



## FILTRO DE PARTÍCULAS *RAO-BLACKWELLIZED* PARA ESTIMAÇÃO DE ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS USANDO DADOS SIMULADOS

**William R. Silva<sup>a</sup>; Roberta V. Garcia<sup>b</sup>; Paula C. P. M. Pardal<sup>b</sup>; Hélio K. Kuga<sup>c</sup>; Maria C. F. P. S. Zanardi<sup>d</sup>**

[a] Universidade de Brasília (UnB), Faculdade UnB Gama (FGA), Área Especial de Indústria, Projeção A, Setor Leste Gama, CEP: 72444-240, Brasília, DF, Brasil.

[b] Universidade de São Paulo (USP), Escola de Engenharia de Lorena (EEL), Estrada Municipal do Campinho, S/N. Ponte Nova, CEP: 12602810, Lorena, SP, Brasil.

[c] Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Divisão de Mecânica Espacial e Controle (DMC), Avenida dos Astronautas, 1758, Jardim da Granja, CEP: 12227-010, São José dos Campos, SP, Brasil.

[d] Universidade Federal do ABC (UFABC), Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas (CECS), Avenida dos Estados, 5001, Bangú, CEP: 09210-580, Santo André, SP, Brasil.

**Resumo:** *Nesse trabalho, o filtro de partículas Rao-Blackwellized (FPRB) foi desenvolvido para determinação de atitude e bias de giroscópios usando dados de medida simulados para órbita e atitude do CBERS-4 (China Brasil Earth Resources Satellite) recentemente em operação. As medidas simuladas foram fornecidas pelo pacote PROPAT (Satellite Attitude e Orbit Toolbox for Matlab). O modelo dinâmico de atitude é descrito por quatérnios. Os sensores de atitude disponíveis são dois DSS (Digital Sun Sensors), dois IRES (Infrared Earth Sensor) e uma tríade de giroscópios mecânicos. O FPRB é uma técnica que explora a estrutura de espaço de estados a fim de reduzir o número de partículas, diminuindo o tempo de processamento, evitando o esforço computacional comum ao filtro de partículas padrão. Pode-se dizer que a extensão lógica do FPRB fornece um modelo geral que divide o modelo de processo e de medidas em aspectos puramente não-lineares e aspectos condicionalmente linear-gaussianos, sendo que este explora essa estrutura, marginalizando as partes lineares condicionais e estimando-as usando filtros exatos, como o Filtro de Kalman (FK). Os resultados mostram que é possível alcançar precisão na determinação de atitudes dentro dos requisitos prescritos utilizando o FPRB, com menor custo computacional quando comparado com o filtro de partículas padrão e suas ramificações.*

**Palavras-chave:** *Filtro de Partículas Rao-Blackwellized, Filtro de Kalman Unscented, Estimação de atitude, Bias de giros, Satélites Artificiais.*

### 1. INTRODUÇÃO

A estimação de atitude é um processo de determinação da orientação de um satélite em relação a um sistema de referência inercial alimentado com dados de sensores de atitude. Após determinado um vetor de referência, o sensor de atitude mede a orientação desse vetor de referência com relação ao sistema de referência fixo ao satélite. É possível estimar a orientação do satélite processando computacionalmente esses vetores usando métodos de estimação de atitude. Além disso, a estimação de atitude também visa atenuar os desvios devido as erros de medidas e/ou modelos matemático do sistema dinâmico com base no modelo estatístico dos sensores e do sistema.

Existem muitos métodos de estimação de atitude, mas que podem não garantir a precisão desejada, sendo que cada método é apropriado para um determinado tipo de aplicação. Dessa forma, se faz necessário avaliar o tempo de processamento e precisão que se deseja atingir.

A estimação de atitude para sistemas não lineares constitui a parte mais complexa da teoria de estimação,

onde se deseja estimar estados que variam não linearmente, e as medidas são também relacionadas não linearmente ao estado. Para este tipo de problema, as variantes do Filtro de Kalman (FK) para sistemas não lineares são os estimadores recursivos mais utilizados atualmente, mas que pode não vir com a precisão desejada.

A formulação do problema de estimação dinâmica de atitude é realizada através das equações diferenciais cinemáticas, quando giroscópios a bordo compõem o sistema de determinação e controle de atitude. A presença de giroscópios é particularmente útil, pois substitui a necessidade do conhecimento dos torques, sejam perturbadores ou de controle, cujos efeitos são sentidos por este tipo de sensores. Porém, os giroscópios não estão isentos de erros, sejam estes tanto de natureza aleatória, quanto de natureza sistemática.

Dessa forma, temos por objetivo estimar a atitude do satélite utilizando os parâmetros de Rodrigues para representar a atitude. Essa abordagem é importante, uma vez que a utilização direta dos quatérnions durante o processo de estimação pode apresentar problemas, com o quatérnion perdendo suas características (Crassidis and Markley, 2003; Zanetti and DeMars, 2018).

Além disso, de acordo com Casella and Robert (1996) e Mustière et al. (2006), o FPRB no momento da amostragem das partículas utiliza um ganho de Kalman, resolvendo o problema de empobrecimento de amostra e diminuindo o tempo de processamento. Além disso, o modelo cinemático e das medidas são compostos por parcelas não lineares, sendo necessária a utilização de técnicas específicas de estimação para este tipo de problema.

## 2. O FILTRO DE PARTÍCULAS

Por volta da década 40 surgem os conceitos iniciais do Filtro de Partículas como mencionado em Metropolis and Ulam (1949) e Wiener (1956).

O filtro de partículas, representa um estimador numérico bayesiano além de ser uma aproximação estatística pela força bruta (Metropolis and Ulam, 1949; Wiener, 1956) para problemas de estimação difíceis de resolver com o filtro de Kalman convencional ou sistemas não linear (Simon, 2006).

Suponha que um sistema não linear descrito pela equação

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= f_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \\ \mathbf{y}_k &= h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $k$  é o índice de tempo,  $\mathbf{x}_k$  é o estado,  $\mathbf{u}_k$  é a entrada de controle, e  $\mathbf{w}_k$  é o ruído do processo,  $\mathbf{y}_k$  são as medidas e  $\mathbf{v}_k$  é a medida do ruído. As funções  $f_k(\cdot)$  e  $h_k(\cdot)$  são o sistema não linear variante no tempo e a equação de medida respectivamente. Os ruídos  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  são considerados independentes e brancos com função de densidade de probabilidade conhecida.

Suponha um sistema não linear como apresentado na Eq. (1). Para iniciar a estimativa do problema, geramos aleatoriamente um dado número  $N$  de estados de vetor para a condição inicial da função de densidade de probabilidade  $p(\mathbf{x}_0)$ , que é assumida como conhecida. Esses vetores são chamados de estados de partículas e são representados como  $\mathbf{x}_{0,i}^+$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

$$\mathbf{x}_{0,i}^+ \sim p(\mathbf{x}_{0,i}) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

Em cada etapa  $k = 1, 2, \dots$ , as partículas se propagam para a próxima etapa usando a dinâmica do processo da equação  $f(\cdot)$ . Essa etapa é conhecida como amostragem.

$$\mathbf{x}_{k,i}^- = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1,i}^+, \mathbf{w}_{k-1}^i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

onde, cada vetor de ruído  $\mathbf{w}_{k-1}^i$  é gerado aleatoriamente com base na função de densidade de probabilidade conhecida de  $\mathbf{w}_{k-1}$ .

Depois de obter todas as medidas no tempo  $k$ , calculamos a possibilidade relativa condicional de cada partícula  $\mathbf{x}_{k,i}^-$  avaliada pela função de densidade de probabilidade  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k,i}^-)$  obtido do modelo de medida  $h(\cdot)$

e função de densidade de probabilidade de ruído das medidas  $\mathbf{v}_k$  (Simon, 2006).

$$q_i \sim \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(\frac{-(\mathbf{y}^* - h(\mathbf{x}_{k,i}^-))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^* - h(\mathbf{x}_{k,i}^-))}{2}\right) \quad (4)$$

Normalizando as possibilidades relativas obtidas pela Eq. (4) como:

$$\tilde{q}_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^N q_j} \quad (5)$$

isso garante que a soma de todas as probabilidades seja igual a 1.

O próximo passo é encontrar um novo conjunto de dados de  $\mathbf{x}_{k,i}^+$  que é gerado aleatoriamente com base na possibilidade relativa  $q_i$ . Essa reamostragem ideal é formalmente justificada em Smith and Gelfand (1992), onde é mostrado que as funções de densidade de probabilidade da nova partícula  $\mathbf{x}_{k,i}^+$  tendem à densidade de probabilidade função de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k)$  com um número de amostras  $N$  próximo ao infinito.

Assim, a reamostragem pode ser resumida como:

$$\mathbf{x}_{k,i}^+ = \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i \mathbf{x}_{k,i}^- \quad (6)$$

Deve-se ter em mente que o esforço computacional do filtro de partículas é frequentemente alto em implementação, mas este método aparentemente parece ser mais eficiente para sistemas altamente não-lineares.

Assim, um conjunto de partículas  $\mathbf{x}_{k,i}^+$  pode ser distribuído de acordo com a função de densidade de probabilidade  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k)$  e pode-se calcular qualquer medida estatística desejada desta função de densidade de probabilidade.

Finalmente, se quisermos calcular o valor esperado de  $E(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k)$  pode aproximar-se da soma algébrica média das partículas

$$E(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_{k,i}^+ \quad (7)$$

### 3. Empobrecimento de amostra

De acordo com Simon (2006), empobrecimento da amostra ocorre quando a região do espaço de estados na função de densidade de probabilidade  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  tem valores significativos que não se sobrepõem  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{k-1})$ . Em outras palavras, se todas as partículas *a-priori* forem distribuídas de acordo com  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{k-1})$  e então usamos a função de densidade de probabilidade calculada  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  para reamostrar as partículas, apenas algumas partículas serão reamostrado para se tornar partículas *a-posteriori*. Isso ocorre porque apenas algumas das partículas de *a-priori* estarão em uma região do espaço de estados onde a função densidade de probabilidade  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  tem um valor significativo. Isso significa que o processo de reamostragem selecionará apenas algumas partículas *a-priori* distintas para se tornar uma partícula *a-posteriori*.

Eventualmente, toda a partícula em algum momento entrará em colapso com o mesmo valor. Com erros de modelagem esse problema será certamente exacerbado. Isso pode ser superado por um método de força bruta aumentando o número de partículas  $N$ , mas isso pode levar rapidamente a grandes demandas computacionais, que apenas atrasará o inevitável empobrecimento da amostra.

Outras formas mais inteligentes de lidar com esse problema são apresentadas em Arulampalam et al. (2002) e Gordon et al. (1993) como: o *Roughening*, que adiciona um ruído aleatório a cada partícula após o processo de reamostragem, isso é semelhante a adicionar ruído de processo artificial ao Filtro de Kalman; e o Filtro

de Partículas Regularizado (FPR), que transforma a função densidade de probabilidade discreta em uma função densidade de probabilidade contínua multimodal. Tais com resultados são apresentados em Silva et al. (2017)

### 3.1 Filtro de Partículas Rao-Blackwellized

Considere um sistema não linear descrito pela Eq. (1). O FPRB assume que o vetor de estados é decomposto em  $\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_{1,k}^T \quad \mathbf{x}_{2,k}^T]^T$ . Tem que, o modelo do processo e de medidas podem ser representados da seguinte forma (Crassidis and Junkins, 2011; Casella and Robert, 1996; Mustière et al., 2006):

$$\mathbf{x}_{1,k+1} = f_k(\mathbf{x}_{1,k}, \mathbf{w}_{1,k}) \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_{2,k+1} = \Phi_k(\mathbf{x}_{1,k})\mathbf{x}_{2,k} + \Gamma_k(\mathbf{x}_{1,k})\mathbf{w}_{2,k} \quad \mathbf{w}_{2,k} \sim N(0, \mathbf{Q}_k) \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_{1,k})\mathbf{x}_{2,k} \quad \mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k) \quad (10)$$

Note que  $\mathbf{w}_{1,k}$  não precisar ser Gaussiano mas  $\mathbf{w}_{2,k}$  e  $\mathbf{v}_k$  são assumidos com média zero e Gaussianos. O sistema de matrizes de  $\mathbf{x}_{2,k}$ , como  $\Phi_k$  e  $\Gamma_k$ , podem ser funções de  $\mathbf{x}_{1,k}$  em suas formulações. O conceito básico do FPRB é empregar um Filtro de Kalman no conjunto de partículas para o modelo linear condicional dado pela Eq. (9) e (10). O Filtro de Kalman sozinho não pode ser usado por causa das não linearidades dadas pelo modelo de processo na Eq. (8).

Assumindo-se um conjunto de  $N$  partículas, com condição inicial para os estados e covariância dados, a função densidade de probabilidade *a-priori* para  $\mathbf{x}_{1,k+1}$  é independente de  $\mathbf{x}_{2,k+1}$ , assim temos que  $\mathbf{x}_{1,k+1}^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_{1,k+1} | \mathbf{x}_{1,k}^{(i)})$ . A função densidade de probabilidade para  $\mathbf{x}_{2,k+1}^{(i)}$  é representado por  $\mathbf{x}_{2,k+1}^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_{2,k+1}, \mathbf{x}_{2,k} | \mathbf{x}_{1,k+1}^{(i)})$ .

Calcula-se a propagação de Kalman para cada partícula  $i = 1, 2, \dots, N$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2,k+1}^{-(i)} &= \Phi_k^{(i)} \mathbf{x}_{2,k}^{+(i)} \\ \mathbf{P}_{2,k+1}^{-(i)} &= \Phi_k^{(i)} \mathbf{P}_{2,k}^{+(i)} \left( \Phi_k^{(i)} \right)^T + \Gamma_k^{(i)} \mathbf{Q}_k \left( \Gamma_k^{(i)} \right)^T \end{aligned} \quad (11)$$

Atualize as possibilidades relativas para cada partícula  $i = 1, 2, \dots, N$  usando

$$q_{k+1}^{(i)} = q_k^{(i)} \frac{1}{\det [2\pi \mathbf{E}_{k+1}^{-(i)}]^{1/2}} \exp \left( \frac{-\left( \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} \mathbf{x}_{2,k+1}^{-(i)} \right)^T \left( \mathbf{E}_{k+1}^{-(i)} \right)^{-1} \left( \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} \mathbf{x}_{2,k+1}^{-(i)} \right)}{2} \right) \quad (12)$$

em que  $\mathbf{E}_{k+1}^{-(i)} = \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} \mathbf{P}_{2,k+1}^{-(i)} \left( \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} \right)^T + \mathbf{R}_{k+1}$ .

Agora, normalizando a possibilidades relativa obtida pela Eq. 12 como:

$$\tilde{q}_{k+1}^{(i)} = \frac{q_{k+1}^{(i)}}{\sum_{k=1}^N q_{k+1}^{(i)}} \quad (13)$$

Deve-se calcular o ganho de Kalman e a equação de atualização para cada partícula  $i = 1, 2, \dots, N$ .

$$\mathbf{K}_{k+1}^{(i)} = \mathbf{P}_{2,k+1}^{- (i)} \left( \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} \right)^T \left( \mathbf{E}_{k+1}^{- (i)} \right)^{-1} \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_{2,k+1}^{+(i)} = \mathbf{x}_{2,k+1}^{- (i)} + \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \left( \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} \mathbf{x}_{2,k+1}^{- (i)} \right) \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{2,k+1}^{+(i)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{K}_{k+1}^{(i)} \mathbf{H}_{k+1}^{(i)} \right) \mathbf{P}_{2,k+1}^{- (i)} \quad (16)$$

Finalmente, o estado estimado com sua respectiva covariância pode ser calculado usando.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i \mathbf{x}_k \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} \right)^T + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1 \times n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & \mathbf{P}_{2,k}^{+(i)} \end{bmatrix} \right\} \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (19)$$

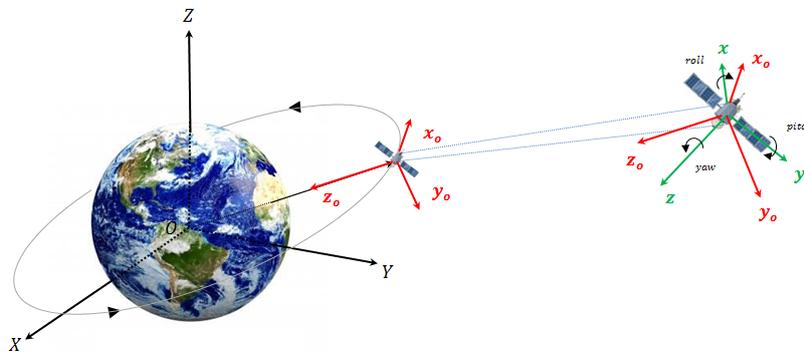
em que  $\mathbf{x}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \left( \mathbf{x}_{1,k}^{(i)} \right)^T & \left( \mathbf{x}_{2,k}^{(i)} \right)^T \end{bmatrix}^T$ ,  $n_1$  é o comprimento de  $\mathbf{x}_{1,k}$  e  $n_2$  é o comprimento de  $\mathbf{x}_{2,k}$ .

## 4. REPRESENTAÇÃO DA ATITUDE

### 4.1 Ângulos de Euler

A estabilização de atitude é feita em três eixos nominalmente alinhados geograficamente e pode ser descrita em relação ao sistema orbital. Nesse sistema, o movimento do angular ao redor da direção da velocidade orbital é chamado *roll* ( $\phi$ ), o movimento em torno da direção normal à órbita é chamado *pitch* ( $\theta$ ) e, finalmente, o movimento angular ao redor da direção Zenith/Nadir é chamado *yaw* ( $\psi$ ). Ver Figura 1

Figura 1: Sistema orbital local ( $\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o$ ) e o sistema de atitude ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ )

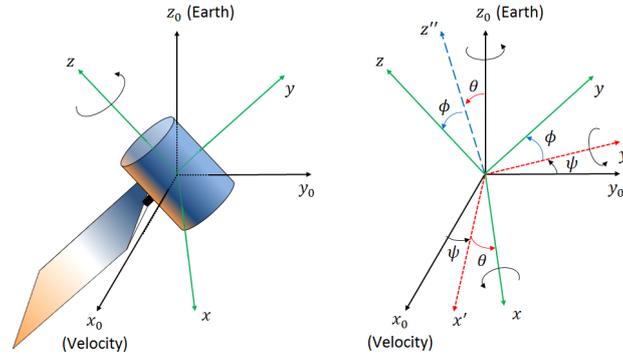


Fonte: Silva et al. (2017)

A atitude de um satélite é definida por um conjunto de parâmetros que permitem, unicamente correlacionar em um instante de tempo, um sistema de coordenadas fixas do satélite (que acompanha seu movimento de rotação e translação) a outro sistema inercial, que geralmente está relacionado a Terra (Silva et al., 2012).

Em geral, é considerado inercial ou quase inercial, o que significa que seu movimento em relação ao sistema verdadeiramente inercial é desprezível, quando comparado ao movimento do próprio corpo. Uma maneira de representar a atitude é pelos ângulos de Euler, que expressarão a relação entre dois sistemas de coordenadas, um deles fixado em satélite e outro associado a um sistema inercial, usando os eixos de *roll* ( $\phi$ ), *pitch* ( $\theta$ ) e *yaw* ( $\psi$ ) como definidos anteriormente. Ver Figura 2

Figura 2: Sequência de rotação adotada 3-2-1 ( $\psi, \theta, \phi$ )



Fonte: Silva et al. (2014)

A matriz de transformação  $R$ , que relaciona o sistema de coordenadas fixas no corpo do satélite ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ) com o sistema de coordenadas orbitais ( $\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o$ ), tem seus elementos descritos em termos dos ângulos de Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ). A sequência de rotação adotada neste trabalho foi a 3-2-1 (Fuming and Kuga, 1999)

- 1ª rotação de um ângulo  $\psi$  (ângulo de *yaw*) em torno do eixo  $\mathbf{z}_o$ .
- 2ª rotação de um ângulo  $\theta$  (ângulo de *pitch*) em torno de um eixo intermediário  $\mathbf{y}'$ .
- 3ª rotação de um ângulo  $\phi$  (ângulo de *roll*) em torno do eixo  $\mathbf{x}$ .

Assim, temos que:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \psi \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (20)$$

Por sua vez, as equações cinemáticas dos ângulos de Euler são dadas por Fuming and Kuga (1999); Wertz (1978):

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde,  $\omega_x, \omega_y$  e  $\omega_z$  são os componentes da velocidade angular do satélite no eixos de *roll, pitch* e *yaw*.

Considerando as informações dadas pelos giroscópios, com suas devidas correções (bias, desalinhamento, fator de escala), assim:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_x \\ \hat{\omega}_y \\ \hat{\omega}_z \end{bmatrix} - R \left\{ \Omega_e \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (22)$$

onde  $\Omega_e = 10^{-4}$  rad/s representa a velocidade angular da Terra,  $\varphi$  representa a latitude local e  $\omega_0$  é a velocidade angular que representa o transporte taxa das coordenadas de navegação em relação à Terra e  $(\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z)$  são os componentes da velocidade angular do satélite no sistema do satélite.

Representando a atitude de um satélite com ângulos de Euler, o conjunto de equações cinemáticas é dado por Fuming and Kuga (1999); Garcia et al. (2012, 2011):

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{\omega}_x \\ \hat{\omega}_y \\ \hat{\omega}_z \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (23)$$

## 4.2 Quatérnions

Os quatérnions é um vetor de quatro dimensões definido por um vetor unitário no espaço e o ângulo para girar em torno desse vetor unitário para transformar de um sistema para outro (Shuster, 1993; Wertz, 1978). Os quatérnions podem ser escritos como segue:

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [\mathbf{q}^* \ q_4]^T \quad (24)$$

onde,  $\mathbf{q}^* = \mathbf{e} \sin \frac{\zeta}{2}$  e  $q_4 = \cos \frac{\zeta}{2}$

Aqui,  $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$  é o vetor unitário e  $\zeta$  é o ângulo de rotação sobre o vetor unitário  $\mathbf{e}$ . Os quatérnions satisfaz a seguinte restrição:

$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (25)$$

O vetor de estado formado pelos quatérnions e o vetor de bias do giroscópio é dado por:

$$\mathbf{x} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z]^T \quad (26)$$

Se o vetor de velocidade angular  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  do sistema do corpo é conhecido em relação a outro referencial, a equação diferencial do sistema de quatérnions torna-se (Lefferts et al., 1982; Shuster, 1993)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_\omega \mathbf{q} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

onde,  $\boldsymbol{\Omega}_\omega$  é uma matriz antissimétrica transposta  $4 \times 4$  dada por:

$$\boldsymbol{\Omega}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Assumindo que os dados do trabalho são amostrados a uma taxa fixa e o vetor de velocidade angular no sistema de satélites é constante durante o intervalo de amostragem, então uma solução do problema é (Wertz, 1978):

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \Phi_{\mathbf{q}}(\Delta t, |\boldsymbol{\omega}|) \mathbf{q}(t_k) \quad (29)$$

onde,  $\Delta t$  é o intervalo de amostra;  $\mathbf{q}(t_k)$  é o quatérnion de atitude no tempo  $t_k$ ;  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  é o quatérnion de atitude propagado no tempo  $t_{k+1}$ ; e  $\Phi_{\mathbf{q}}$  é a matriz de transição transportando o sistema do tempo  $t_k$  a  $t_{k+1}$ , dada por:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\Delta t, |\boldsymbol{\omega}|) = \cos\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}| \Delta t}{2}\right) \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|} \sin\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}| \Delta t}{2}\right) \boldsymbol{\Omega}_\omega \quad (30)$$

## 5. MODELO MATEMÁTICO DOS SENSORES DE ATITUDE

Para averiguar a atitude de um satélite artificial, é necessário usar alguns sensores de atitude. Assim, nesta seção é descrito o modelo matemático dos sensores de atitude utilizados nesta pesquisa para a determinação de atitude: giroscópio, *digital sun sensor* e *infrared Earth sensor*.

## 5.1 Modelo Matemático do Giroscópio

Neste trabalho, os giroscópios (*Rate Integration Gyros-RIG*) são usados para medir a velocidade angular dos eixos de rotação, inclinação e inclinação do satélite. Além disso, os erros de desvio (bias), devido a pequenas imperfeições de seu mecanismo, são incluídos no vetor de estado a ser estimado.

O bias pode ser definido como um componente de saída não relacionado à entrada a qual o sensor está sujeito e seus componentes possuem características determinísticas e estocásticas. Portanto, você precisa caracterizá-lo e, conseqüentemente, definir o método de estimativa.

o modelo do RIG é dado por Wertz (1978):

$$\Delta\Theta_i = \int_0^{\Delta t} (\omega_i + \varepsilon_i) dt, \quad (i = x, y, z) \quad (31)$$

onde,  $\Delta\Theta_i$  são os deslocamentos angulares medidos nos eixos do satélite em um intervalo de tempo  $\Delta t$ ,  $\omega_i$  são os componentes da velocidade angular do sistema de satélites e  $\varepsilon_i$  são os componentes do giroscópio.

A medida dos componentes da velocidade angular do satélite é representada como:

$$\hat{\omega}_i = \frac{d\Theta_i}{dt} - \hat{\varepsilon}_i - \eta_i = \mathbf{g}_i - \hat{\varepsilon}_i + \mathbf{v}_i \quad (32)$$

onde,  $\mathbf{g}_i(t)$  é o vetor de saída do giro e  $\mathbf{v}_i(t)$  é o processo de ruído gaussiano branco, que cobre todos os restantes efeitos modelados além dos ruídos aleatórios.

## 5.2 Modelo Matemático do Infrared Earth Sensor

O *Infrared Earth Sensor* (IRES) é um instrumento óptico usado para detectar a luz emitida pela borda da atmosfera da Terra. Sensores infravermelhos são usados para detectar o calor da atmosfera da Terra, que é muito quente em comparação com o frio do espaço. O IRES determina o ângulo entre a direção de um eixo de simetria do satélite e a direção do centro da Terra.

Ao usar o IRES, pode ajudar a estimar erros de desvio presentes em giroscópios (Lefferts et al., 1982). Neste trabalho, dois sensores são usados, onde se mede o ângulo *roll* e o outro mede o ângulo *pitch*.

As equações de medidas para os IRES são dadas por Fuming and Kuga (1999):

$$\begin{aligned} \phi_H &= \phi + v_{\phi_H} \\ \theta_H &= \theta + v_{\theta_H} \end{aligned} \quad (33)$$

onde  $v_{\phi_H}$  e  $v_{\theta_H}$  são o ruído branco que representa os pequenos efeitos remanescentes do desalinhamento durante a instalação e/ou pela montagem do sensor. Esses erros são assumidos como os gaussianos.

## 5.3 Modelo Matemático do Digital Sun Sensor

O *Digital Sun Sensor* (DSS) é um dispositivo óptico que detecta o Sol e define a posição de um dos principais eixos de simetria da espaçonave em relação à direção em que o Sol foi detectado. Nesta montagem não é possível medir o ângulo *yaw*, *ie*, estes sensores não fornecem medidas diretas, mede o ângulo acoplado de *pitch* ( $\alpha_\theta$ ) e *yaw* ( $\alpha_\psi$ ). As equações de medidas para os DSS são obtidas da seguinte forma: (Fuming and Kuga, 1999; Garcia et al., 2012, 2011).

$$\alpha_\psi = \arctan\left(\frac{-S_y}{S_x \cos 60^\circ + S_z \cos 150^\circ}\right) + v_{\alpha_\psi} \quad (34)$$

quando  $|S_x \cos 60^\circ + S_z \cos 150^\circ| \geq \cos 60^\circ$ , e

$$\alpha_\theta = 24^\circ + \arctan\left(\frac{S_x}{S_z}\right) + v_{\alpha_\theta} \quad (35)$$

quando  $\left|24^\circ + \arctan\left(\frac{S_x}{S_z}\right)\right| < 60^\circ$ , onde  $v_{\alpha\psi}$  e  $v_{\alpha\theta}$  são o ruídos brancos e representam pequenos efeitos remanescentes de desalinhamento durante a instalação e/ou pela montagem do sensor. Assim como o IRES, esses erros são assumidos pelos Gaussianos.

As condições devem ser tais que o vetor solar esteja no campo de visão do sensor e  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  sejam os componentes do vetor unitário associado ao vetor solar no sistema de satélites determinada por:

$$\begin{aligned} S_x &= S_{0x} + \psi S_{0y} - \theta S_{0z} \\ S_y &= S_{0y} - \psi S_{0x} + \phi S_{0z} \\ S_z &= S_{0z} - \phi S_{0y} - \theta S_{0z} \end{aligned} \quad (36)$$

onde  $S_{0x}$ ,  $S_{0y}$  e  $S_{0z}$  são os componentes do vetor solar no sistema de coordenadas orbitais (Fuming and Kuga, 1999) e  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  são os ângulos de Euler, que representam a atitude estimada.

Salienta-se que as medidas fornecidas pelos sensores são em ângulos de Euler que são transformados em quatérnions para propagação dinâmica, resolvendo assim o problema de possíveis singularidades comum para representação em ângulos de Euler.

## 6. Simulação Computacional pelo PROPAT e Resultados

A simulação de órbita e atitude foi feita pelo propagador PROPAT (Carrara, 2015), codificada no software MatLab com uma taxa de amostragem de 0,5s das medidas por 10min de observação.

As medidas dos sensores DSS e IRES e as medidas dos giroscópios são apresentadas na Fig. 3 e na Fig. 4, respectivamente.

Figura 3: Representação gráfica de dados reais do DSS e do IRES do satélite CBERS-2

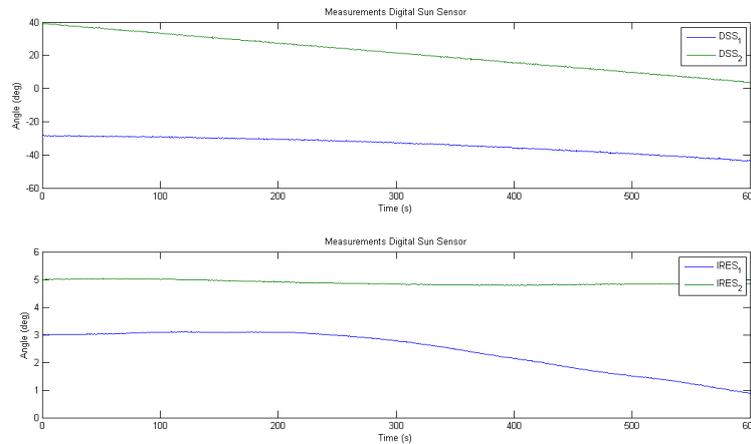
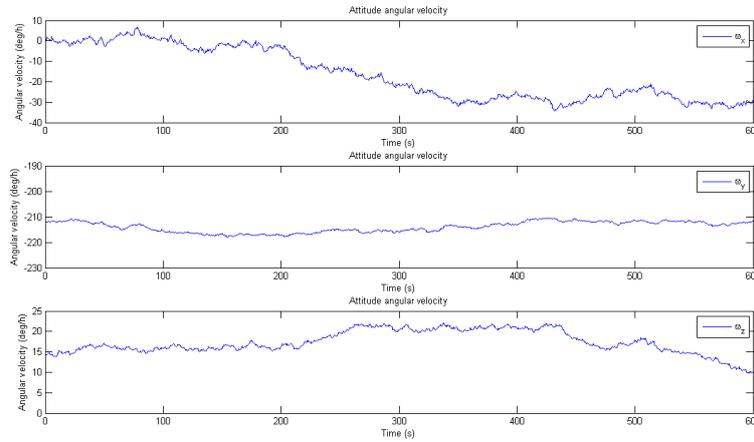


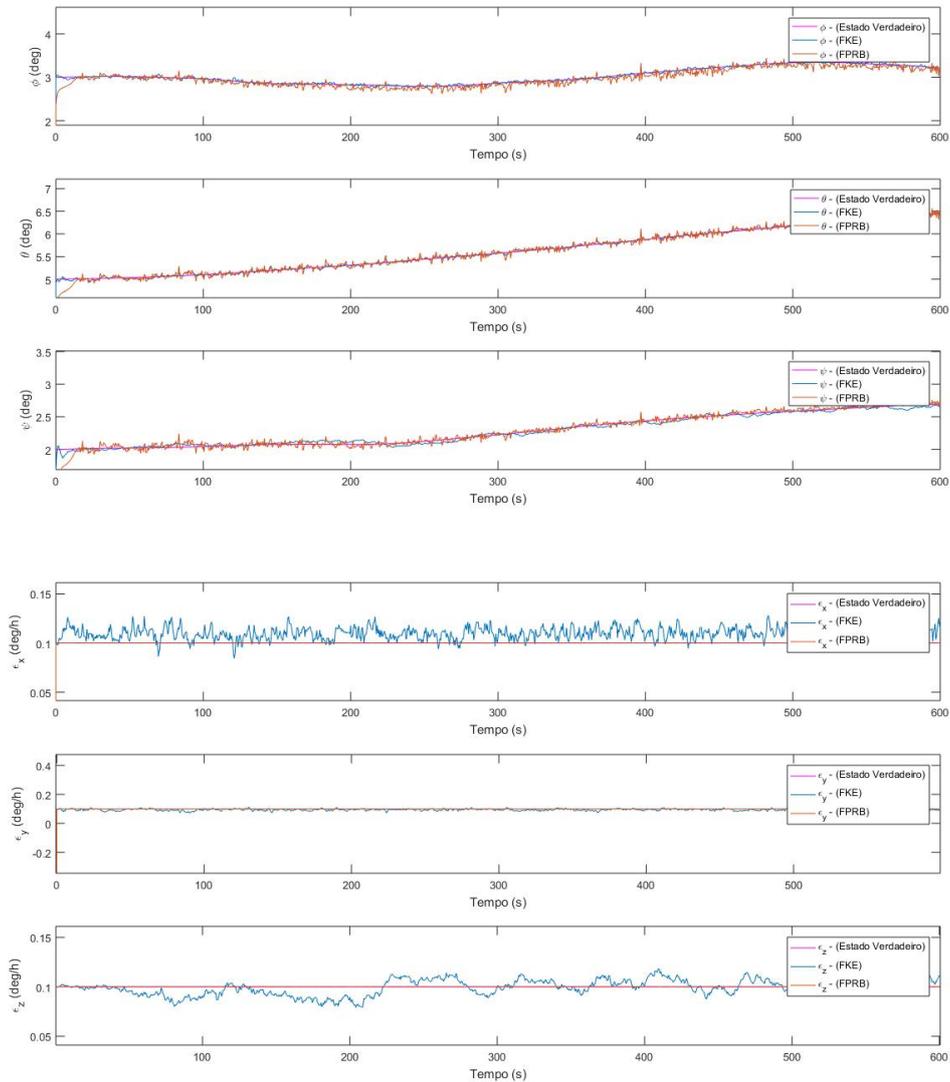
Figura 4: Representação gráfica de dados reais de giroscópios do satélite CBERS-2



As condições iniciais foram  $\mathbf{x}_0 = [0,0 \ 0,0 \ 0,0 \ 1,0 \ 4,8 \times 10^{-7} \ 1,1 \times 10^{-3} \ 4,8 \times 10^{-7}]^T$ ; a matriz de covariância  $\mathbf{P}_0 = \text{diag}(3,0; 3,0; 3,0; 0,0; 2,3 \times 10^{-7}; 2,3 \times 10^{-7}; 2,3 \times 10^{-7}) \times 10^{-4}$  matriz que pondera os respectivos estados estimados; a matriz de erro do processo que pesa o ruído do processo  $\mathbf{Q}_0 = \text{diag}(3,2; 3,2; 3,2; 0; 9,4 \times 10^{-10}; 9,4 \times 10^{-10}; 9,4 \times 10^{-10}) \times 10^{-7}$ ; a matriz de erro de medidas que pesa as medidas ruído  $\mathbf{R}_0 = \text{diag}(0,36; 0,36; 0,0036; 0,0036)$ .

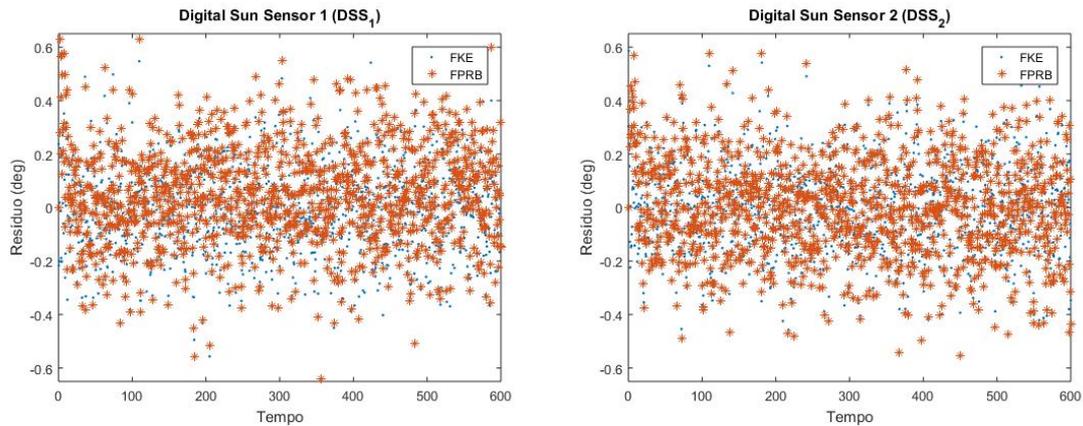
Figura 5, apresenta a estimação dos ângulos de atitude e bias dos giroscópios usando o FKE e FPRB para  $N = 500$  partículas.

Figura 5: Os ângulos estimados de *roll*, *pitch* e *yaw* e estimativas de bias dos giroscópios em torno dos eixos *x*, *y* e *z* respectivamente.



Antes de analisar o desempenho do filtro, é importante analisar sua convergência feita através da configuração do resíduo representado pela Eq. (10). Veja a Figura 6.

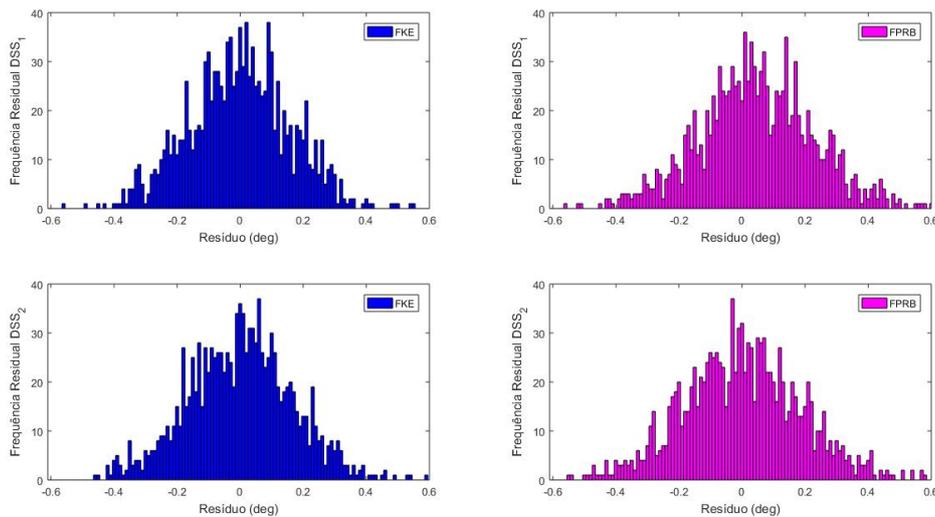
Figura 6: Resíduos dos dois DSS a bordo do satélite CBERS-2



A Figura 6 apresenta os resíduos dos DSS, pelos métodos de estimação FKE e FPRB.

Para melhor visualização dos resíduos, a Fig. 7 mostra a frequência residual para cada um dos filtros na análise, apresentando características Gaussianas.

Figura 7: frequência residual dos dois DSS a bordo do satélite CBERS-2



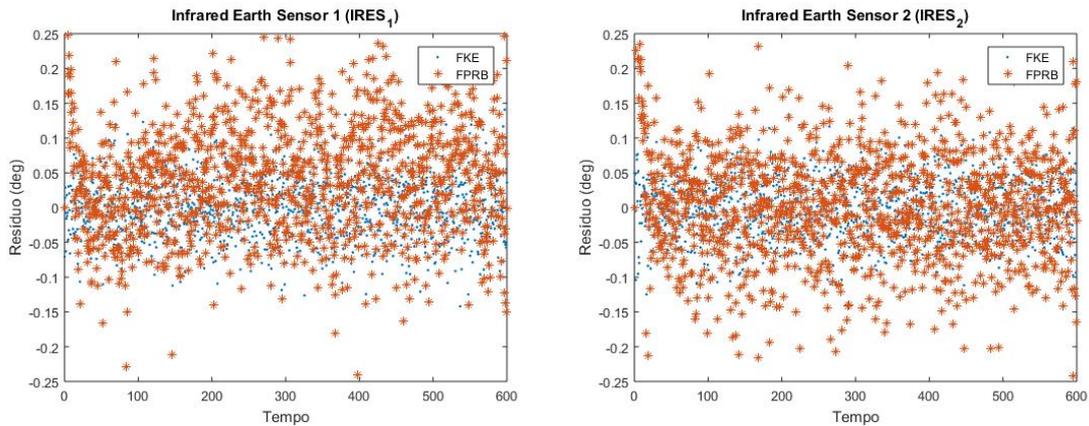
Infere-se que um filtro está convergindo quando o seu resíduo está próximo da média zero e isso acontece com os resultados apresentados na Tabela 1 que mostra o valor médio e o desvio padrão dos resíduos do DSS para cada um dos filtros apresentados na Fig. 7.

Tabela 1: Média estatística e desvio padrão dos resíduos dos DSS

	DSS <sub>1</sub> Res.(deg)	DSS <sub>2</sub> Res.(deg)
FKE	$-0.002 \pm 0.160$	$-2.6 \times 10^{-4} \pm 0.165$
FPRB	$0.048 \pm 0.191$	$0.003 \pm 0.198$

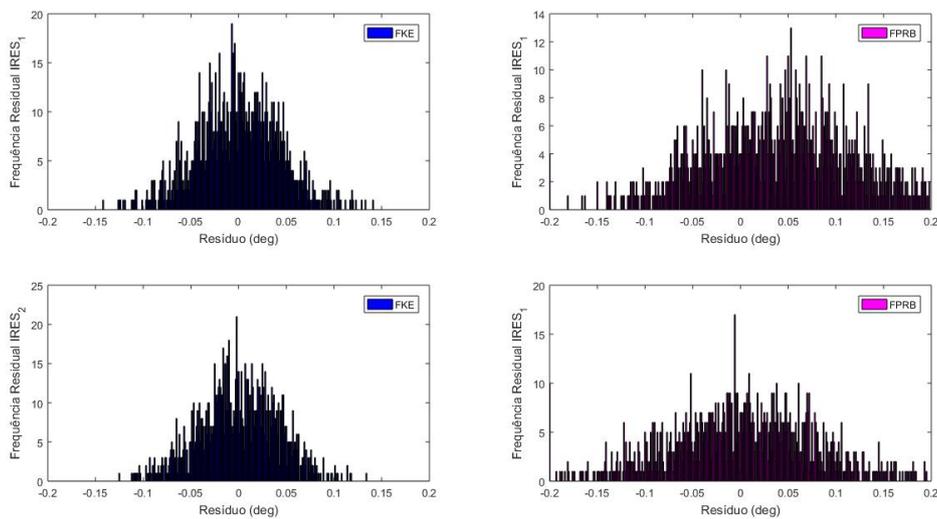
A seguir, na Figura 8 apresentamos os resíduos dos dois IRES, para os métodos de estimação FKE e FPRB.

Figura 8: Resíduos dos dois IRES a bordo do satélite CBERS-2



A Figura 9 apresenta a frequência residual dos dois IRES, para os métodos de estimação aplicados.

Figura 9: Frequência residual dos dois IRES a bordo do satélite CBERS-2



A Tabela 2 mostra o valor médio e o desvio padrão dos resíduos do IRES para cada um dos filtros apresentados na Fig. 9

Tabela 2: Média estatística e desvio padrão dos resíduos do IRES

	IRES <sub>1</sub> Res.(deg)	IRES <sub>2</sub> Res.(deg)
FKE	$-1.3 \times 10^{-4} \pm 0.043$	$1.5 \times 10^{-4} \pm 0.041$
FPRB	$0.043 \pm 0.089$	$0.0060 \pm 0.091$

Pela Tabela 2 todos os filtros estão convergindo, e a média e a covariância para todos os métodos de estimativa estão muito próximos.

Para analisar a acurácia dos filtros estudados, é apresentada, na Fig. 10, a estimativa de erro de atitude e bias para os métodos estudados.

Figura 10: Estimativa de erro de atitude e bias de giroscópios

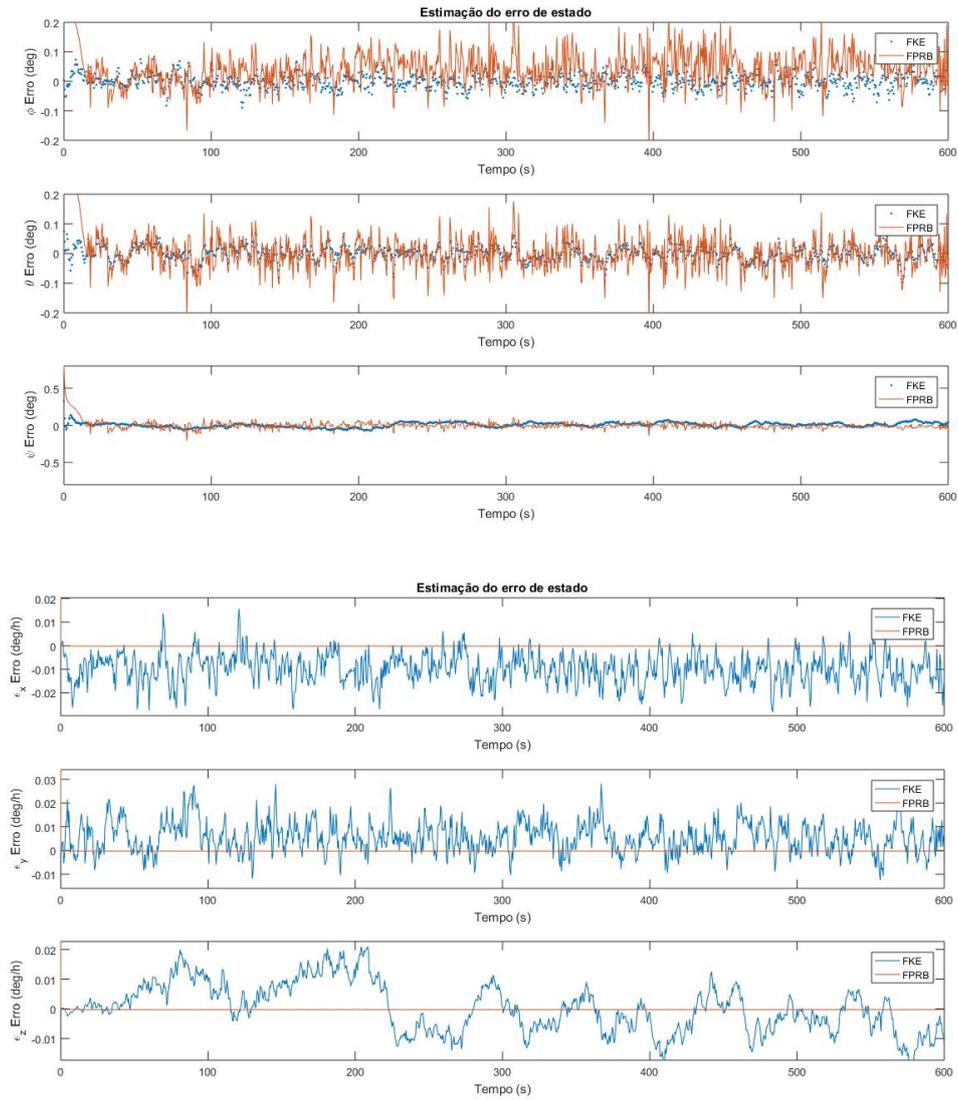


Tabela 3 mostra o valor médio e o desvio padrão do erro de estimativa de atitude apresentado na Figura 10.

Tabela 3: Média estatística e desvio padrão do erro de estimativa de atitude

	$\phi$ Error(deg)	$\theta$ Error(deg)	$\psi$ Error(deg)
FKE	$8.4 \times 10^{-4} \pm 0.024$	$-8.8 \times 10^{-4} \pm 0.025$	$0.006 \pm 0.032$
FPRB	$0,0441 \pm 0,064$	$0,004 \pm 0,057$	$-5,4 \times 10^{-4} \pm 0,057$

A Tabela 4 mostra o valor médio e o desvio padrão do erro de estimativa do giroscópio apresentado na Figura 10.

Tabela 4: Média estatística e desvio padrão do erro de estimativa do giroscópio

	$\varepsilon_x$ Error(deg/h)	$\varepsilon_y$ Error(deg/h)	$\varepsilon_z$ Error(deg/h)
FKE	$-0.009 \pm 0.006$	$0.006 \pm 0.006$	$2.8 * 10^{-4} \pm 0.008$
FPRB	$-1,9 \times 10^{-4} \pm 1,1 \times 10^{-5}$	$-2,4 \times 10^{-4} \pm 1,3 \times 10^{-5}$	$-2,3 \times 10^{-4} \pm 1,1 \times 10^{-5}$

## 7. Conclusions

O uso de dados reais a partir de sensores de atitude a bordo, apresenta dificuldades como incompatibilidade de tamanhos, desalinhamentos, erros sistemáticos imprevistos e erros de calibração pós-lançamento. No entanto, observa-se que a atitude estimada pelo FKE e FPRB está em estreita concordância com os resultados em trabalhos anteriores (Garcia et al., 2012, 2011).

Observa-se que o FPRB apresentou maior precisão com relação a estimação de bias de giroscópios quando comparada com o FKE. Em termos gerais, para o sistema não linear, a filtragem de Kalman pode ser usada para estimativa de estado, mas a filtragem de partículas pode oferecer melhores resultados pelo preço de um esforço computacional adicional maior. No sistema que tem ruído não gaussiano, a filtragem de Kalman é um filtro linear subótimo, mas novamente a filtragem de partículas pode ter um desempenho melhor.

Finalmente, pode-se concluir que o algoritmo de todos os métodos de estimação convergem, fornecendo uma solução de atitude cinemática além de estimar bias dos giroscópios com precisão de acordo com os requisitos do projeto.

Em trabalhos futuros, temos por perspectiva analisar a estimação de atitude e bias de giroscópios comparando o FPRB apresentado nesse trabalho com o Filtro de kalman Unscented (FKU), Filtro  $H_\infty$  Estendido ( $FH_\infty E$ ) e o Filtro de Partículas Regularizado (FPR), analisando a precisão dos métodos de estimação bem como o tempo de processamento de dados.

## 8. Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro recebido pela CAPES-ITA através do projeto # 2038/2014 e CNPQ através do projeto # 306790/2014-9.

## 9. REFERÊNCIAS

- Arulampalam, M., Maskell, S., Gordon, N., and Clapp, T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2):174 – 188.
- Carrara, V. (2015). An open source satellite attitude and orbit simulator toolbox for matlab. In *Proceedings...*, Natal. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS, 17, ABCM. Disponível em: <http://mtc-m21b.sid.inpe.br/rep/sid.inpe.br/mtc-m21b/2015/04.07.13.24?>. Acesso em.: 16 fev. 2016.
- Casella, G. and Robert, C. P. (1996). Rao-blackwellisation of sampling schemes. *Biometrika*, 83(1):81–94.
- Crassidis, J. L. and Junkins, J. L. (2011). *Optimal Estimation of Dynamic Systems*. Chapman and Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science, New York.
- Crassidis, J. L. and Markley, F. L. (2003). Unscented filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26(4):536 – 542.
- Fuming, H. and Kuga, H. K. (1999). Cbers simulator mathematical models. *CBTT Project, CBTT/ 2000/ MM/ 001*.
- Garcia, R. V., Kuga, H. K., and Zanardi, M. C. (2011). Unscented kalman filter for spacecraft attitude estimation using quaternions and euler angles. In *Proceedings...*, São José dos Campos. International Symposium on Space Flight Dynamics, 22, AAB.
- Garcia, R. V., Kuga, H. K., and Zanardi, M. C. (2012). Unscented kalman filter applied to the spacecraft attitude estimation with euler angles. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012:1–12.
- Gordon, N., Salmond, D., and Smith, A. (1993). Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEEE Proceedings-F*, 140(2):107 – 1813.

- Lefferts, E. J., Markley, F. L., and Shuster, M. D. (1982). Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance*, 5(5):417 – 429.
- Metropolis, N. and Ulam, S. (1949). The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247):335 – 341.
- Mustière, F., Bolíc, M., and Bouchard, M. (2006). Rao-blackwellised particle filters: Examples of application. In *Proceedings...*, pages 1196–1200, Ottawa. Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE - 2006), IEEE.
- Shuster, M. D. (1993). A survey of attitude representations. *Journal of Astronautical Sciences*, 47(4):439–517.
- Silva, W. R., Garcia, R. V., Kuga, H. K., and Zanardi, M. C. (2017). Spacecraft attitude estimation using unscented kalman filters, regularized particle filter and extended  $h_{\infty}$  filter. *Advances in the Astronautical Sciences*, pages 1195 – 1214.
- Silva, W. R., Kuga, H. K., and Zanardi, M. C. (2014). Application fo the extended  $h_{\infty}$  filter for attitude determination and gyro calibration. *Advances in the Astronautical Sciences*, pages 1501 – 1515.
- Silva, W. R., Zanardi, M. C., Cabette, R. E. S., and Formiga, J. K. S. (2012). Study of stability of rotational motion of spacecraft with canonical variables. *Mathematical Problems in Engeneering*, 2012:1 – 19.
- Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation*. Wiley, New York.
- Smith, A. and Gelfand, A. (1992). Bayesian statistics without tears: A sampling resampling perspective. *The American Statistician*, 46(2):84 – 88.
- Wertz, J. R. (1978). *Spacecraft attitude determination and control*. D. Reidel, Dordrecht, Holanda.
- Wiener, N. (1956). *I am a mathematician*. MIT Pres, Cambridge, Massachesetts.
- Zanetti, R. and DeMars, K. J. (May. 2018). Fully multiplicative unscented kalman filter for attitude estimation. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 41(5):1181 – 1187.