mx_3x_4 \text{sen } 2x_1 - 2Cl^2mx_2x_3 \text{sen } 2x_1 + Cl^2mx_3x_4 \text{sen } 2x_1 + 4CZl^2mx_2x_5 \cos x_1 - 4CZl^2mx_4x_5 \cos x_1 + 2AZl^2mx_3x_4 \text{sen } x_1 - 4CZl^2mx_3x_4 \text{sen } x_1 + 2CZl^2mx_2x_3 \text{sen } x_1 + 2CZl^2mx_3x_4 \text{sen } x_1)/(2(AC + CZ^2m + A^2m - Al^2m \cos x_1^2 + Cl^2m \cos x_1^2 + 2CZl^2m \cos x_1)) \\
& -(2gl^2m \text{sen } x_1 - 2Zqx_2 \cos x_1 - 2lqx_2 + 2Alx_3x_5 - 2Clx_3x_5 + Z^2lmx_3^2 \text{sen } 2x_1 + Z^2lmx_4^2 \text{sen } 2x_1 - 2Zl^2mx_3^2 \text{sen }^3 x_1 + 2Zl^2mx_4^2 \text{sen }^3 x_1 + Zglm \text{sen } 2x_1 + 2Zl^2mx_2^2 \text{sen } x_1 + 2Zl^2mx_3^2 \text{sen } x_1 + 2Zl^2mx_4^2 \text{sen } x_1 + 2Z^2lmx_3x_5 \cos^2 x_1 - 4Zl^2mx_3x_5 \cos^3 x_1 + 4Zl^2mx_3x_5 \cos x_1 - 4Zl^2mx_2x_4 \text{sen } x_1)/(2l(B + Z^2m - Z^2m \cos^2 x_1)) \\
& (2A^2x_3x_4 - 2ABx_3x_4 + 2AZ^2mx_3x_4 - 2BZ^2mx_3x_4 + 2A^2mx_2x_3 - Bl^2mx_2x_3 - Bl^2mx_3x_4 - 2A^2mx_2x_4 \cos 2x_1 + 2A^2mx_3x_4 \cos 2x_1 - Bl^2mx_3x_4 \cos 2x_1 - 2A^2mx_2x_5 \text{sen } 2x_1 + A^2mx_4x_5 \text{sen } 2x_1 - Bl^2mx_4x_5 \text{sen } 2x_1 + Cl^2mx_4x_5 \text{sen } 2x_1 + 4AZl^2mx_3x_4 \cos x_1 - 4BZl^2mx_3x_4 \cos x_1 + 2AZl^2mx_4x_5 \text{sen } x_1 - 2BZl^2mx_4x_5 \text{sen } x_1 + 2CZl^2mx_4x_5 \text{sen } x_1)/(2(AC + CZ^2m + A^2m - Al^2m \cos^2 x_1 + Cl^2m \cos^2 x_1 + 2CZl^2m \cos x_1))
\end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{array} \right. = \left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

3.3 Simulações

A seguir apresentamos os resultados das diversas simulações envolvendo os dois modelos discutidos neste Capítulo, tanto em ambiente de micro-gravidade como em ambiente de gravidade. Foi aplicado o método Runge-Kuta 4 para a integração das equações diferenciais utilizando-se o aplicativo MATLAB.

A Tabela 3.1 fornece os valores dos parâmetros referentes a estrutura e ao recipiente com líquido responsável pelo *sloshing* comuns aos modelos Massa-Mola e Pêndulo.

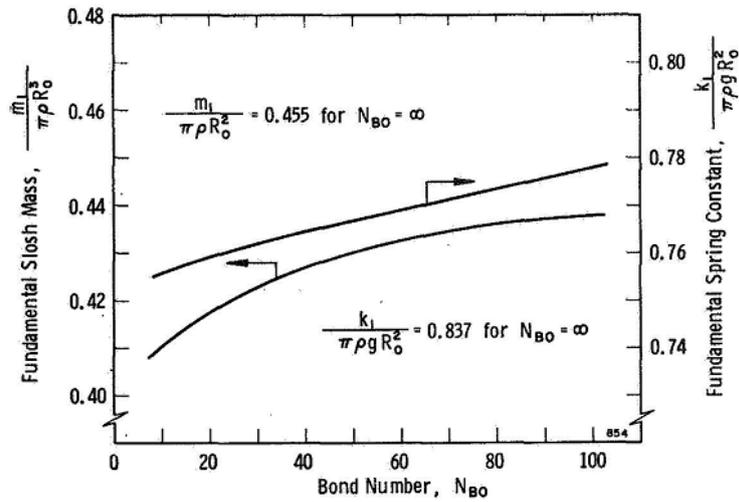
Tabela 3.1 - Parâmetros da estrutura e do recipiente com líquido

Parâmetros	Valores
Momento de inércia da estrutura no eixo X	$A = 9,18kgm^2$
Momento de inércia da estrutura no eixo Y	$B = 9,90kgm^2$
Momento de inércia da estrutura no eixo Z	$C = 11,07kgm^2$
Raio do recipiente com líquido	$R = 0,1m$
Altura do líquido	$h = 3R$
Densidade do líquido	$\rho = 1.000kg/m^3$
Viscosidade dinâmica do líquido	$\mu = 10^{-3}Ns/m^2$
Tensão superficial do líquido	$\sigma = 0,07N/m$

Para o modelo massa-mola a massa equivalente m_1 e a constante elástica equivalente k_1 foram calculadas em função do número de Bond (N_{Bo}) para cada ambiente com base no gráfico proposto por Dodge e Garza (1967), ver Figura 3.5. Neste gráfico, o menor número de de Bond é $N_{Bo} = 10$ o que implica em uma aceleração da gravidade de $g = 0,07m/s^2$ ($N_{Bo} = \rho g R^2 / \sigma$). Este valor ainda é muito alto para ser considerado como micro-gravidade, porém pode ser usado para se fazer uma análise comparativa entre os dois modelos. A distância entre o centro de massa da estrutura e a massa m_1 é dada por $Z_1 = 0,1m$ para todos os ambientes.

No modelo Pêndulo, conforme Dodge (2000), a massa do pêndulo correspondente ao modo 1 de vibração pode ser calculada através da expressão $m_1 = \pi \rho R^2 h (2R \tanh(\xi_1 h / R) / (\xi_1 (\xi_1^2 - 1) h))$ e o comprimento através da expressão $l_1 = R / (\xi_1 \tanh(\xi_1 h / R))$ com $\xi_1 = 1,841$. Para o nosso caso são $m_1 = 1,7998kg$ e $l_1 = 0,0543m$ para todos os ambientes. A distância entre o centro de massa da estrutura e o pivô do pendulo foi calculada para que a massa do pêndulo estivesse na mesma posição da massa do sistema massa-mola, ou seja $Z_1 = 0,0457m$.

Figura 3.5 - Massa e constante elástica do *slosh* fundamental



Fonte: Dodge e Garza (1967)

3.3.1 Ambiente de gravidade normal

Conforme Dodge e Garza (1967) no ambiente de gravidade com $g = 9,81m/s^2$ e $N_{Bo} = \infty$ implica, para o modelo massa-mola, em $m_1 = 0,455\pi\rho R^3$ para a massa e $k_1 = 0,837\pi\rho g R^2$ para a constante elástica da mola envolvidas no modelo, que no caso aqui considerado é $m_1 = 1,429kg$ e $k_1 = 257,95N/m$.

3.3.1.1 *Sloshing* atuando como amortecedor de nutação

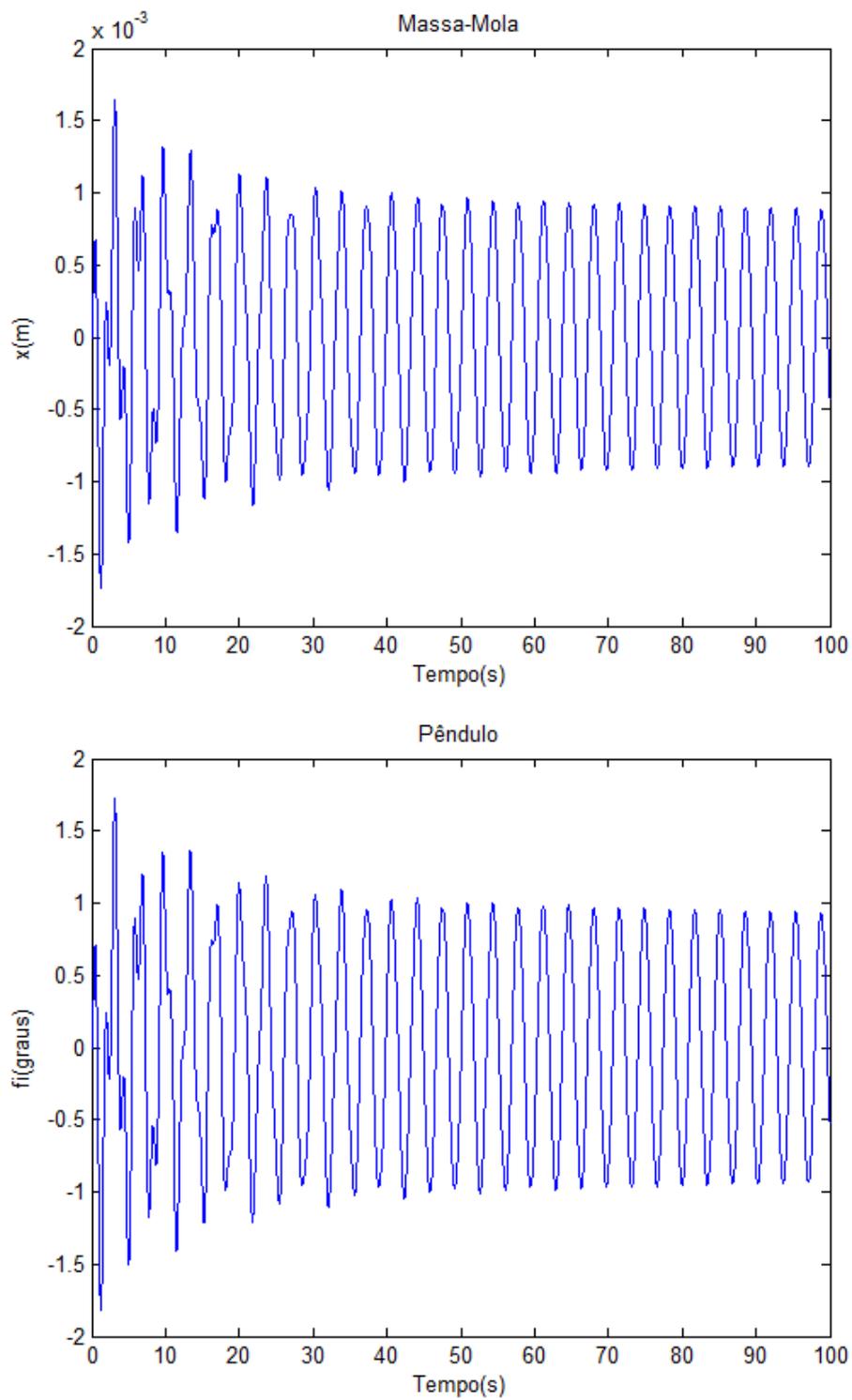
A nutação refere-se ao movimento de cone do vetor velocidade angular em torno do vetor quantidade de movimento angular de veículos em órbita da Terra. Essa terminologia não é única mas é a mais utilizada na área de dinâmica de satélites artificiais, onde o ambiente é de microgravidade. Nutação como usada aqui difere do conceito de nutação usado na Física. Por esta razão alguns autores usam precessão em vez de nutação, para tal movimento de cone em torno do vetor quantidade de movimento angular, devido a similaridade com o movimento de precessão, como abordada na Física. Outra observação é que em dinâmica orbital de veículos espaciais o conceito se aplica para o movimento rotacional livre de torque externo. Dissipadores internos de energia são utilizados para manter a estabilidade direcional dos satélites em rotação em torno do seu eixo de maior momento de inércia.

Neste contexto os amortecedores de nutação atuam passivamente para manter a estabilidade direcional do veículo espacial em órbita da Terra.

Nesta simulação considerou-se as seguintes condições iniciais: $w_x = 0,1rpm$, $w_y = 0,1rpm$ e $w_z = 120rpm$ para os dois modelos, $x = 0$ para o massa-mola e $\phi = 0$ para o pêndulo. A Figura 3.6 mostra o comportamento da massa m_1 no tempo para os intervalos de tempo entre 0 e 100s e a Figura 3.7 entre 0 e 4.000s.

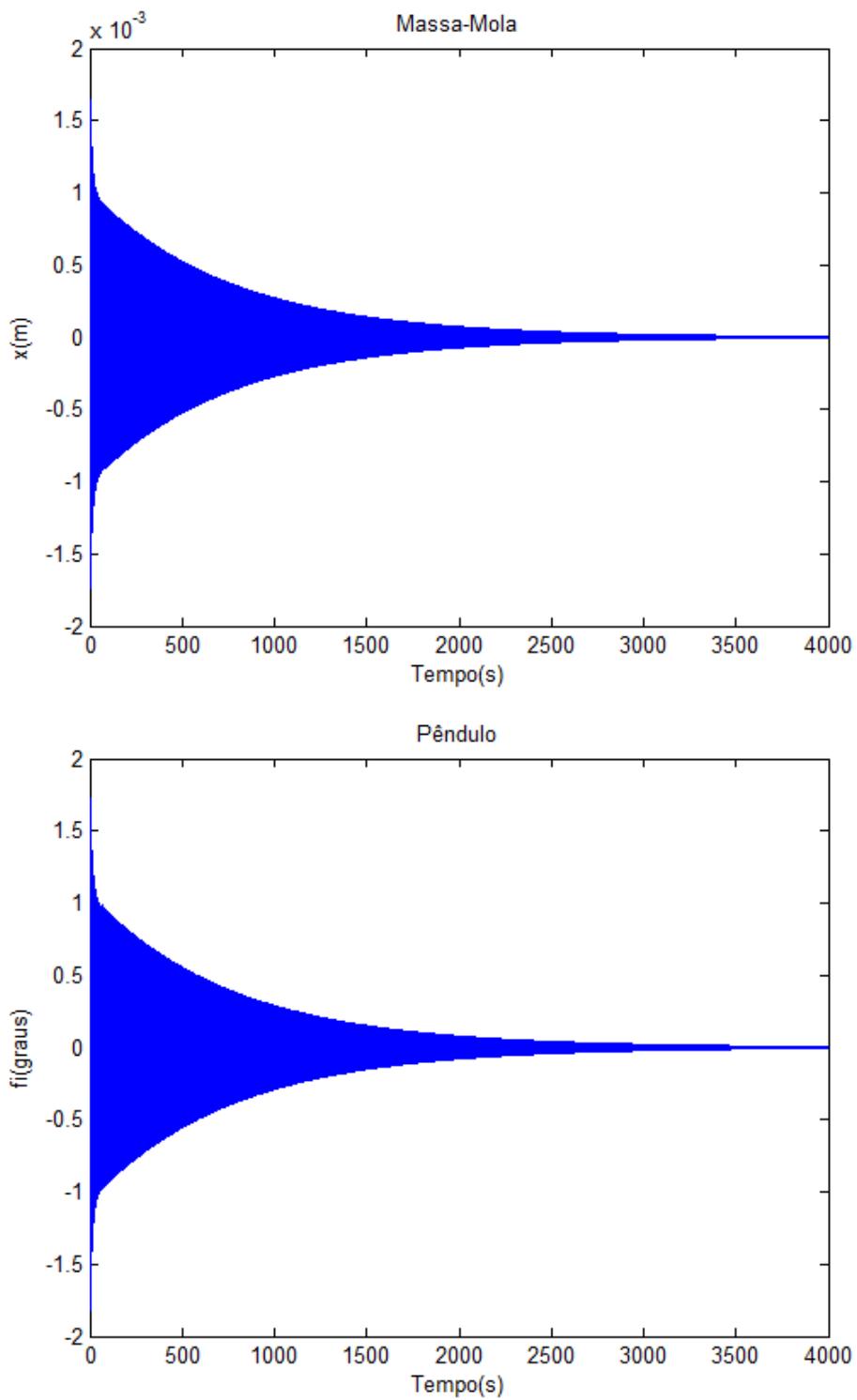
As Figuras 3.8, 3.9 e 3.10 mostram o comportamento das velocidades angulares transversais w_x e w_y no tempo. As Figura 3.11 e 3.12 mostram o decaimento do ângulo de nutação, θ e da quantidade de movimento transversal dada por $H_t = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$ onde H_x é a quantidade de movimento na direção x e H_y é a quantidade de movimento na direção y . E a Figura 3.13 mostra o comportamento das componentes transversais da quantidade de movimento angular.

Figura 3.6 - Comportamento do deslocamento da massa m_1 no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a 100s



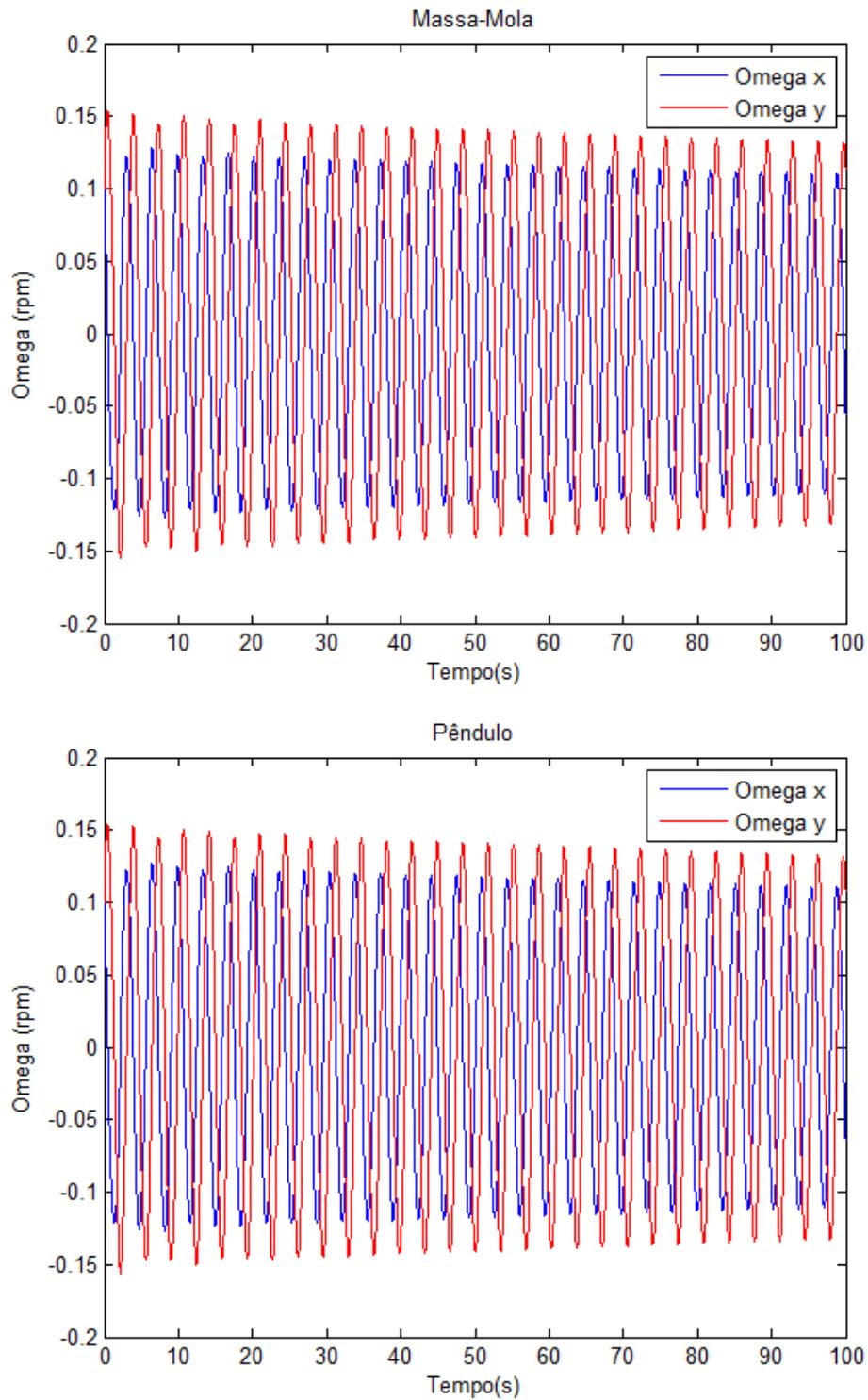
Fonte: Produção do autor

Figura 3.7 - Comportamento do deslocamento da massa m_1 no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a 4.000s



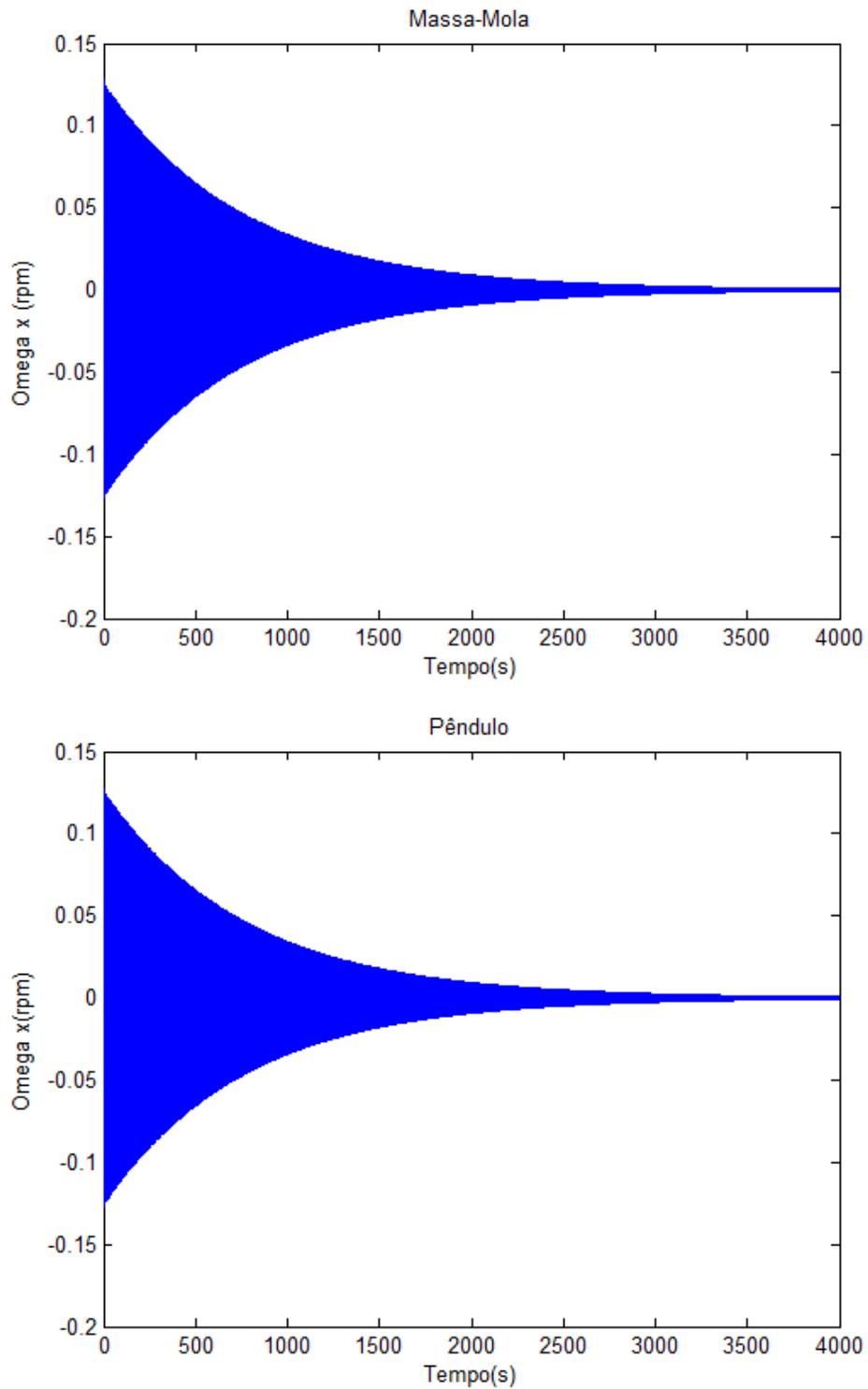
Fonte: Produção do autor

Figura 3.8 - Decaimento das velocidades angulares transversais w_x e w_y no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a 100s



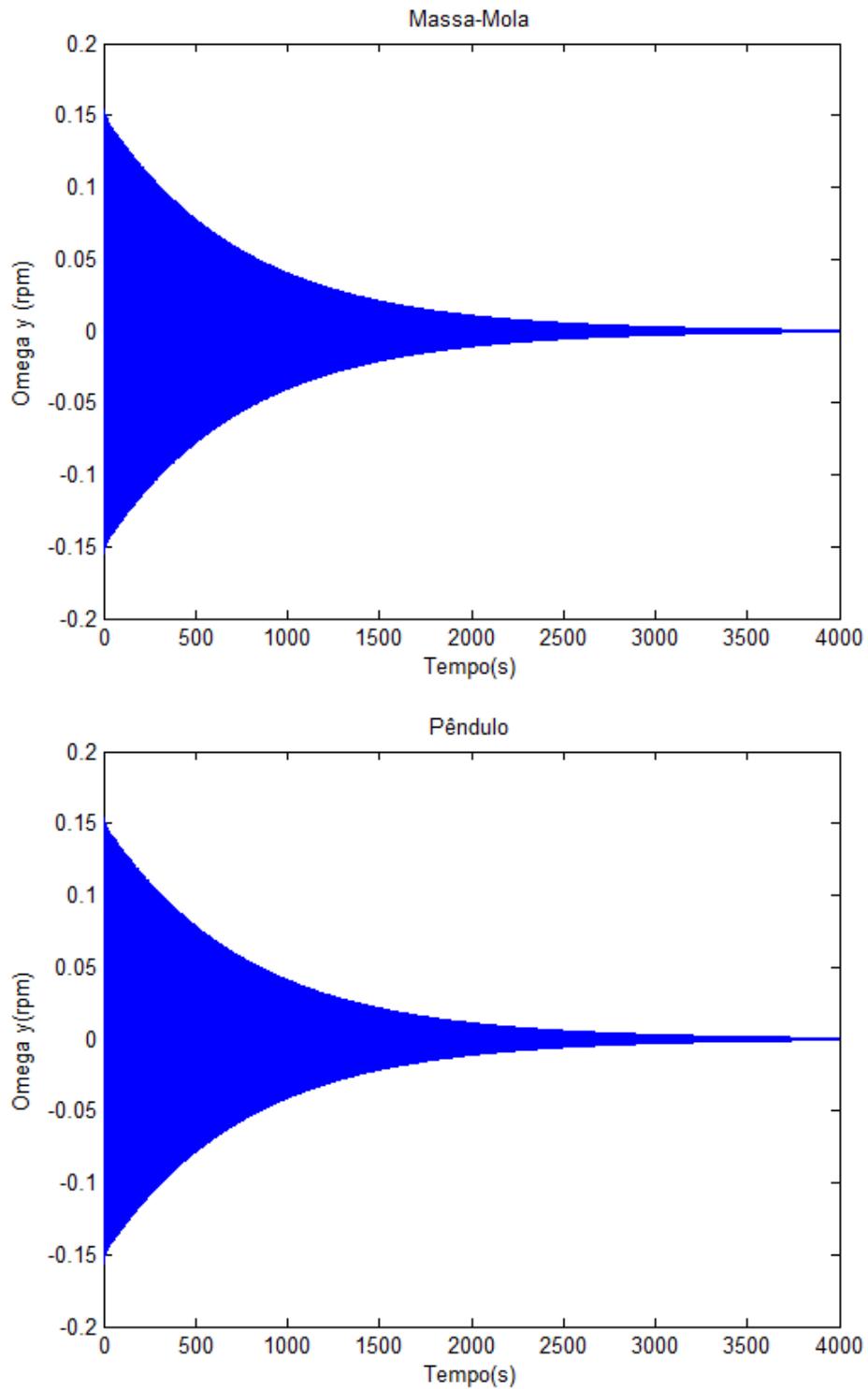
Fonte: Produção do autor

Figura 3.9 - Decaimento da velocidade angular transversal w_x no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a 4.000s



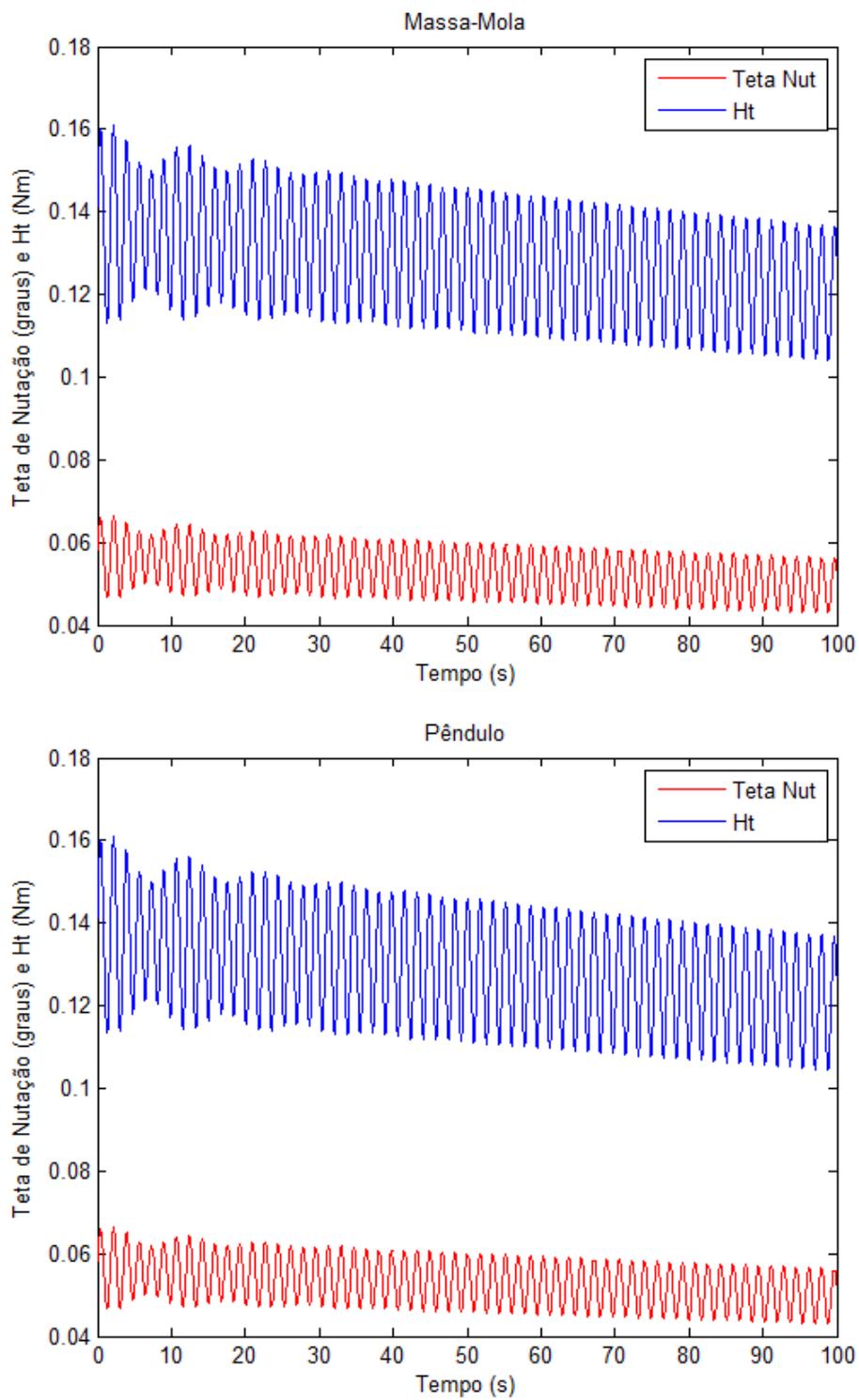
Fonte: Produção do autor

Figura 3.10 - Decaimento da velocidade angular transversal w_y no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a 4.000s



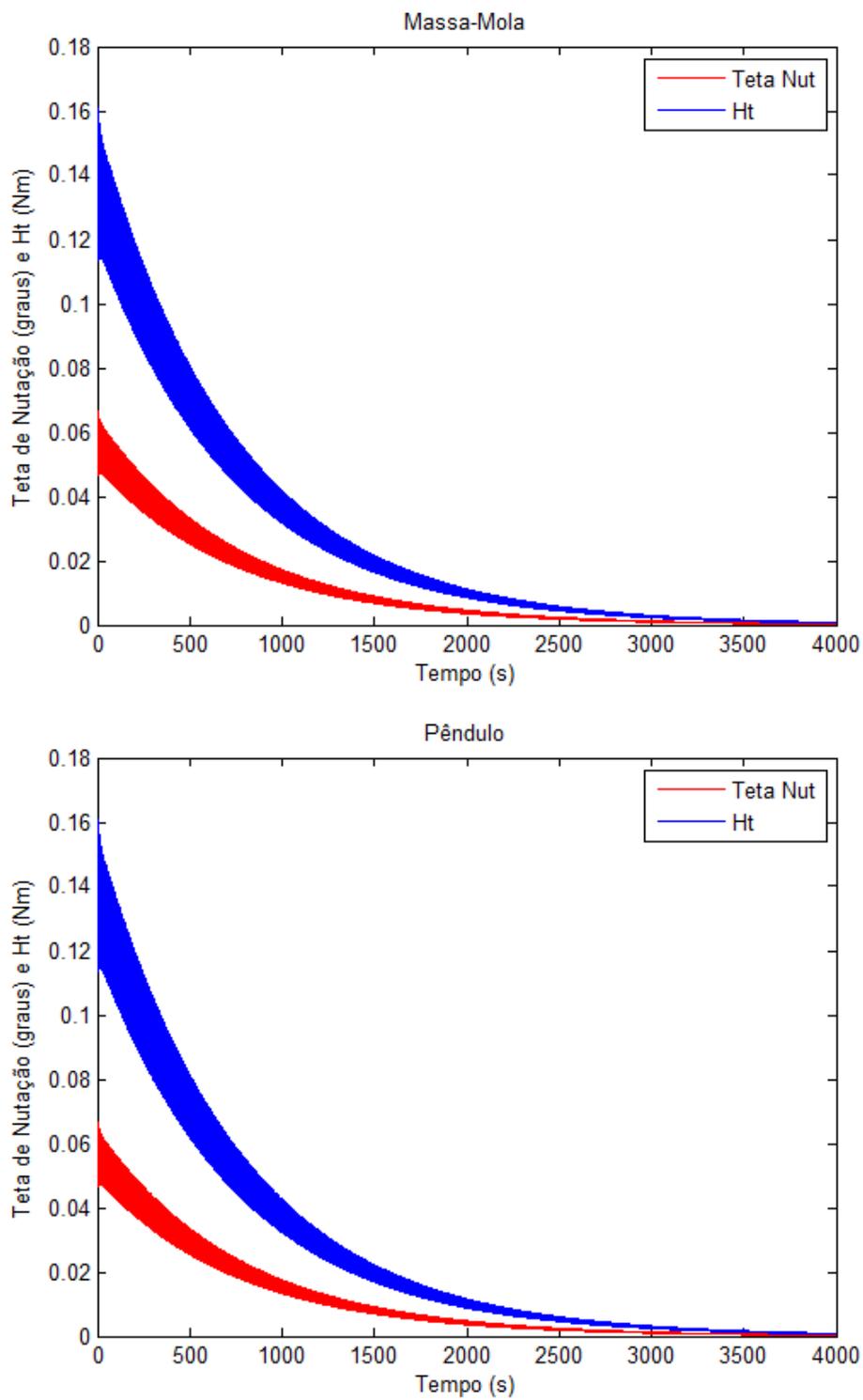
Fonte: Produção do autor

Figura 3.11 - Decaimento do ângulo de natação, θ e H_z no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a 100s



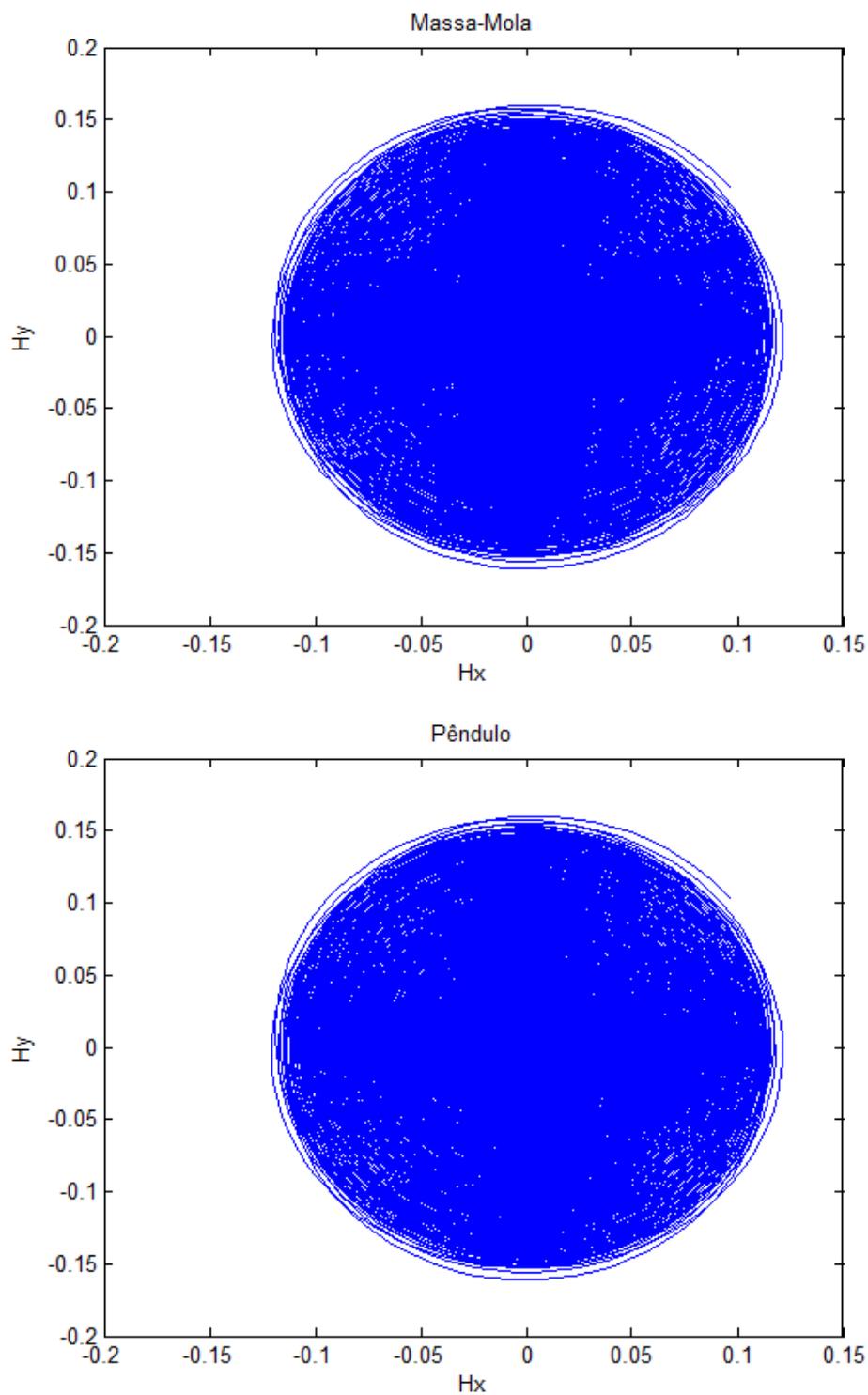
Fonte: Produção do autor

Figura 3.12 - Decaimento do ângulo de nutação, θ e H_z no tempo para $g = 9,81m/s^2$ de 0 a 4.000s



Fonte: Produção do autor

Figura 3.13 - Comportamento das componentes transversais da quantidade de movimento angular para $g = 9,81m/s^2$



Fonte: Produção do autor

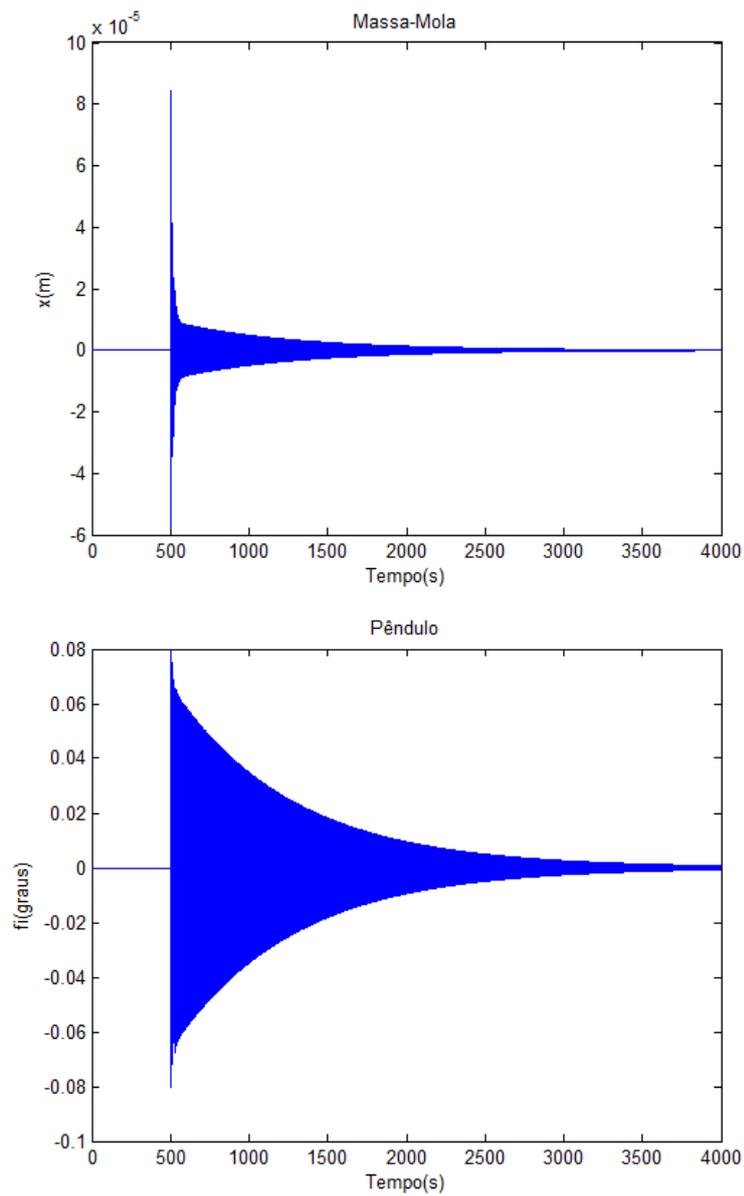
3.3.1.2 Massa líquida em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa

A Figura 3.14 mostra uma massa líquida em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa na direção X que provoca uma aceleração de $10^{-3}m/s^2$ durante $1s$ no instante $t = 500s$. Nesta simulação considerou-se as seguintes condições iniciais: $w_x = 0$, $w_y = 0$ e $w_z = 120rpm$ para os dois modelos, $x = 0$ para o massa-mola e $\phi = 0$ para o pêndulo.

3.3.1.3 Comentários sobre os modelos em ambiente de gravidade normal

No ambiente de gravidade $g = 9,81m/s^2$ os resultados obtidos mostram que os dois modelos têm comportamento suficientemente semelhantes para serem considerados similares. O amortecimento observado é devido à Viscosidade adotada para o líquido nesta simulação.

Figura 3.14 - Comportamento da massa m_1 no tempo decorrente de uma força impulsiva externa para $g = 9,81m/s^2$



Fonte: Produção do autor

3.3.2 Ambiente de baixa gravidade ($g = 0,07m/s^2$)

Nesta subseção a estrutura com o tanque é considerado como satélite em órbita em ambiente de baixa gravidade. Nessas condições tem-se que ajustar os parâmetros do modelo equivalente Massa-mola correspondentes ao ambiente espacial. Do gráfico proposto por Dodge e Garza (1967) com o número de Bond $N_{Bo} = 10$ obtêm-se os valores da massa e da constante elástica da mola envolvidas no modo 1 do modelo massa-mola, ou seja $m_1 = 0,410\pi\rho R^3$ e $k_1 = 0,755\pi\rho g R^2$, que no caso aqui considerado $m_1 = 1,29kg$ e $k_1 = 1,66N/m$.

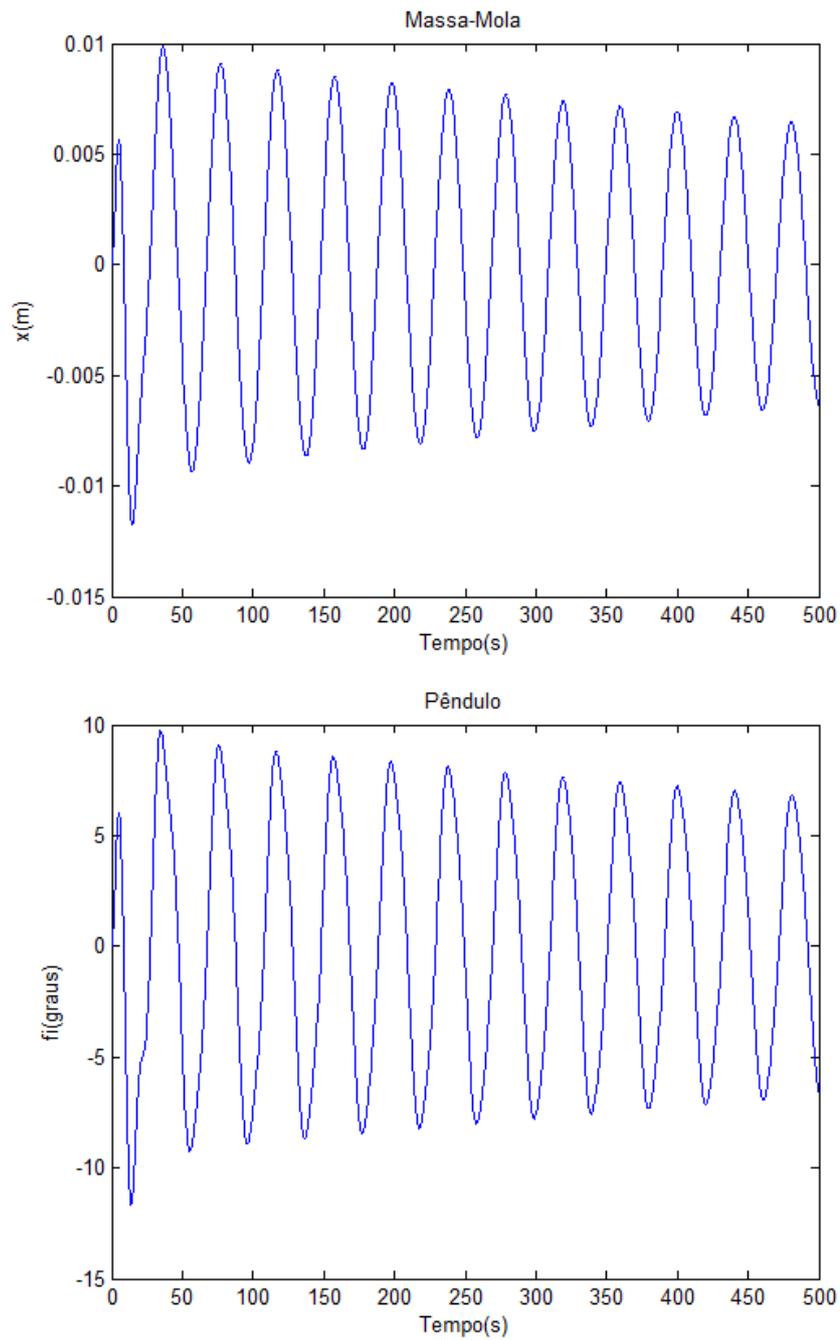
3.3.2.1 *Sloshing* atuando como amortecedor de nutação

Inicialmente simulou-se o *sloshing* atuando como amortecedor de nutação no procedimento de estabilização passiva por *spin*, onde as condições iniciais nas velocidades angulares caracterizadas pela estabilização por rotação em torno do eixo de maior momento de inércia com pequenas componentes de velocidades angulares transversais como perturbação. A dissipação de energia causada pelo *sloshing* deverá eliminar o ângulo de nutação. Nesta simulação considerou-se as seguintes condições iniciais: $w_x = 0,1rpm$, $w_y = 0,1rpm$ e $w_z = 10rpm$ para os dois modelos, $x = 0$ para o massa-mola e $\phi = 0$ para o pêndulo.

As Figuras 3.15 e 3.16 mostram o comportamento da massa m_1 no tempo na direção X para os intervalos de tempo entre 0 e 500s e entre 0 e 5.000s.

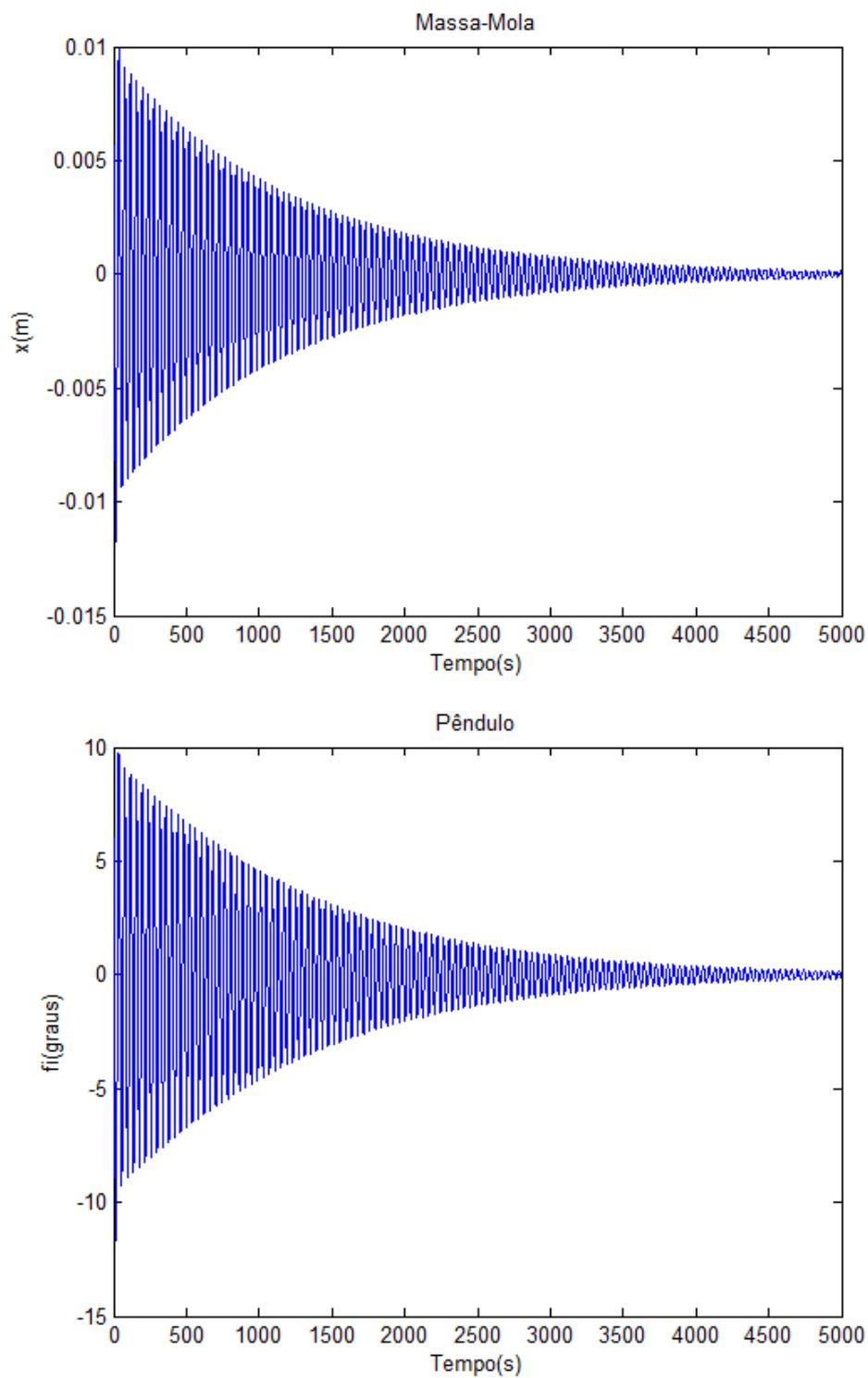
A Figuras 3.17, 3.18 e 3.19 mostram o comportamento das velocidades angulares transversais nos intervalos de tempo de 0 a 500s, e de 0 a 5.000s. As Figuras 3.20 e 3.21 mostram o comportamento do ângulo de nutação θ e da quantidade de movimento transversal H_t também nos intervalos de tempo de 0 a 500s e de 0 a 5.000s. E a Figura 3.22 o comportamento das componentes transversais da quantidade de movimento angular no intervalo de tempo de 0 a 5.000s.

Figura 3.15 - Comportamento do deslocamento da massa m_1 na direção x no tempo para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 500s



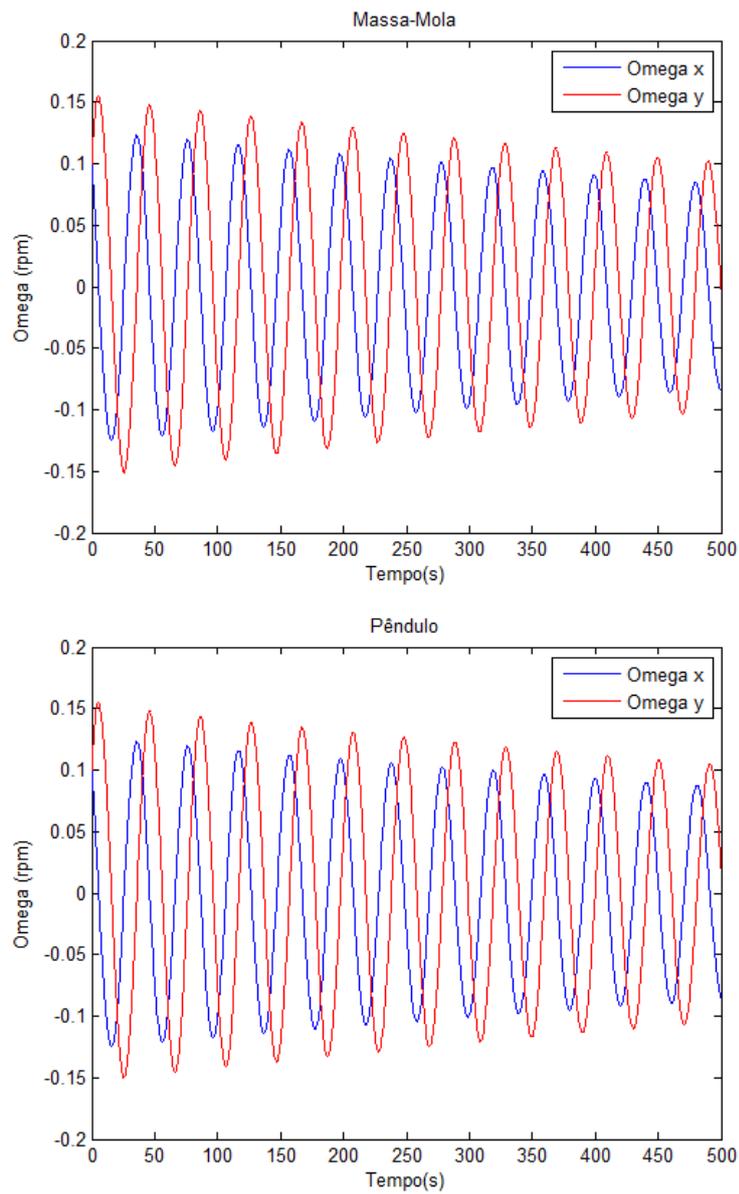
Fonte: Produção do autor

Figura 3.16 - Comportamento do deslocamento da massa m_1 na direção x no tempo para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 5.000s



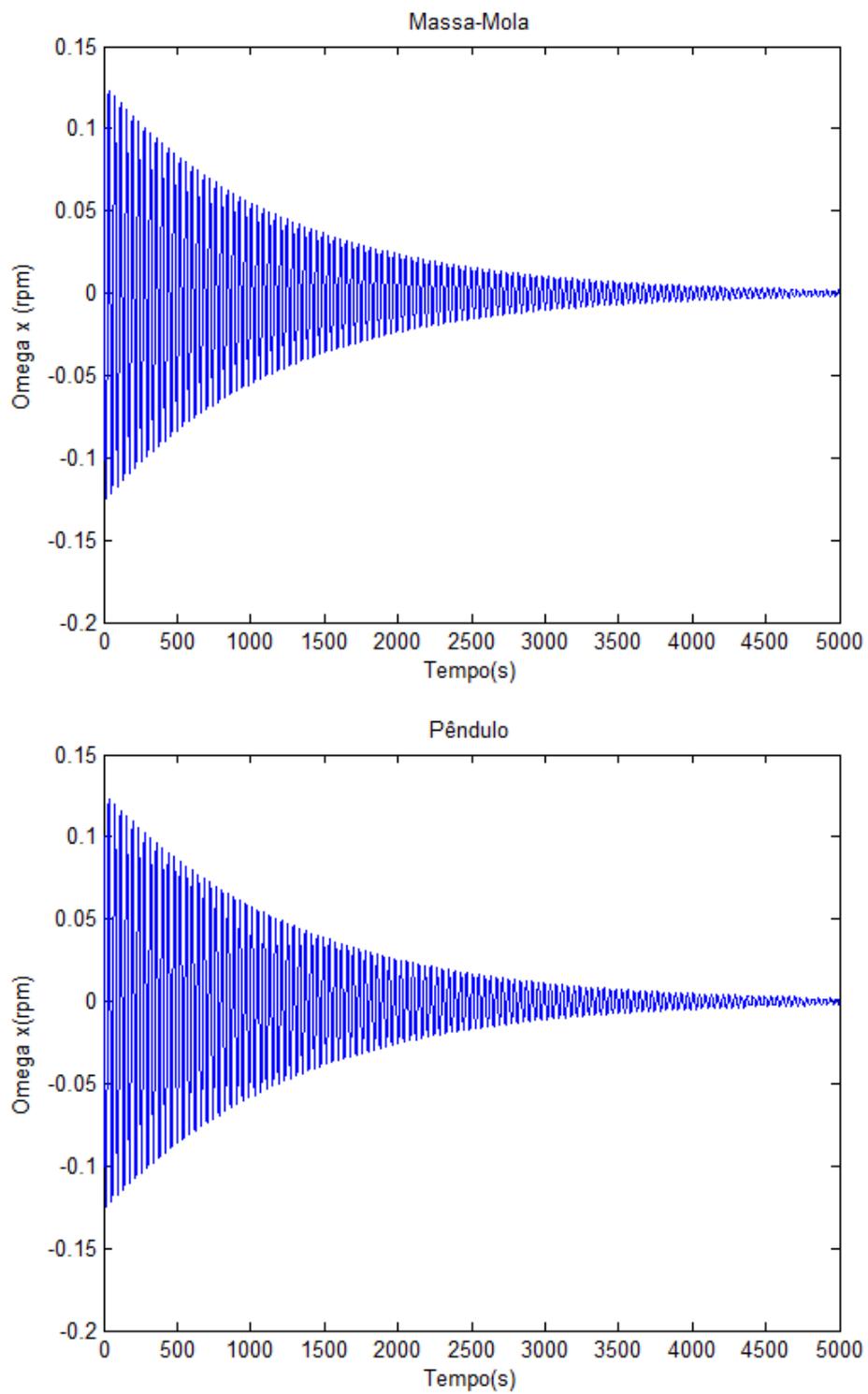
Fonte: Produção do autor

Figura 3.17 - Decaimento das velocidades angulares transversais w_x e w_y para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 500s



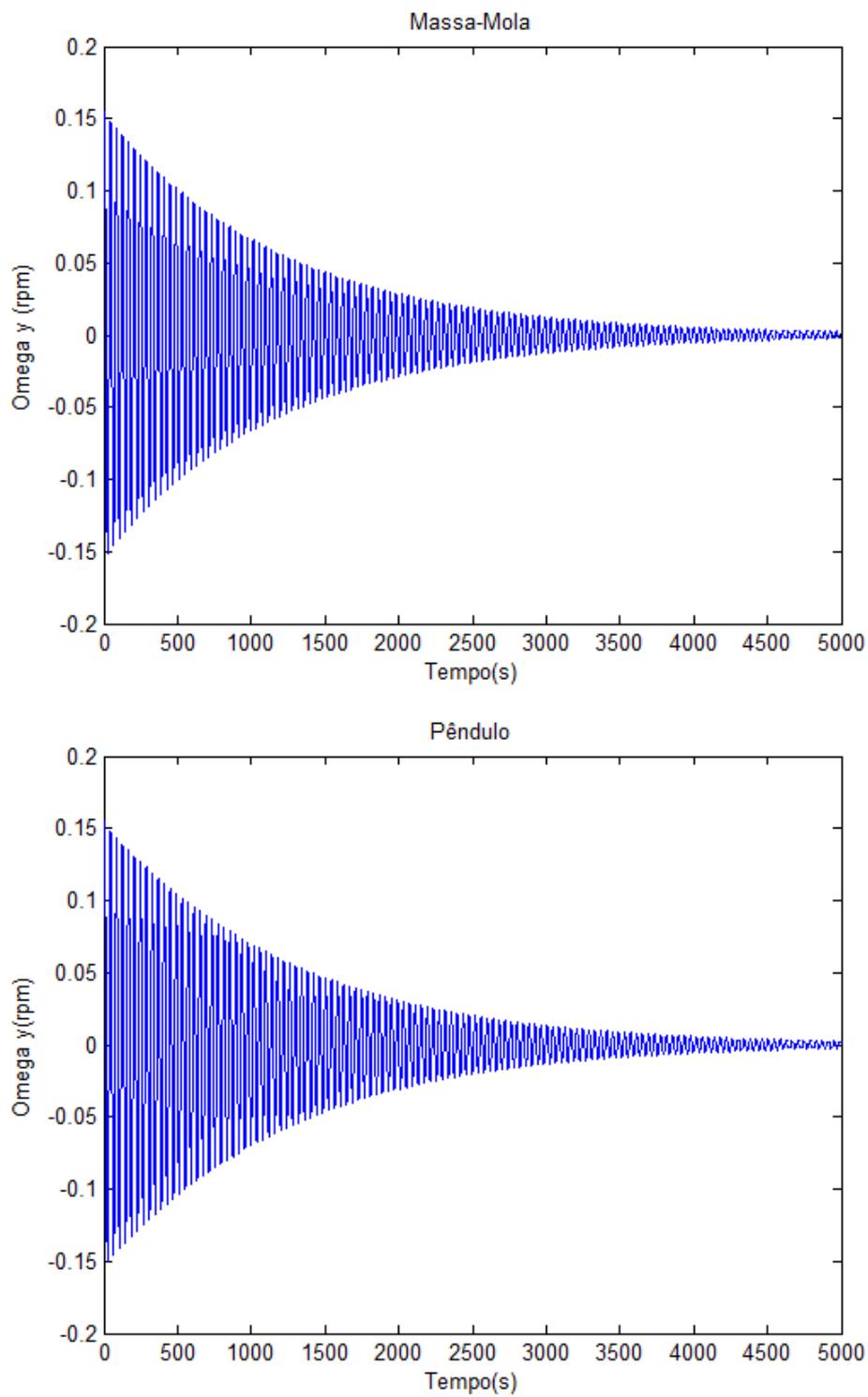
Fonte: Produção do autor

Figura 3.18 - Decaimento da velocidade angular transversal w_x para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 5.000s



Fonte: Produção do autor

Figura 3.19 - Decaimento da velocidade angular transversal w_y para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 5.000s



Fonte: Produção do autor

Figura 3.20 - Decaimento do ângulo de nutilação, θ e H_t no tempo para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 500s

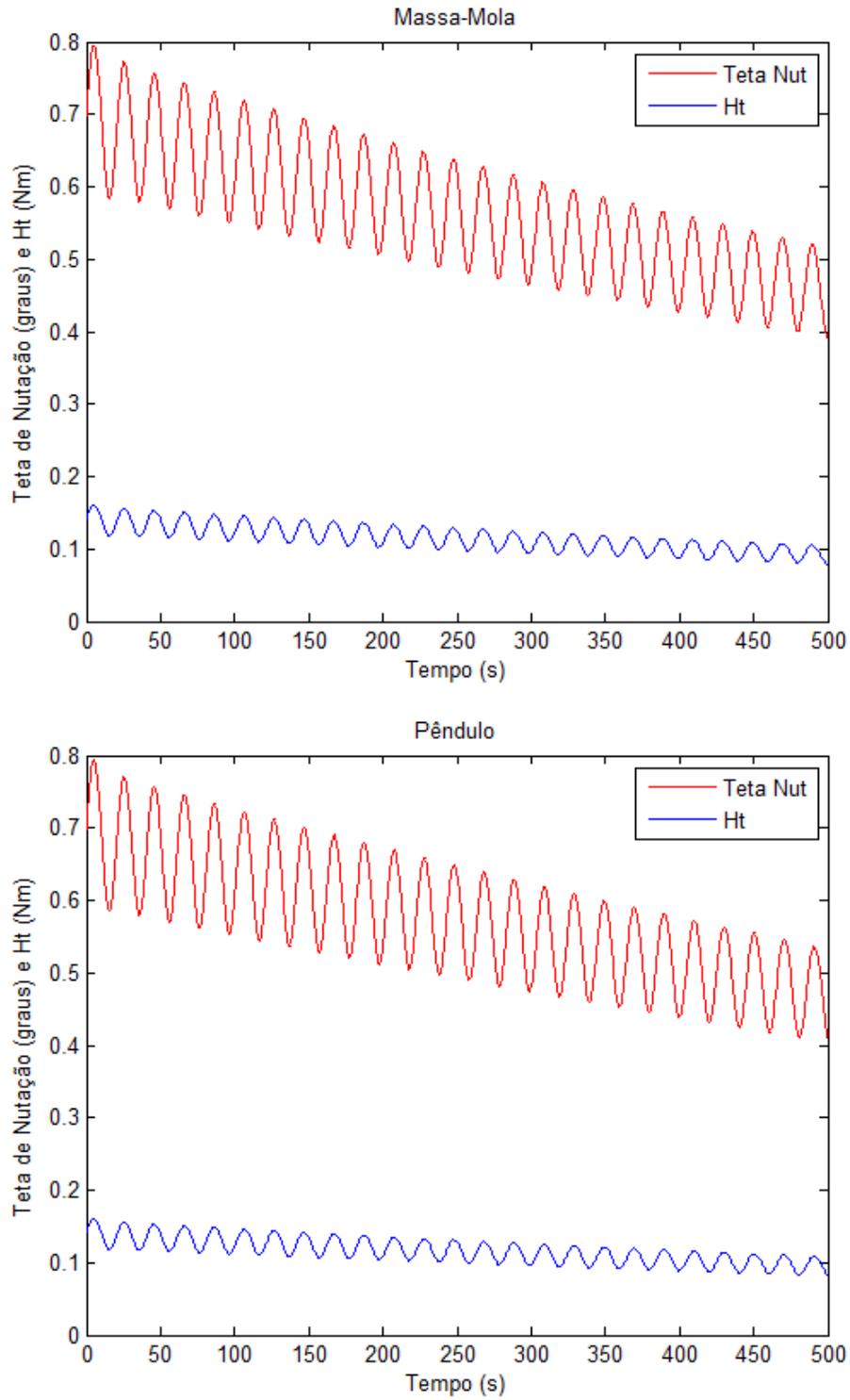
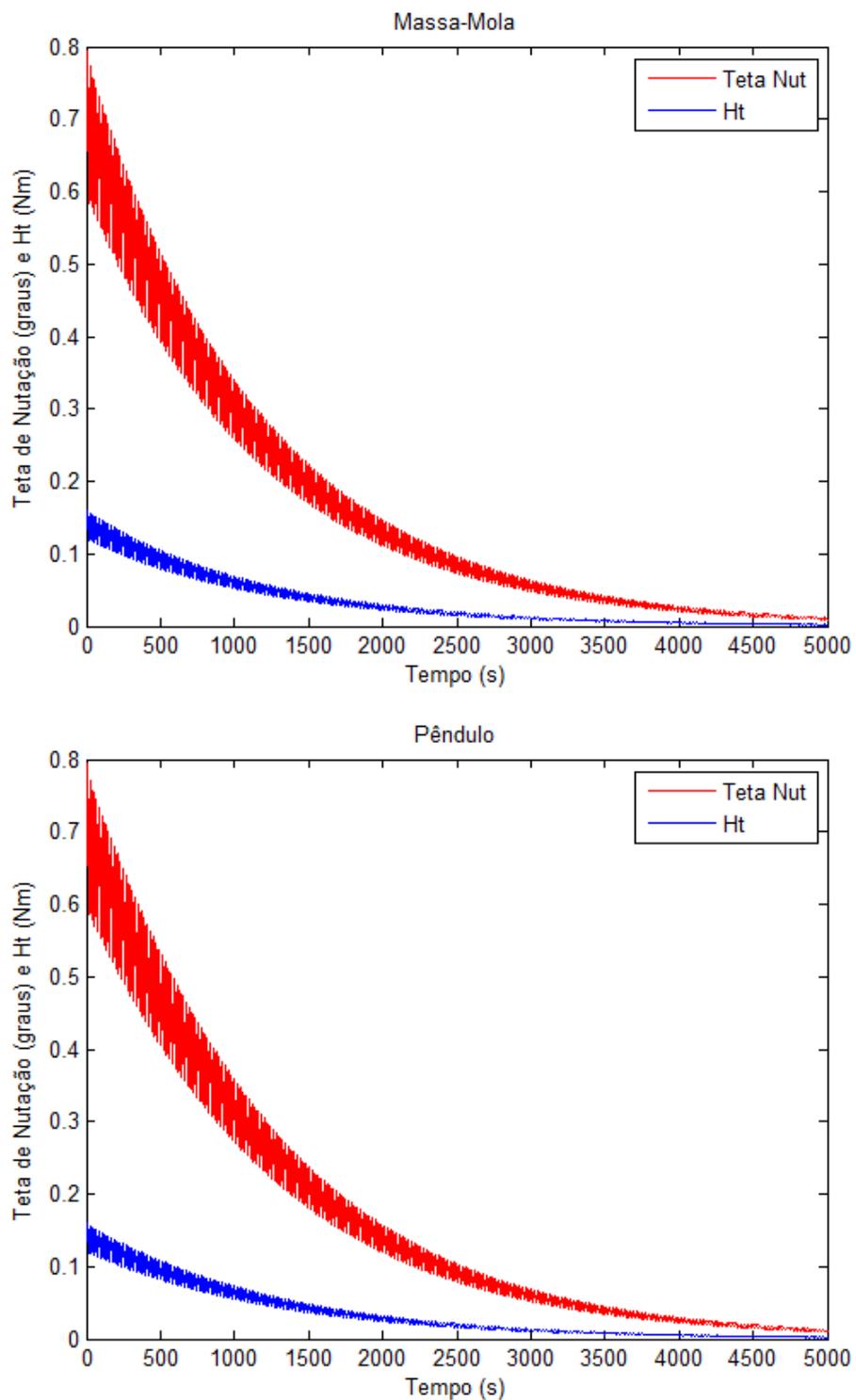
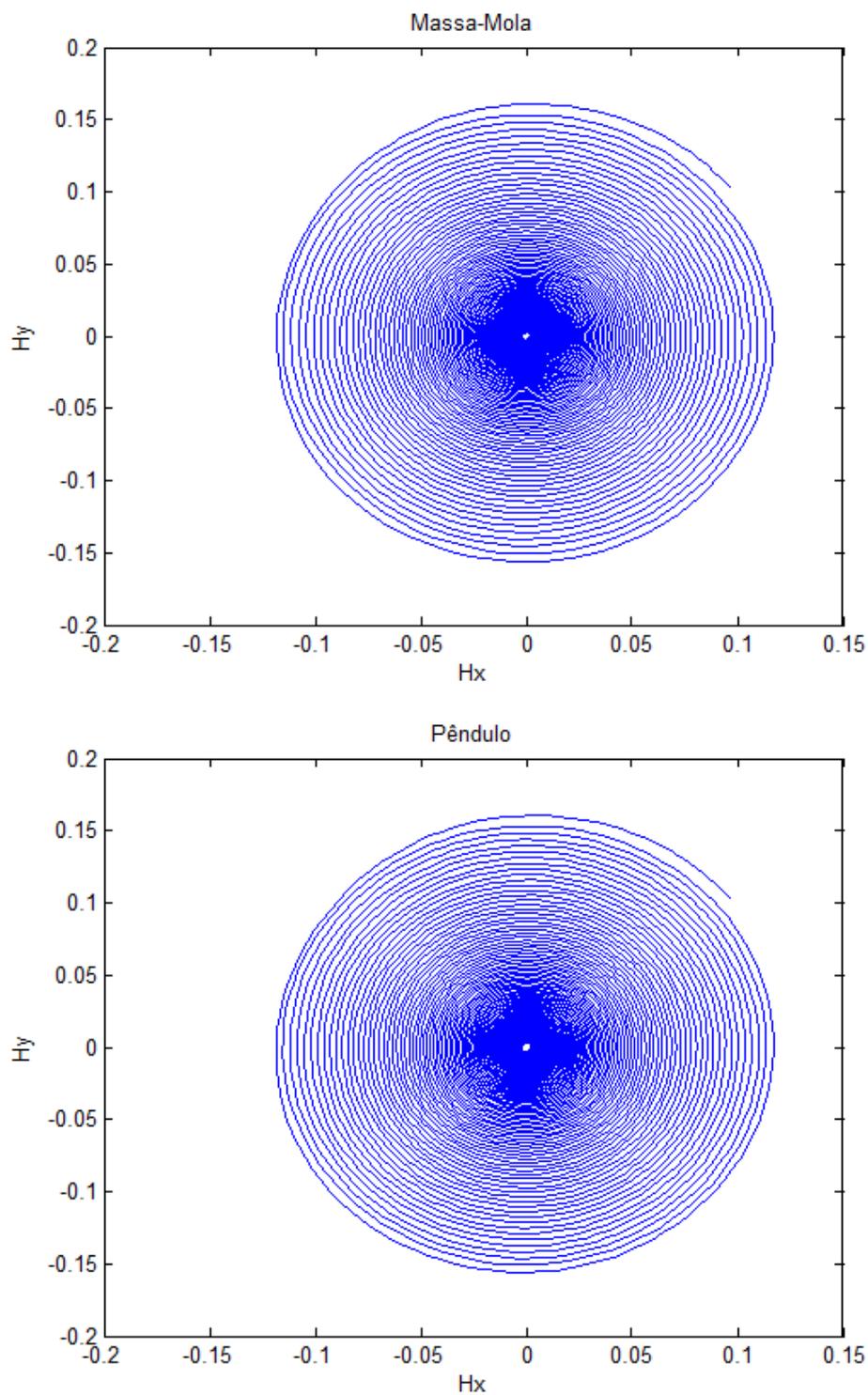


Figura 3.21 - Decaimento do ângulo de nutação, θ e H_t no tempo para $g = 0,07m/s^2$ de 0 a 5.000s



Fonte: Produção do autor

Figura 3.22 - Comportamento das componentes transversais da quantidade de movimento angular para $g = 0,07m/s^2$

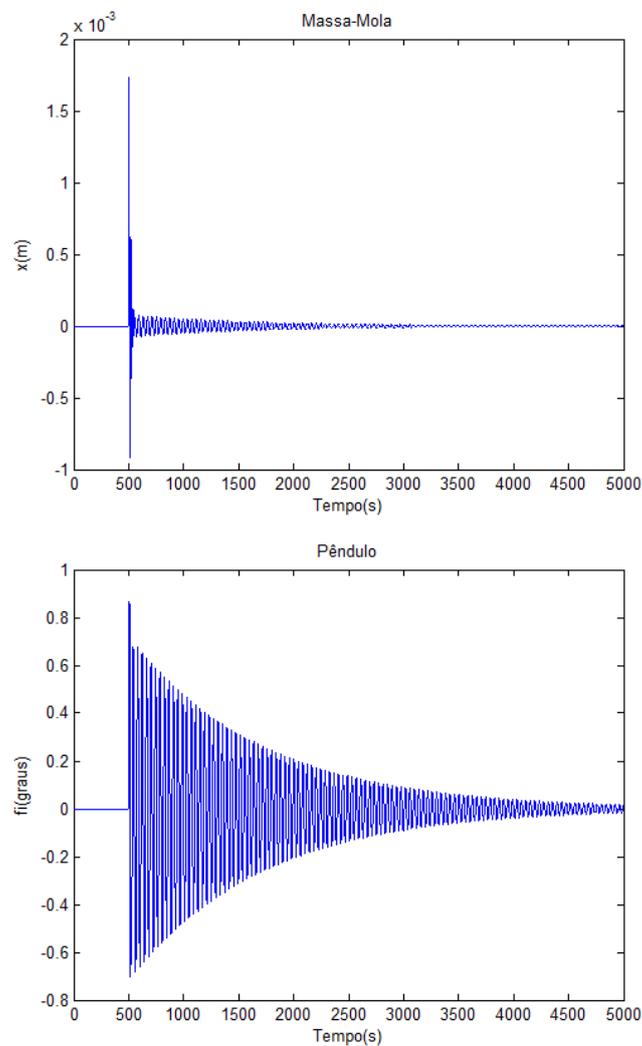


Fonte: Produção do autor

3.3.2.2 Massa líquida em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa

A Figura 3.23 mostra uma massa líquida em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa na direção X que provoca uma aceleração de $10^{-3}m/s$ durante $1s$ no instante $t = 500s$. Nesta simulação considerou-se as seguintes condições iniciais: $w_x = 0$, $w_y = 0$ e $w_z = 10rpm$ para os dois modelos, $x = 0$ para o massa-mola e $\phi = 0$ para o pêndulo.

Figura 3.23 - Comportamento da massa m_1 no tempo decorrente de uma força impulsiva externa para $g = 0,07m/s^2$



Fonte: Produção do autor

3.3.2.3 Comentários sobre os modelos em ambiente de baixa gravidade ($g = 0,07m/s^2$)

Assim como no ambiente de gravidade normal, no ambiente de baixa gravidade $g = 0,07m/s^2$ os resultados obtidos mostram que os dois modelos têm comportamentos semelhantes.

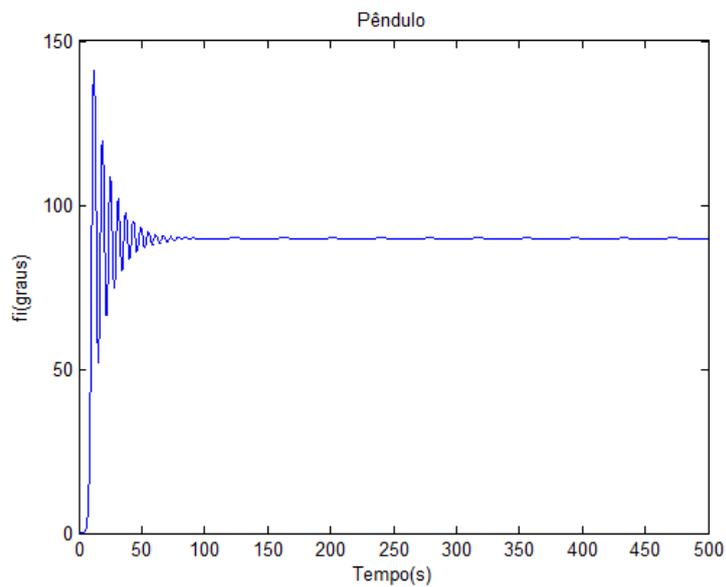
3.3.3 Ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$)

Nesta subseção serão apresentadas simulações apenas para o modelo equivalente Pêndulo, pois no gráfico proposto por Dodge e Garza (1967) mostrado na figura 3.5 só é possível obter os valores da massa e da constante elástica equivalentes para o modelo massa-mola para $N_{Bo} \geq 10$.

3.3.3.1 Massa líquida com pequenas velocidades angulares trasversais

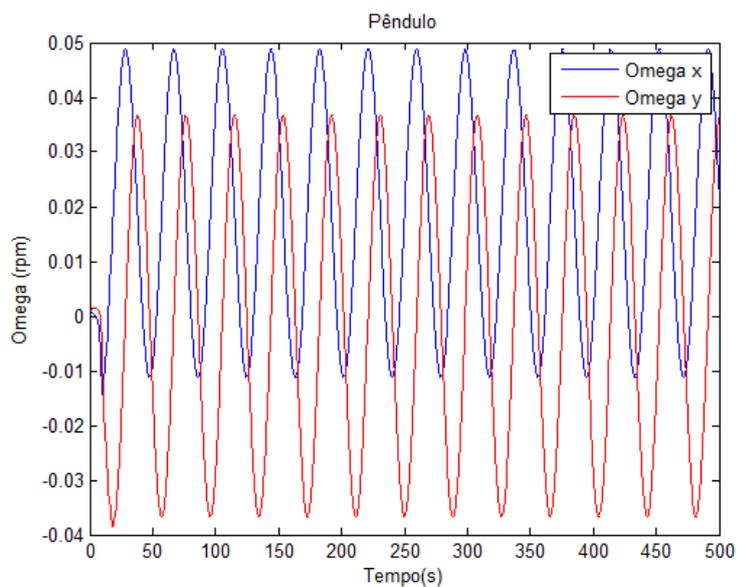
Nesta simulação considerou-se as seguintes condições iniciais: $w_x = 0,001rpm$, $w_y = 0,001rpm$ e $w_z = 10rpm$ e $\phi = 0$. A Figura 3.24 mostra o comportamento da massa m_1 no tempo, a Figura 3.25 mostra o comportamento das velocidades transversais w_x e w_y em função do tempo e a Figura 3.26 o comportamento no tempo das componentes transversais da quantidade de movimento angular.

Figura 3.24 - Posição da massa m_1 no tempo para pequenas velocidades angulares transversais em $g = 10^{-4}m/s^2$



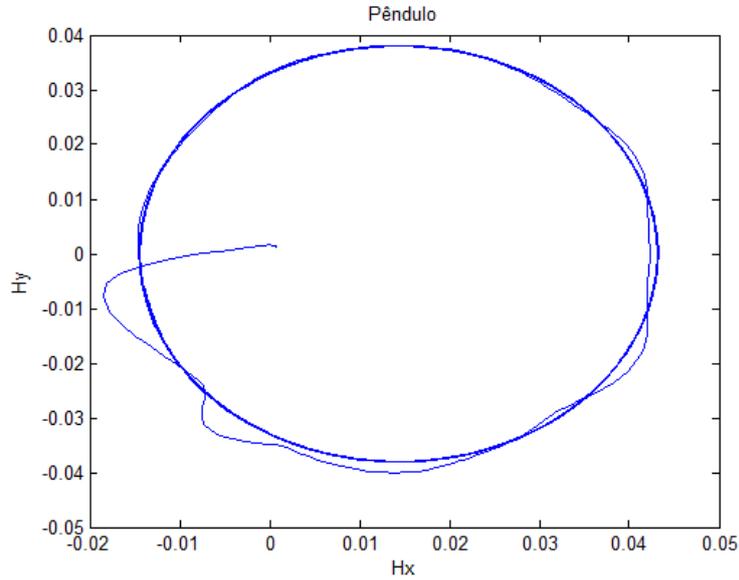
Fonte: Produção do autor

Figura 3.25 - Comportamento das Velocidades angulares transversais w_x e w_y em $g = 10^{-4}m/s^2$



Fonte: Produção do autor

Figura 3.26 - Componentes transversais da quantidade de movimento angular em $g = 10^{-4}m/s^2$

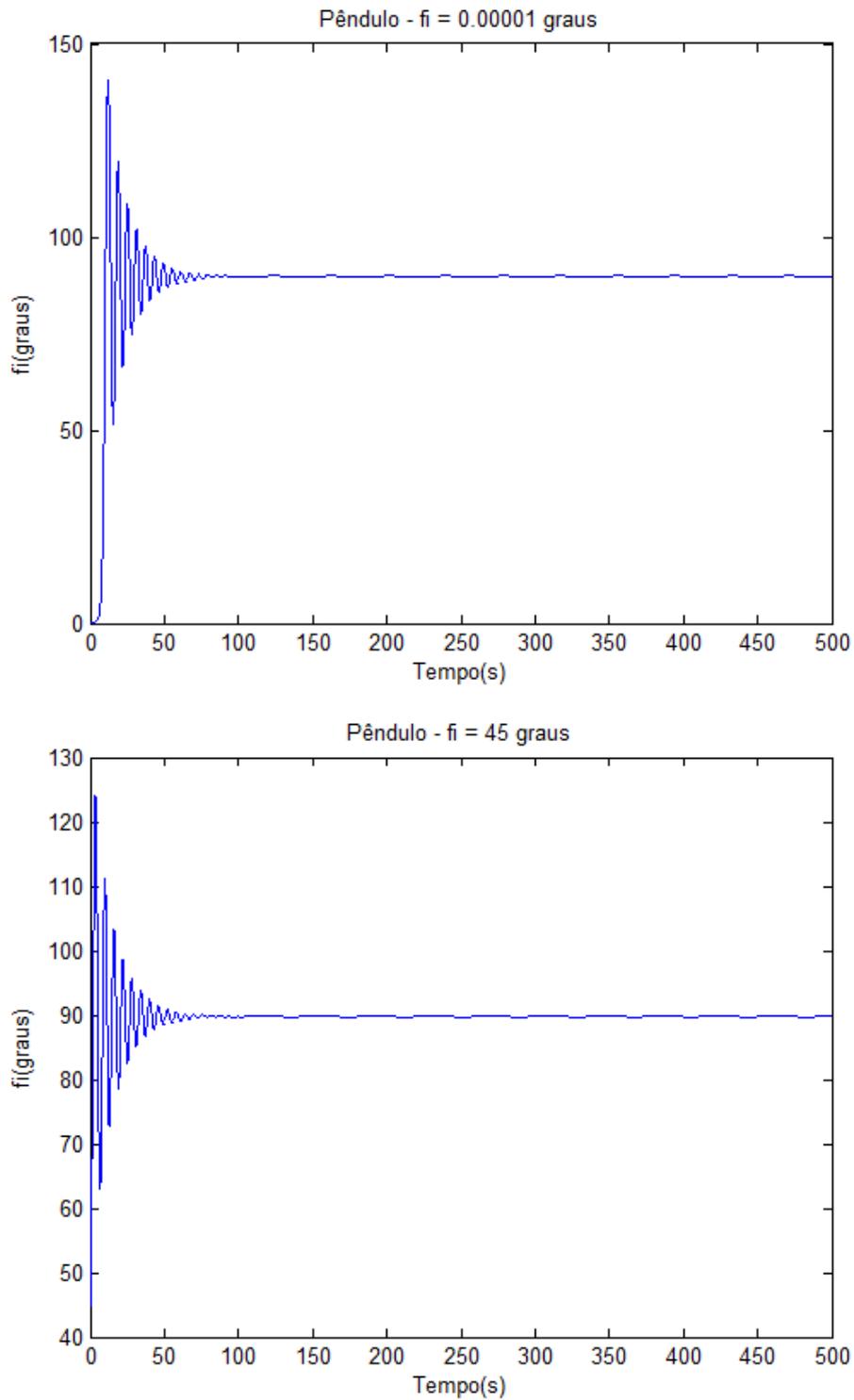


Fonte: Produção do autor

3.3.3.2 Massa líquida com $0 < \phi < 90^\circ$ e velocidades angulares transversais iguais a zero

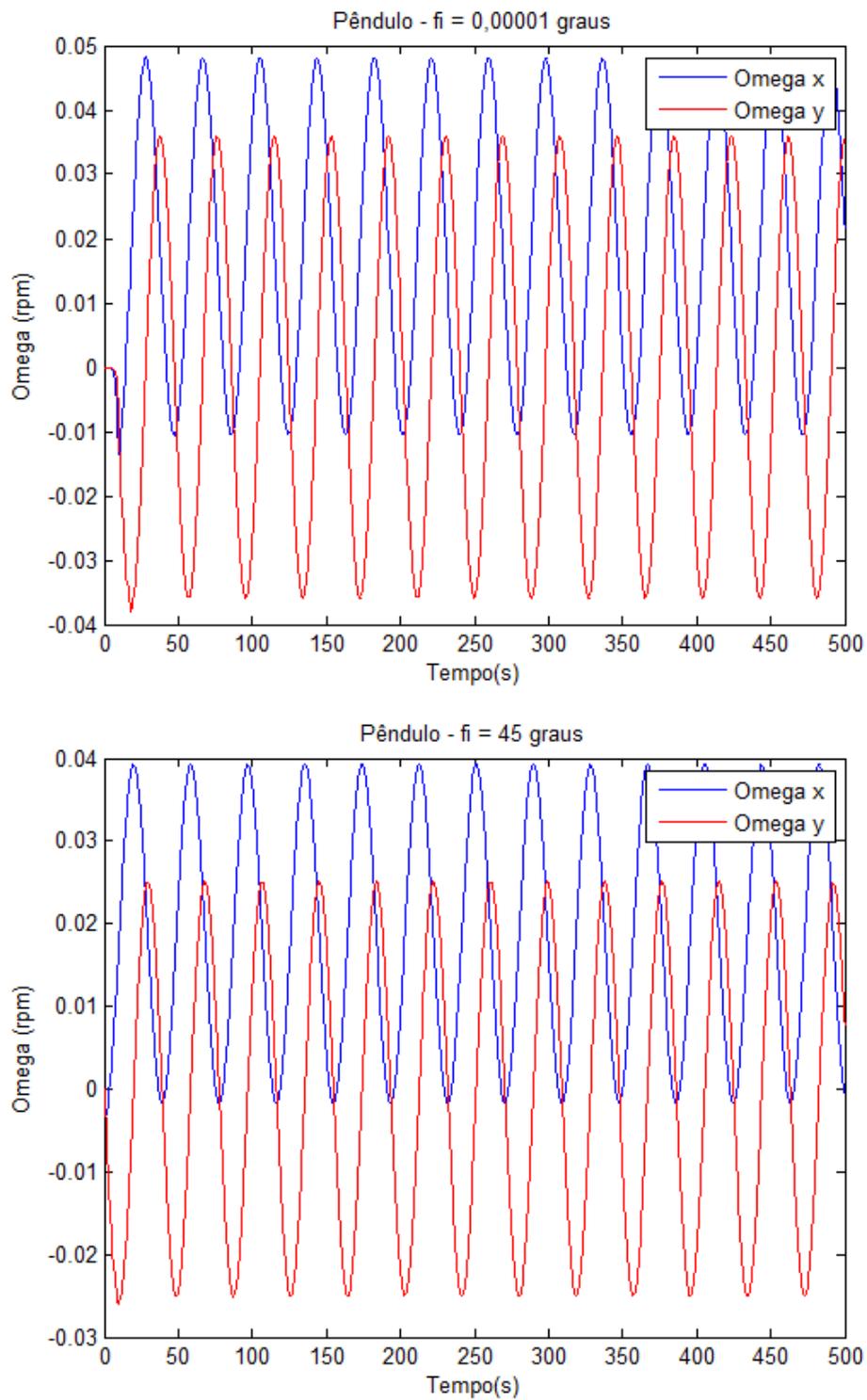
Foram feitas duas simulações, na primeira considerou-se as seguintes condições iniciais: $w_x = 0$, $w_y = 0$ e $w_z = 10rpm$ e $\phi = 0,00001^\circ$ e a segunda com $\phi = 45^\circ$. A Figura 3.27 mostra o comportamento da massa m_1 do modelo mecânico do Pêndulo no tempo, a Figura 3.28 mostra o comportamento das velocidades transversais w_x e w_y em função do tempo e a Figura 3.29 o comportamento no tempo das componentes transversais da quantidade de movimento angular.

Figura 3.27 - Posição da massa m_1 no tempo para velocidades angulares transversais iguais a zero e $0 < \phi < 90^\circ$ em $g = 10^{-4}m/s^2$



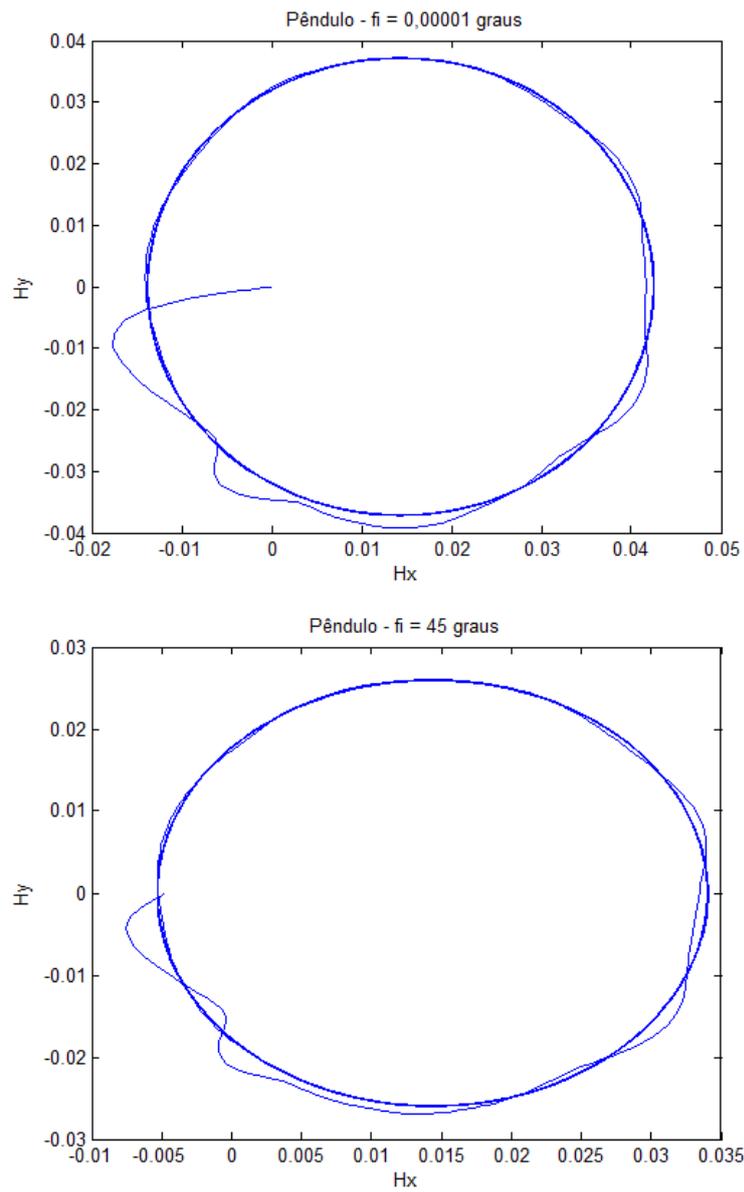
Fonte: Produção do autor

Figura 3.28 - Comportamento das Velocidades angulares transversais w_x e w_y para $0 < \phi < 90^\circ$ em $g = 10^{-4}m/s^2$



Fonte: Produção do autor

Figura 3.29 - Componentes transversais da quantidade de movimento angular para $0 < \phi < 90^\circ$ em $g = 10^{-4}m/s^2$

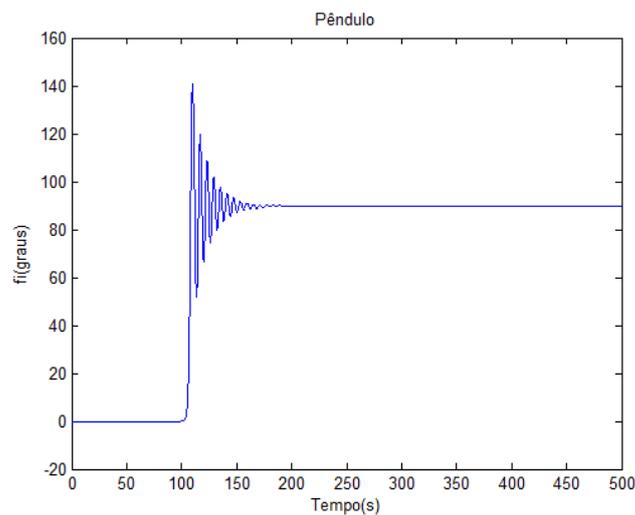


Fonte: Produção do autor

3.3.3.3 Massa líquida referente ao modelo mecânico equivalente do Pêndulo em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa

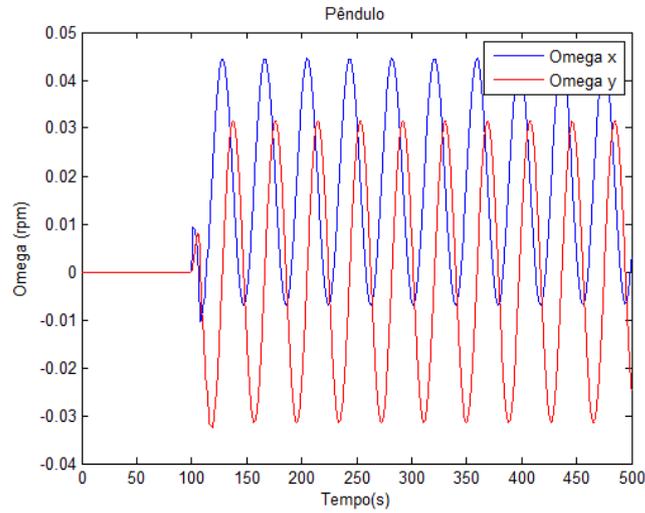
A Figura 3.30 mostra uma massa líquida em repouso sendo excitada por uma força impulsiva externa na direção x que provoca uma aceleração de $10^{-10}m/s^2$ durante $1s$ no instante $t = 100s$. Nesta simulação considerou-se as seguintes condições iniciais: $w_x = 0$, $w_y = 0$ e $w_z = 10rpm$ e $\phi = 0$. A Figura 3.31 mostra o comportamento das velocidades transversais w_x e w_y em função do tempo e a Figura 3.32 o comportamento no tempo das componentes transversais da quantidade de movimento angular.

Figura 3.30 - Mudança da posição da massa m_1 após aplicação de uma força externa sobre o pêndulo para na configuração de microgravidade com $g = 10^{-4}m/s^2$



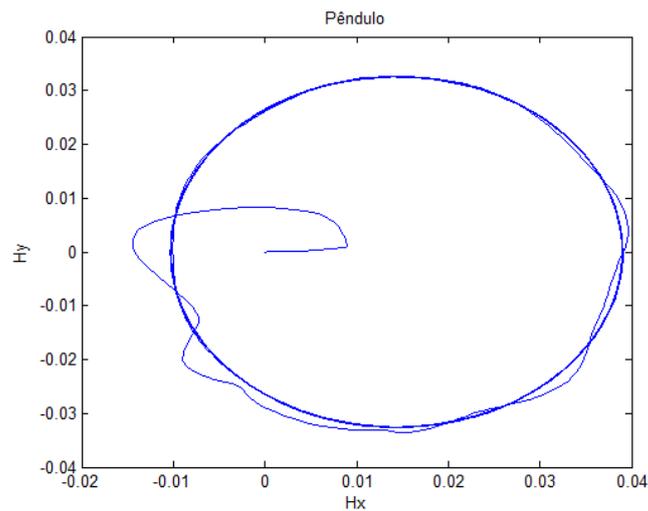
Fonte: Produção do autor

Figura 3.31 - Mudança do comportamento de w_x e w_y após aplicação de força externa na configuração de microgravidade com $g = 10^{-4}m/s^2$



Fonte: Produção do autor

Figura 3.32 - Componentes transversais da quantidade de movimento angular após aplicação de uma força externa na configuração de microgravidade com $g = 10^{-4}m/s^2$



Fonte: Produção do autor

3.3.3.4 Comentários sobre o modelo em ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$)

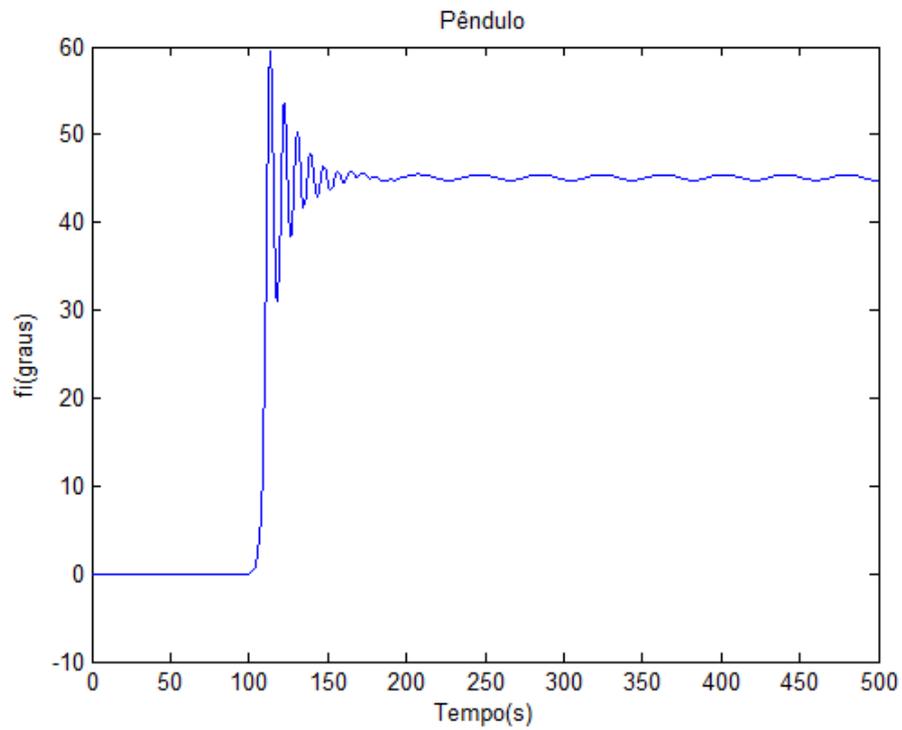
No ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$) os resultados obtidos nas simulações mostram que qualquer que seja a causa do movimento do líquido faz com que a massa equivalente do modelo mecânico equivalente Pêndulo vá para a posição corresponde a 90° , isto pode ser observado nas Figuras 3.24, 3.27 e 3.30. Este comportamento é esperado uma vez que a ausência de gravidade não permite que a massa do pêndulo volte para sua posição inicial, pois, apenas a força centrífuga está agindo sobre essa massa devido a rotação no eixo Z , isto é como se toda a massa líquida representada pelo modelo pendular se concentrasse em uma determinada parte do tanque próximo de sua parede causando um desbalanceamento do sistema como pode ser observado nos comportamentos das componentes transversais da quantidade de movimento mostrados nas Figuras 3.26, 3.29 e 3.32; notar que em todas, o 0 da componente H_x está deslocado para a esquerda.

3.3.4 Análise dos resultados

Em ambientes com aceleração da gravidade variando entre $0,07m/s^2$ e $9,81m/s^2$ tanto o modelo equivalente Massa-Mola como o modelo equivalente Pêndulo apresentaram comportamentos suficientemente semelhantes para serem considerados equivalentes. Em ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$) não foi encontrado na literatura informações que permitissem calcular os valores da massa e constante elástica equivalentes para o modelo Massa-Mola, desta forma, simulou-se somente o modelo Pêndulo que apresentou um comportamento bem diferente das simulações em ambientes com gravidade. Este comportamento pode ser explicado pela ausência de gravidade (ou microgravidade) e pela presença de uma força pseudocentrífuga causada pela rotação em torno do eixo Z fazendo que a massa equivalente do pêndulo se desloque para o ponto mais próximo da parede do tanque. Como o raio do tanque considerado para as simulações é de $0,1m$ e o comprimento da haste equivalente do pêndulo calculada é de $0,054m$, a massa equivalente do pêndulo não toca na parede do tanque. A título de ilustração é apresentado a seguir uma simulação onde a força da gravidade (F_g) é igualada à força pseudocentrífuga (F_{cf}). Sendo $F_g = mg$ e $F_{cf} = m\omega^2r$, onde g é aceleração da gravidade, m a massa equivalente, ω a velocidade angular em torno do eixo Z e r a distância da massa ao eixo Z , as duas forças igualam-se quando $g = l \text{sen}(\phi)\omega^2$, onde l é o comprimento da haste equivalente e ϕ é o ângulo mostrado na Figura 3.4, assim, com $\phi = 45^\circ$ $g = 0,0421m/s^2$. A Figura 3.33 mostra o comportamento da massa nesta condição.

Deve-se salientar ainda que, em ambiente de microgravidade quando a força gravitacional tende a zero, se uma determinada massa líquida for deslocada para a parede do tanque ela será mantida nesta posição pela força de capilaridade do líquido até que alguma outra perturbação ocorra.

Figura 3.33 - Mudança da posição da massa m_1 após aplicação de uma força externa sobre o pêndulo na configuração com $g = 0,0421m/s^2$

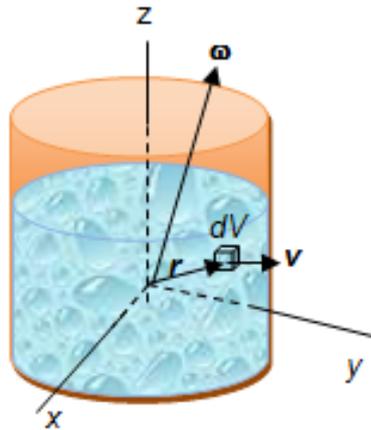


Fonte: Produção do autor

4 PROBLEMA DO *SLOSHING* MODELADO PELAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

O objetivo deste trabalho é procurar padrões de comportamento do fluido em ambiente de microgravidade. Escolheu-se para isso um tanque de formato cilíndrico no qual, a partir de diferentes condições iniciais pretende-se realizar simulações para se analisar o comportamento do fluido visando identificar tais padrões. Assim, neste capítulo é apresentada a formulação para o modelo baseado nas equações de Navier-Stokes. A Figura 4.1 mostra a representação física do tanque preenchido parcialmente com líquido.

Figura 4.1 - Representação física do modelo proposto



Fonte: Produção do autor

4.1 Equações do movimento

Na Figura 4.1 $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z, t)$ representa o vetor posição do volume elementar de fluido, dV em relação ao centro de massa do sistema, \vec{v} é o vetor velocidade do volume elementar, e $\vec{\omega}$ representa a rotação do sistema. Então podemos escrever:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4.1)$$

ou

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

onde $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$ e $w = w(x, y, z, t)$.

O vetor aceleração pode escrito como:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{D\vec{v}}{Dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.3)$$

onde

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$$

Substituindo a equação 4.1 em 4.3 temos:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4.4)$$

que se expandida fica

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

ou ainda

$$\vec{a} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_y z - \dot{\omega}_z y \\ \dot{\omega}_z x - \dot{\omega}_x z \\ \dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z) \\ \omega_z(\omega_y z - \omega_z y) - \omega_x(\omega_x y - \omega_y x) \\ \omega_x(\omega_z x - \omega_x z) - \omega_y(\omega_y z - \omega_z y) \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} \omega_y w - \omega_z v \\ \omega_z u - \omega_x w \\ \omega_x v - \omega_y u \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

4.2 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes são obtidas por:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{F}_v = m\vec{a} \quad (4.7)$$

onde \vec{F}_g corresponde à força gravitacional, \vec{F}_p à força devida à pressão, \vec{F}_v à força devida à viscosidade, m é a massa líquida e \vec{a} é a aceleração da massa líquida dada pela Equação 4.6 e podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho (\dot{\omega}_y z - \dot{\omega}_z y + \\ &\quad \omega_y (\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z (\omega_z x - \omega_x z) + 2\omega_y w - 2\omega_z v) \\ \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho (\dot{\omega}_z x - \dot{\omega}_x z + \\ &\quad \omega_z (\omega_y z - \omega_z y) - \omega_x (\omega_x y - \omega_y x) + 2\omega_z u - 2\omega_x w) \\ \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho (\dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x) + \\ &\quad \omega_x (\omega_z x - \omega_x z) - \omega_y (\omega_y z - \omega_z y) + 2\omega_x v - 2\omega_y u) \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.3 Equações modificadas de Euler

As equações de Euler descrevem o movimento rotacional e, neste caso, estão acopladas ao movimento do fluido. Considerando o momento angular como:

$$\vec{H} = \int_m \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \right) dm \quad (4.9)$$

Da Equação 4.9 podemos escrever que

$$\int_m \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} dm \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [I] \{ \vec{\omega} \} \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned}
[I] &= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \\
I_{xx} &= \int_m (y^2 + z^2) dm \\
I_{yy} &= \int_m (x^2 + z^2) dm \\
I_{zz} &= \int_m (x^2 + y^2) dm \\
I_{xy} &= \int_m xy dm \\
I_{yz} &= \int_m yz dm \\
I_{xz} &= \int_m xz dm
\end{aligned} \tag{4.11}$$

e que

$$\int_m \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dm = \int_m \begin{Bmatrix} yw - vz \\ zu - xw \\ xv - yu \end{Bmatrix} dm \tag{4.12}$$

Assim o torque é dado por

$$\frac{d\{H\}}{dt} = \{\vec{N}\} = [I]\{\dot{\vec{\omega}}\} + [\tilde{\vec{\omega}}][I]\{\vec{\omega}\} + \int_m \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{dt} \\ \frac{Dv}{dt} \\ \frac{Dw}{dt} \end{Bmatrix} dm \tag{4.13}$$

onde $\{\vec{N}\}$ inclui os torques externos e de controle.

Expandindo $[I]\{\dot{\vec{\omega}}\} + [\tilde{\vec{\omega}}][I]\{\vec{\omega}\}$ da equação 4.13 temos:

$$\begin{aligned}
& [I]\{\dot{\vec{\omega}}\} + [\tilde{\vec{\omega}}][I]\{\vec{\omega}\} = \\
& \left\{ \begin{array}{l} I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z - \omega_x(I_{xz}\omega_y - I_{xy}\omega_z) - \omega_y(I_{yz}\omega_y + I_{yy}\omega_z) + \omega_z(I_{zz}\omega_y + I_{yz}\omega_z) \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - I_{xy}\dot{\omega}_x - I_{yz}\dot{\omega}_z + \omega_x(I_{xz}\omega_x + I_{xx}\omega_z) + \omega_y(I_{yz}\omega_x - I_{xy}\omega_z) - \omega_z(I_{zz}\omega_x + I_{xz}\omega_z) \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - I_{yz}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_x - \omega_x(I_{xy}\omega_x + I_{xx}\omega_y) + \omega_y(I_{yy}\omega_x + I_{xy}\omega_y) - \omega_z(I_{yz}\omega_x - I_{xz}\omega_y) \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Expandindo $\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{dt} \\ \frac{Dv}{dt} \\ \frac{Dw}{dt} \end{Bmatrix}$ da equação 4.13 temos:

$$\int_m \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{dt} \\ \frac{Dv}{dt} \\ \frac{Dw}{dt} \end{Bmatrix} dm = \int_m \begin{Bmatrix} \frac{Dw}{dt}y - \frac{Dv}{dt}z \\ \frac{Du}{dt}z - \frac{Dw}{dt}x \\ \frac{Dv}{dt}x - \frac{Du}{dt}y \end{Bmatrix} dm \quad (4.15)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} Mu &= \int_m \left(\frac{Dw}{dt}y - \frac{Dv}{dt}z \right) dm \\ Mv &= \int_m \left(\frac{Du}{dt}z - \frac{Dw}{dt}x \right) dm \\ Mw &= \int_m \left(\frac{Dv}{dt}x - \frac{Du}{dt}y \right) dm \end{aligned} \quad (4.16)$$

temos:

$$\int_m \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{Du}{dt} \\ \frac{Dv}{dt} \\ \frac{Dw}{dt} \end{Bmatrix} dm = \begin{Bmatrix} Mu \\ Mv \\ Mw \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

O torque da estrutura que suporta o sistema é dado por:

$$\frac{d\{H_e\}}{dt} = [I_e]\{\dot{\vec{\omega}}\} + [\tilde{\vec{\omega}}][I_e]\{\vec{\omega}\} \quad (4.18)$$

onde I_e representa o momento de inércia da estrutura dado por $I_e = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ onde A ,

B e C são os momentos principais de inércia da estrutura.

Expandindo a equação 4.18 temos:

$$\frac{d\{H_e\}}{dt} = \begin{bmatrix} A\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(C - B) \\ B\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z(A - C) \\ C\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y(B - A) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Assim o torque total do sistema mais estrutura pode ser escrito na forma expandida como a soma das equações 4.14, 4.17 e 4.19 :

$$\begin{aligned} \{\vec{N}\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & B + I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & C + I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Mu - \omega_x(I_{xz}\omega_y - I_{xy}\omega_z) - \omega_y(I_{yz}\omega_x + I_{yy}\omega_z) + \omega_z(I_{zz}\omega_y + I_{yz}\omega_z) - B\omega_y\omega_z + C\omega_y\omega_z \\ Mv + \omega_x(I_{xz}\omega_x + I_{xx}\omega_z) + \omega_y(I_{yz}\omega_x - I_{xy}\omega_z) - \omega_z(I_{zz}\omega_x + I_{xz}\omega_z) + A\omega_x\omega_z - C\omega_x\omega_z \\ Mw - \omega_x(I_{xy}\omega_x + I_{xx}\omega_y) + \omega_y(I_{yy}\omega_x + I_{xy}\omega_y) - \omega_z(I_{yz}\omega_x - I_{xz}\omega_y) - A\omega_x\omega_y + B\omega_x\omega_y \end{Bmatrix} \quad (4.20) \end{aligned}$$

Fazendo $\omega_x = x_1$, $\omega_y = x_2$ e $\omega_z = x_3$, temos:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A + I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & B + I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & C + I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -Mu + x_1(I_{xz}x_2 - I_{xy}x_3) + x_2(I_{yz}x_2 + I_{yy}x_3) - x_3(I_{zz}x_2 + I_{yz}x_3) + Bx_2x_3 - Cx_2x_3 \\ -Mv - I_{xz}x_1^2 + I_{xz}x_3^2 - Ax_1x_3 + Cx_1x_3 - I_{yz}x_1x_2 - I_{xx}x_1x_3 + I_{zz}x_1x_3 + I_{xy}x_2x_3 \\ -Mw + x_1(I_{xy}x_1 + I_{xx}x_2) - x_2(I_{yy}x_1 + I_{xy}x_2) + x_3(I_{yz}x_1 - I_{xz}x_2) + Ax_1x_2 - Bx_1x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

4.4 Solução Numérica

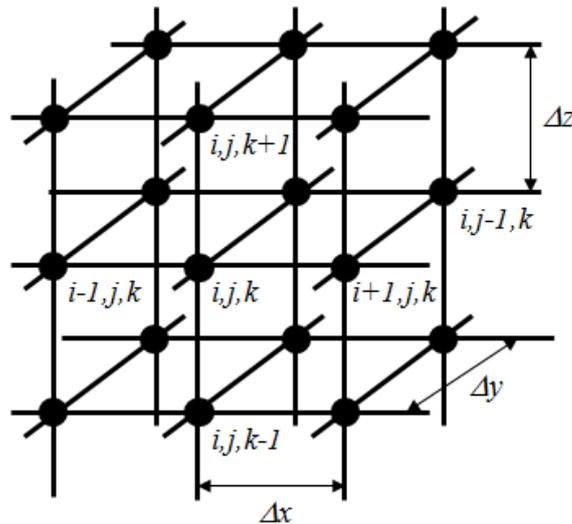
Nessa seção é utilizado o método descrito por Fortuna (2012) para tratar a abordagem da solução numérica das equações de Navier-Stokes. Para isso, a equação 4.8 é escrita como:

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \rho(\dot{\omega}_y z - \dot{\omega}_z y + \\
 &\quad \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z) + 2\omega_y w - 2\omega_z v) \\
 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \rho(\dot{\omega}_z x - \dot{\omega}_x z + \\
 &\quad \omega_z(\omega_y z - \omega_z y) - \omega_x(\omega_x y - \omega_y x) + 2\omega_z u - 2\omega_x w) \\
 \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho(\dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x) + \\
 &\quad \omega_x(\omega_z x - \omega_x z) - \omega_y(\omega_y z - \omega_z y) + 2\omega_x v - 2\omega_y u) + \rho g
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde g representa a aceleração da gravidade no eixo z .

Para a discretização das derivadas espaciais é utilizada uma malha computacional tridimensional (ver figura 4.2) e o método de diferenças finitas.

Figura 4.2 - Malha computacional tridimensional



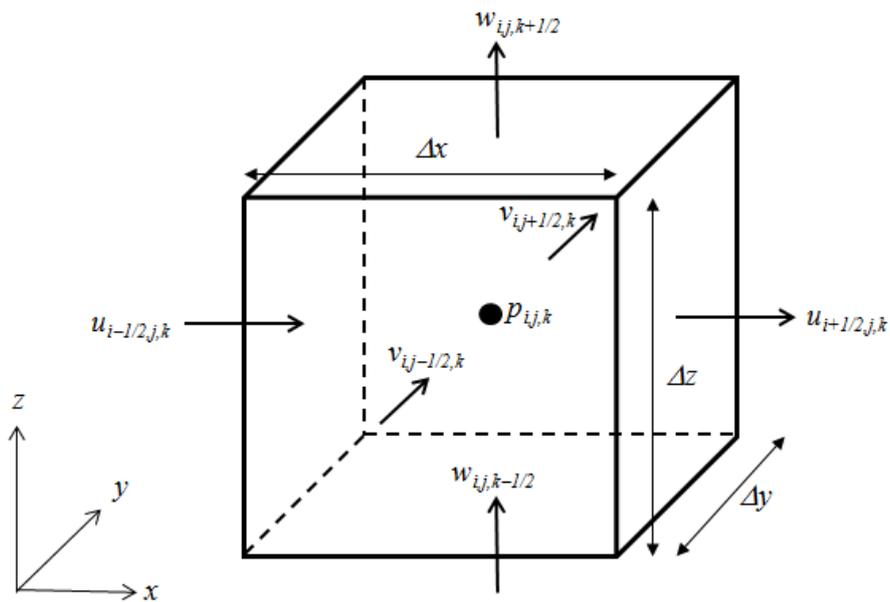
Fonte: Produção do autor

Nas figuras 4.2 e 4.3, por questões de clareza, foram omitidas as velocidades angulares ω_x , ω_y e ω_z .

As variáveis do problema dadas pelas velocidades u , v e w , e pela pressão p podem ser armazenadas todas no centro das células, chamada de malha colocada, ou em pontos diferentes, neste caso a malha é chamada de deslocada. Esta última, usada nesta tese, permite manter naturalmente o acoplamento entre a velocidade e a pressão do fluido, permitindo o cálculo de campos de pressão que não apresentam oscilações devidas à efeitos numéricos (FORTUNA, 2012).

A malha deslocada é composta por células com faces de comprimento Δx , Δy e Δz conforme figura 4.3. Em uma determinada célula com coordenadas (i, j, k) , a pressão p é armazenada no centro da células; a componente u da velocidade nas faces laterais distantes de $\pm\Delta x/2$ do centro; a componente v nas faces frontal e posterior distantes de $\pm\Delta y/2$ do centro; e a componente w nas faces superior e inferior distantes de $\pm\Delta z/2$ do centro.

Figura 4.3 - Célula tridimensional deslocada



Fonte: Produção do autor

Na discretização da equação (4.22) é empregado o método MAC (*marker and cell*) que utiliza o método de Euler explícito para a discretização temporal, onde todos os termos que envolvem velocidades são discretizados no nível de tempo n . O termo envolvendo a pressão é discretizado no nível de tempo $n + 1$. Na sequência são calculadas as velocidades u^{n+1} , v^{n+1} e w^{n+1} . Finalmente é discretizada a derivada temporal (FORTUNA, 2012).

Assim, o lado esquerdo da equação (4.22) é discretizado na direção x no ponto $(i + 1/2, j, k)$ como segue:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i+1/2,j,k} \approx \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - u_{i+1/2,j,k}^n}{\Delta t} \quad (4.23)$$

para a derivada temporal e na sequência para as derivadas espaciais

$$\left. \frac{\partial u^2}{\partial x} \right|_{i+1/2,j,k} \approx \frac{(u^2)_{i+1,j,k}^n - (u^2)_{i,j,k}^n}{\Delta x} \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{\partial uv}{\partial y} \right|_{i+1/2,j,k} \approx \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2,k}^n - (uv)_{i+1/2,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \quad (4.25)$$

$$\left. \frac{\partial uw}{\partial z} \right|_{i+1/2,j,k} \approx \frac{(uw)_{i+1/2,j,k+1/2}^n - (uw)_{i+1/2,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \quad (4.26)$$

Notar que os termos $(u^2)_{i+1,j,k}^n$, $(u^2)_{i,j,k}^n$, $(uv)_{i+1/2,j+1/2,k}^n$, $(uv)_{i+1/2,j-1/2,k}^n$, $(uw)_{i+1/2,j,k+1/2}^n$ e $(uw)_{i+1/2,j,k-1/2}^n$ não estão definidos na malha, devendo ser obtidos a partir da interpolação de u , v e w .

As equações (4.24), (4.25) e (4.26) representam os termos convectivos no nível de tempo n e podem ser representadas como:

$$\begin{aligned} CONV_{i+1/2,j,k}^n &= \frac{(u^2)_{i+1,j,k}^n - (u^2)_{i,j,k}^n}{\Delta x} + \\ &\quad \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2,k}^n - (uv)_{i+1/2,j-1/2,k}^n}{\Delta y} + \\ &\quad \frac{(uw)_{i+1/2,j,k+1/2}^n - (uw)_{i+1/2,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \end{aligned} \quad (4.27)$$

As derivadas parciais do lado direito da equação (4.22) na direção x são discretizadas como segue:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i+1,j,k} \approx \frac{(p)_{i+1,j,k}^n - (p)_{i,j,k}^n}{\Delta x} \quad (4.28)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i+1/2,j,k} \approx \frac{u_{i-1/2,j,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1+1/2,j,k}^n}{(\Delta x)^2} \quad (4.29)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i+1/2,j,k} \approx \frac{u_{i+1/2,j+1,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} \quad (4.30)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{i+1/2,j,k} \approx \frac{u_{i+1/2,j,k+1}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} \quad (4.31)$$

Para essas equações não é necessária nenhuma interpolação pois todos os termos estão definidos na malha.

As equações (4.29), (4.30) e (4.31) representam os termos viscosos no nível de tempo n e podem ser representadas como:

$$\begin{aligned} VISCN_{i+1/2,j,k}^n = & \nu \frac{u_{i-1/2,j,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1+1/2,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \\ & \nu \frac{u_{i+1/2,j+1,k}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & \nu \frac{u_{i+1/2,j,k+1}^n - 2u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $\nu = \mu/\rho$.

As demais parcelas do lado direito da equação (4.22) na direção x podem ser reunidas em um único termo dependente das velocidades angulares ω_x , ω_y e ω_z , como segue:

$$\begin{aligned} VelANG_{i+1/2,j,k}^n = & \dot{\omega}_y^n z - \dot{\omega}_z^n y + \omega_y^n (\omega_x^n y - \omega_y^n x) - \omega_z^n (\omega_z^n x - \omega_x^n z) + \\ & 2\omega_y^n w_{i+1/2,j,k}^n - 2\omega_z^n v_{i+1/2,j,k}^n \end{aligned} \quad (4.33)$$

Definindo $F_{i+1/2,j,k}^n$ como sendo a soma dos termos convectivos, viscosos, de-

pendentes das velocidades angulares e da velocidade $u_{i+1/2,j,k}^n$ como:

$$F_{i+1/2,j,k}^n = u_{i+1/2,j,k}^n + \Delta t[-CONV_{i+1/2,j,k}^n + VISCS_{i+1/2,j,k}^n - VelANG_{i+1/2,j,k}^n] \quad (4.34)$$

Assim pode-se escrever que:

$$u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = F_{i+1/2,j,k}^n - \frac{\Delta t p_{i+1,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}}{\rho \Delta x} \quad (4.35)$$

É importante lembrar que antes de se calcular $F_{i+1/2,j,k}^n$ é necessário substituir nos termos convectivos os termos não definidos na malha. Estes valores podem ser calculados através da interpolação dos valores de u , v e w como segue:

$$\begin{aligned} (u^2)_{i+1,j,k}^n &\approx \left(\frac{u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1+1/2,j,k}^n}{2} \right)^2 \\ (u^2)_{i,j,k}^n &\approx \left(\frac{u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i-1/2,j,k}^n}{2} \right)^2 \\ (uv)_{i+1/2,j+1/2,k}^n &\approx \frac{u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j+1,k}^n}{2} \cdot \frac{v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i+1,j+1/2,k}^n}{2} \\ (uv)_{i+1/2,j-1/2,k}^n &\approx \frac{u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j-1,k}^n}{2} \cdot \frac{v_{i,j-1/2,k}^n + v_{i+1,j-1/2,k}^n}{2} \\ (uw)_{i+1/2,j,k+1/2}^n &\approx \frac{u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j,k+1}^n}{2} \cdot \frac{w_{i,j,k+1/2}^n + w_{i+1,j,k+1/2}^n}{2} \\ (uw)_{i+1/2,j,k-1/2}^n &\approx \frac{u_{i+1/2,j,k}^n + u_{i+1/2,j,k-1}^n}{2} \cdot \frac{w_{i,j,k-1/2}^n + w_{i+1,j,k-1/2}^n}{2} \end{aligned}$$

Analogamente, discretiza-se a equação 4.22 na direção y no ponto $(i, j+1/2, k)$ obtendo-se:

$$v_{i,j+1/2,k}^{n+1} = G_{i,j+1/2,k}^n - \frac{\Delta t p_{i,j+1,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}}{\rho \Delta y} \quad (4.36)$$

com

$$G_{i,j+1/2,k}^n = v_{i,j+1/2,k}^n + \Delta t[-CONV_{i,j+1/2,k}^n + VISCS_{i,j+1/2,k}^n - VelANG_{i,j+1/2,k}^n] \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} CONV_{i,j+1/2,k}^n &= \frac{(v^2)_{i,j+1,k}^n - (v^2)_{i,j,k}^n}{\Delta y} + \\ &\frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2,k}^n - (uv)_{i-1/2,j+1/2,k}^n}{\Delta x} + \\ &\frac{(vw)_{i,j+1/2,k+1/2}^n - (vw)_{i,j+1/2,k-1/2}^n}{\Delta z} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
VISCN_{i,j+1/2,k}^n &= \nu \frac{v_{i,j-1/2,k}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i,j+1+1/2,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\
&\nu \frac{v_{i+1,j+1/2,k}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i-1,j+1/2,k}^n}{(\Delta x)^2} + \\
&\nu \frac{v_{i,j+1/2,k+1}^n - 2v_{i,j+1/2,k}^n + v_{i,j+1/2,k-1}^n}{(\Delta z)^2} \quad (4.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VelANG_{i,j+1/2,k}^n &= \dot{\omega}_z^n x - \dot{\omega}_x^n z + \omega_z^n (\omega_y^n z - \omega_z^n y) - \omega_x^n (\omega_x^n y - \omega_y^n x) + \\
&2\omega_z^n u_{i,j+1/2,k}^n - 2\omega_x^n w_{i,j+1/2,k}^n \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Também analogamente, discretiza-se a equação 4.22 na direção z no ponto $(i, j, k + 1/2)$ obtendo-se:

$$w_{i,j,k+1/2}^{n+1} = H_{i,j,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{i,j,k+1}^{n+1} - p_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z} \quad (4.41)$$

com

$$H_{i,j,k+1/2}^n = w_{i,j,k+1/2}^n + \Delta t [-CONV_{i,j,k+1/2}^n + VISCN_{i,j,k+1/2}^n - VelANG_{i,j,k+1/2}^n] \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
CONV_{i,j,k+1/2}^n &= \frac{(w^2)_{i,j,k+1}^n - (w^2)_{i,j,k}^n}{\Delta z} + \\
&\frac{(uw)_{i+1/2,j,k+1/2}^n - (uw)_{i-1/2,j,k+1/2}^n}{\Delta x} + \\
&\frac{(vw)_{i,j+1/2,k+1/2}^n - (vw)_{i,j-1/2,k+1/2}^n}{\Delta z} \quad (4.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VISCN_{i,j,k+1/2}^n &= \nu \frac{w_{i,j,k-1/2}^n - 2w_{i,j,k+1/2}^n + w_{i,j,k+1+1/2}^n}{(\Delta z)^2} + \\
&\nu \frac{w_{i+1,j,k+1/2}^n - 2w_{i,j,k+1/2}^n + w_{i-1,j,k+1/2}^n}{(\Delta x)^2} + \\
&\nu \frac{w_{i,j+1,k+1/2}^n - 2w_{i,j,k+1/2}^n + w_{i,j-1,k+1/2}^n}{(\Delta z)^2} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VelANG_{i,j,k+1/2}^n &= \dot{\omega}_x^n y - \dot{\omega}_y^n x + \omega_x^n (\omega_z^n x - \omega_x^n z) - \omega_y^n (\omega_y^n z - \omega_z^n y) + \\
&2\omega_x^n v_{i,j,k+1/2}^n - 2\omega_y^n u_{i,j,k+1/2}^n - g \quad (4.45)
\end{aligned}$$

No método MAC, a versão discreta da equação de Poisson para a pressão é

dada por (FORTUNA, 2012):

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i+1,j,k}^{n+1} - 2p_{i,j,k}^{n+1} + p_{i-1,j,k}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1,k}^{n+1} - 2p_{i,j,k}^{n+1} + p_{i,j-1,k}^{n+1}}{(\Delta y)^2} + \frac{p_{i,j,k+1}^{n+1} - 2p_{i,j,k}^{n+1} + p_{i,j,k-1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} = \\ & = \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{F_{i+1/2,j,k}^n - F_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2,k}^n - G_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} + \frac{H_{i,j,k+1/2}^n - H_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Resolvendo a equação de Poisson pelo método SOR (*successive over-relaxation*) por pontos, a expressão a ser aplicada em cada ponto interno do domínio é (FORTUNA, 2012):

$$\begin{aligned} p_{i,j,k}^{n+1,K+1} &= (1 - \omega)p_{i,j,k}^{n+1,K} + \frac{\omega}{2(1 + \beta^2 + \gamma^2)} \left[p_{i+1,j,k}^{n+1,K} + p_{i-1,j,k}^{n+1,K} + \beta^2 (p_{i,j+1,k}^{n+1,K} + p_{i,j-1,k}^{n+1,K}) + \right. \\ & \quad \left. \gamma^2 (p_{i,j,k+1}^{n+1,K} + p_{i,j,k-1}^{n+1,K}) - (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 (\Delta z)^2 f_{i,j,k} \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde K é número de iterações, $\beta = \Delta x / \Delta y$, $\gamma = \Delta x / \Delta z$ e

$$f_{i,j,k} = \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{F_{i+1/2,j,k}^n - F_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2,k}^n - G_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} + \frac{H_{i,j,k+1/2}^n - H_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right] \quad (4.48)$$

Uma vez obtido o campo de pressões no nível de tempo $n+1$ deve-se determinar as componentes u^{n+1} , v^{n+1} e w^{n+1} através das equações 4.35, 4.36 e 4.41.

O método MAC impõe restrições aos valores de Δt (FORTUNA, 2012) dada por:

$$\Delta t \leq \tau \left[\frac{|u|_{max}}{\Delta x} + \frac{|v|_{max}}{\Delta y} + \frac{|w|_{max}}{\Delta z} + 2\nu \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \right]^{-1} \quad (4.49)$$

onde $0 < \tau \leq 1$ é um fator de segurança. Isto significa que quanto mais fina for a malha menor será o Δt .

Pode-se resumir o processo nas seguintes etapas:

- a) definir as condições iniciais para as variáveis do sistema e construir os campos de velocidades e pressão iniciais;
- b) aplicar as condições de fronteira para as componentes da velocidade;
- c) calcular os valores de $F_{i+1,j,k}^n$, $G_{i,j+1,k}^n$ e $H_{i,j,k+1}^n$ no interior do domínio;

- d) zerar os valores de $F_{i+1,j,k}^n$, $G_{i,j+1,k}^n$ e $H_{i,j,k+1}^n$ nas fronteiras;
- e) resolver a equação de Poisson para calcular os valores de p^{n+1} ;
- f) a partir dos valores de p^{n+1} calcular os valores de u^{n+1} , v^{n+1} e w^{n+1} no interior do domínio;
- g) calcular os torques devidos às velocidade u^{n+1} , v^{n+1} e w^{n+1} e os torques devidos ao momento de inércia do fluido conforme Equações de 3.13 a 4.17;
e
- h) com os valores calculados no item anterior calcular ω_x , ω_y , ω_z , $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_w$ conforme 4.21 utilizando o método Runge Kutta 4.

5 SIMULAÇÕES E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentadas simulações em ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$) e ambiente de baixa gravidade ($g = 0,07m/s^2$) para dois líquidos com viscosidades dinâmicas diferentes. Nas duas situações é usada uma malha de $40 \times 40 \times 40$. A Tabela 5.1 fornece os valores dos parâmetros referentes à estrutura e ao recipiente com líquido responsável pelo *sloshing*.

Tabela 5.1 - Parâmetros do Sistema envolvendo a estrutura e o recipiente com líquido

Parâmetros	Valores
Momento de inércia da estrutura no eixo X	$A = 9,18kgm^2$
Momento de inércia da estrutura no eixo Y	$B = 9,90kgm^2$
Momento de inércia da estrutura no eixo Z	$C = 11,07kgm^2$
Raio do recipiente com líquido	$R = 0,1m$
Altura do líquido	$h = 3R$
Massa Específica	$\rho = 10^3kg/m^3$
Viscosidade dinâmica líquido Tipo 1	$\mu = 10^{-3}Ns/m^2$
Viscosidade dinâmica líquido Tipo 2	$\mu = 0,4Ns/m^2$

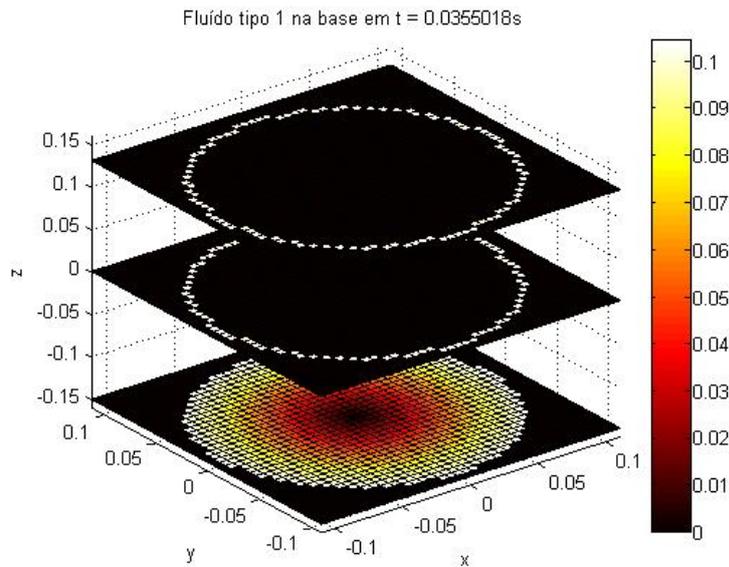
Para a discretização considerou-se o eixo x e o eixo y variando de $-0,11m$ a $0,11m$ e o eixo z de $-0,16m$ a $0,16m$. Considerou-se $500s$ de simulação para todos os casos. Os resultados são apresentados na forma de dois tipos de gráficos, um representando as curvas de corrente dadas pelo módulo da velocidade de cada célula no plano xy perpendicular ao eixo z na posição de $z = 0$ e na superfície do líquido (posição de $z \approx 0,15m$) para 4 instantes diferentes: o primeiro no instante correspondente a $t = 3\Delta t$; o segundo instante é quando o movimento do líquido atinge o estado estacionário que, para as simulações aqui realizadas, foi considerado o instante quando o módulo da máxima diferença entre as pressões no instante t e o instante $t + \Delta t$ é menor que 10^{-12} , notar que este instante depende da gravidade e das condições iniciais; o terceiro no instante $t \approx 250s$; e o último no instante final. Nestas figuras, os índices i e j representam as coordenadas (i, j) das células e as linhas indicam o lugar geométrico de células com módulos de velocidade iguais. O outro tipo mostra o comportamento no tempo das velocidades angulares transversais ω_x e ω_y .

5.1 Simulação em ambiente de microgravidade ($g = 10^{-4}m/s^2$)

Nesta simulação Considerou-se três condições: sem perturbações; com velocidades angulares w_x e w_y diferentes de zero; e com uma pequena perturbação a partir

de um determinado instante. Para todas as condições considerou-se $w_z = 10rpm$ e a condição inicial da velocidade do fluido mostrada na figura 5.1 e detalhada nas figuras 5.2 e 5.3.

Figura 5.1 - Velocidade inicial para todas as simulações

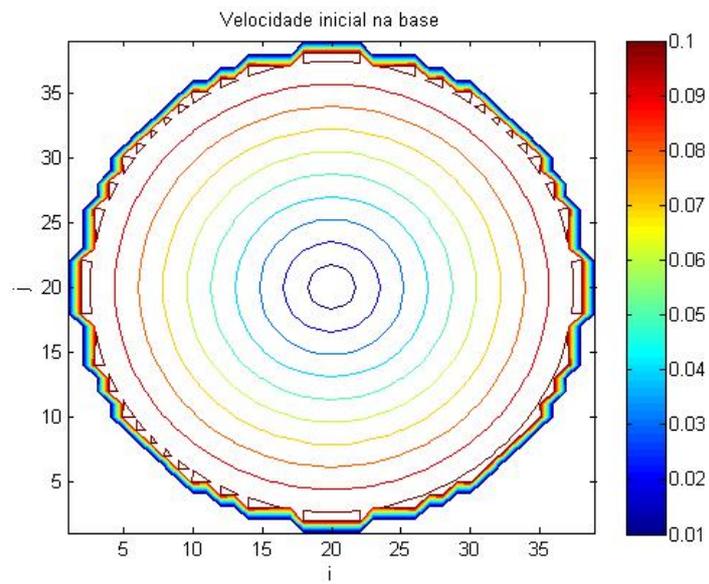


Fonte: Produção do autor

5.1.1 Comportamento do líquido sem perturbações

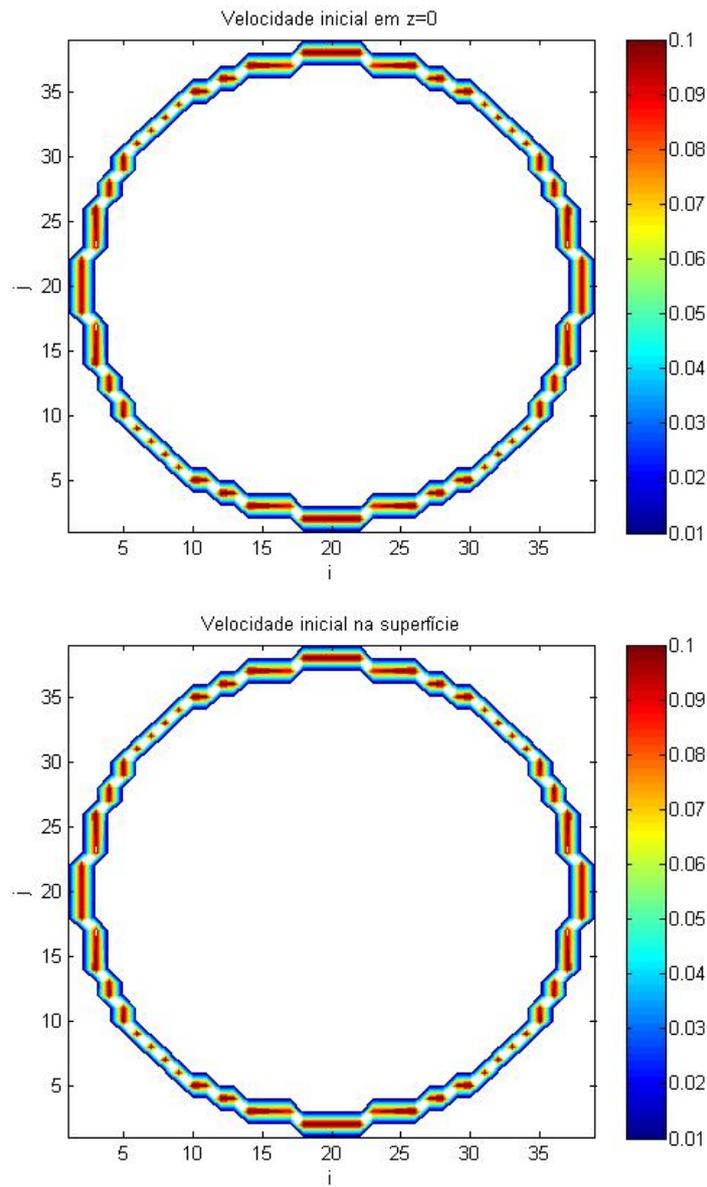
Condições iniciais consideradas: $w_x = 0rpm$, $w_y = 0rpm$ e $w_z = 10rpm$. As Figuras 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 mostram a linhas de corrente (módulo da velocidade no ponto) no plano xy para os quatros instantes definidos e a Figura 5.8 mostra o comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y .

Figura 5.2 - Detalhe da velocidade inicial na base para todas as simulações



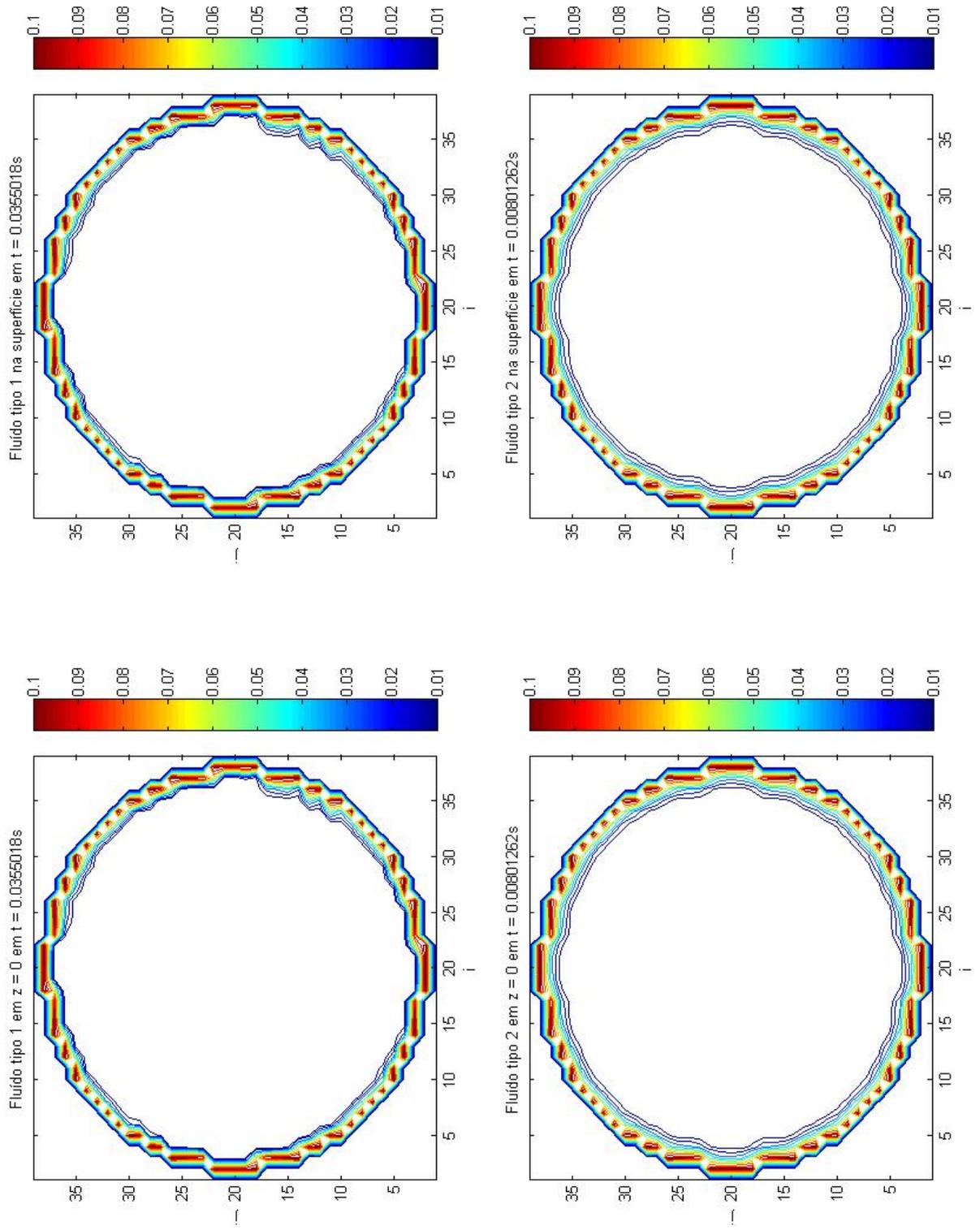
Fonte: Produção do autor

Figura 5.3 - Detalhe da velocidade inicial em $z = 0$ e na superfície para todas as simulações



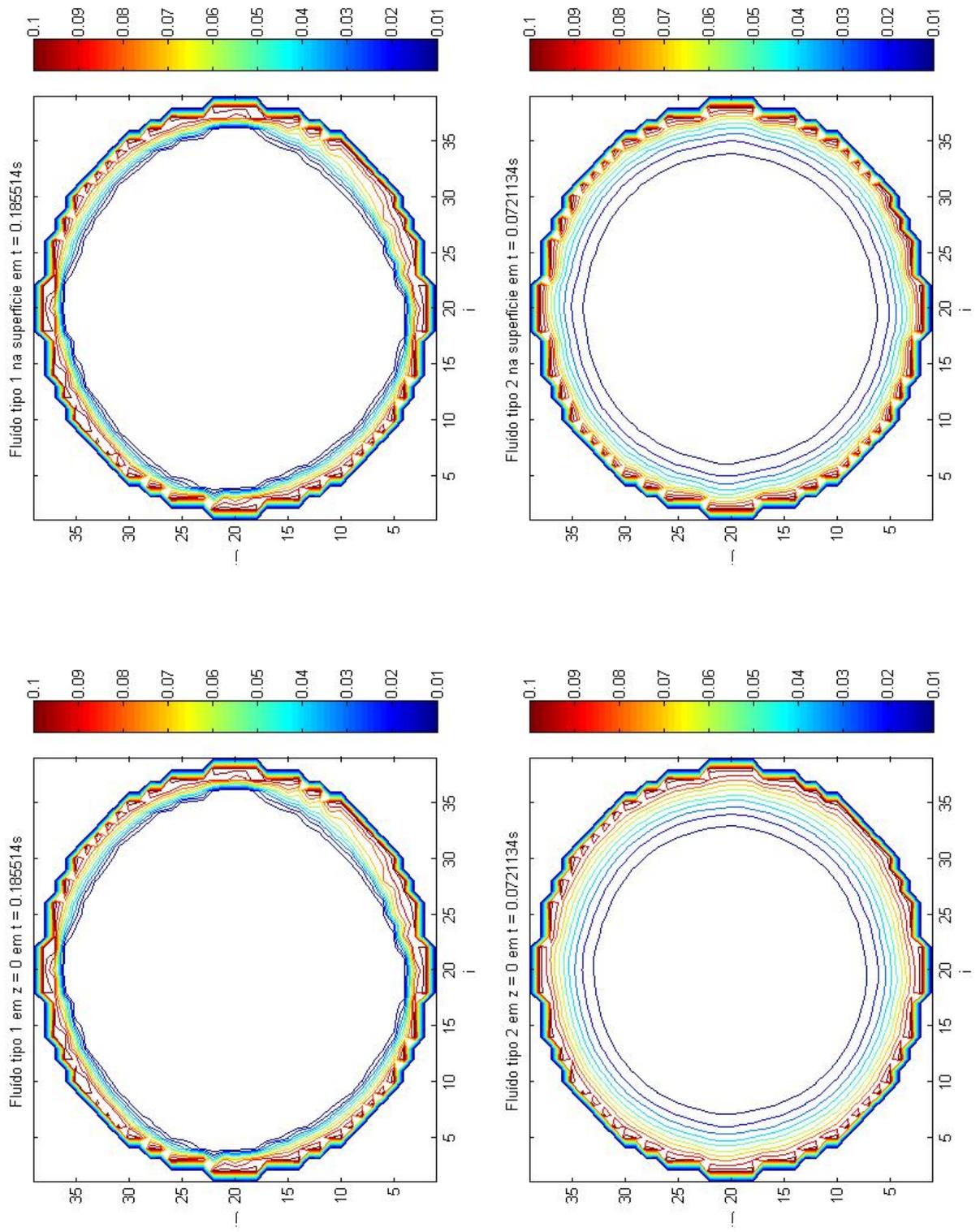
Fonte: Produção do autor

Figura 5.4 - Comportamento do líquido sem perturbações no instante $t = 3\Delta t$ ($g = 10^{-4}m/s^2$)



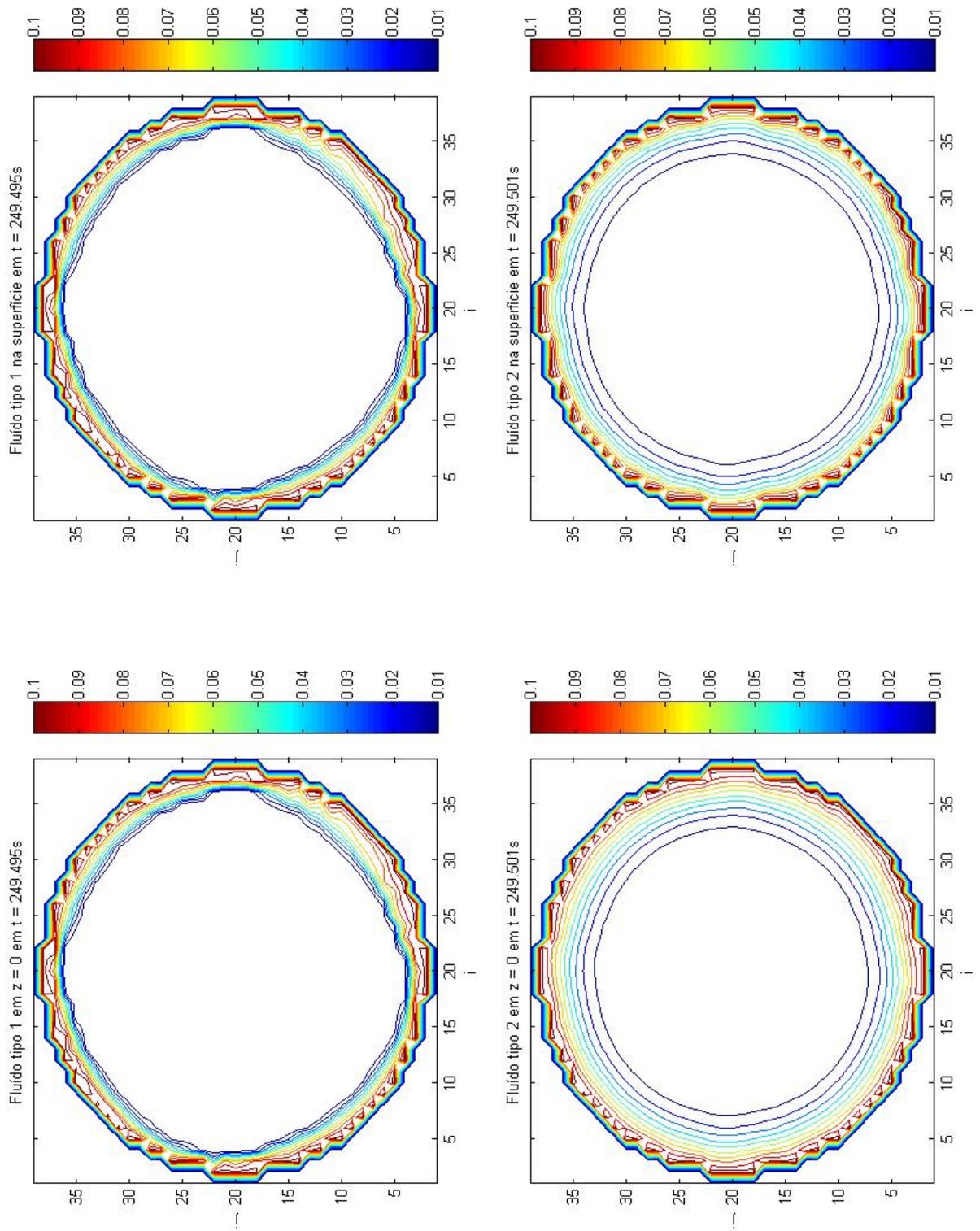
Fonte: Produção do autor

Figura 5.5 - Comportamento do líquido sem perturbações no instante que atinge o modo estacionário ($g = 10^{-4} m/s^2$)



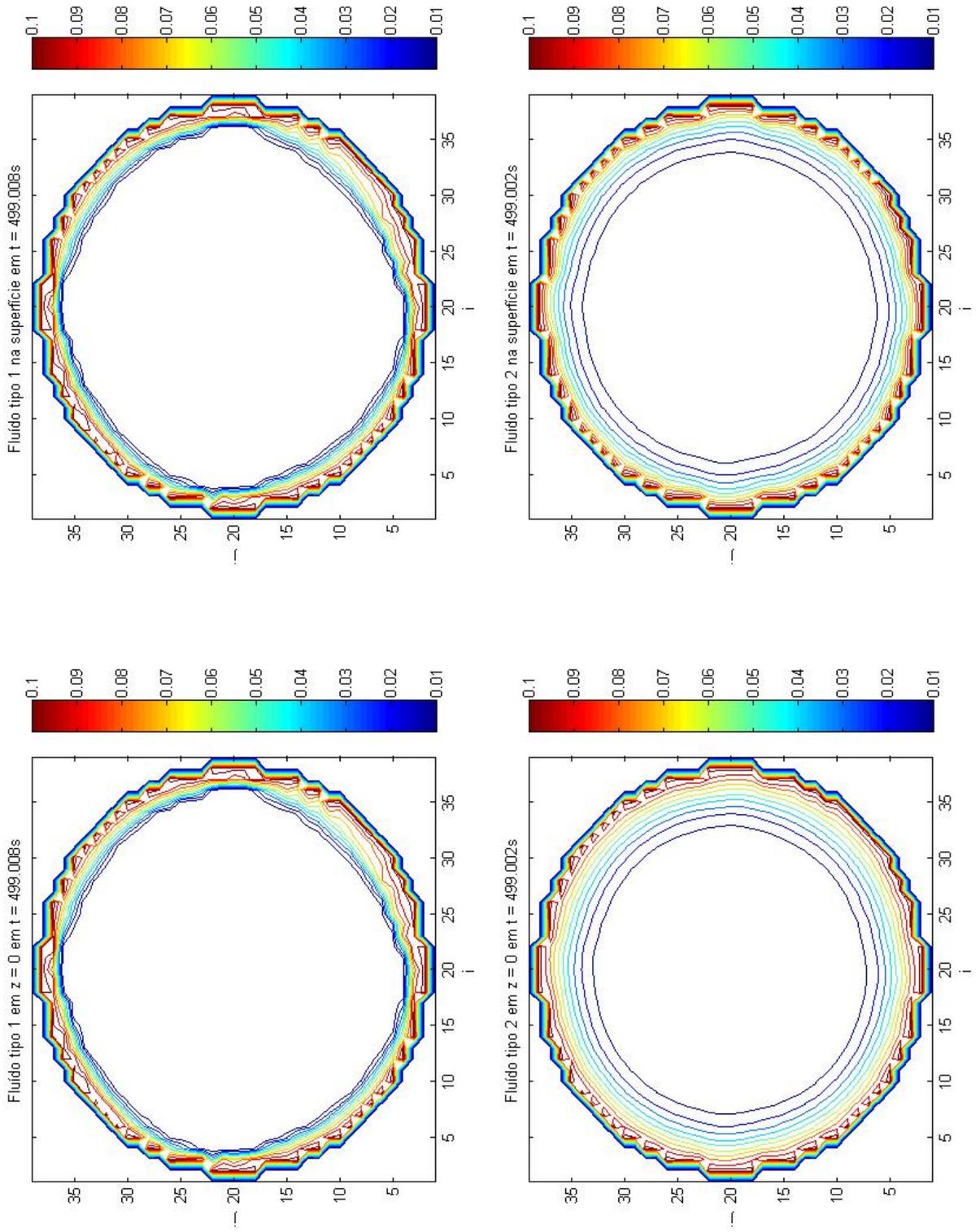
Fonte: Produção do autor

Figura 5.6 - Comportamento do líquido sem perturbações no instante $t \approx 250s$ ($g = 10^{-4} m/s^2$)



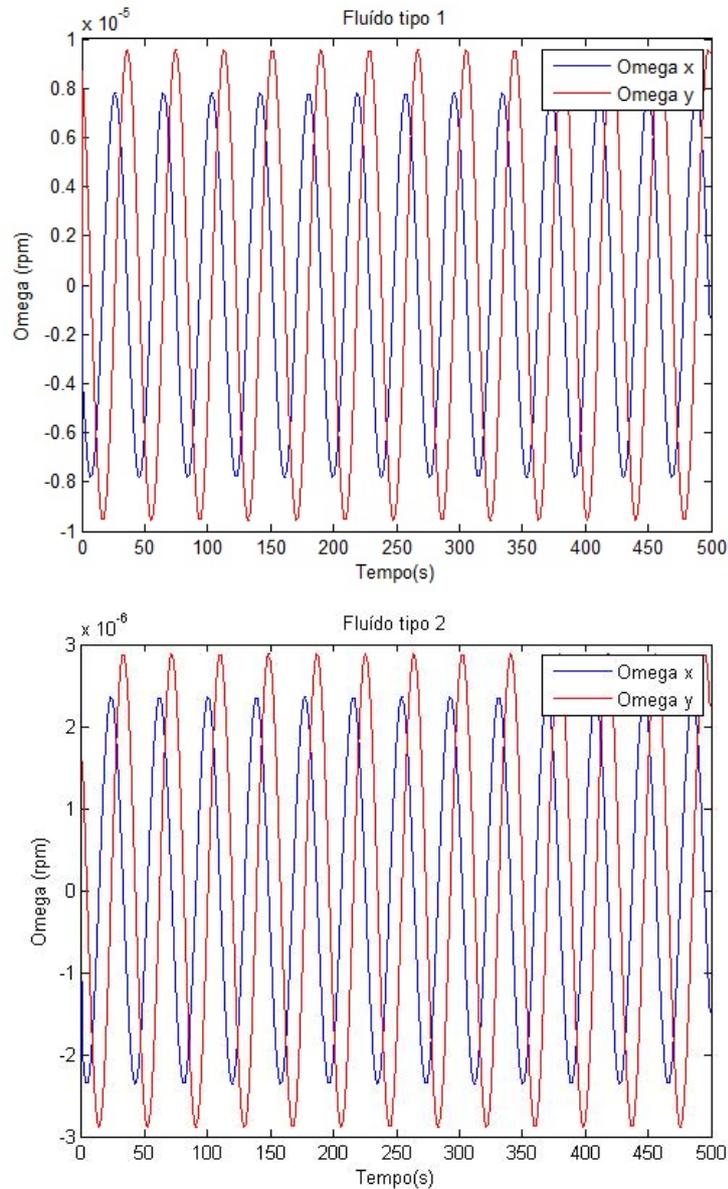
Fonte: Produção do autor

Figura 5.7 - Comportamento do líquido sem perturbações no instante final ($g = 10^{-4} m/s^2$)



Fonte: Produção do autor

Figura 5.8 - Comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y sem perturbações para $g = 10^{-4}m/s^2$

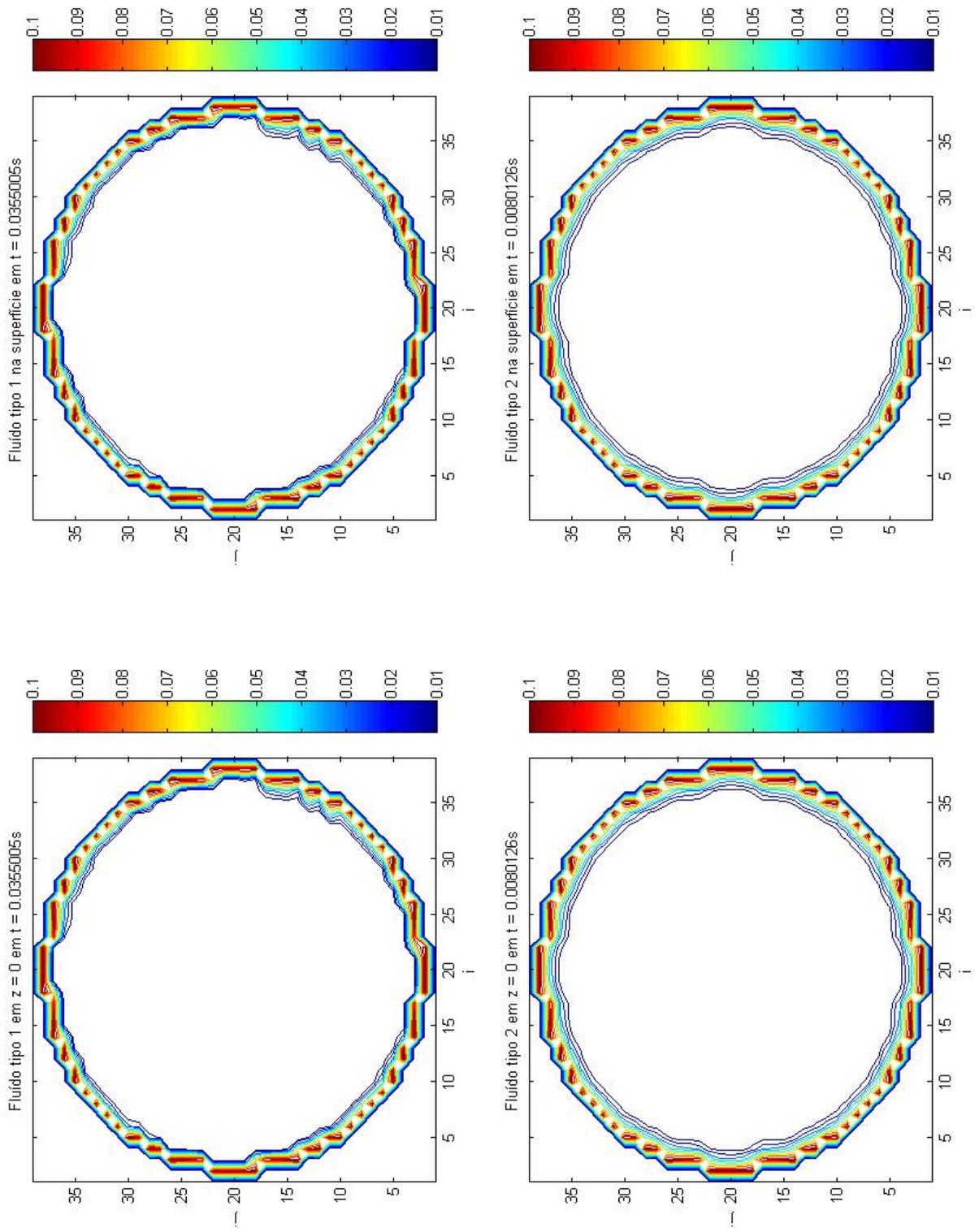


Fonte: Produção do autor

5.1.2 Comportamento do líquido com $w_x = 0,1rpm$, $w_y = 0,1rpm$

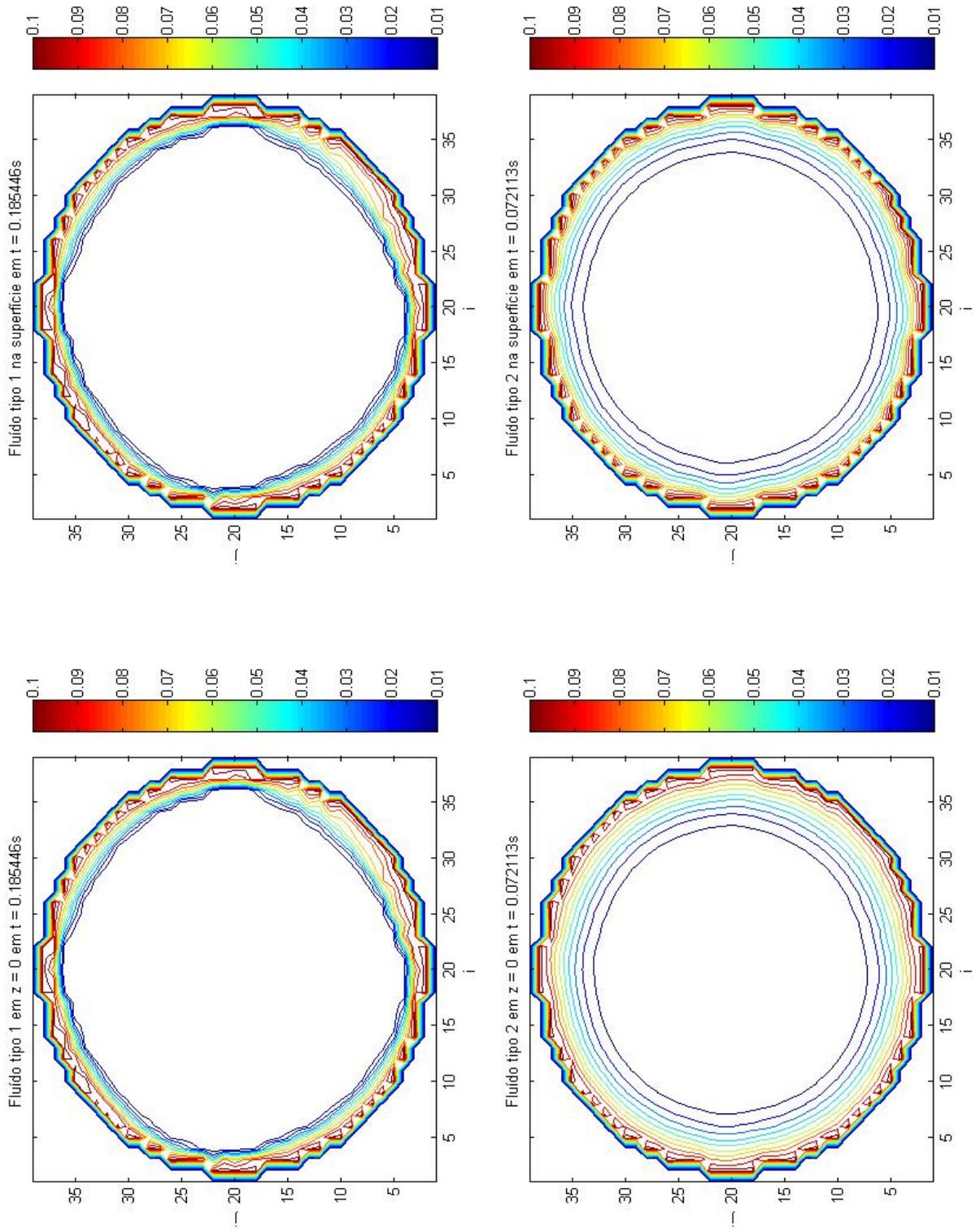
Condições iniciais consideradas: $w_x = 0,1rpm$, $w_y = 0,1rpm$ e $w_z = 10rpm$. As Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 mostram a linhas de corrente (módulo da velocidade no ponto) no plano xy para os quatros instantes definidos e a Figura 5.13 mostra o comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y .

Figura 5.9 - Comportamento do líquido com $\omega_x = \omega_y = 0, 1rpm$ no instante $t = 3\Delta t$ ($g = 10^{-4} m/s^2$)



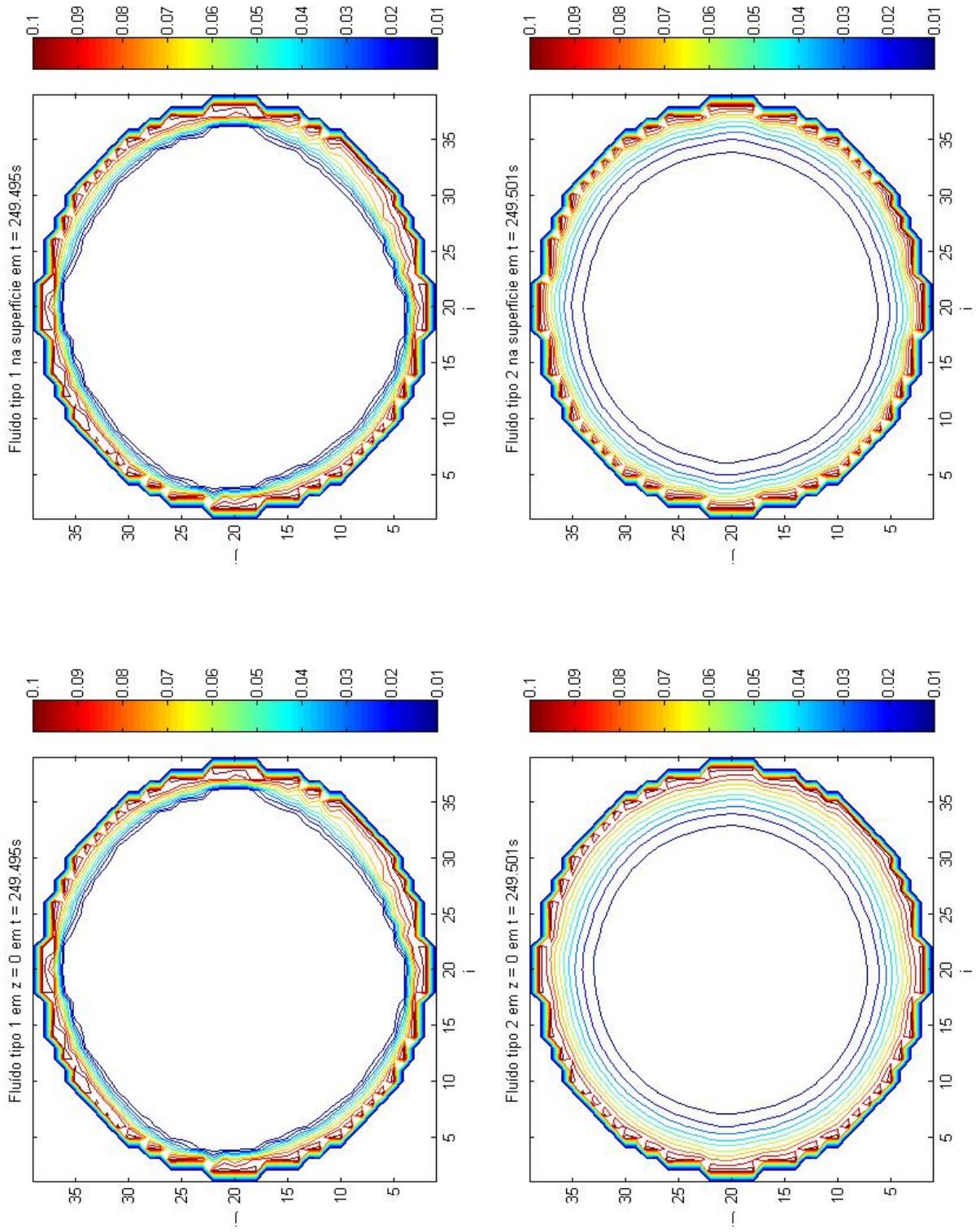
Fonte: Produção do autor

Figura 5.10 - Comportamento do líquido $c/\omega_x = \omega_y = 0$, $1rpm$ no instante que atinge o modo estacionário ($g = 10^{-4}m/s^2$)



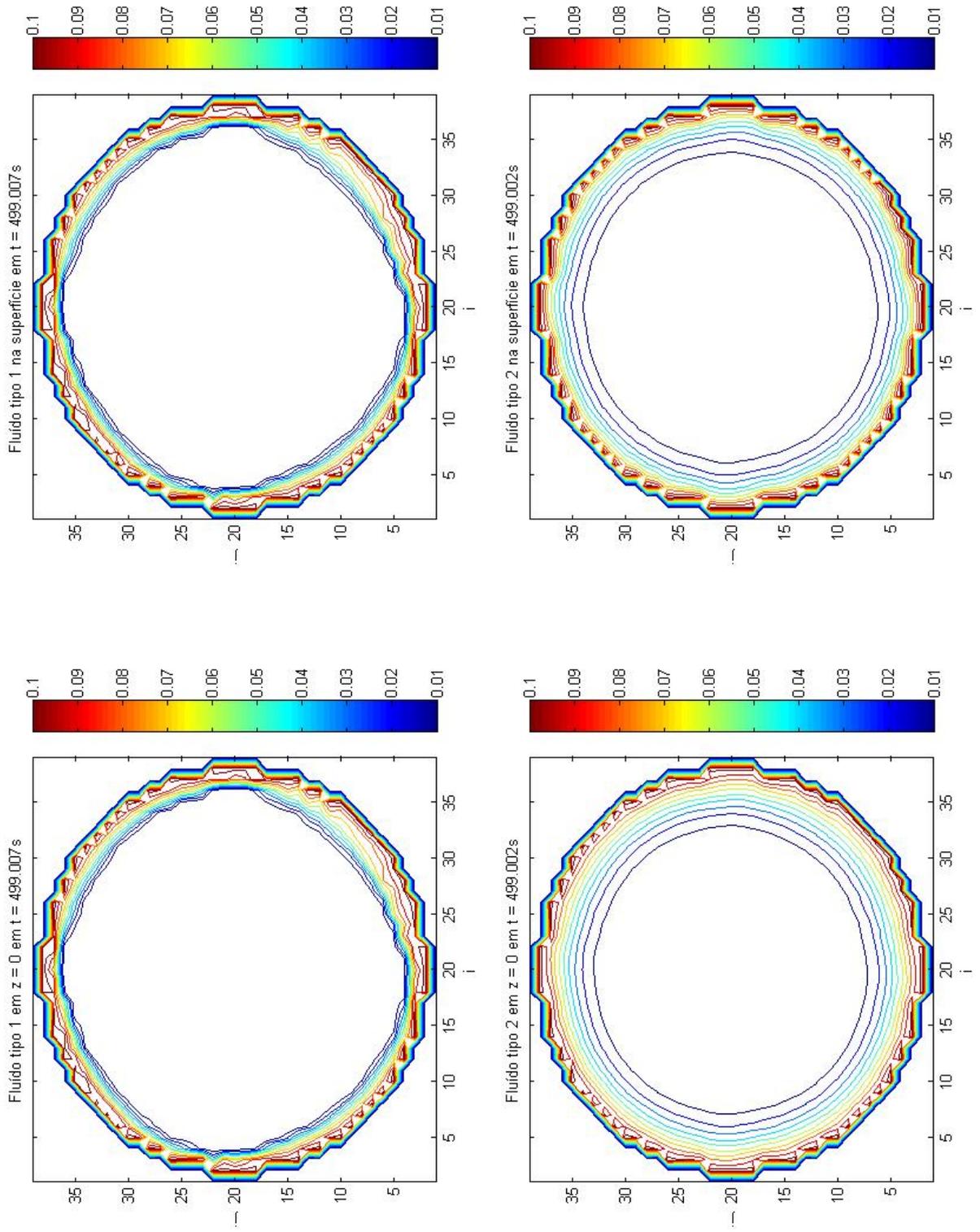
Fonte: Produção do autor

Figura 5.11 - Comportamento do líquido $c/\omega_x = \omega_y = 0,1rpm$ no instante $t \approx 250s$ ($g = 10^{-4}m/s^2$)



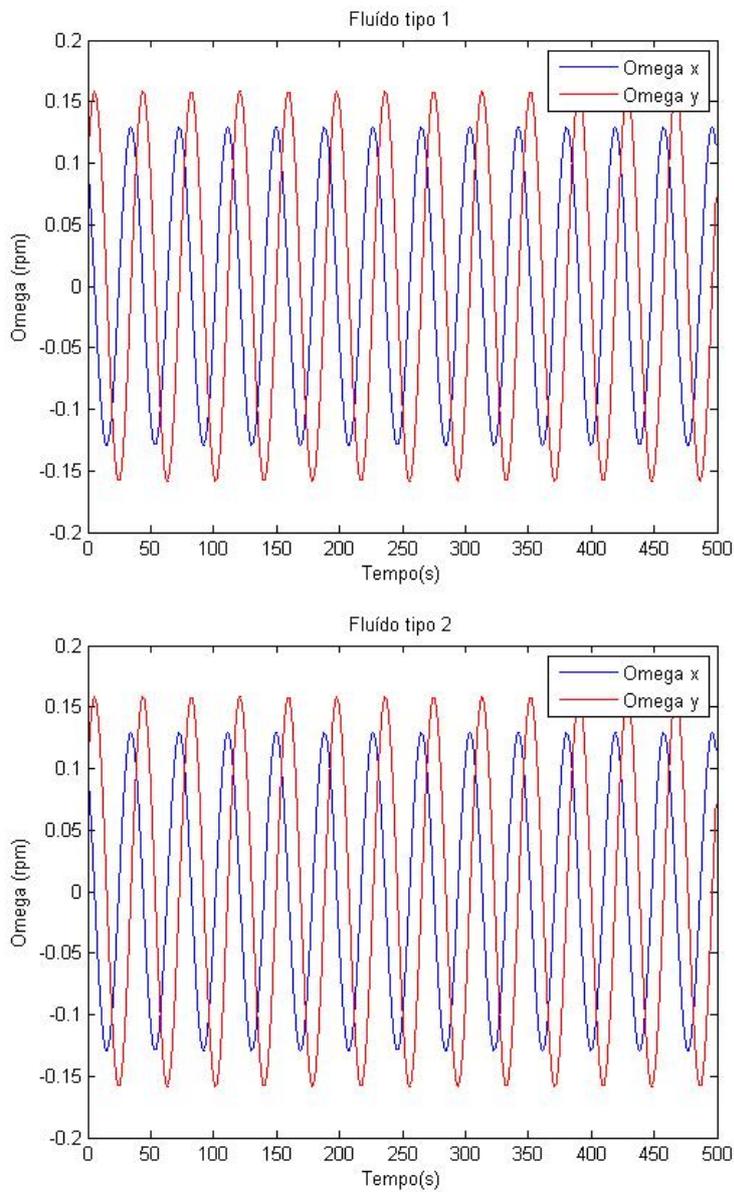
Fonte: Produção do autor

Figura 5.12 - Comportamento do líquido com $\omega_x = \omega_y = 0,1rpm$ no instante final ($g = 10^{-4}m/s^2$)



Fonte: Produção do autor

Figura 5.13 - Comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y para $g = 10^{-4}m/s^2$

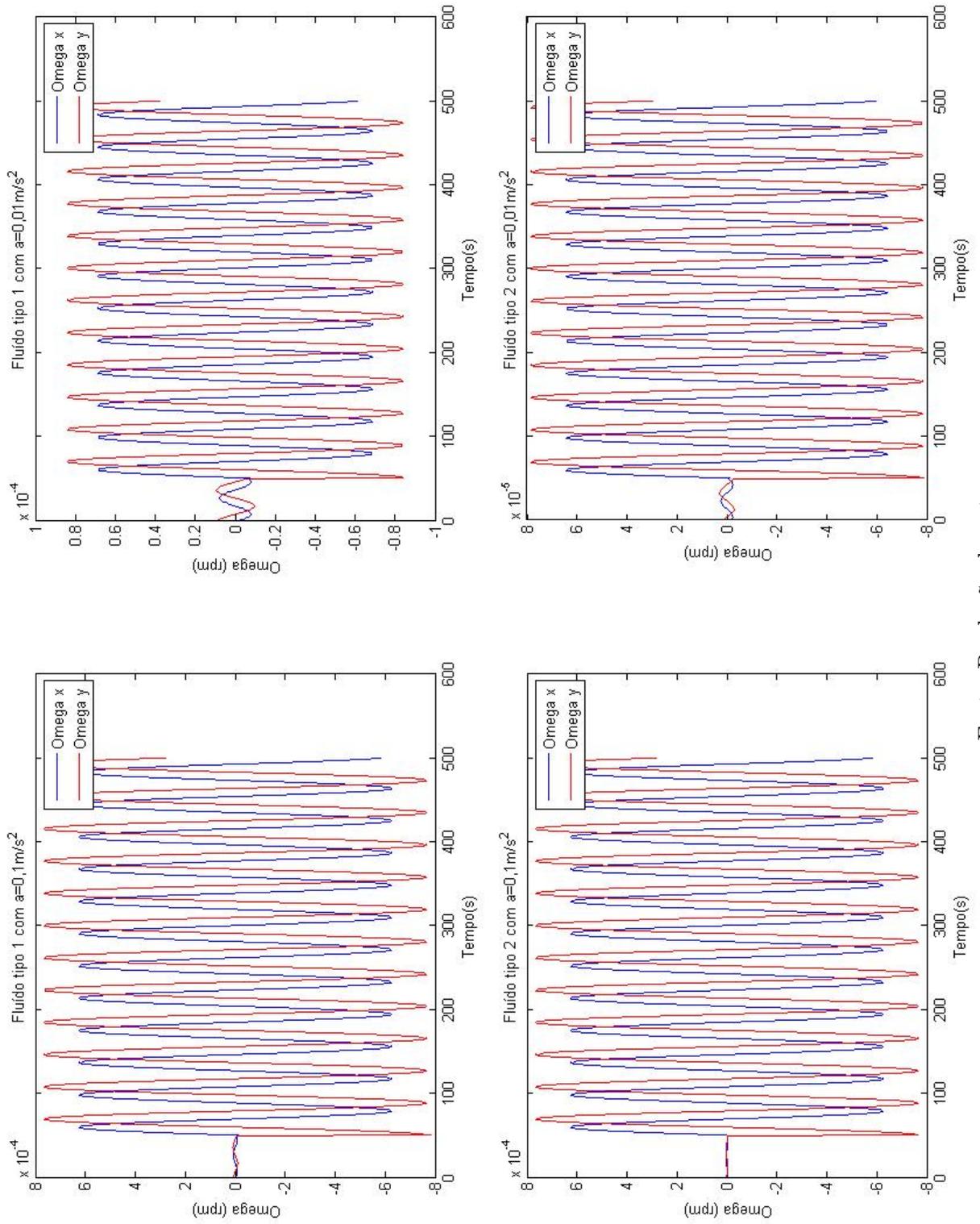


Fonte: Produção do autor

5.1.3 Comportamento do líquido com perturbações

Condições iniciais consideradas: $w_x = 0rpm$, $w_y = 0rpm$ e $w_z = 10rpm$. Inicialmente aplica-se no instante $t = 50s$ uma aceleração de $0,1m/s^2$ na direção X durante $1\Delta t$ em toda a estrutura. A simulação é repetida com uma aceleração de $0,01m/s^2$ também na direção X . O comportamento das velocidade transversais ω_x e ω_z é mostrada na Figura 5.14.

Figura 5.14 - Comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y para $g = 10^{-4} m/s^2$ e com uma aceleração com Δt de duração na direção X



Fonte: Produção do autor

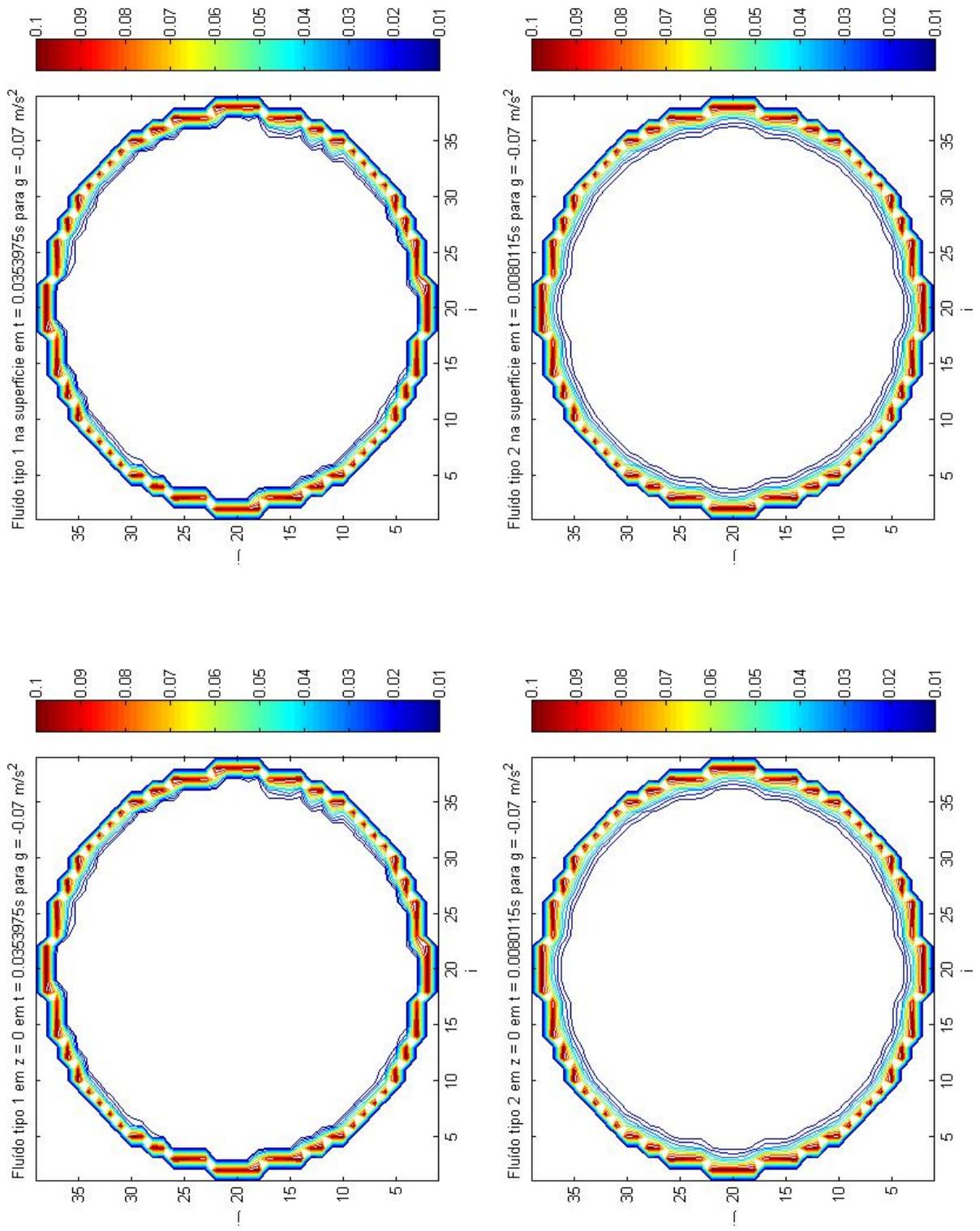
5.2 Simulação em ambiente de baixa gravidade ($g = 0,07m/s^2$)

Nesta simulação foram consideradas as mesma condições que na simulação anterior e a mesma velocidade inicial do fluido.

5.2.1 Comportamento do líquido sem perturbações para ambiente de baixa gravidade

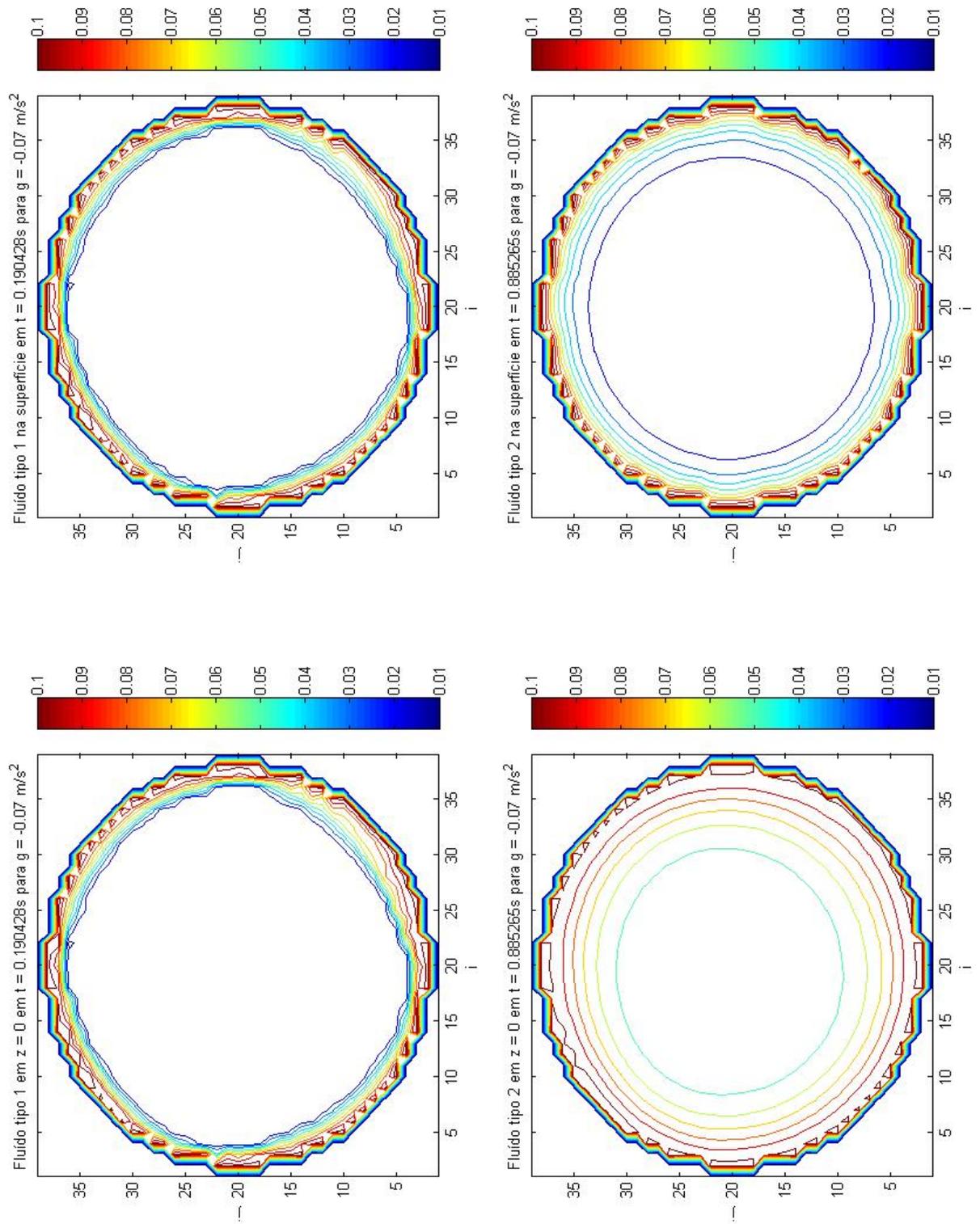
Condições iniciais consideradas: $w_x = 0rpm$, $w_y = 0rpm$ e $w_z = 10rpm$. As Figuras 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18 mostram a linhas de corrente (módulo da velocidade no ponto) no plano xy para os quatros instantes definidos e a Figura 5.19 mostra o comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y .

Figura 5.15 - Comportamento do líquido sem perturbações no instante $t = 3\Delta t$ ($g = 0,07m/s^2$)



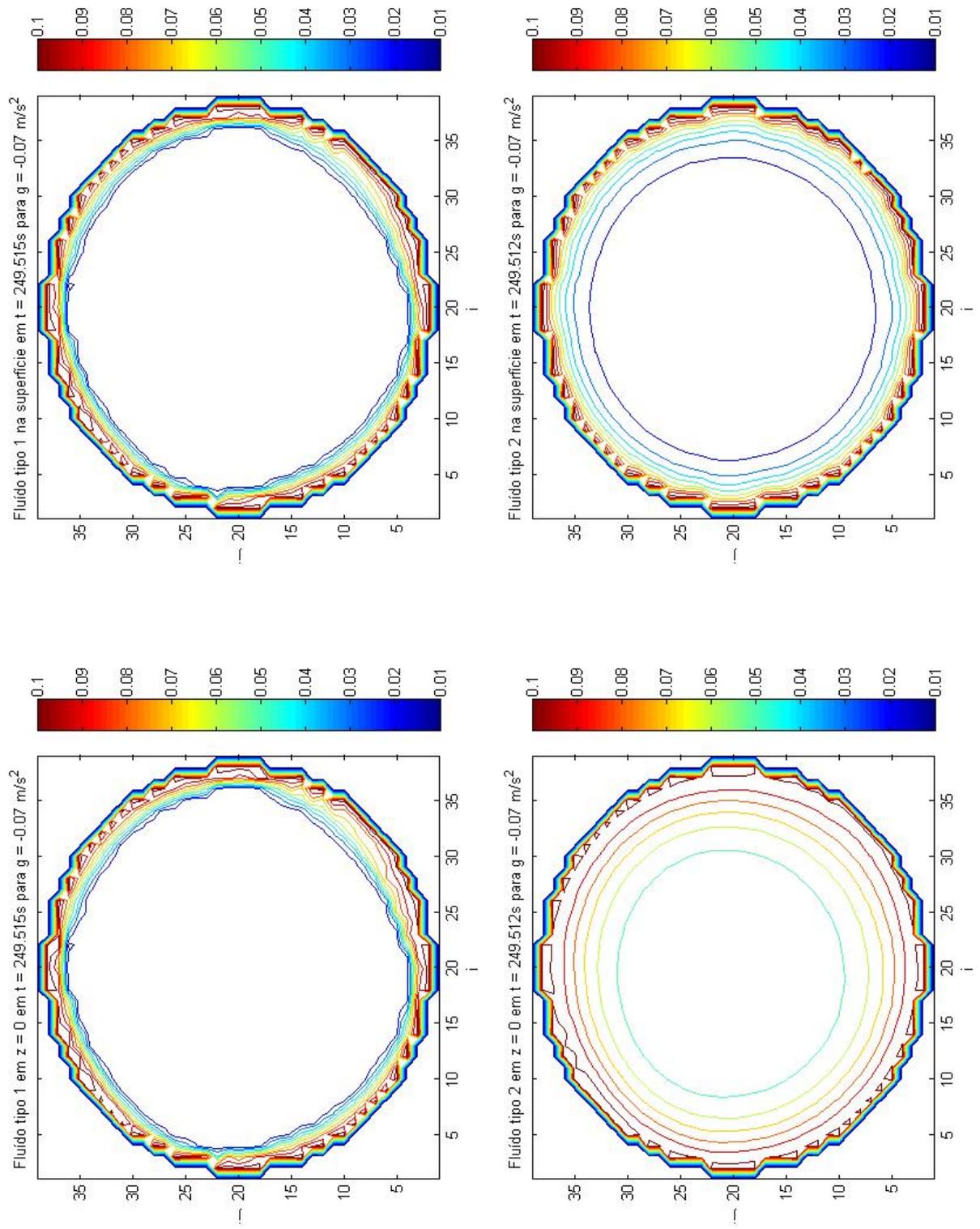
Fonte: Produção do autor

Figura 5.16 - Comportamento do líquido sem perturbações no instante que atinge o modo estacionário ($g = 0,07m/s^2$)



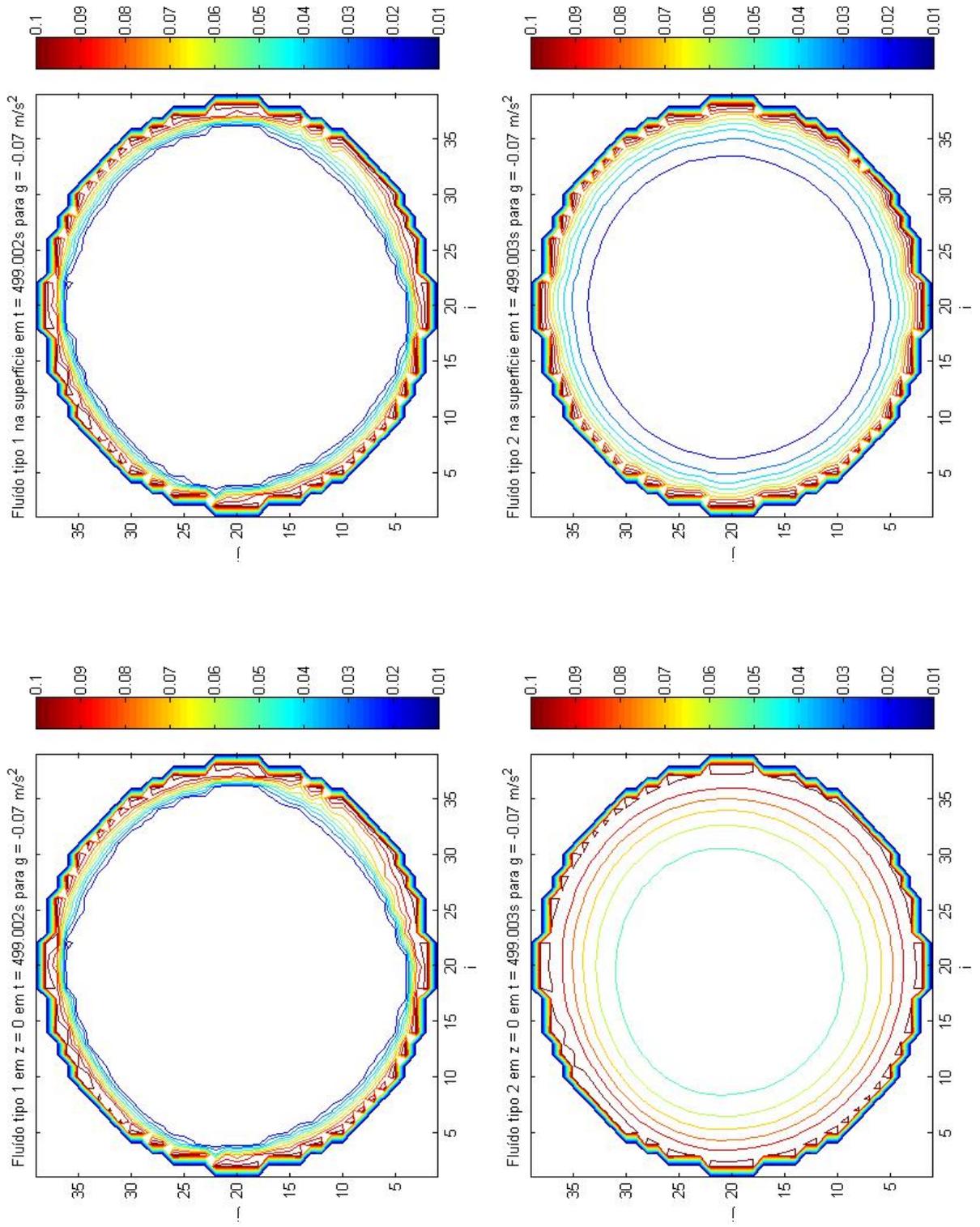
Fonte: Produção do autor

Figura 5.17 - Comportamento do líquido sem perturbações no instante $t \approx 250s$ ($g = 0,07m/s^2$)



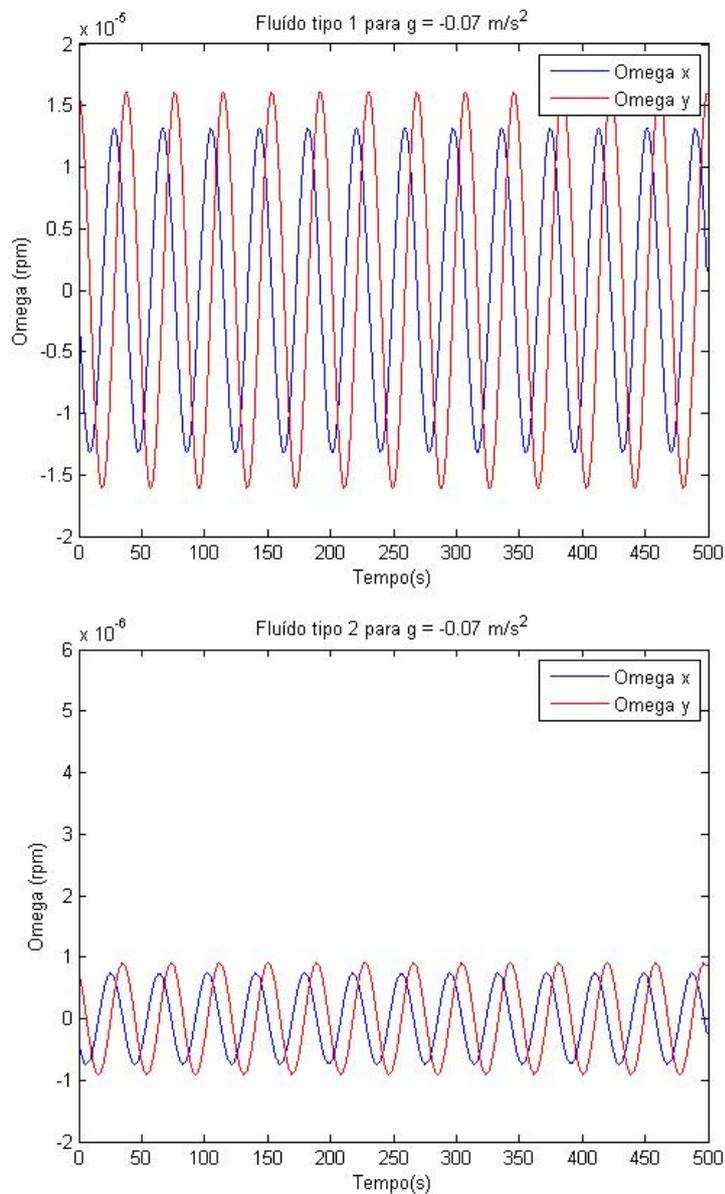
Fonte: Produção do autor

Figura 5.18 - Comportamento do líquido sem perturbações no instante final ($g = 0,07m/s^2$)



Fonte: Produção do autor

Figura 5.19 - Comportamento de ω_x e ω_y sem perturbações para $g = 0,07m/s^2$

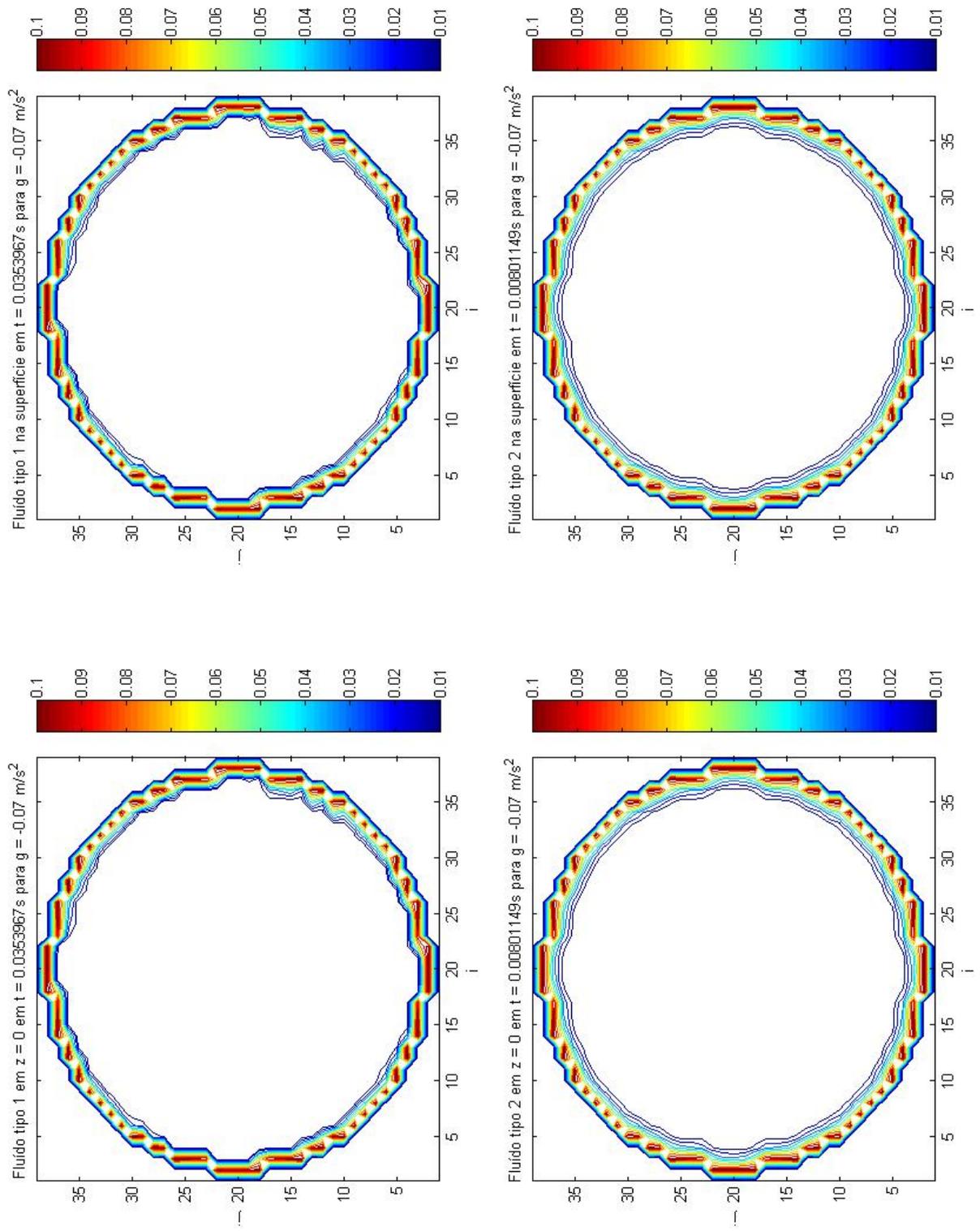


Fonte: Produção do autor

5.2.2 Comportamento do líquido com $w_x = 0,1rpm$, $w_y = 0,1rpm$ em ambiente de baixa gravidade

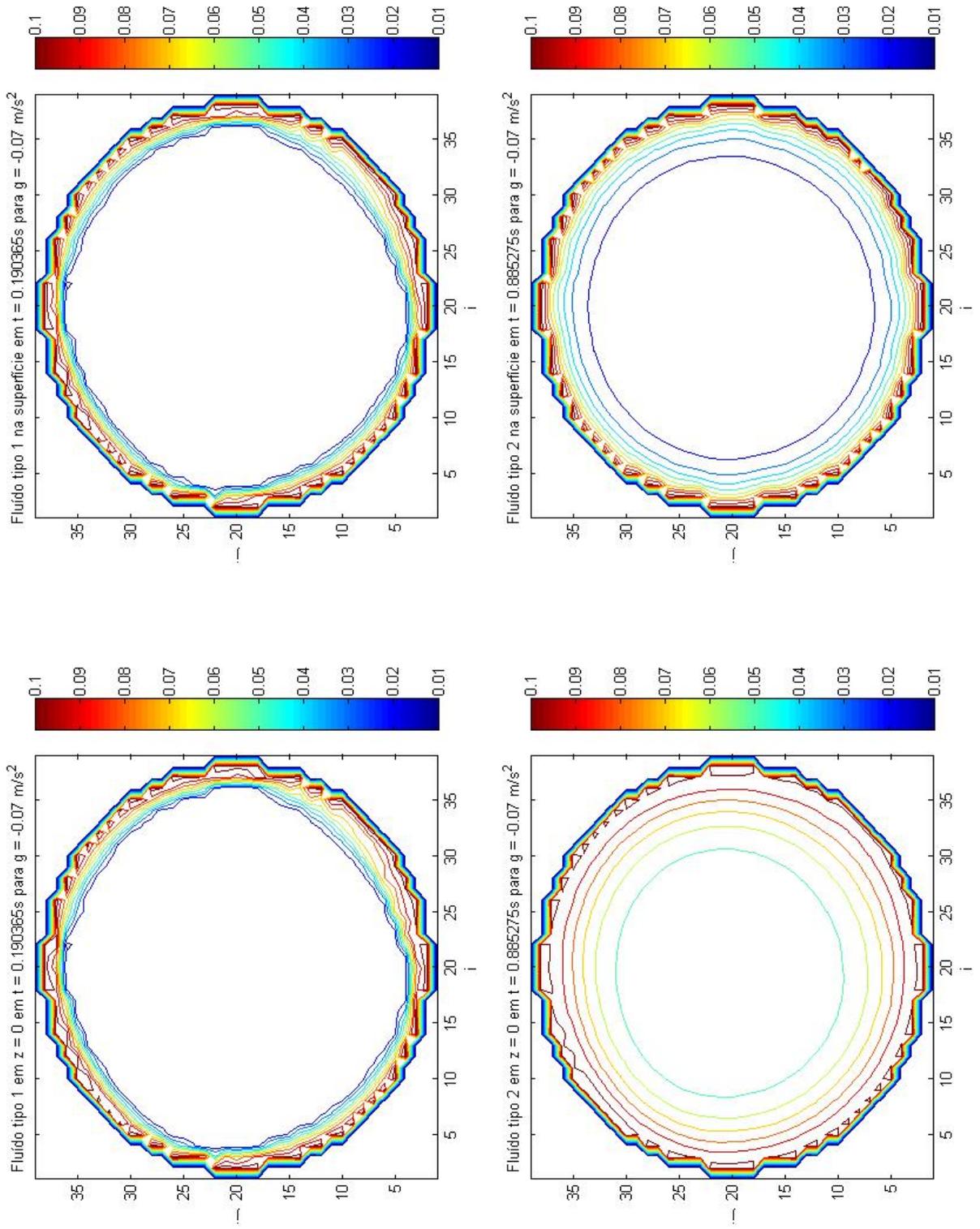
Condições iniciais consideradas: $w_x = 0,1rpm$, $w_y = 0,1rpm$ e $w_z = 10rpm$. As Figuras 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23 mostram a linhas de corrente (módulo da velocidade no ponto) no plano xy para os quatros instantes definidos e a Figura 5.24 mostra o comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y .

Figura 5.20 - Comportamento do líquido com $\omega_x = \omega_y = 0$, $1rpm$ no instante $t = 3\Delta t$ ($g = 0,07m/s^2$)



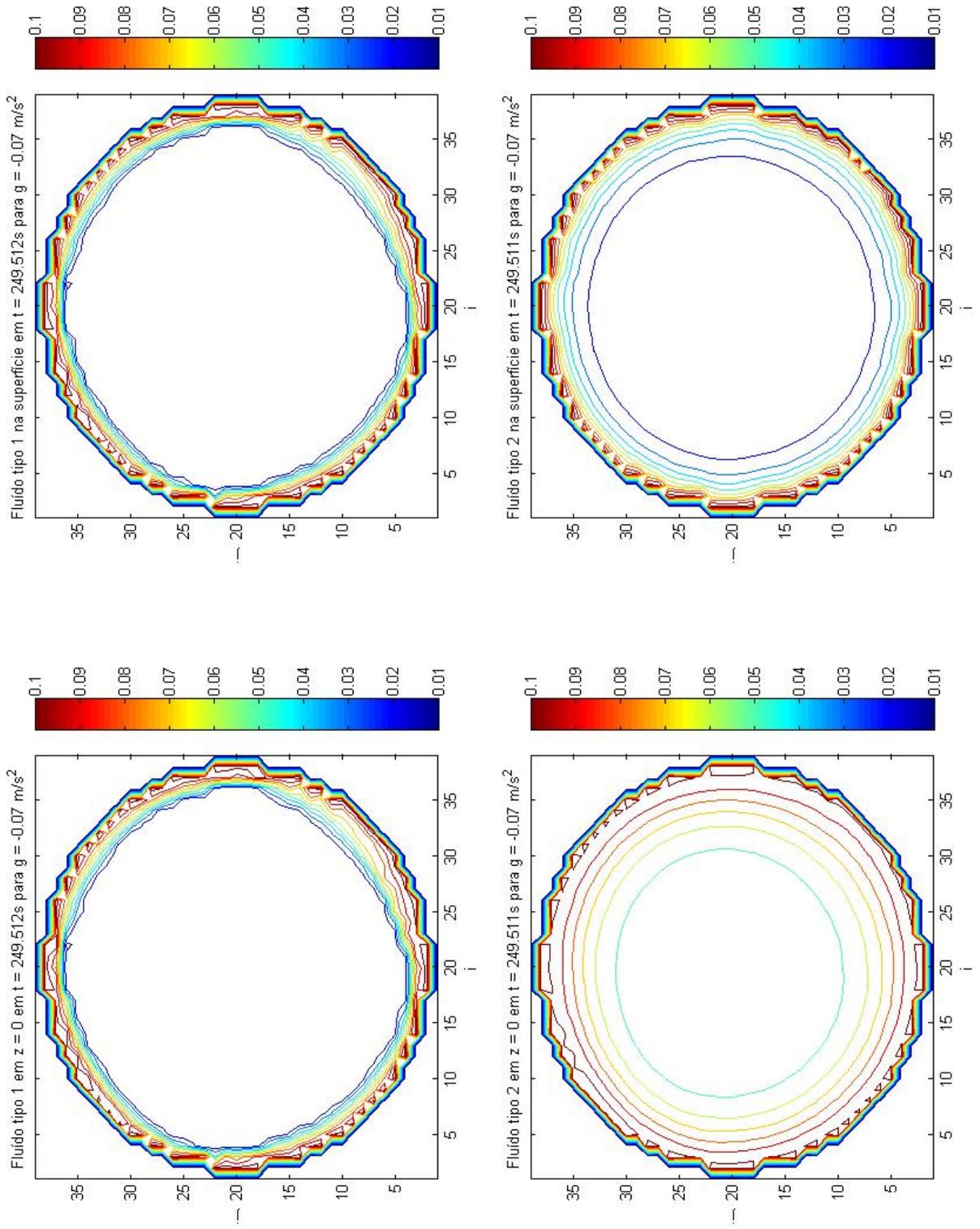
Fonte: Produção do autor

Figura 5.21 - Comportamento do líquido $c/\omega_x = \omega_y = 0,1rpm$ no instante que atinge o modo estacionário ($g = 0,07m/s^2$)



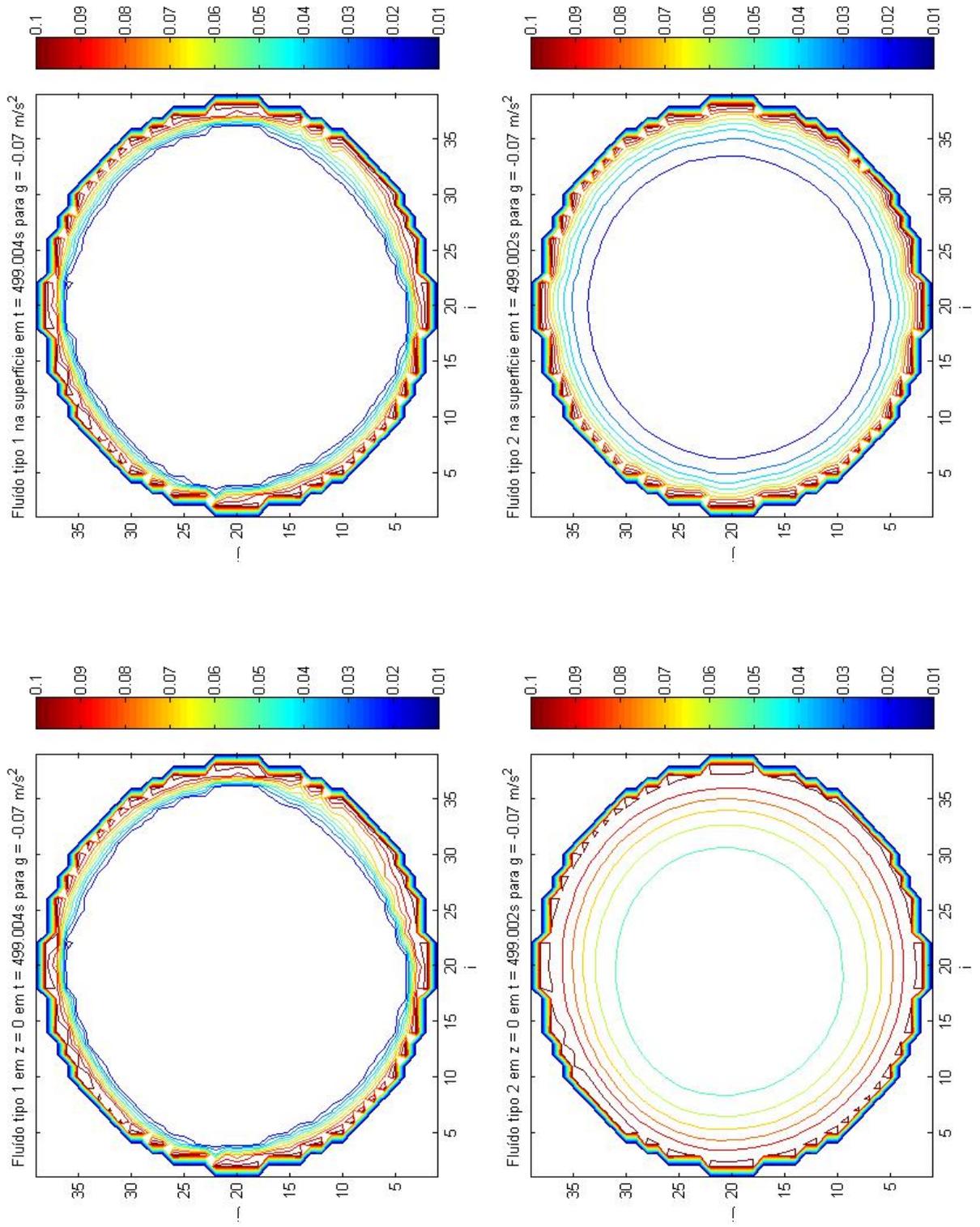
Fonte: Produção do autor

Figura 5.22 - Comportamento do líquido com $\omega_x = \omega_y = 0,1rpm$ no instante $t \approx 250s$ ($g = 0,07m/s^2$)



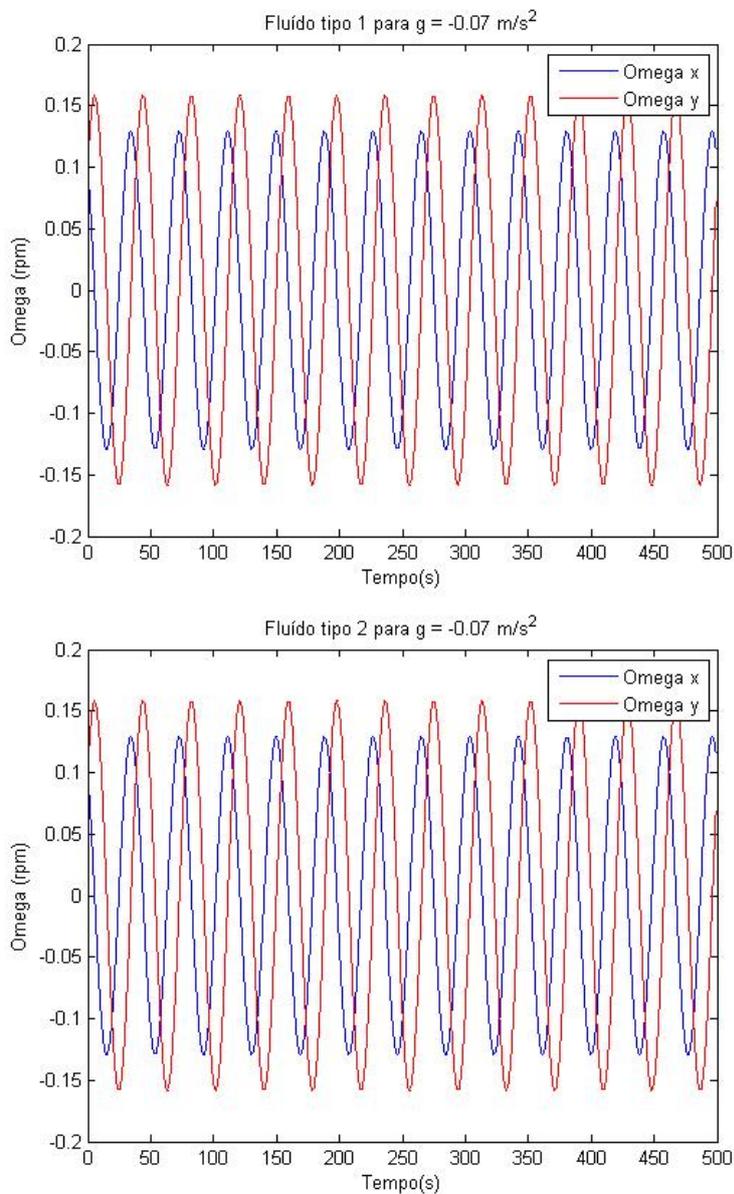
Fonte: Produção do autor

Figura 5.23 - Comportamento do líquido no instante final ($g = 0,07m/s^2$)



Fonte: Produção do autor

Figura 5.24 - Comportamento das velocidades angulares ω_x e ω_y para $g = 0,07m/s^2$

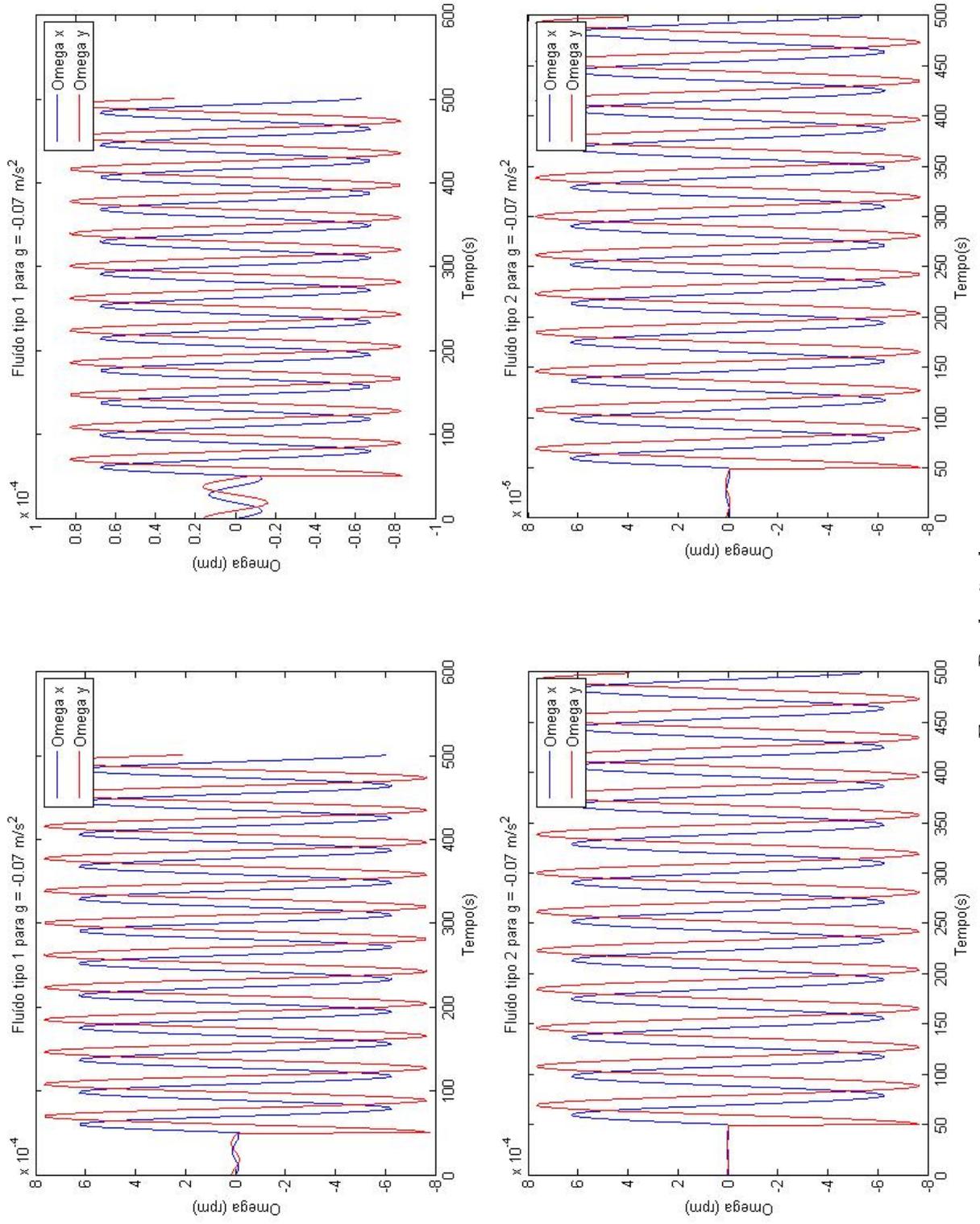


Fonte: Produção do autor

5.2.3 Comportamento do líquido com perturbações

Condições iniciais consideradas: $w_x = 0rpm$, $w_y = 0rpm$ e $w_z = 10rpm$. Inicialmente aplica-se no instante $t = 50s$ uma aceleração de $0,1m/s^2$ na direção X durante $1\Delta t$ em toda a estrutura. A simulação é repetida com uma aceleração de $0,01m/s^2$ também na direção X . O comportamento das velocidade transversais ω_x e ω_z é mostrada na Figura 5.25.

Figura 5.25 - Comportamento de ω_x e ω_y para $g = 0,07m/s^2$ e com uma aceleração com Δt de duração na direção X (à esquerda $a = 0,1m/s^2$ e à direita $a = 0,01m/s^2$)



5.2.4 Análise dos resultados

Observando as figuras que representam as curvas de correntes dadas pelo módulo da velocidade de cada célula, nota-se que as curvas no plano xy para $z = 0$ são praticamente iguais às curvas do plano da superfície do líquido para o líquido do tipo 1. Para o líquido do tipo 2 já se nota diferenças quando $g = 0,07m/s^2$. Pelas figuras pode-se observar também que a massa líquida em movimento para o líquido do tipo 2 (maior viscosidade) é sensivelmente maior que para o líquido do tipo 1, isto reflete no comportamento das velocidades angulares transversais ω_x e ω_y quando estas são inicialmente iguais a zero, ver figuras 5.8 e 5.19, notar que as amplitudes das oscilações são menores para o líquido tipo 2. Estas oscilações nas velocidades angulares transversais, são decorrentes do processo de discretização, se usada uma grade mais grossa, por exemplo $10 \times 10 \times 10$, estas amplitudes são aproximadamente 3 vezes maiores e também dependem do tipo de ambiente. Isto também é observado quando se aplica uma perturbação em um determinado instante, ver figuras 5.14 e 5.25. Quando aplicada uma condição inicial em ω_x e ω_y diferente de zero, os comportamentos das velocidades transversais ω_x e ω_y são iguais para os dois tipos de líquido bem como para os dois tipos de ambientes $g = 10^{-4}m/s^2$ e $g = 0,07m/s^2$, ver figuras 5.13 e 5.24.

6 CONCLUSÕES

Nos ambientes de gravidade $g = 9,81m/s^2$ e $g = 0,07m/s^2$ as simulações com o modelo equivalente Massa-Mola e modelo equivalente Pêndulo apresentaram comportamentos semelhantes, os resultados sugerem que tanto um como o outro podem ser utilizados nestes ambientes. Não foi possível simular o modelo Massa-Mola no ambiente de microgravidade pois os dados disponíveis não contemplam ambientes com número de Bond menores que 10, assim, neste ambiente, simulou-se apenas o modelo Pêndulo que apresentou um comportamento muito distinto dos apresentados em ambientes com gravidade e baixa gravidade.

Na sequência foi elaborado um modelo baseado nas equações de Navier-Stokes para tratar o problema do *sloshing* associado ao movimento de líquidos contidos em contêineres. Na elaboração do modelo utilizou-se o método das diferenças finitas para a discretização da velocidade relativa ao fluxo do fluido e o método SOR para resolver a equação de Poisson para a pressão. Foram realizadas 3 simulações para cada um dos dois ambientes, $g = 10^{-4}m/s^2$ e $g = 0,07m/s^2$, para dois tipos de fluidos.

Comparando os resultados mostrados pelos gráficos do comportamento das velocidades angulares transversais ω_x e ω_y no modelo baseado nas equações Navier-Stokes para o líquido tipo 1 com os seus correspondentes obtidos nos modelos equivalentes Massa-Mola e Pêndulo observa-se uma semelhança suficiente para considerá-los equivalentes, principalmente nos ambientes de baixa gravidade, e se desconsiderado o fator de amortecimento presente nos modelos equivalentes Massa-Mola e Pêndulo, a semelhança torna-se evidente.

A aplicabilidade do modelo baseado nas equações de Navier-Stokes no sistema de controle de espaçonaves pode não ser apropriada devido ao esforço computacional necessário, porém, pode ser uma ferramenta útil para avaliação e ajustes de modelos mecânicos equivalentes. Embora não se tenha detalhado aqui, ficou claro durante as simulações a importância da malha computacional para a qualidade dos resultados que se pretende obter e que o seu refinamento implica em um aumento considerável no custo computacional.

O método utilizado foi o método MAC, como sugestão para trabalho futuros, propõe-se outros métodos como o método Sola (*solution algorithm*) e computação paralela. Além disso pode-se investigar alternativas nas condições de fronteira que como se sabe interfere no comportamento dos fluidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARCAROLO, D. A.; SILVA, C. E.; GUEVARA JR, N. O.; ALVES, J. L. D. Análise de estabilidade hidrodinâmica de embarcações via método de elementos finitos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS, 5., 2009, Fortaleza, CE. **Anais...** Natal, RN: Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás-ABPG, 2009. 29, 30
- DODGE, F. T. The new "dynamic behavior of liquids in moving containers". **Southwest Research Institute**, p. 195p, 2000. 19, 37, 43
- DODGE, F. T.; GARZA, L. R. Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravity. **Journal of Applied Mechanics**, p. 555–561, 1967. 11, 12, 13, 32, 43, 44, 56, 66
- FEKKEN, G. **Numerical simulation of greenwater loading on the foredeck of a ship**. Groningen, 1998. Disponível em: <http://www.math.rug.nl/~veldman/preprints/MSc-Fekken.pdf>. Acesso em: 30 out. 2013. 15, 16
- FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: Conceitos básicos e aplicações**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2012. 83, 84, 85, 89
- GERRITS, J. **Dynamics of liquid-filled spacecraft: numerical simulation of coupled solid-liquid dynamics**. 120 p. PhD — University of Groningen, Groningen, 2001. Disponível em: <http://dissertations.ub.rug.nl/faculties/science/2001/j.gerrits/>. Acesso em: 31 out. 2013. 19, 20, 21, 22, 23
- GERRITS, J.; VELDMAN, A. E. P. Numerical simulation of coupled liquid-solid dynamics. In: EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING (ECCOMAS 2000), 2000, Barcelona, Spain. **Proceedings...** Barcelona, Spain: ECCOMAS, 2000. 17, 18
- HIRT, C. M.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. **J. Computational Physics**, v. 39, p. 201–225, 1981. 15, 29
- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction - a review. **Commun. Comput. Phys.**, v. 12, n. doi:10.4208/cicp.291210.290411s, p. 337–377, 2012. 2, 28, 29

- IBRAHIM, R. A. **Liquid sloshing dynamics theory and applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 1, 24
- KAPLAN, M. H. **Modern spacecraft dynamic and control**. New York: John Wiley and Sons, 1976. 415p. 3
- LUPPES, R.; HELDER, J. A.; VELDMAN, A. E. P. The numerical simulation of liquid sloshing in microgravity. **European Conference on Computational Fluid Dynamics**, n. ECCOMAS CFD, 2006. 3, 28
- MEIROVITCH, L. **Computational methods in structural dynamics**. [S.l.]: Springer, 1980. 32
- NICHOLS, B. D.; HIRT, C. W.; HOTCHKISS, R. S. Sola-vof: A solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries. **Los Alamos Scientific Laboratory report**, n. LA-8355, 1980. 14
- PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. **Journal of Computational Physics**, v. 25, n. ISSN 0021-9991, p. 220–252, 1977. 1, 14
- _____. The immersed boundary method. **Acta Numerica (2002)**, n. DOI:10.1017/S0962492902000077, p. 1–39, 2002. 1, 23, 24
- ROY, S.; HELTAI, L.; COSTANZO, F. Benchmarking the immersed finite element method for fluid-structure interaction problems. arXiv:1306.0936v1 [math.NA], 2013. 1, 30
- SABEUR, Z.; COHEN, J. E.; STEPHENS, J. R.; VELDMAN, A. E. P. **Numerical methods in fluid dynamics VI**: investigation on free surface flow oscillatory impact pressures with the volume of fluid method. Oxford: M.J. Baines ed., 1998. Pp. 493-498. 16, 17
- SILVERMAN, S.; ABRAMSON, H. N. **The dynamic behavior of liquids in moving containers**. Washington D.C., 1966. (NASA SP-106).p. 13-78. 11
- STOFAN, A. J.; PAVLI, A. J. Experimental damping of liquid oscillations in a spherical tank by positive-expulsion bags. **Washington D.C.: NASA, 1962**. (NASA TN D-1311), 1962. 9
- STOFAN, A. J.; SUMNER, I. E. **Experimental investigation of the sloshing-damping effectiveness of positive-expulsion bags and diaphragms in spherical tanks**. Washington D.C., 1963. (NASA TN D-1712). 10

TUREK, S.; HRON, J.; RAZZAQ, M.; H, W.; SCHÄFER, M. Numerical benchmarking of fluid-structure interaction: a comparison of different discretization and solution approaches. In: SPRINGER (Ed.). **Fluid structure interaction II: modelling, simulation, optimization**. Berlin Heidelberg: Bungartz, H-J.; Mehl, M.; Schäfer, M. (eds), 2010. p. 413–424. 1

VELDMAN, A. E. P. The simulation of violent free-surface dynamics at sea and in space. In: EUROPEAN CONFERENCE ON COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS (ECCOMAS CFD, 2006), 2006, Egmond aan Zee, Netherlands. **Proceedings...** Delft: Delft University of Technology: ECCOMAS, 2006. 2, 3, 25, 26, 27, 28

VREEBURG, J. P. B. Measured states of sloshsat flevo. In: INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL CONGRESS, 56., 2005, Fukuoka, Japan. **Proceedings...** [S.l.]: International Astronautical Federation / AIAA (IAF), 2006. 24, 25

