

INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Trabalho de Iniciação Científica

Título do projeto:

**Controle de uma estrutura flexível (curvatura linear)
considerando fonte de potência ideal e não ideal**

Aluna bolsista: Cíntia Prado de Rezende

Orientador: Dr. André Fenili

ÍNDICE

Capítulo 1 – Introdução	02
Capítulo 2 – Modelagem matemática de sistemas dinâmicos <i>atuador-estrutura flexível</i> ideais e não ideais em movimento de rastreamento	05
2.1 – Introdução	05
2.2 – Modelo geométrico	05
2.3 – Equações governantes do movimento para a estrutura flexível	07
2.4 – Sistema ideal e sistema não ideal	08
2.5 - Simulações Numéricas	09
Capítulo 3 – Controle de uma estrutura flexível de rastreamento (curvatura linear)	28
3.1 – Desenvolvimentos teóricos	28
3.2 – Simulações Numéricas	31
Capítulo 4 – Conclusão	44
Capítulo 5 – Referências Bibliográficas	45
Apêndices A – O método dos modos assumidos	46
Apêndices B – Modelagem de um motor de corrente contínua - ideal e não ideal	48
Apêndices C – Justificativa para $\phi_i^{\#}\phi_j^{\#} = \phi_i^{iv}\phi_j$	51
Apêndices D – Trabalhos publicados	54

Capítulo 1

Introdução

Talvez a mais importante etapa para qualquer análise dinâmica de estruturas seja a criação de um modelo analítico da estrutura a ser estudada. Neste caso, o primeiro passo é criar um modelo idealizado do sistema estrutural a ser estudado, um modelo essencialmente igual ao sistema real, mas fácil para análise matemática. Este modelo analítico consiste em: assumir algumas simplificações para reduzir o sistema real em um modelo analítico, realizar desenhos para descrever o modelo analítico, e listar os parâmetros de projeto (tamanho, material, etc.).

Modelos analíticos podem ser divididos em duas categorias básicas: modelos contínuos e modelos com parâmetros discretos. O modelo contínuo representa sistemas com uma infinidade de graus de liberdade e o modelo com parâmetros discretos representa sistemas com finitos graus de liberdade, o modelo adotado no estudo é híbrido, isto é, é a composição destas duas categorias.

Uma vez que se tem o modelo analítico da estrutura, a etapa seguinte é aplicar as leis da física (como por exemplo, a lei de Newton, equações de Lagrange, etc.) para obter as equações diferenciais do movimento, que descreve, em uma linguagem matemática, o modelo analítico. O modelo contínuo leva à equações diferenciais parciais, enquanto o modelo de parâmetros discretos leva a equações diferenciais ordinárias.

Uma vez que o modelo matemático foi desenvolvido, a última etapa da análise dinâmica é resolver as equações diferenciais para obter a resposta dinâmica [1].

O modelo analítico estudado neste trabalho é apresentado na Figura 1.1 [2], representa, como sistema real, tanto um satélite com apêndice flexível, Figura 1.2, como também um manipulador robótico, Figura 1.3. O apêndice flexível e o manipulador são representados analiticamente pela estrutura flexível, enquanto o satélite é representado por um corpo rígido, mostrada na Figura 1.1.

A estrutura flexível apresentada é matematicamente modelada, como será mostrado no capítulo 2, utilizando-se a hipótese de curvatura linear [3]. Duas abordagens diferentes são utilizadas tendo-se em vista a transferência de energia entre uma fonte de potência (o atuador) e a estrutura flexível (do tipo viga): sistema ideal e sistema não ideal [4]. Na abordagem não ideal, a dinâmica da estrutura pode influenciar o comportamento do atuador, o que não acontece na abordagem ideal, onde apenas o atuador influencia o comportamento da estrutura flexível. O atuador utilizado aqui é um motor de corrente contínua.

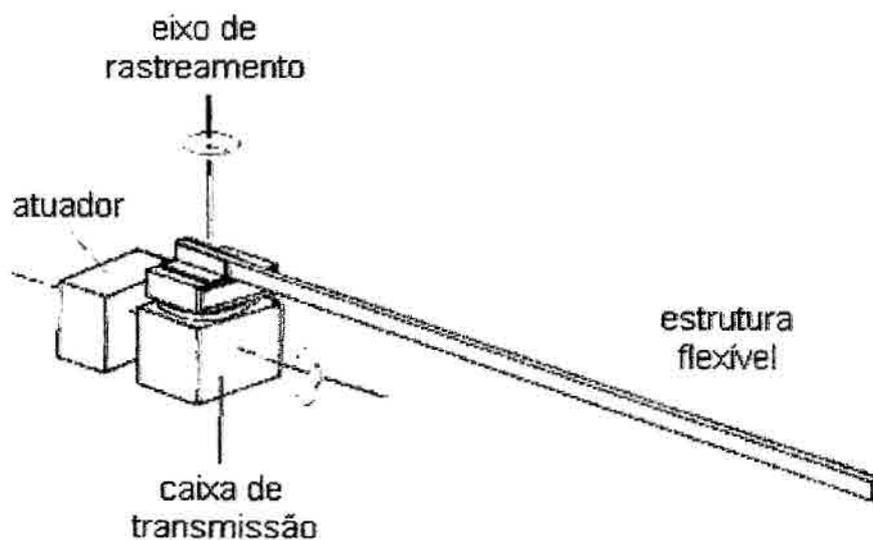


Figura 1.1 – Sistema analítico composto por uma estrutura flexível do tipo viga acionada por um motor de corrente contínua e realizando movimento de rastreamento (slewing).

Uma vez que o modelo matemático esteja definido, este trabalho concentra-se no projeto de uma estratégia de controle (linear) para o amortecimento das vibrações da estrutura flexível em torno de uma posição angular (ângulo de rastreamento) desejada, que será visto mais adiante no capítulo 3. Utiliza-se para tal um controlador PD (não colocado) [5]. Apesar do modelo matemático para o sistema dinâmico completo possuir um termo não linear (proporcional ao quadrado da velocidade de rastreamento), o controlador é projetado levando em consideração o modelo linear. Uma vez determinados os ganhos do

controlador, é verificada a limitação desta estratégia de controle para o problema não linear. Os ganhos assim obtidos mostram controlar satisfatoriamente o sistema analisado para ambas as abordagens propostas e considerando ou não o termo não linear.

Algumas simulações numéricas são apresentadas em decorrência do estudo de um caso investigado em malha aberta e em malha fechada.

Este estudo é um primeiro passo na investigação de estruturas flexíveis rápidas.

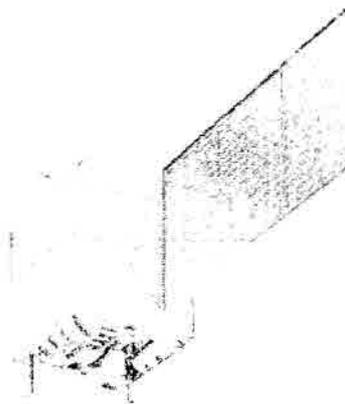


Figura 1.2 – Exemplo de uma estrutura flexível – painel solar em satélite.



Figura 1.3 – Manipulador robótico

Capítulo 2

Modelagem matemática de sistemas dinâmicos *atuador-estrutura flexível* ideais e não ideais em movimento de rastreamento

2.1. Introdução

A abordagem utilizada neste trabalho para a obtenção das equações governantes do movimento consiste na aplicação das equações de Lagrange. Esta formulação trabalha com a energia acumulada e/ou dissipada em um sistema dinâmico durante a sua evolução ao longo do tempo e é invariante com respeito ao sistema de coordenadas utilizado [6]. O método utilizado neste trabalho é uma alternativa àquela utilizada em [2], onde se aplica o princípio estendido de Hamilton. Adota-se neste trabalho o modelo de viga de Euler-Bernoulli [3]. O modelo de viga de Euler-Bernoulli leva em consideração apenas a inércia associada ao deslocamento transversal de cada secção ao longo do comprimento da viga (devido à deflexão da mesma), negligenciando esforços de cisalhamento (as vigas são suficientemente longas e finas) e a inércia de rotação da secção transversal (as secções planas permanecem planas após deflexão) [3].

2.2. Modelo geométrico

Seja uma estrutura flexível de rastreamento sujeita a deflexões suficientemente pequenas (considera-se o modelo de curvatura linear) e conduzida por um torque externo aplicado ao eixo de rastreamento por um motor de corrente contínua. Esta estrutura movimenta-se no plano e é apresentada na Figura 2.1 [2].

A posição de qualquer ponto P ao longo da estrutura, em relação ao sistema de referência inercial, XY, é definida como:

$$\mathbf{R} = (x \cos\theta - v \sin\theta)\mathbf{i} + (x \sin\theta + v \cos\theta)\mathbf{j} \quad (2.1)$$

onde i e j representam os versores ao longo dos eixos do sistema de referência inercial, X e Y, respectivamente, e x, v e θ são definidos na mesma Figura 2.1.

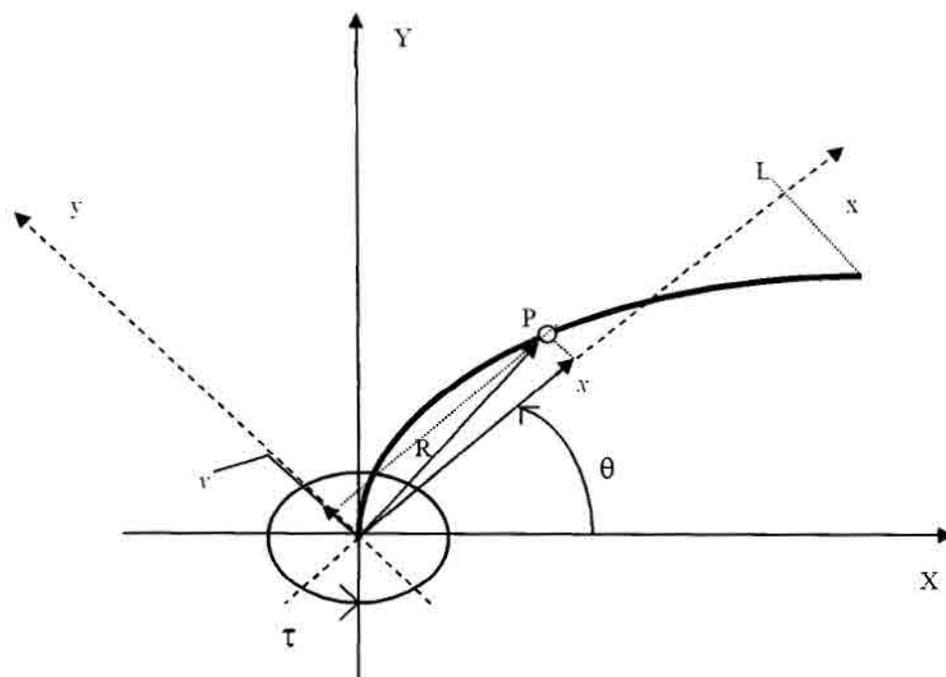


Figura 2.1 - Estrutura flexível de rastreamento (planar) – curvatura linear

Em relação ao sistema de referência local, xy, que se move com a estrutura, qualquer ponto sobre essa mesma estrutura é livre para deslocar-se verticalmente para uma nova posição (paralelamente ao eixo y). Para o modelo de curvatura linear, os deslocamentos longitudinais desses pontos são negligenciados.

A velocidade de qualquer ponto ao longo da estrutura pode, então, ser escrita como :

$$\dot{\mathbf{R}} = (\dot{x} \cos\theta - x\dot{\theta} \sin\theta - \dot{v} \sin\theta - v\dot{\theta} \cos\theta)\mathbf{i} + (\dot{x} \sin\theta + x\dot{\theta} \cos\theta + \dot{v} \cos\theta - v\dot{\theta} \sin\theta)\mathbf{j} \quad (2.2)$$

2.3. Equações governantes do movimento para a estrutura flexível

Seja T a energia cinética e V a energia (potencial) de deformação transversal acumuladas na estrutura flexível de rastreamento durante uma evolução qualquer no tempo.

Então:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho |\dot{R}|^2 dx$$

ou:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2] dx \quad (2.3)$$

e:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (2.4)$$

No modelo linear, a curvatura é representada por v'' . Esta consideração encontra respaldo na maior parte da literatura consultada [3].

O lagrangiano (L) é definido como [6]:

$$L = T - V \quad (2.5)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.5) obtém-se:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho \left[\dot{v}^2 + 2\dot{v}x\dot{\theta} + (x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2 \right] - EI (v'')^2 \right\} dx \quad (2.6)$$

Expandindo $v(x, t)$ de acordo com (A.1) tem-se:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho \left[\left(\sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right) x\dot{\theta} + (x\dot{\theta})^2 + \left(\dot{\theta} \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 \right] - EI \left(\sum_{i=1}^n \phi_i'' q_i \right)^2 \right\} dx \quad (2.7)$$

As equações de Lagrange são definidas como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) em (2.8) e fazendo $q_i = v$ resulta:

$$\int_0^L \left[\rho \left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \phi_i x \ddot{\theta} - \sum_{i=1}^n \phi_i^2 q_i \dot{\theta}^2 \right) + EI \sum_{i=1}^n \phi_i'' \phi_i'' q_i \right] dx = 0 \quad (2.9)$$

Como $\phi_i'' \phi_j'' = \phi_i^{iv} \phi_j$ (conforme apêndice C) e utilizando a relação (C.5) tem-se:

$$\int_0^L \left[\rho \left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \phi_i x \ddot{\theta} - \sum_{i=1}^n \phi_i^2 q_i \dot{\theta}^2 \right) + EI \sum_{i=1}^n \frac{\rho A \omega_i^2}{EI} \phi_i \phi_j q_i \right] dx = 0 \quad (2.10)$$

Utilizando a propriedade de ortogonalização dos modos próprios definida como $\int_0^L \phi_i \phi_j dx = 1$ se $i=j$ e $\int_0^L \phi_i \phi_j dx = 0$ se $i \neq j$ e integrando (2.10) de $x=0$ a $x=L$, obtém-se a equação governante do movimento discretizada dada por:

$$\ddot{q}_j + \alpha_j \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_j + \omega_j^2 q_j = 0 \quad (2.11)$$

onde $\alpha_j = \int_0^L x \phi_j dx$.

2.4 Sistema Ideal e Sistema Não-Ideal (estrutura flexível + equações do motor)

Adicionando a Equação (2.11) às equações do motor ideal ((B.5) e (B.10)) e acrescentando o termo de amortecimento $\mu \dot{q}_\ell$ na equação da viga, as equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento com fonte de potência ideal ($\beta=0$) e considerando fonte de potência não ideal ($\beta=1$) tornam-se:

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (2.12)$$

$$(I_{exo} + I_{motor} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - \beta \left(EI \sum_{i=1}^n q_j(t) \phi_j''(0) \right) = 0 \quad (2.13)$$

$$\ddot{q}_j + \mu \dot{q}_j + w_j^2 q_j + \alpha_j \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_j = 0 \quad (2.14)$$

mais as condições de contorno $\phi''(L,t)=0$, $\phi'''(L,t)=0$ e as condições iniciais $i_a(0)=0$, $\theta(0)=0$ e $\dot{\theta}(0)=0$.

O termo $\dot{\theta}^2 q_j$ na Equação (2.14) é denominado *rigidez centrípeta* e aparece somente quando a estrutura está em rotação. Este termo se torna mais importante em altas velocidades de rastreamento, uma vez que é proporcional ao quadrado da velocidade angular.

Neste trabalho será considerado apenas um modo (primeiro modo de flexão) na expansão para v .

2.5 Simulações numéricas

Os parâmetros do sistema são apresentados na Tabela 1.

Motor DC			Viga (seção reta 0.0150m x 0.0005m)		
Cm	0.0046290	$\frac{Nms}{rad}$	L	1.2000	m
Kt	0.0528140	$\frac{Nm}{A}$	μ	0.100	$\frac{kg}{ms}$
Kb	0.0528140	$\frac{Vs}{rad}$	E	$0.7000 \cdot 10^{11}$	$\frac{N}{m^2}$
Lm	0.0031000	H	I	$1.5625 \cdot 10^{-13}$	m^4
Ra	1.9149520	Ω	ρ	2700.0000	$\frac{kg}{m^3}$
I_{motor}	0.0000654	$kg \cdot m^2$	w_1	11.3097	rad/s
			$\phi_1''(0)$	4.8984	
			$\alpha_1 = \int_0^L x \phi_1 dx$	0.8210	

Tabela 1 – Parâmetros do sistema

As simulações numéricas foram realizadas utilizando-se os parâmetros da Tabela 1.

As Figuras (2.3) a (2.7) e (2.8) a (2.12) ilustram a corrente de armadura do motor dc, o deslocamento angular, a velocidade angular, a deflexão transversal da viga e a velocidade de deflexão da viga para o sistema linear e para o sistema não linear, respectivamente.

Para cada uma destas respostas, compara-se a abordagem ideal com a abordagem não ideal para uma determinada tensão elétrica aplicada aos terminais do motor, conforme Figura (2.2). A mesma tensão é aplicada para o sistema linear e para o sistema não linear.

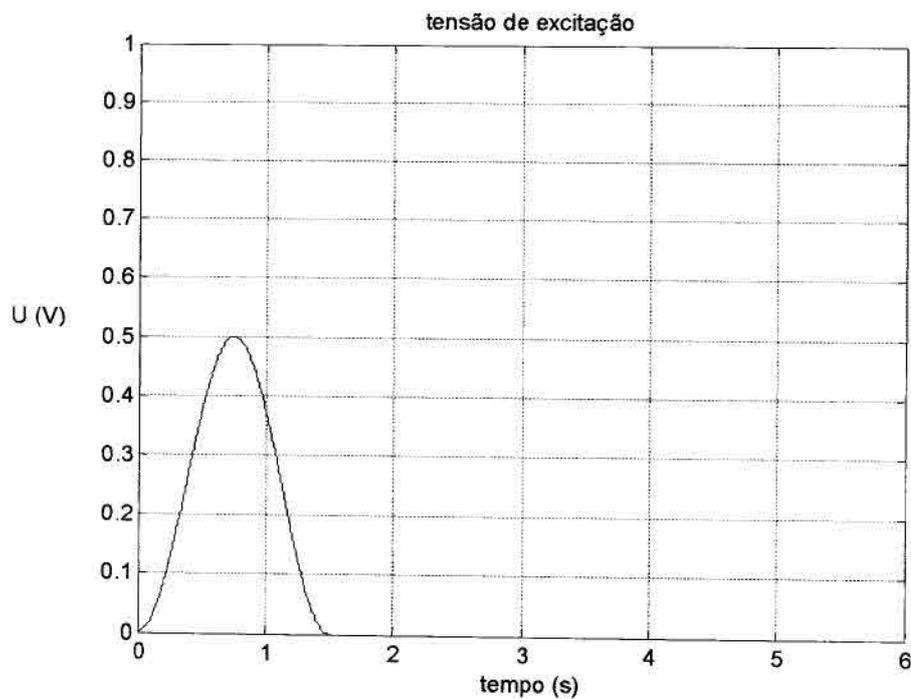


Figura 2.2 – Tensão de excitação (nos terminais do motor): $U=0.5V$.

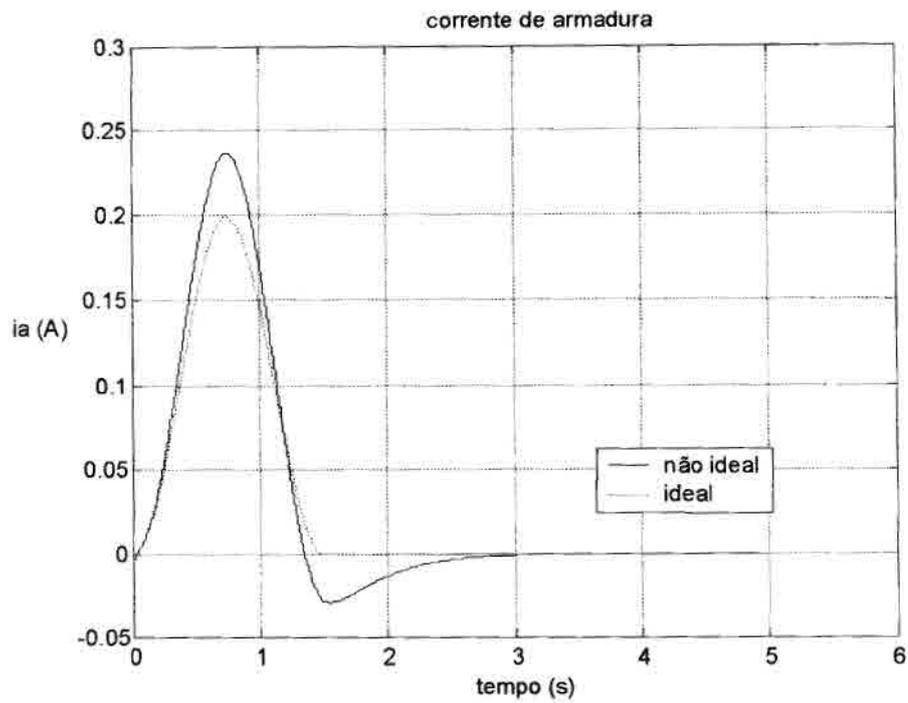


Figura 2.3 – Corrente de armadura para $U=0.5V$ – sistema linear.

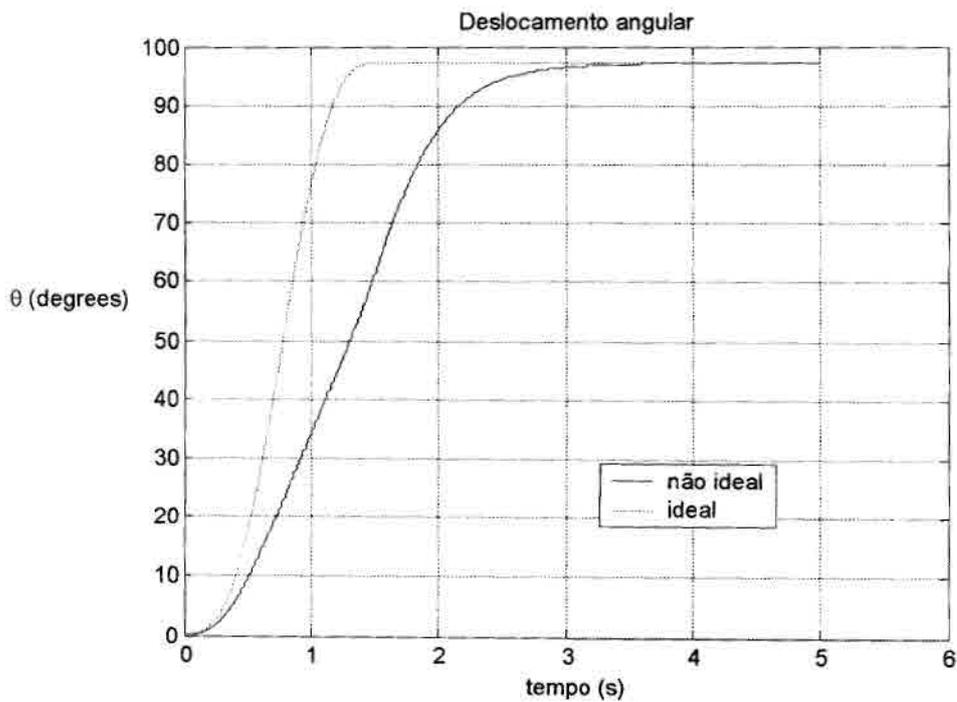


Figura 2.4 – Deslocamento angular para $U=0.5V$ – sistema linear.

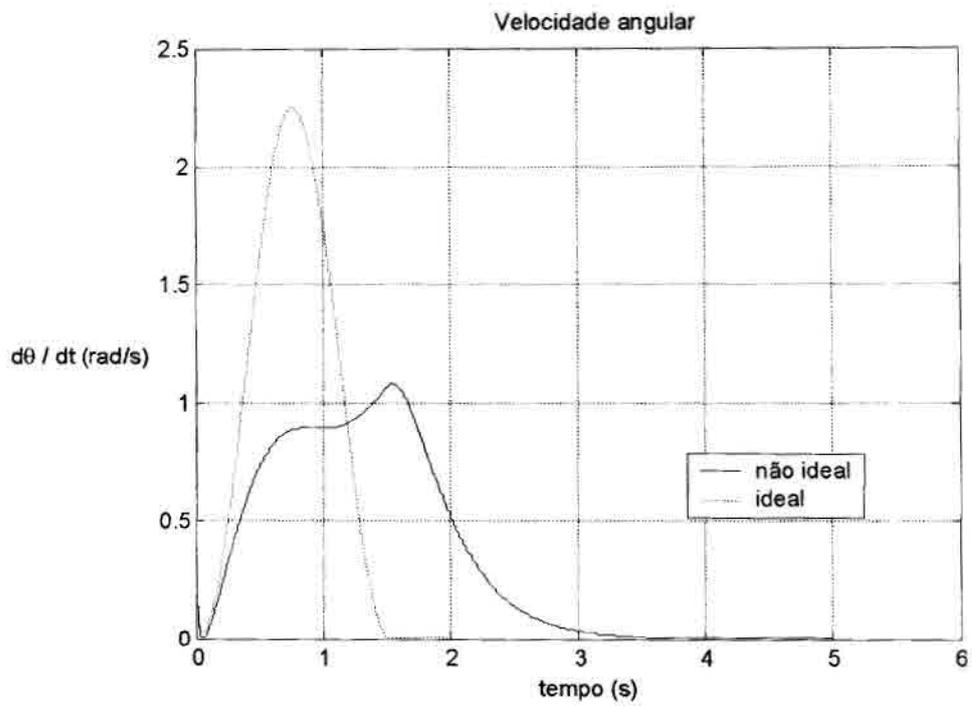


Figura 2.5 – Velocidade angular para $U=0.5V$ – sistema linear.

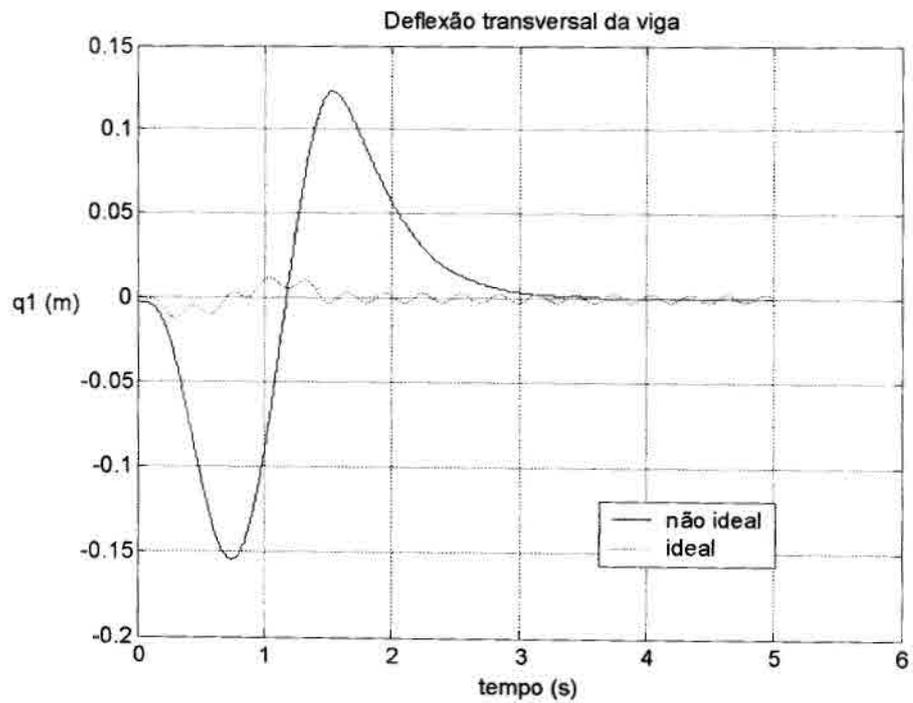


Figura 2.6 – Deflexão da viga para $U=0.5V$ – sistema linear.

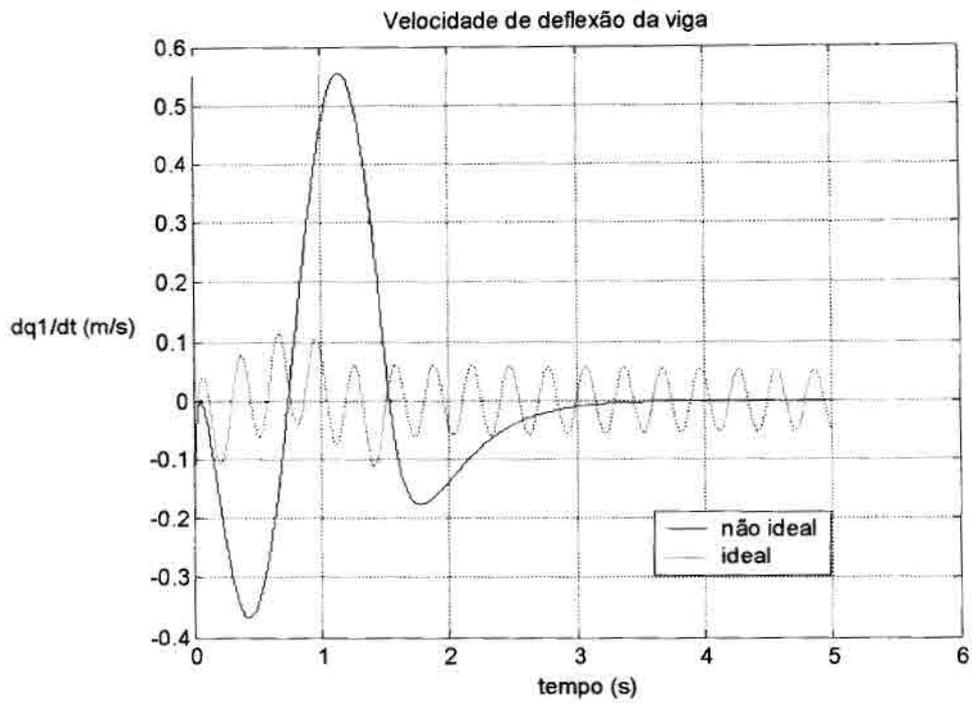


Figura 2.7 – Velocidade de deflexão da viga para $U=0.5V$ – sistema linear.

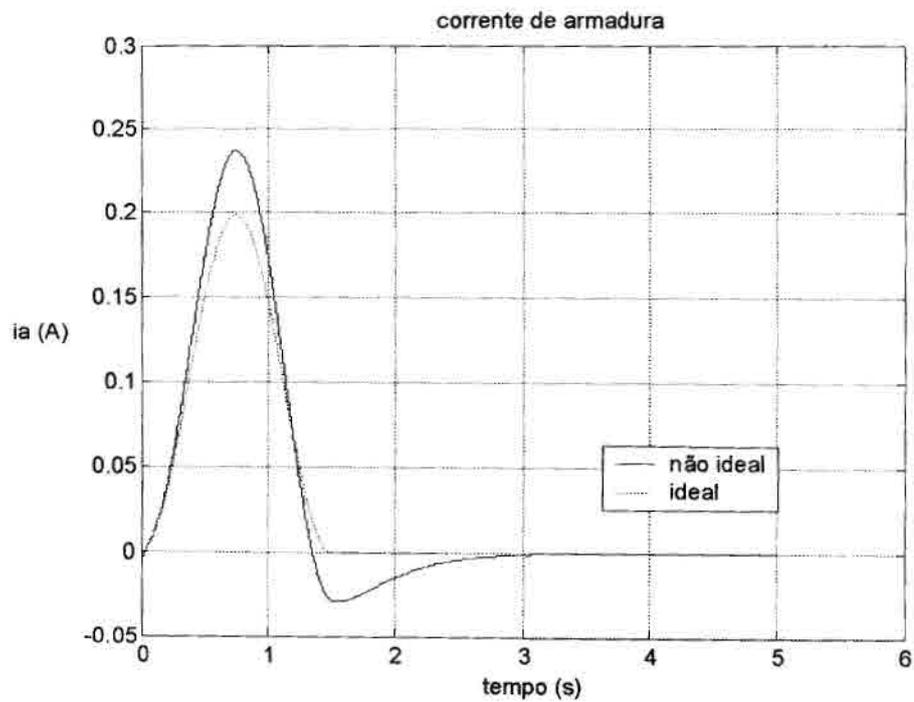


Figura 2.8 – Corrente de armadura para $U=0.5V$ – sistema não linear.

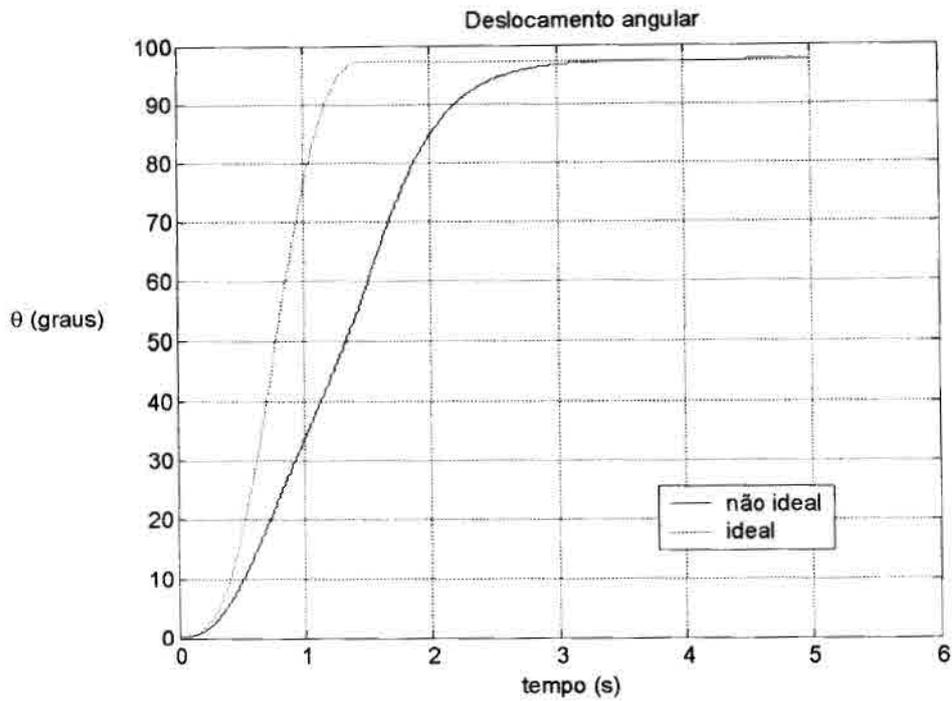


Figura 2.9 – Deslocamento angular para $U=0.5V$ – sistema não linear.

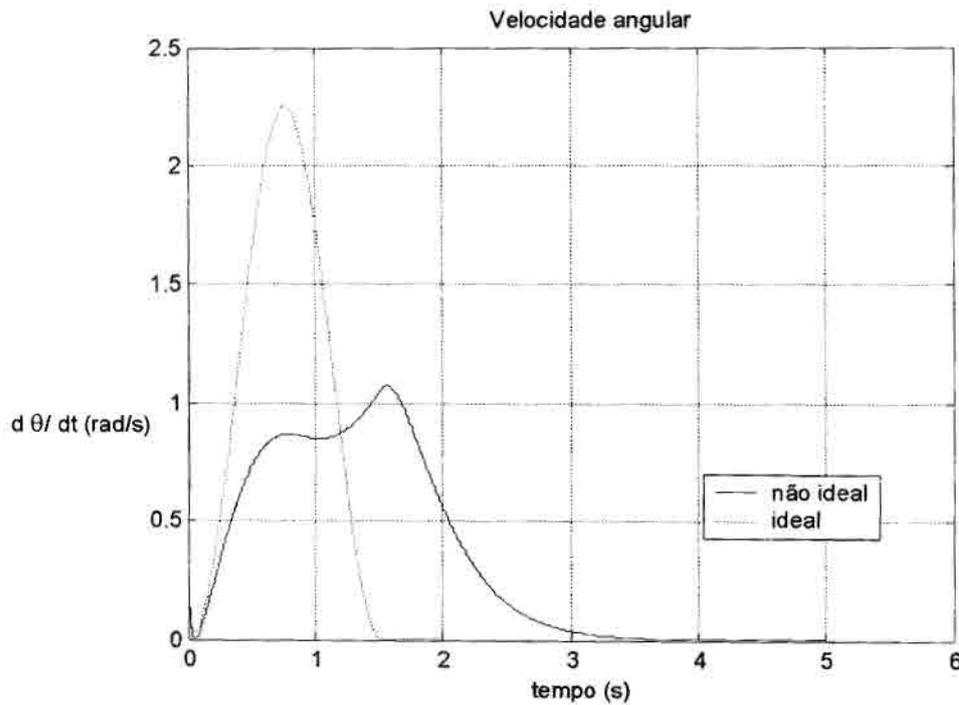


Figura 2.10 – Velocidade angular para $U=0.5V$ – sistema não linear.

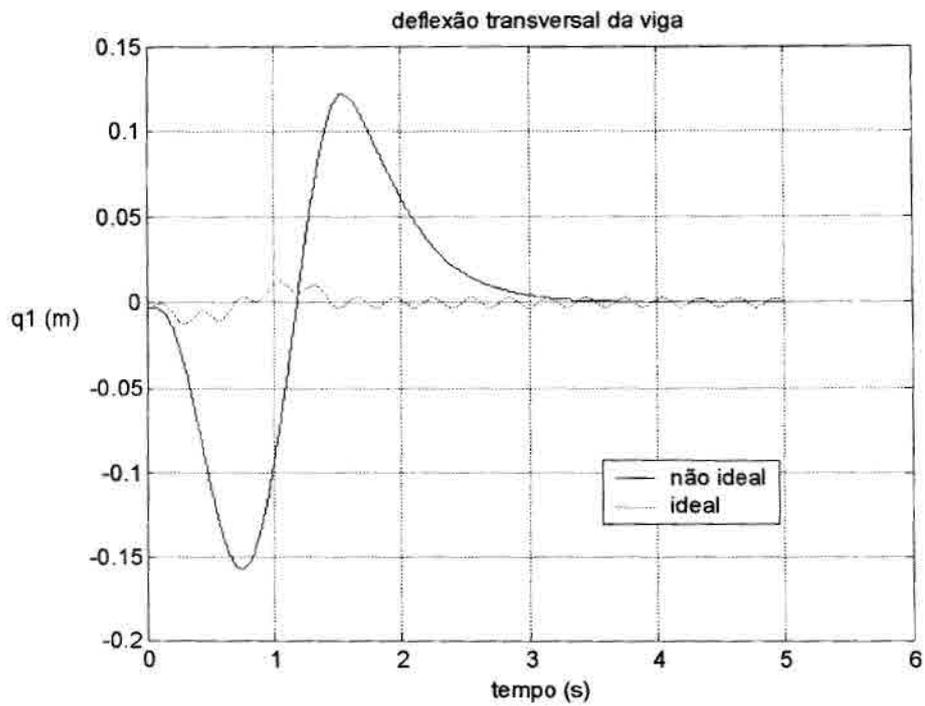


Figura 2.11 – Deflexão da viga para $U=0.5V$ – sistema não linear.

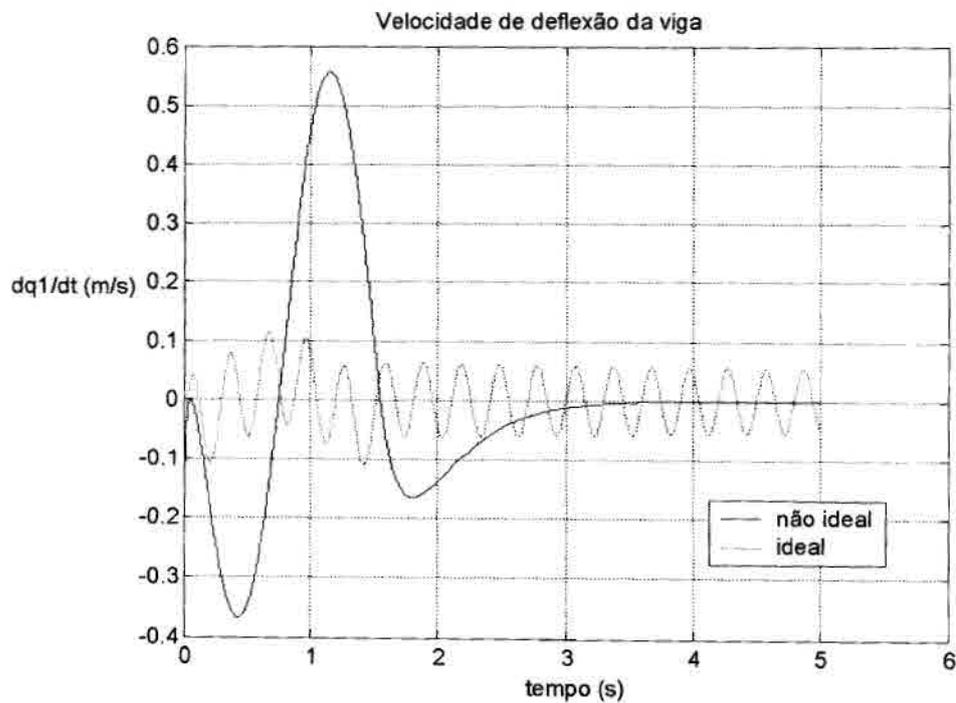


Figura 2.12 – Velocidade de deflexão da viga para $U=0.5V$ – sistema não linear.

De acordo com as Figuras (2.5) e (2.10), para uma mesma excitação, a velocidade angular alcançada pelo sistema não ideal, tanto para o caso linear quanto para o caso não linear, será sempre menor que aquela atingida pelo sistema ideal.

Devido à troca de energia entre o atuador e a estrutura, o sistema considerado não ideal é naturalmente (sem qualquer tipo de controle) muito mais amortecido que o equivalente ideal.

As Figuras (2.13) a (2.17) e (2.18) a (2.22), comparam as respostas do sistema linear e do sistema não linear, para a mesma excitação conforme mostrada na Figura (2.2). Primeiro a comparação é feita para o caso ideal, depois para o caso não ideal.

Percebe-se que para 0.5 V não existe diferença entre as respostas do sistema linear e do sistema não linear para a abordagem ideal; para a abordagem não ideal percebe-se ligeira diferença.

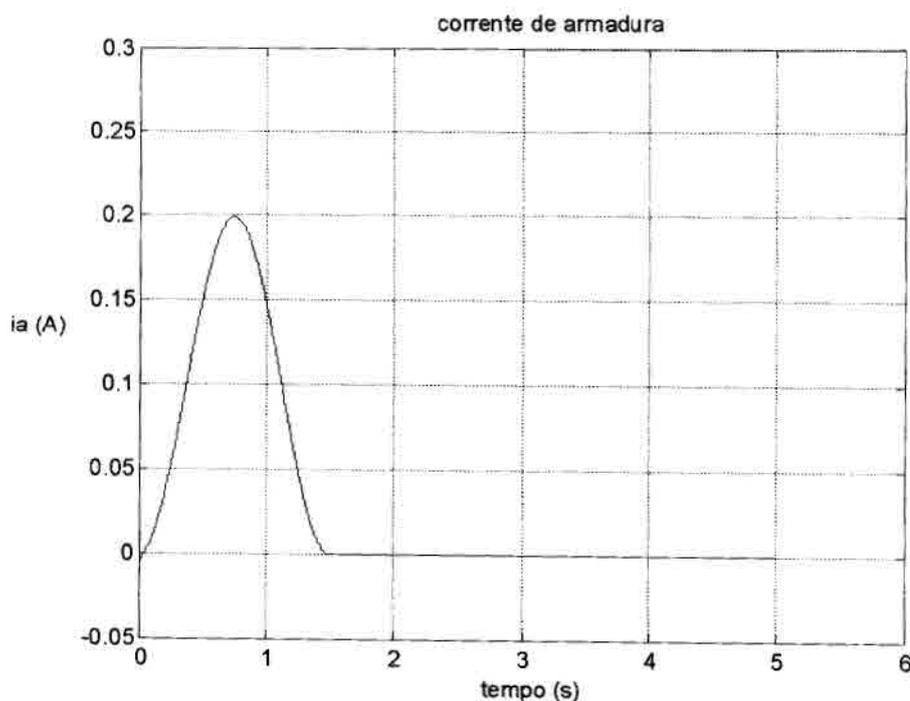


Figura 2.13 – Corrente de armadura para $U=0.5V$ – sistema ideal: **linear X não linear**.

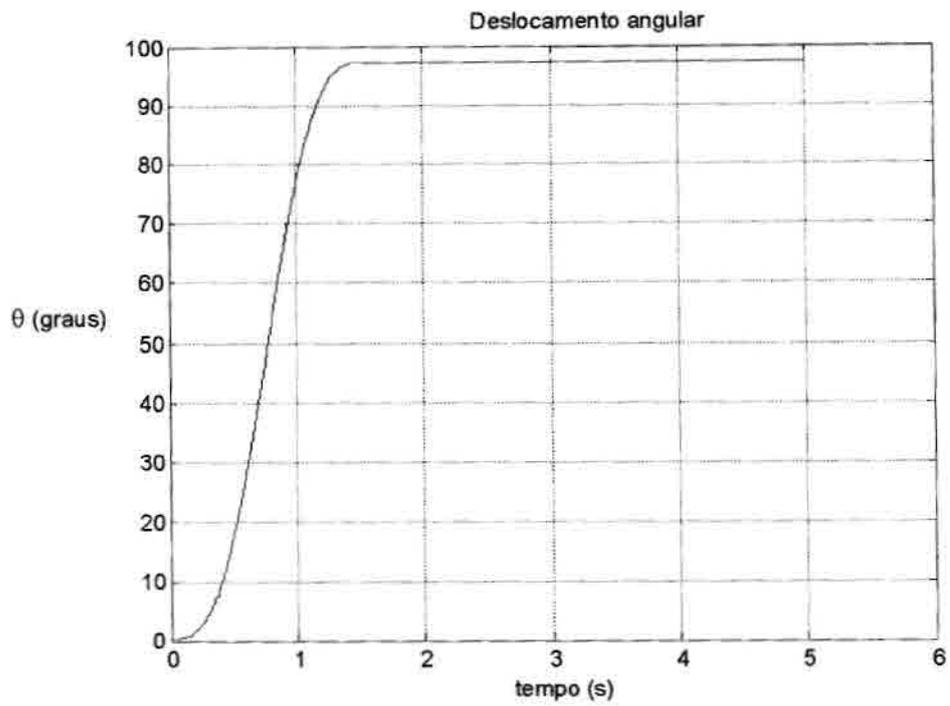


Figura 2.14 – Deslocamento angular para $U=0.5V$ – sistema ideal: **linear X não linear**.

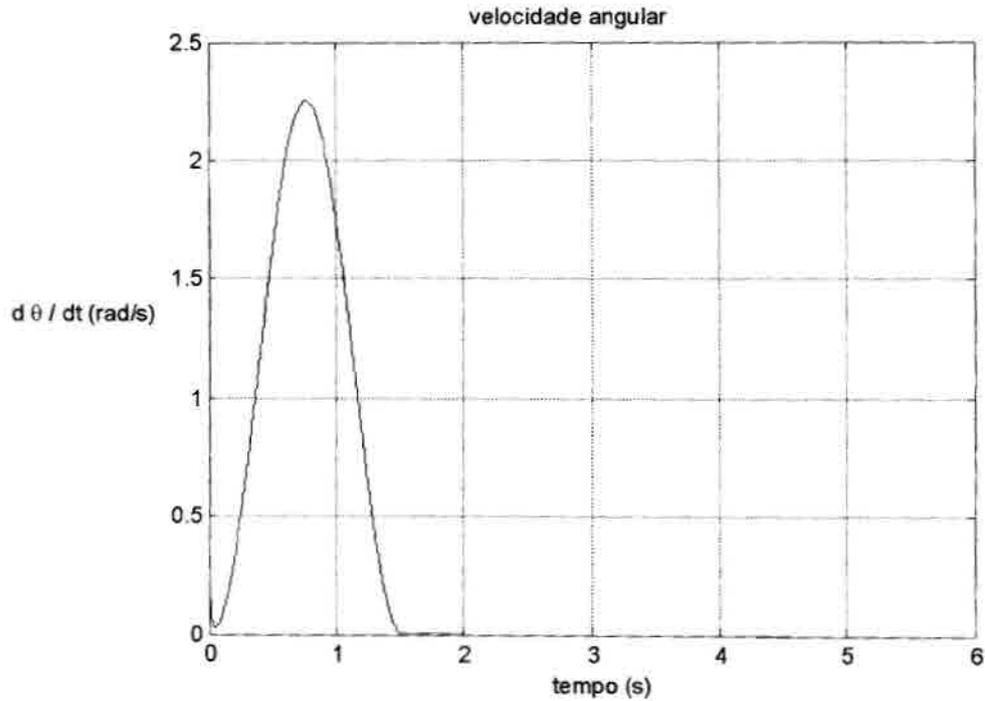


Figura 2.15 – Velocidade angular para $U=0.5V$ – sistema ideal: **linear X não linear**.

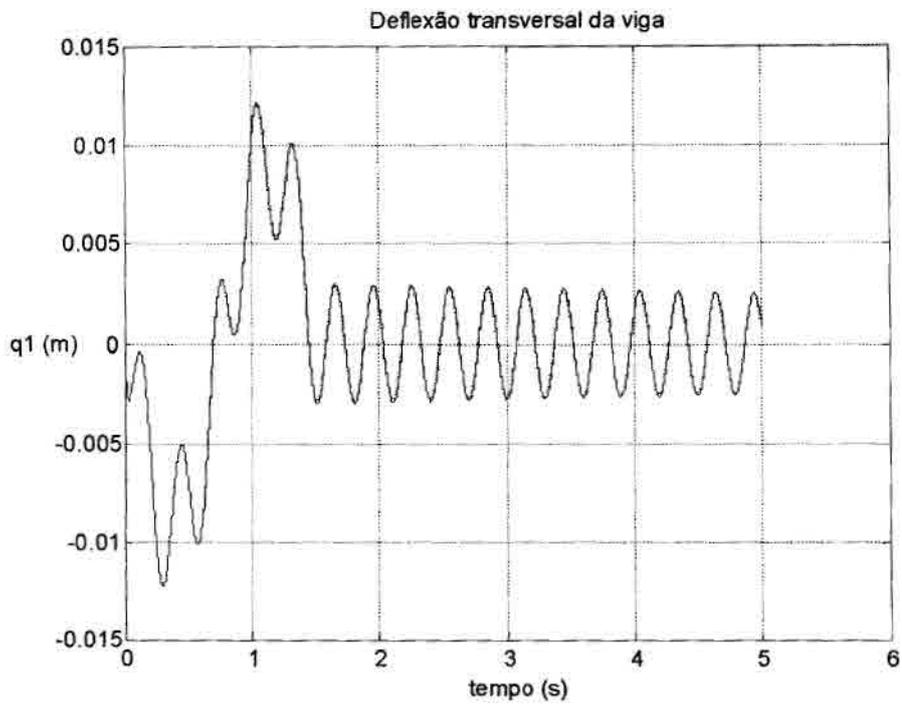


Figura 2.16 – Deflexão da viga para $U=0.5V$ – sistema ideal: linear X não linear.

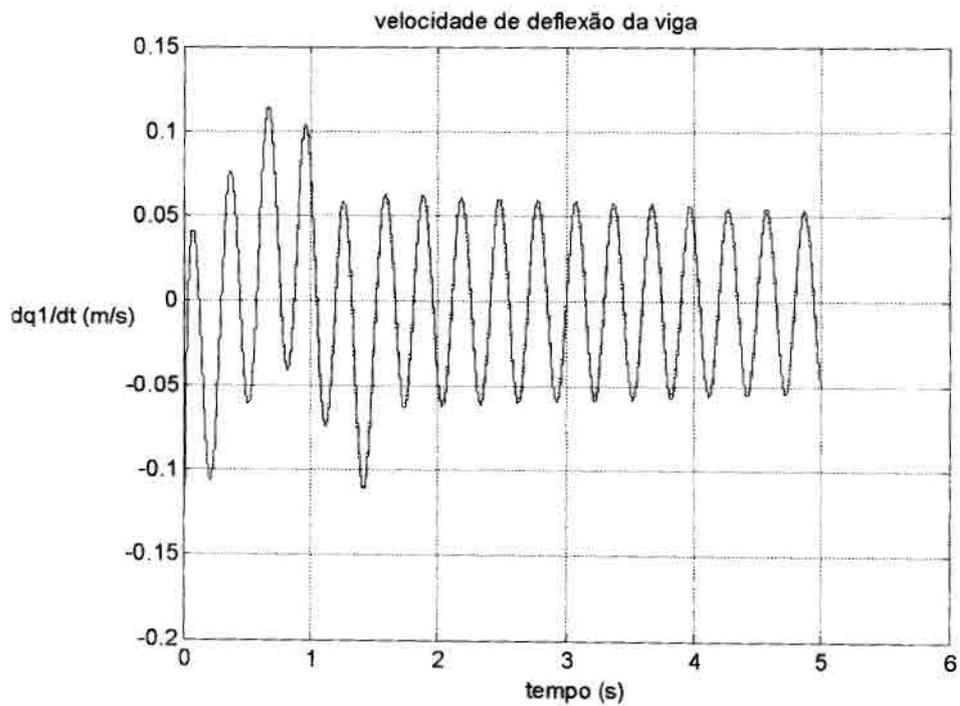


Figura 2.17 – Velocidade de deflexão da viga para $U=0.5V$ – sistema ideal: linear X não linear.

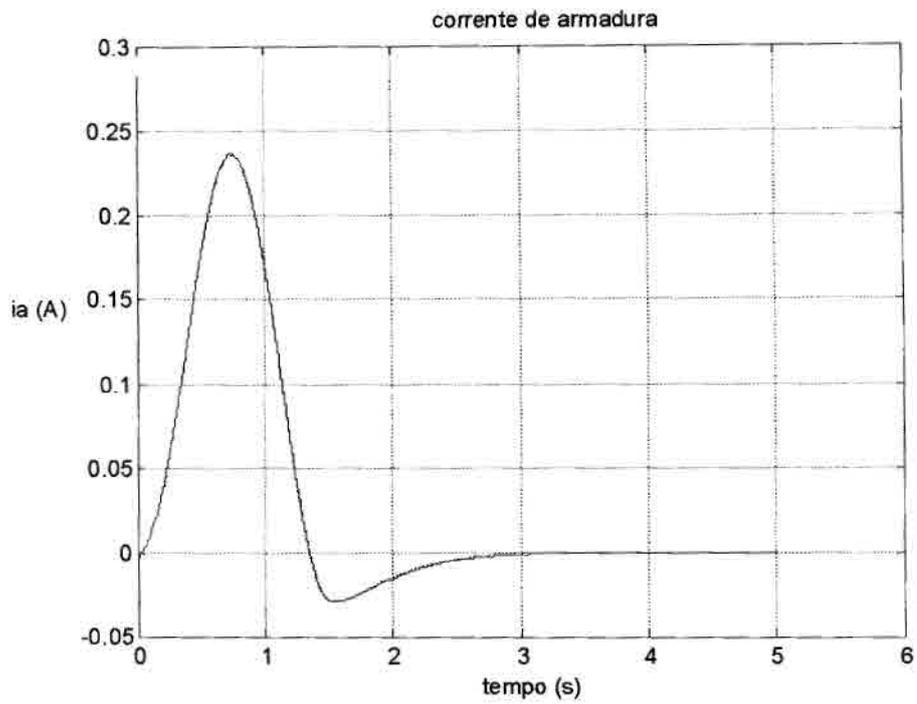


Figura 2.18 – Corrente de armadura para $U=0.5V$ – sistema não ideal: linear X não linear.

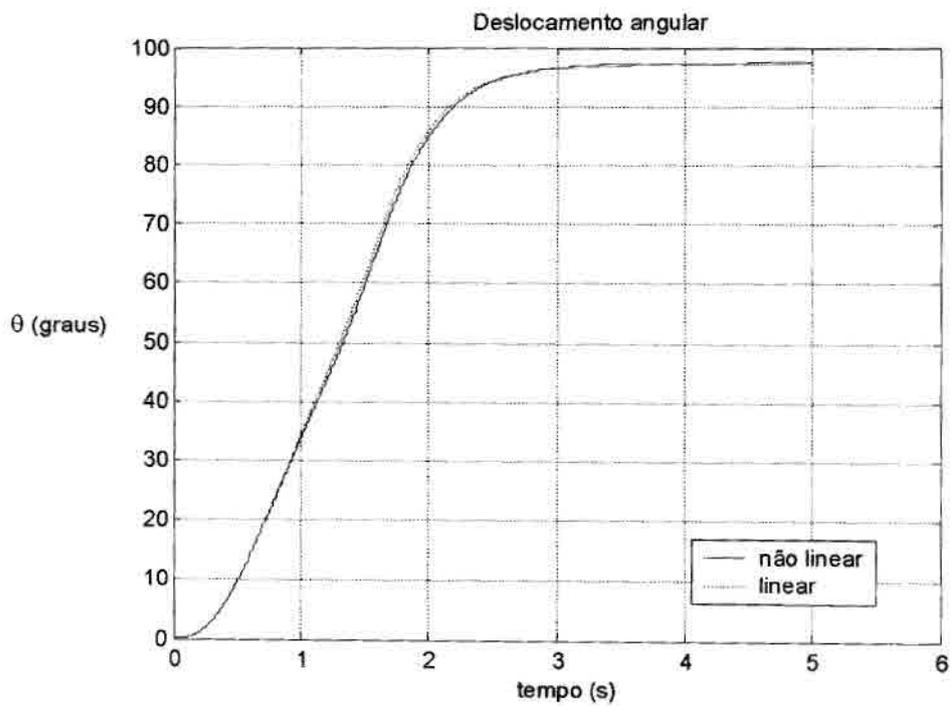


Figura 2.19 – Deslocamento angular Para $U=0.5V$ – sistema não ideal: linear X não linear.

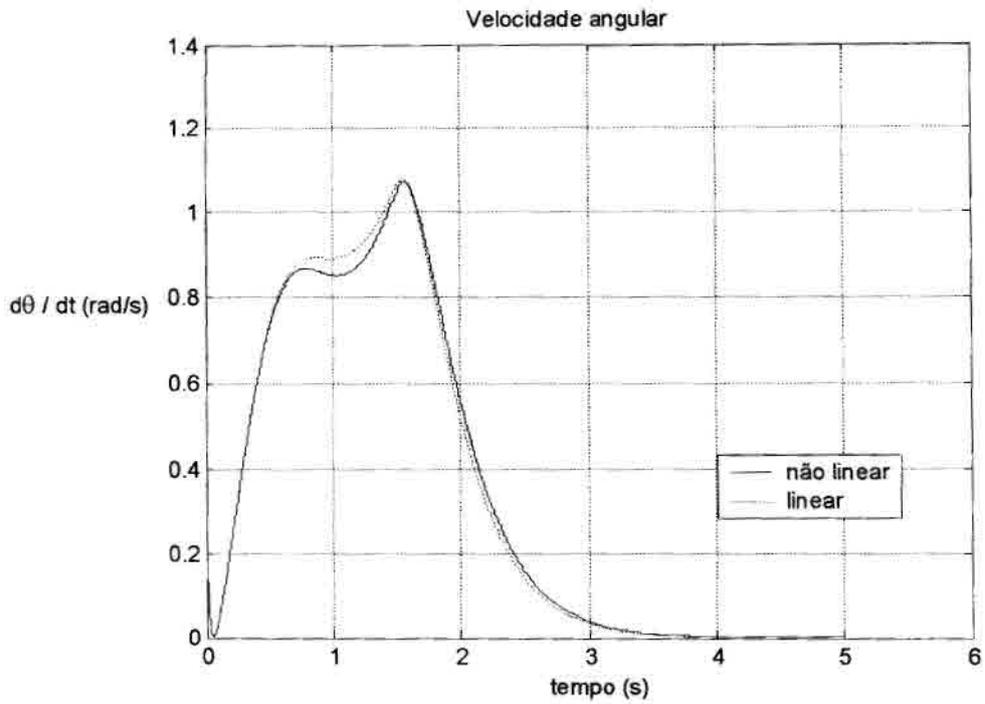


Figura 2.20 – Velocidade angular para $U=0.5V$ – sistema não ideal: **linear X não linear**.

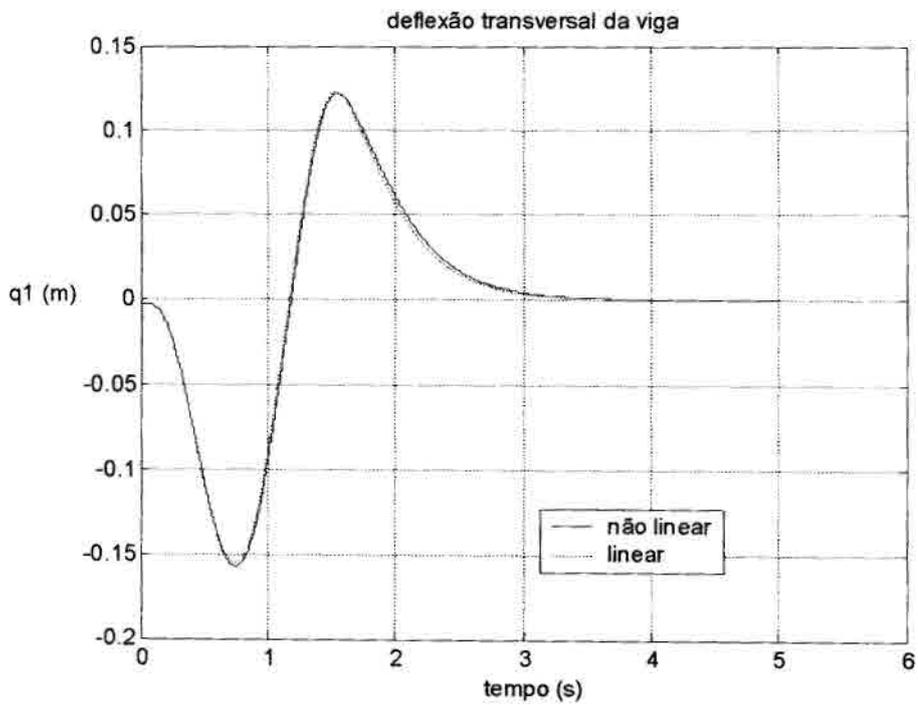


Figura 2.21 – Deflexão de deflexão da viga para $U=0.5V$ – sistema não ideal: **linear X não linear**.

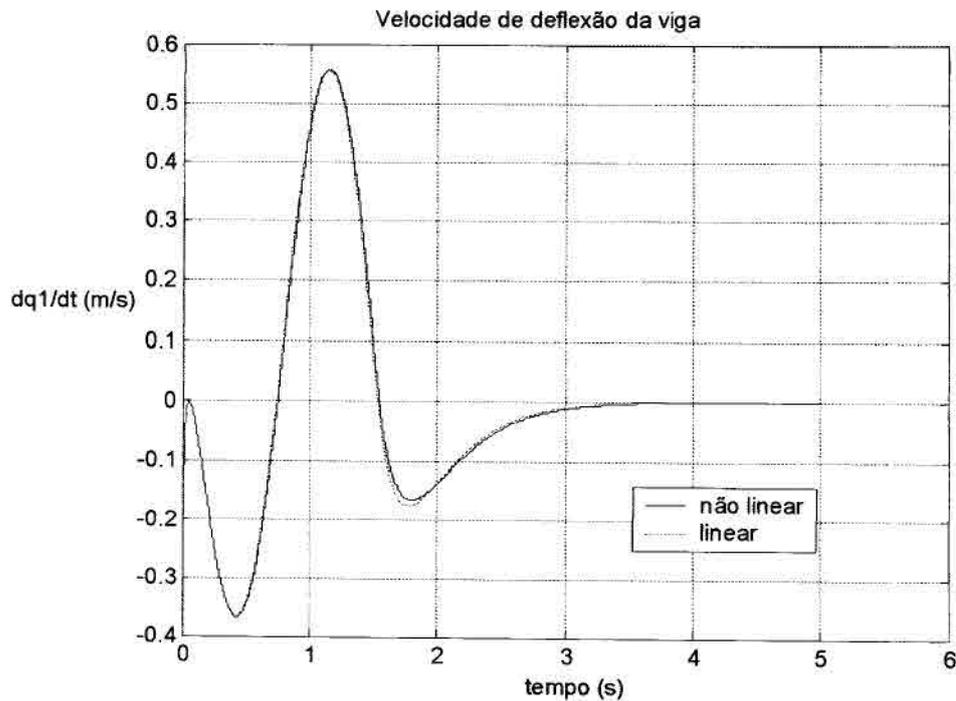


Figura 2.22 – Velocidade da viga para $U=0.5V$ – sistema não ideal: **linear X não linear**.

A semelhança entre a resposta do sistema linear e a resposta do sistema não linear deve-se devido à (suficientemente) baixa velocidade angular imposta ao sistema, não tomando significativa a influência do termo não linear (em comparação com os demais termos lineares presentes). Vale ressaltar também a ordem de magnitude da deflexão da estrutura flexível, a qual também contribui para a importância do termo de rigidez centrípeta.

As Figuras (2.24) a (2.28) e (2.29) a (2.33) ilustram a corrente de armadura do motor dc, o deslocamento angular, a velocidade angular, a deflexão transversal da viga e a velocidade de deflexão da viga para o sistema linear e para o sistema não linear, respectivamente. Para cada uma destas respostas compara-se o sistema linear e o sistema não linear para uma determinada tensão elétrica aplicada aos terminais do motor (maior que a considerada anteriormente), conforme a Figura (2.23).

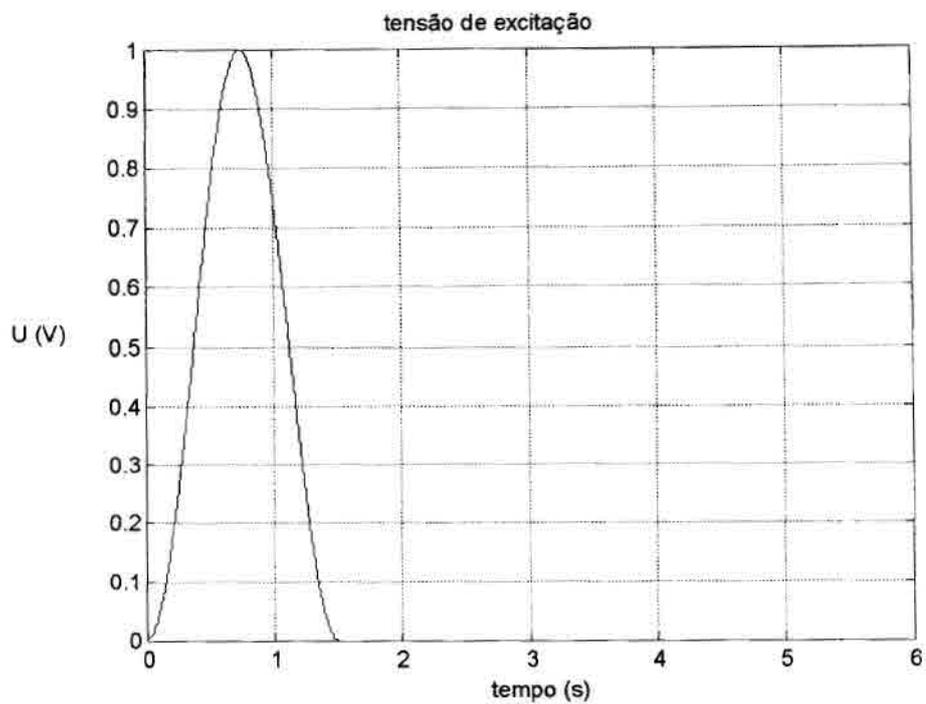


Figura 2.23 – Tensão de excitação (nos terminais do motor): $U=1V$

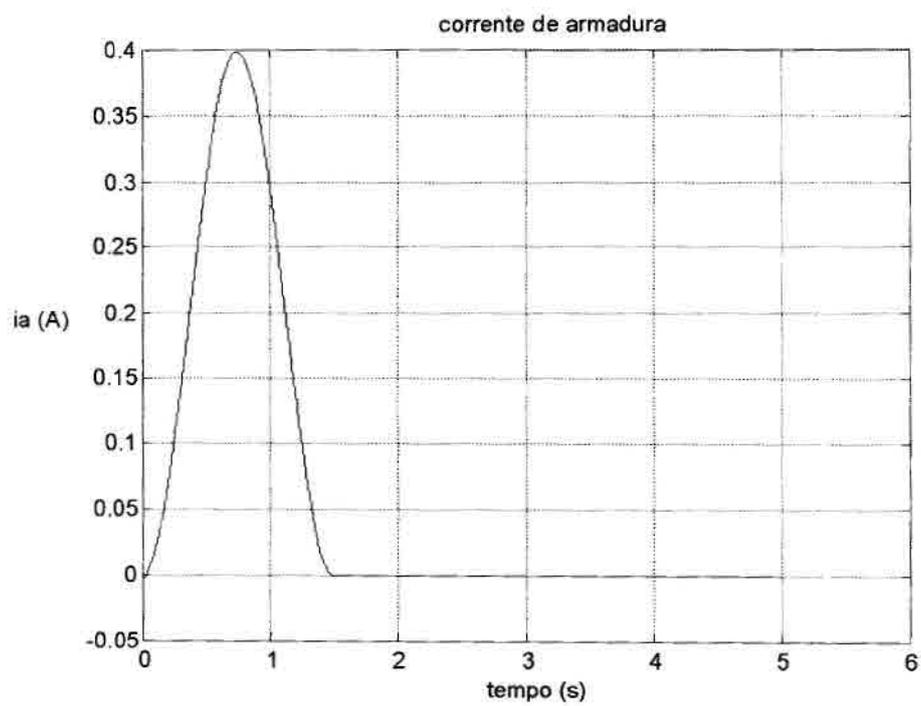


Figura 2.24 – Corrente de armadura para $U=1V$ – sistema ideal: **linear X não linear**.

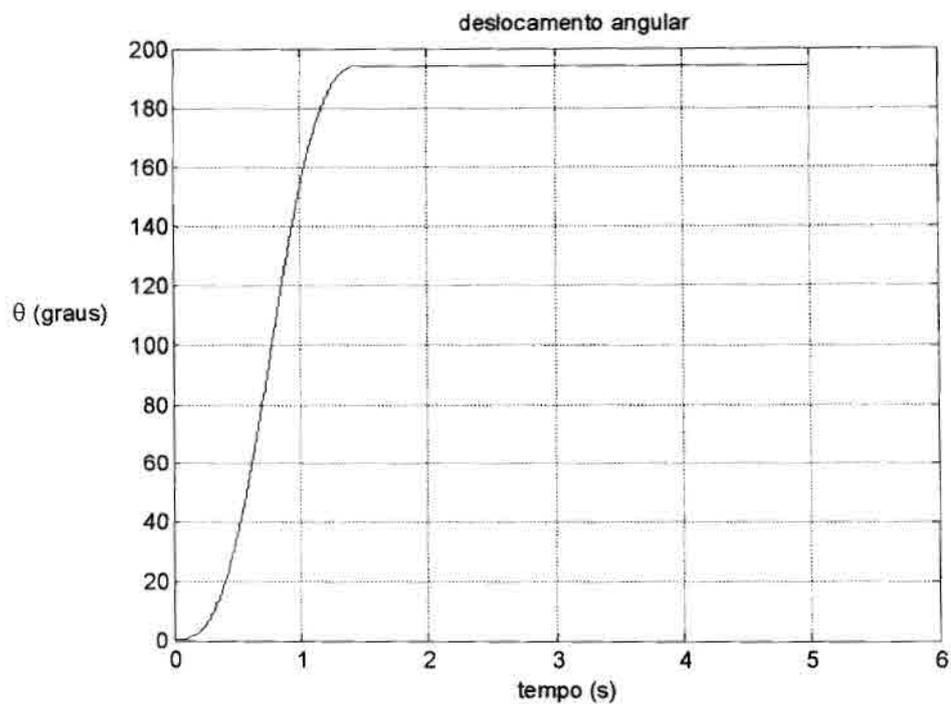


Figura 2.25 – Deslocamento angular para $U=1V$ – sistema ideal: linear X não linear.

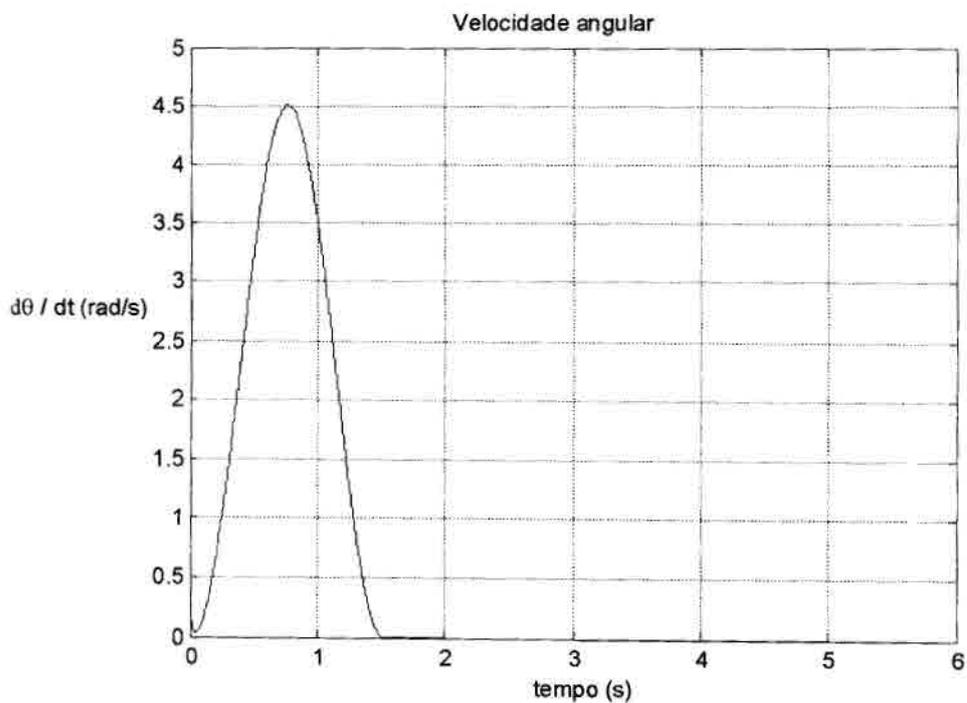


Figura 2.26 – Velocidade angular para $U=1V$ – sistema ideal: linear X não linear.

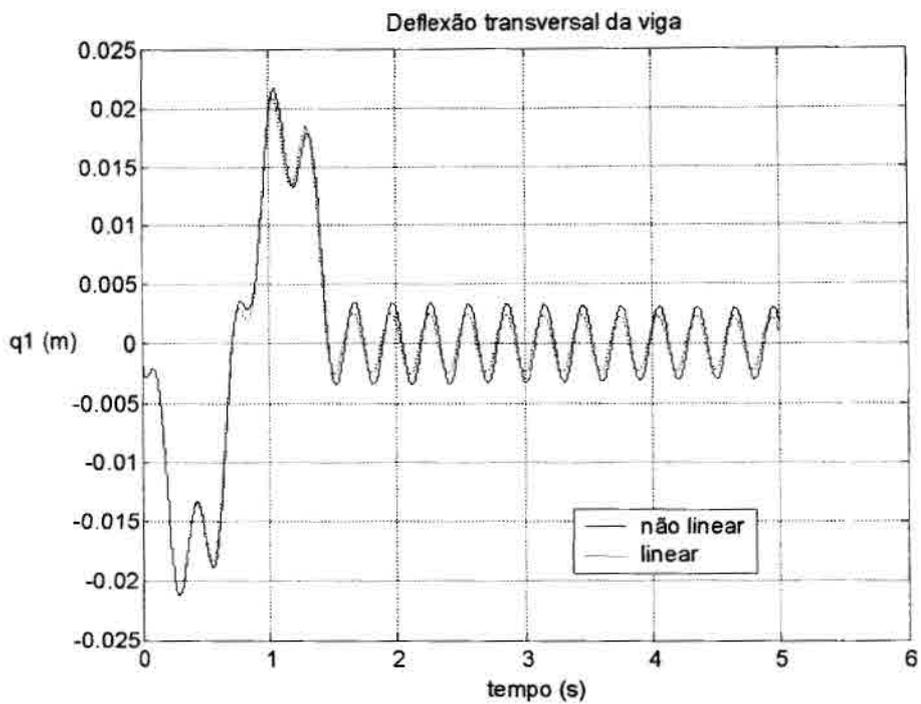


Figura 2.27 – Deflexão da viga para $U=1V$ – sistema ideal: linear X não linear.

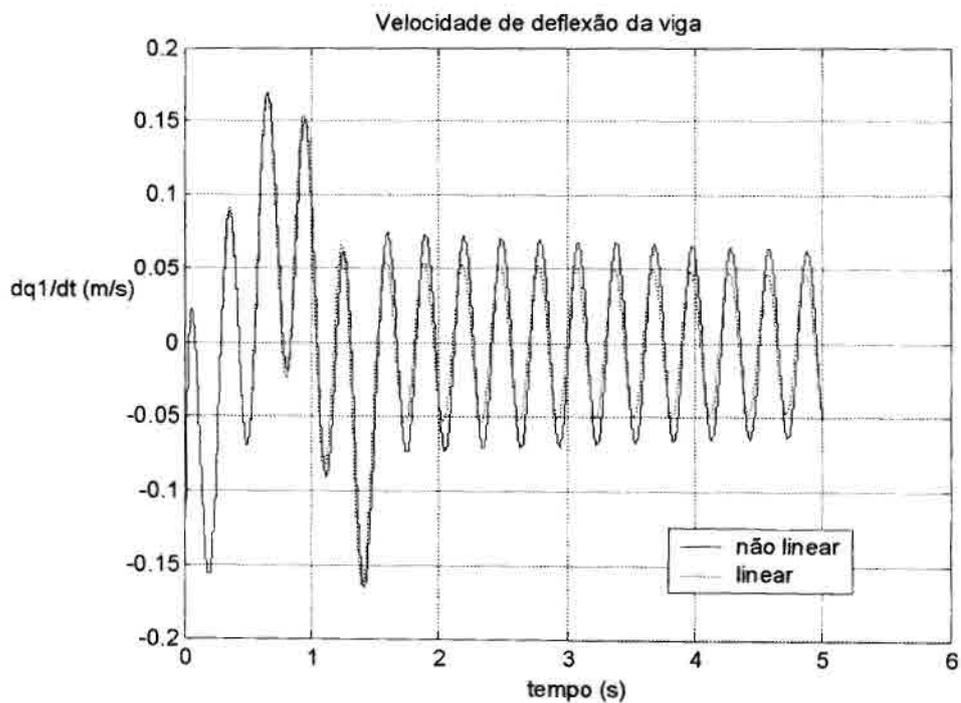


Figura 2.28– Velocidade da viga para $U=1V$ – sistema ideal: linear X não linear.

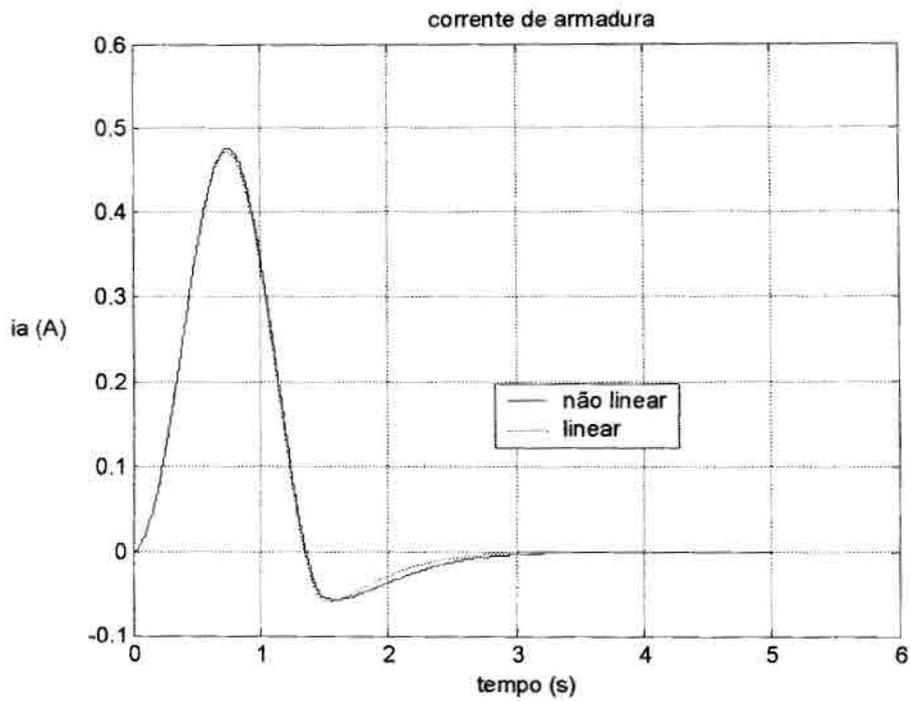


Figura 2.29 – Corrente de armadura para $U=1V$ – sistema não ideal: linear X não linear.

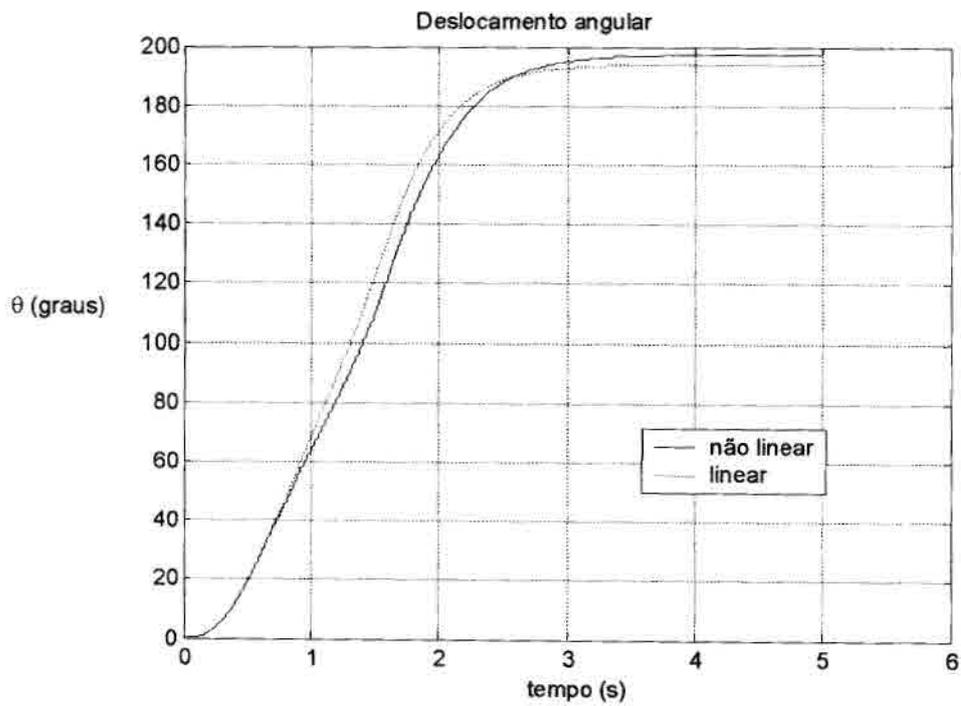


Figura 2.30– Deslocamento angular Para $U=1V$ – sistema não ideal: linear X não linear.

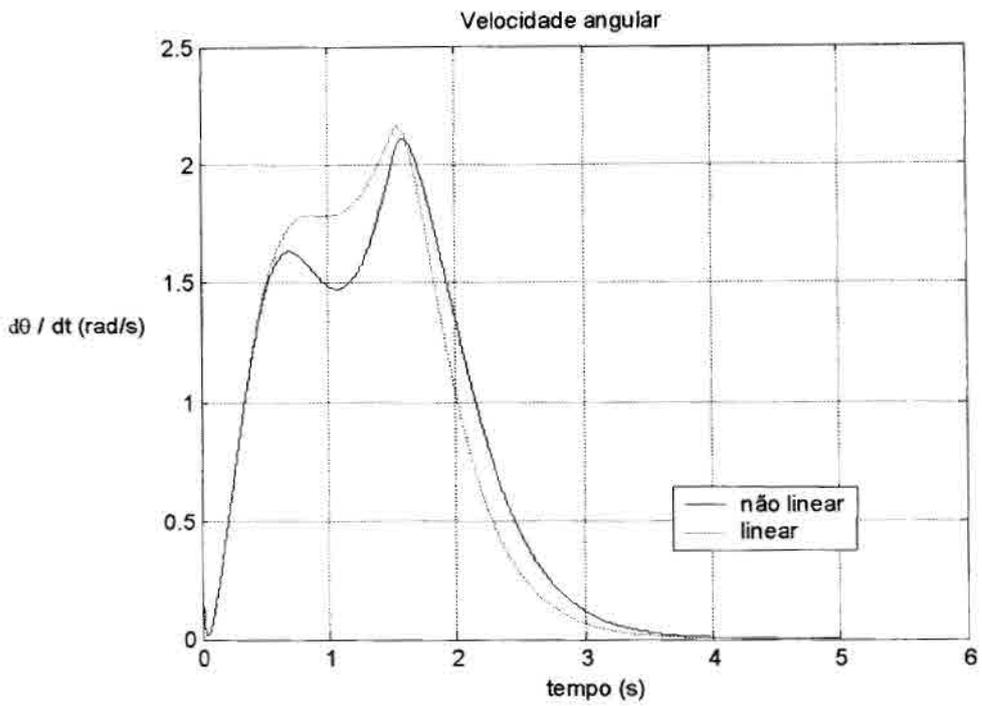


Figura 2.31– Velocidade angular para $U=1V$ – sistema não ideal: **linear X não linear**.

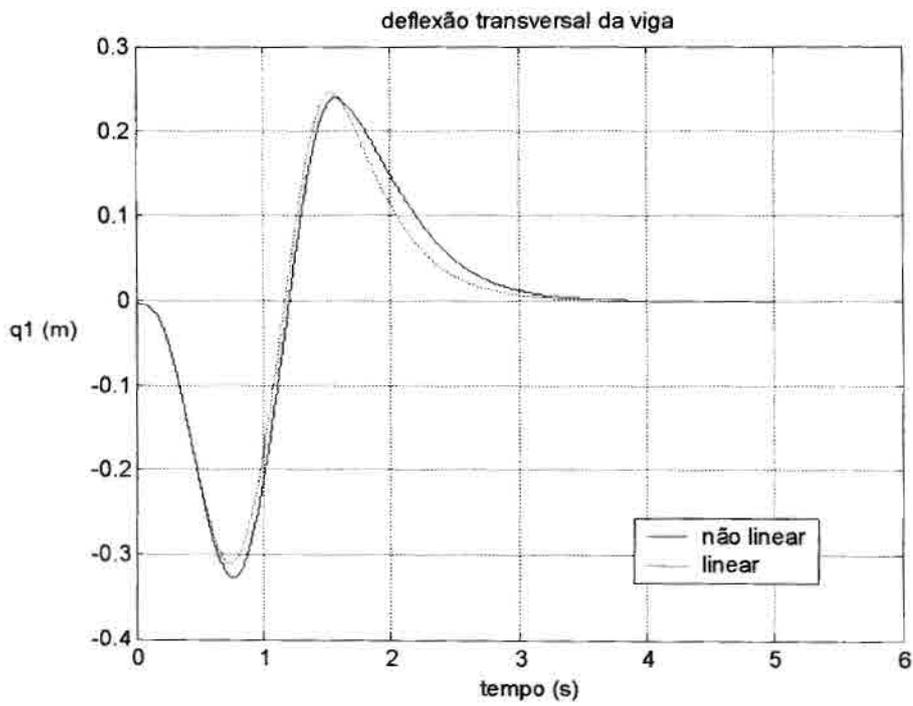


Figura 2.32 – Deflexão da viga para $U=1V$ – sistema não ideal: **linear X não linear**.

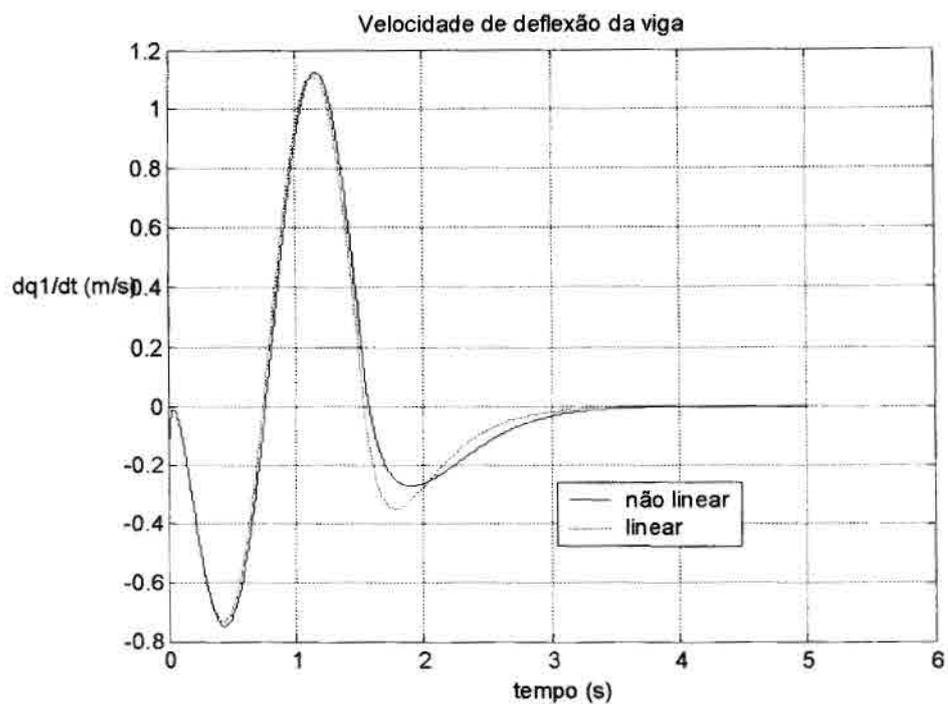


Figura 2.33 – Velocidade da viga para $U=1V$ – sistema não ideal: **linear X não linear**.

Nas Figuras (2.24) a (2.33) verifica-se a importância do termo não linear quando a amplitude da excitação (tensão elétrica nos terminais do motor) aumenta, aumentando assim também a velocidade de rastreamento. Percebe-se novamente que a influência desse termo é mais significativa na abordagem não ideal.

Capítulo 3

Controle de uma estrutura flexível de rastreamento (curvatura linear)

3.1. Desenvolvimentos teóricos

Utiliza-se aqui um método denominado *imposição de pólos* ou *técnica de atribuição de pólos* [5]. Admite-se que todas as variáveis de estado sejam mensuráveis e estão disponíveis para realimentação. Uma nova localização (desejada) dos pólos será proposta para o sistema em malha fechada e os ganhos necessários para que esta nova posição seja atingida serão determinados. Embora o sistema linear em malha aberta seja inicialmente estável (ver simulações numéricas no Capítulo 2), pretende-se fazer com que a vibração da viga se extinga o mais rápido possível (apresente um amortecimento maior).

Escrevendo as equações diferenciais ordinárias governantes do movimento ((2.12 a 2.14) com $\beta=0$ para sistema ideal e $\beta=1$ para sistema não ideal) na forma de estado, considerando baixas velocidades de rastreamento e escrevendo o sistema resultante de equações na forma matricial, obtém-se:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

onde:

$$x = \{x_1 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_m} & 0 & -\frac{K_b N_g}{L_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{N_g K_t}{I_{eixo} + I_{motor} N_g^2} & 0 & \frac{c_m N_g^2}{I_{eixo} + I_{motor} N_g^2} & \frac{\beta EI \phi_1''(0)}{I_{eixo} + I_{motor} N_g^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_1 N_g K_t}{I_{eixo} + I_{motor} N_g^2} & 0 & \frac{\alpha_1 c_m N_g^2}{I_{eixo} + I_{motor} N_g^2} & -\frac{\alpha_1 \beta EI \phi_1''(0)}{I_{eixo} + I_{motor} N_g^2} - w_1^2 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ L_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}^T$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Seja o esquema de controle de retroação de estado [5] dado por:

$$u = -Kx \quad (3.2)$$

onde K é a matriz dos ganhos a ser determinada, x é o vetor de estados e u=U. Este tipo de estratégia de controle é denominado controle proporcional mais derivativo.

Desta forma, o sistema em malha fechada é dado por:

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = -(k_1 x_1 + k_3 x_3 + k_4 x_4 + k_5 x_5 + k_6 x_6) \quad (3.3)$$

$$(I_{eixo} + I_{motor} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - \beta \left(EI \sum_{i=1}^n q_j(t) \phi_j''(0) \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\ddot{q}_j + \mu \dot{q}_j + w_j^2 q_j + \alpha_j \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_j = 0 \quad (3.5)$$

Seja a matriz de controlabilidade dada por:

$$M = \left[B \quad AB \quad A^2 B \quad A^3 B \quad A^4 B \right] \quad (3.6)$$

Caso $\det(M) \neq 0$, garante-se que o sistema é a estados completamente controláveis [5].

A equação característica do sistema em malha aberta é dada por:

$$|sI-A| = s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0 \quad (3.7)$$

A localização dos pólos desejados em malha fechada é realizada, por exemplo, modificando-se a parte real de um par conjugado de pólos obtidos em malha aberta e mantendo os demais. Essa modificação dá-se dependendo da dinâmica desejada.

A equação característica em malha fechada é dada por:

$$\begin{aligned} (s - \mu_1) (s - \mu_2) (s - \mu_3) (s - \mu_4) (s - \mu_5) = \\ s^5 + \alpha_1 s^4 + \alpha_2 s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s + \alpha_5 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Os pólos desejados são (de acordo com os valores apresentados na Tabela 1, Capítulo2):

$$\mu_1 = 0.0000$$

$$\mu_2 = -0.5000 + 3.7322i$$

$$\mu_3 = -0.5000 - 3.7322i$$

$$\mu_4 = -60.897$$

$$\mu_5 = -603.1560$$

A determinação da matriz de ganho de retroação de estado, K, é dada por [5]:

$$K = [\alpha_5 - a_5 \mid \alpha_4 - a_4 \mid \alpha_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1} \quad (3.9)$$

onde a matriz T é definida como sendo:

$$T = MW \quad (3.10)$$

a matriz M é dada pela Equação (3.6) e a matriz W é definida como:

$$W = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

a matriz M é dada pela Equação (3.6) e a matriz W é definida como:

$$(3.11) \quad W = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de ganho de retroação é dada por:

$$(3.12) \quad K = [-0.00303 \quad 0 \quad 0.003961 \quad -0.244 \quad 0.0004073]$$

Estes ganhos foram calculados considerando o sistema linear e ideal. Estes mesmos ganhos foram utilizados para o controle do sistema linear e não ideal, não linear e ideal e do sistema não linear e não ideal, obtendo-se resultados satisfatórios para o conjunto de parâmetros considerado.

Por conseguinte, o sinal de controle u (a ser substituído em (3.1)) é dado por:

$$(3.13) \quad u = 0.00303x_1 - 0.003961x_3 + 0.244x_4 - 0.0004073x_5$$

3.2. Simulações Numéricas

As simulações numéricas foram realizadas utilizando-se os parâmetros da Tabela 1, Capítulo 2. O controle é acionado assim que a estrutura flexível atinge uma determinada posição angular (desejada).

As Figuras (3.2) a (3.6) e (3.7) a (3.11) ilustram a corrente de armadura, deslocamento angular, velocidade angular, deflexão da viga e a velocidade de deflexão da viga, comparando os sistemas em malha aberta e em malha fechada para diferentes

tensões elétricas aplicadas aos terminais do motor, conforme figura (3.1), para o sistema ideal e linear e para o sistema ideal e não linear.

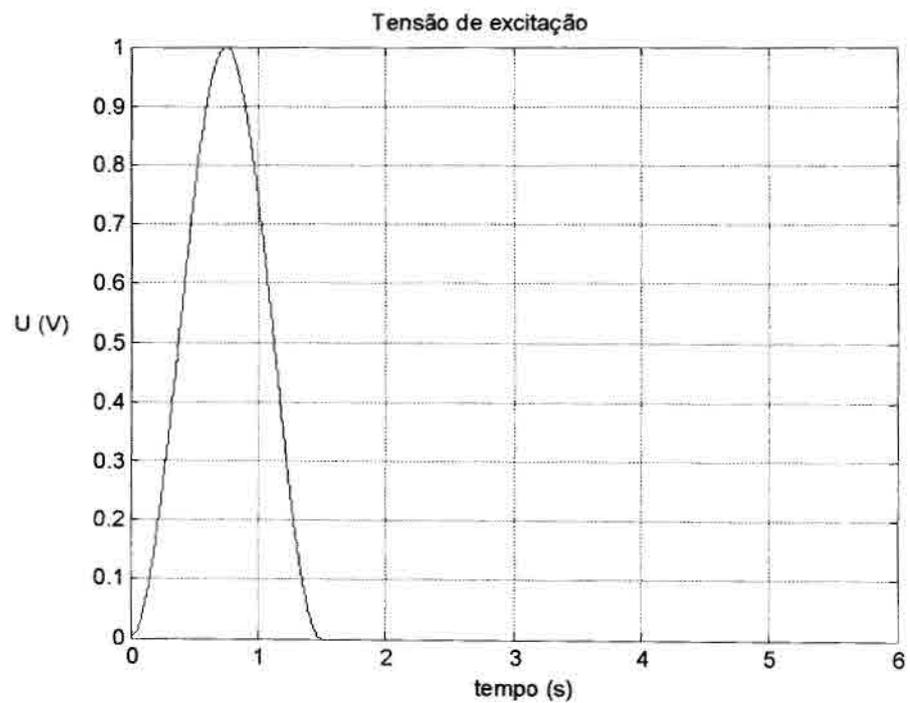


Figura 3.1 - Tensão de excitação (nos terminais do motor): $U=1.0$ V.

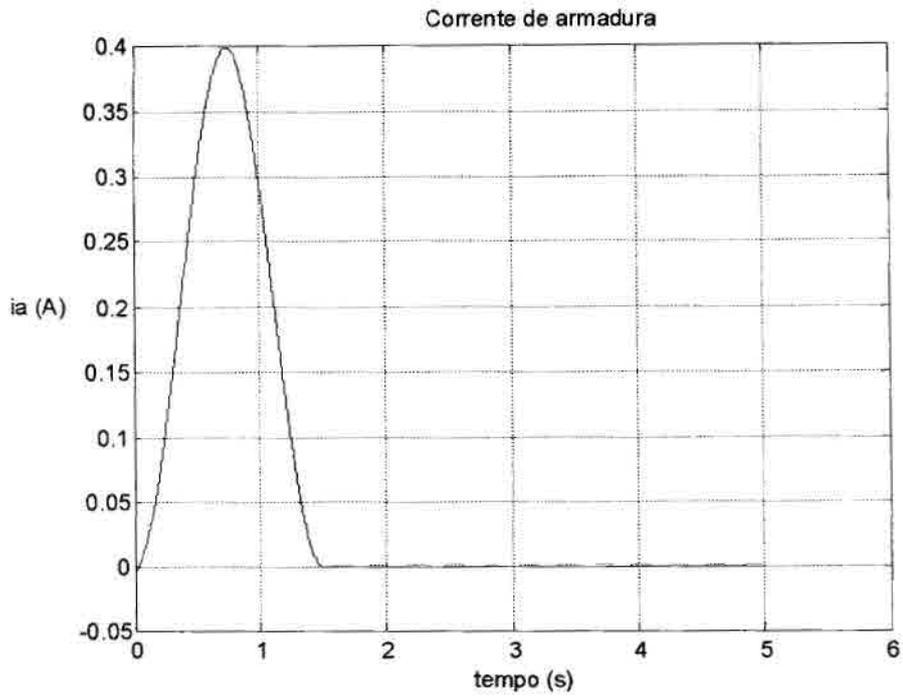


Figura 3.2 – Corrente de armadura para $U=1V$ – sistema ideal e linear.

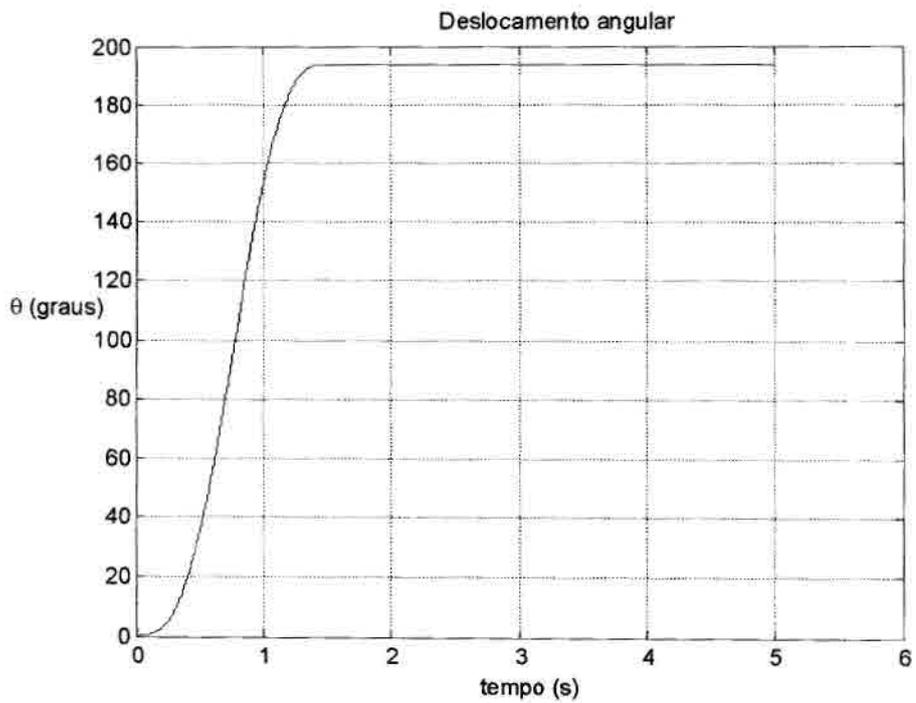


Figura 3.3 – Deslocamento angular para $U=1V$ – sistema ideal e linear.

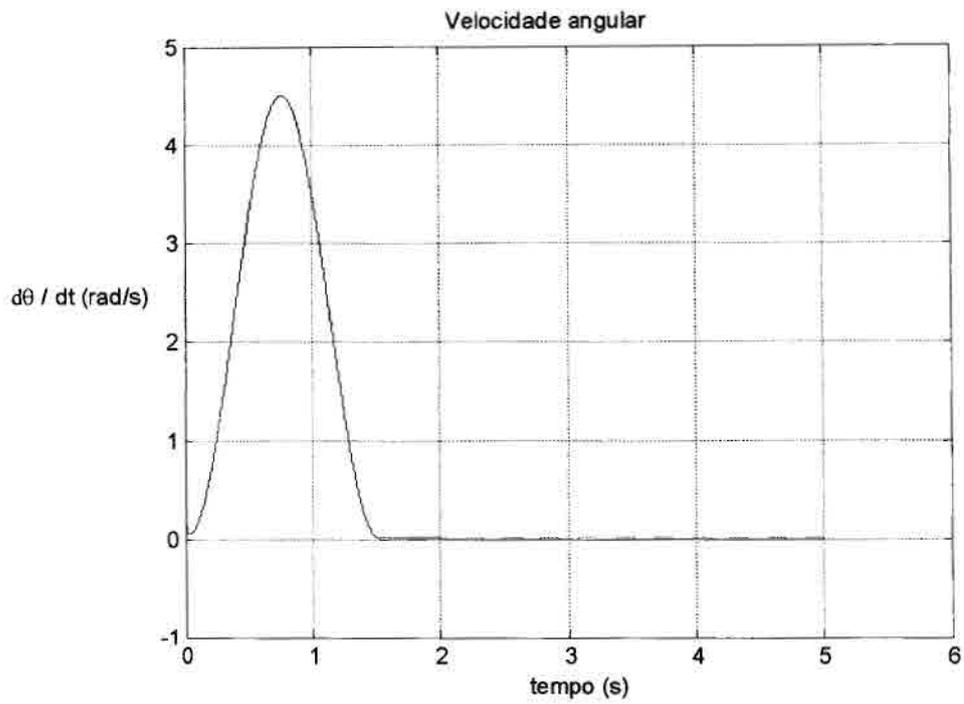


Figura 3.4 – Velocidade angular para $U=1V$ – sistema ideal e linear.

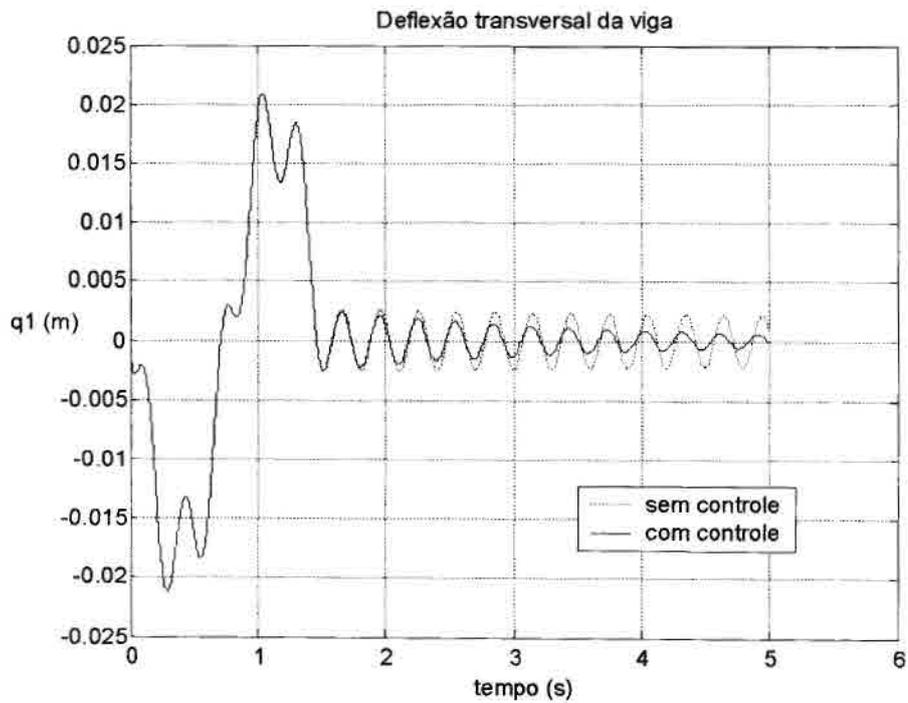


Figura 3.5 – Deflexão da viga para $U=1V$ – sistema ideal e linear.

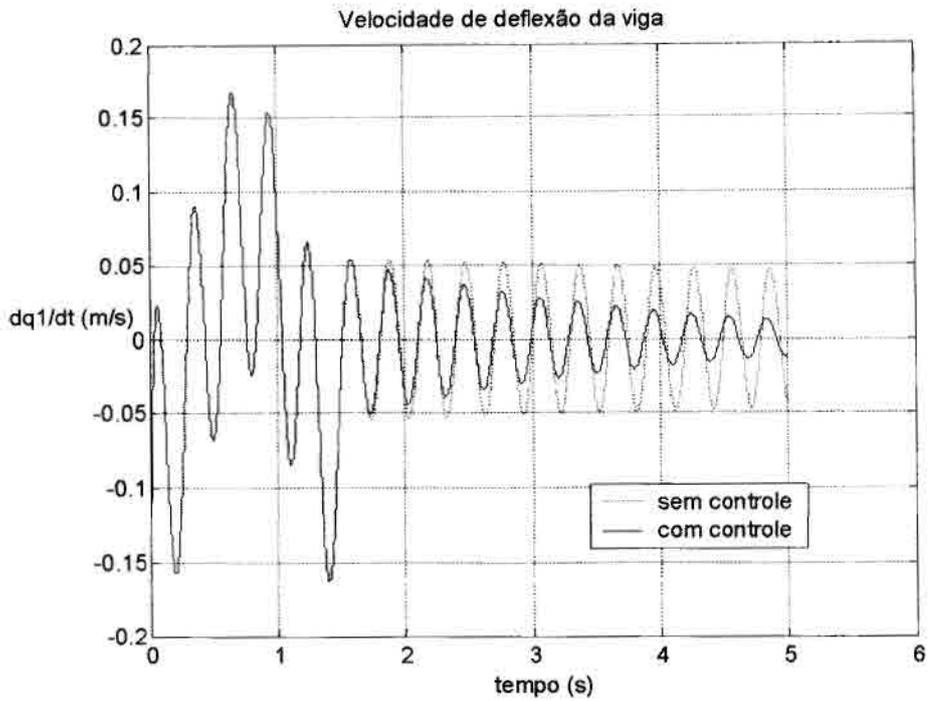


Figura 3.6– Velocidade de deflexão da viga para $U=1V$ – sistema ideal e linear.

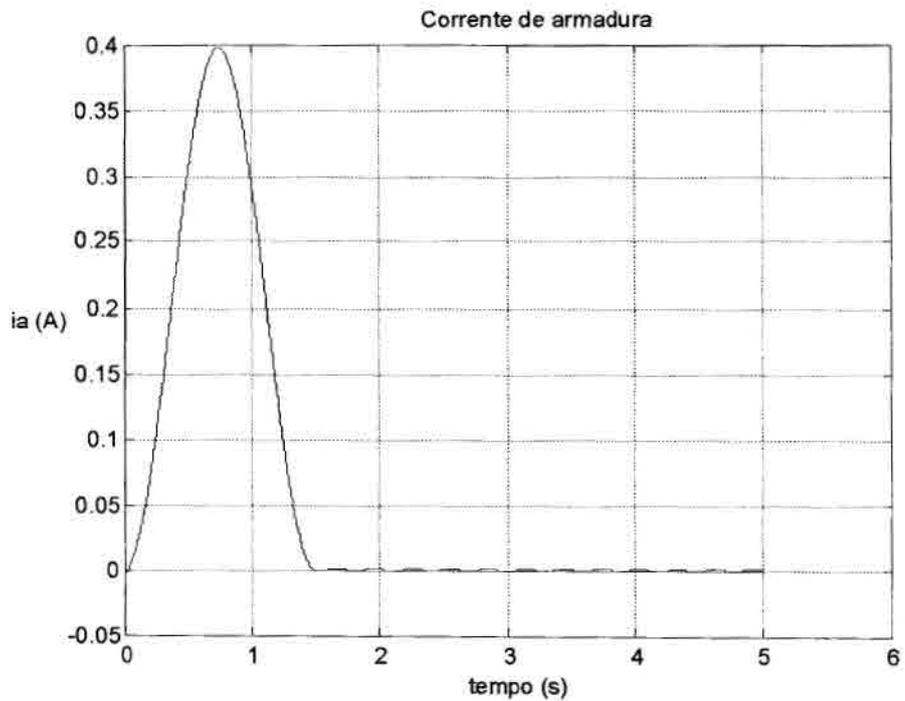


Figura 3.7 – Corrente de armadura para $U=1V$ – sistema ideal e não linear.

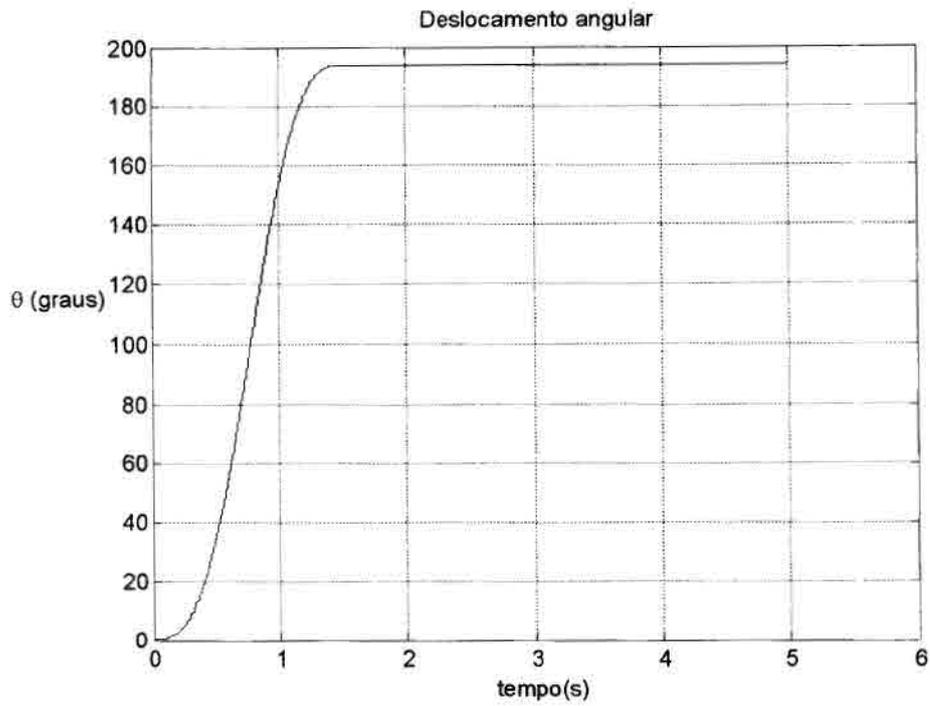


Figura 3.8 – Deslocamento angular para $U=1V$ – sistema ideal e não linear.

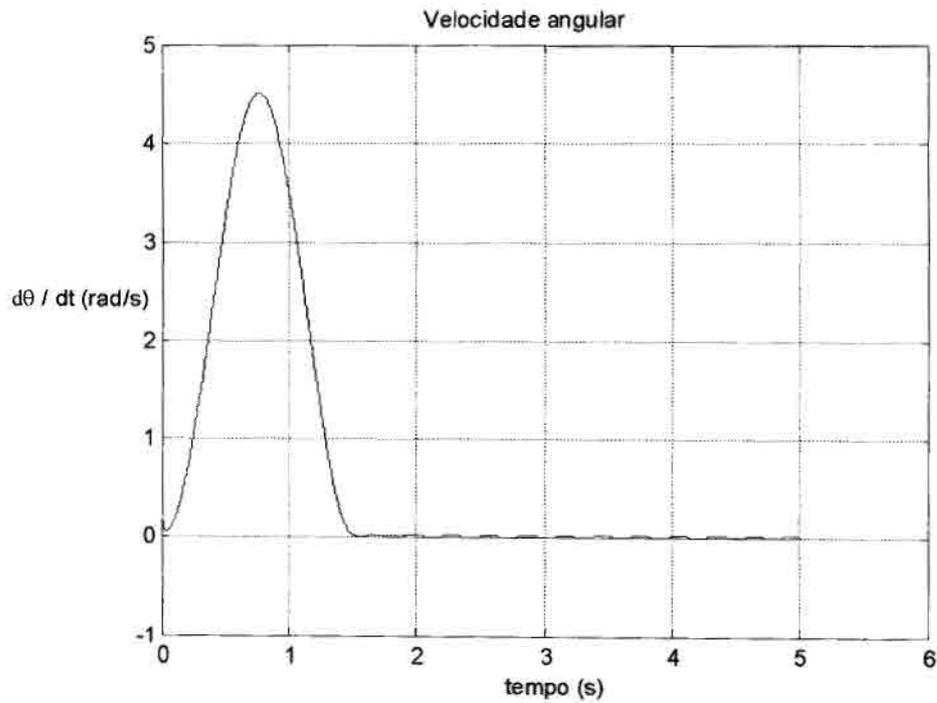


Figura 3.9 – Velocidade angular para $U=1V$ – sistema ideal e não linear.

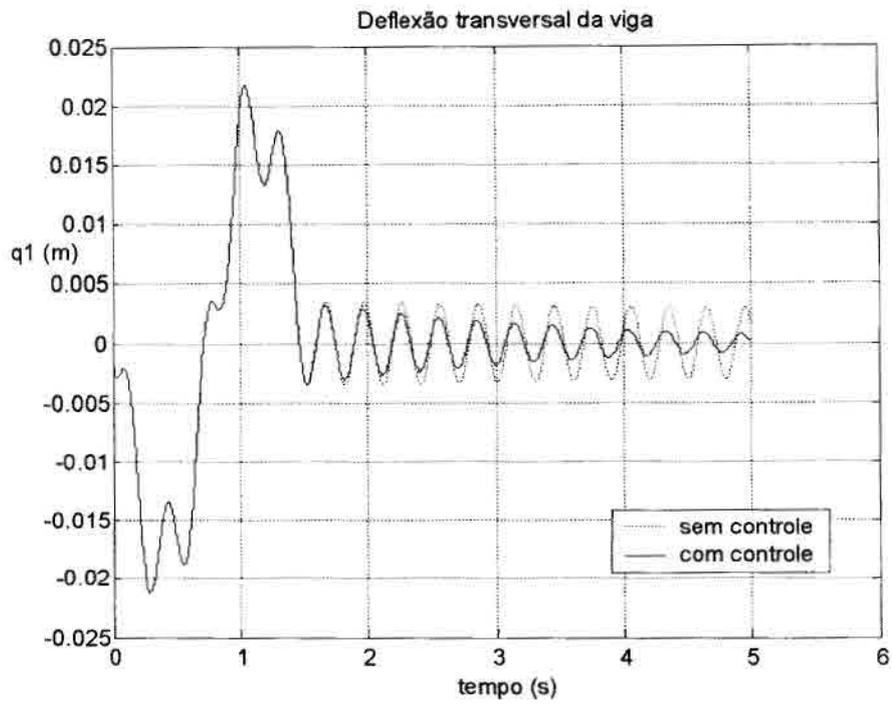


Figura 3.10 – Deflexão da viga para $U=1V$ – sistema ideal e não linear.

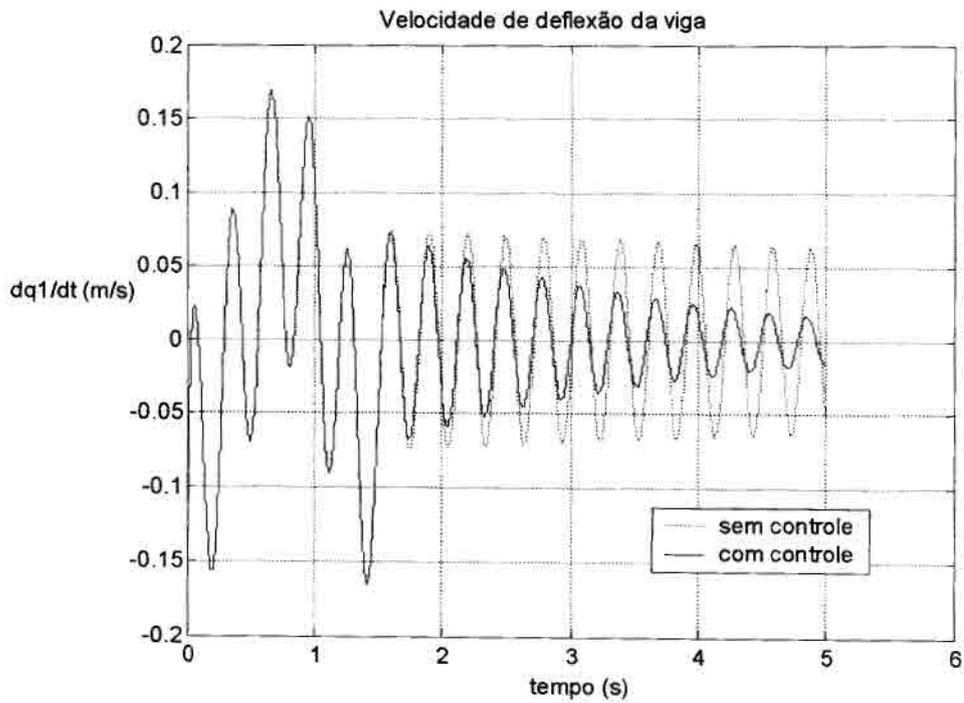


Figura 3.11– Velocidade de deflexão da viga para $U=1V$ – sistema ideal e não linear.

As Figuras (3.12) a (3.16) e (3.17) a (3.21) ilustram a corrente de armadura, deslocamento angular, velocidade angular, deflexão da viga e a velocidade de deflexão da viga, comparando os sistemas em malha aberta e em malha fechada para diferentes tensões elétricas aplicadas aos terminais do motor, conforme figura (3.1), para o sistema não ideal e linear e para o sistema não ideal e não linear.

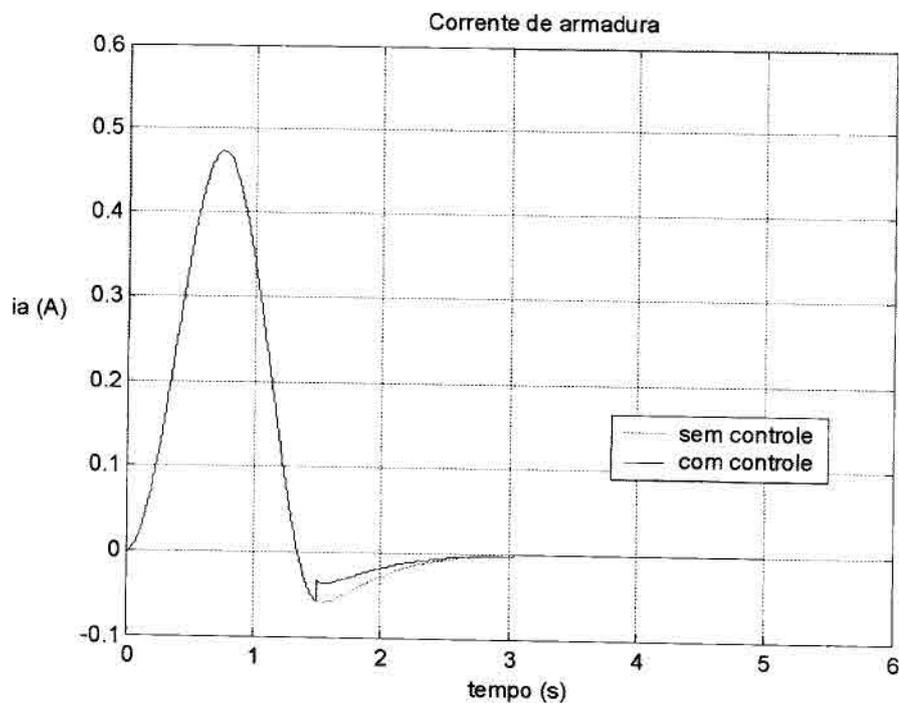


Figura 3.12 – Corrente de armadura para $U=1V$ – sistema não ideal e linear.

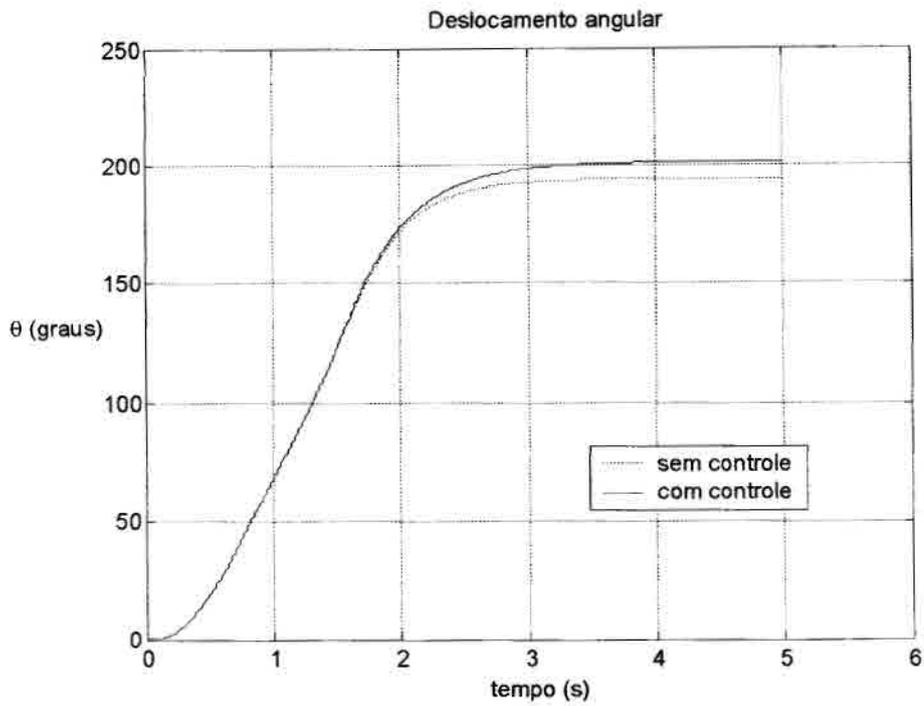


Figura 3.13 – Deslocamento angular para $U=1V$ – sistema não ideal e linear.

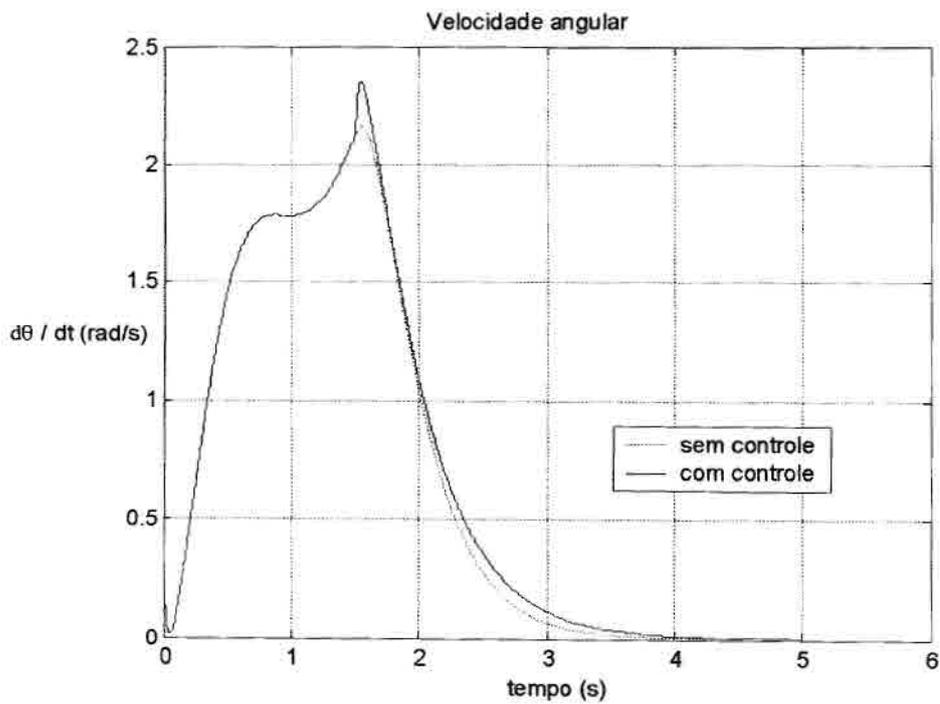


Figura 3.14 – Velocidade angular para $U=1V$ – sistema não ideal e linear.

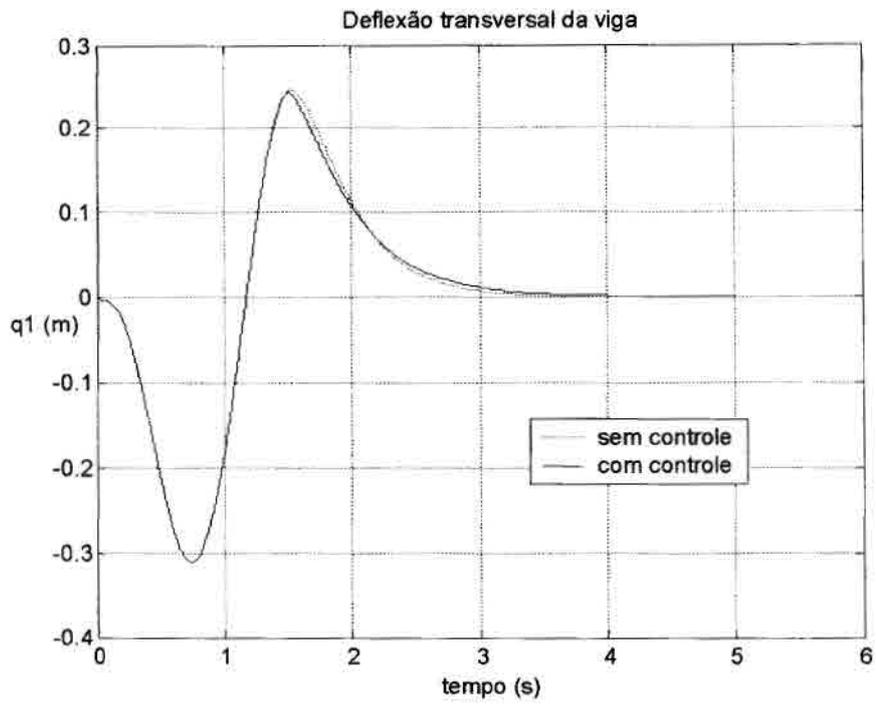


Figura 3.15 – Deflexão da viga para $U=1V$ – sistema não ideal e linear.

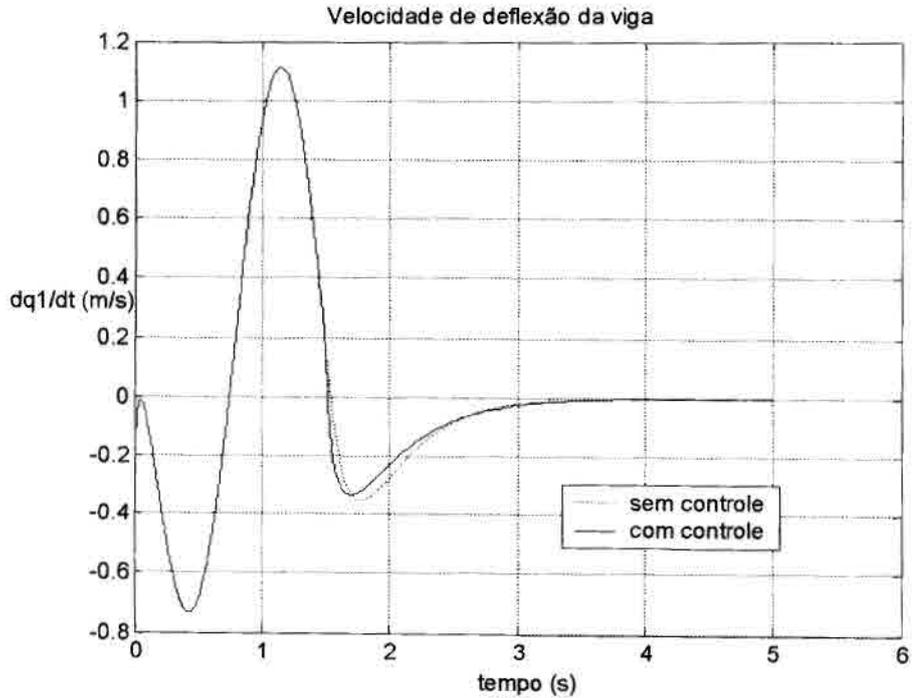


Figura 3.16– Velocidade da viga para $U=1V$ – sistema não ideal e linear.

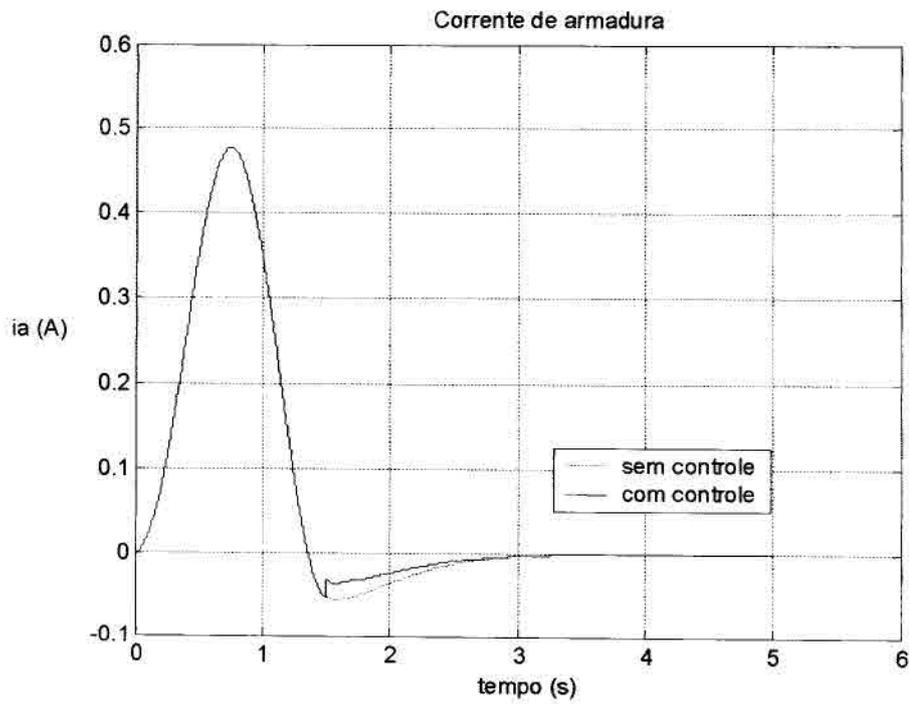


Figura 3.17 – Corrente de armadura para $U=1V$ – sistema não ideal e não linear.

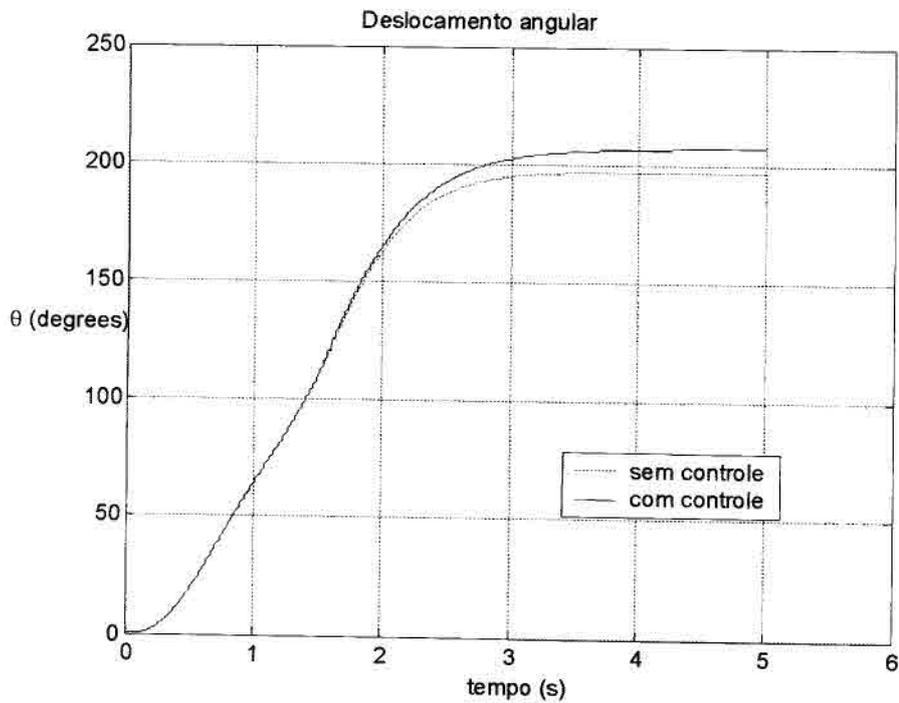


Figura 3.18 – Deslocamento angular para $U=1V$ – sistema não ideal e não linear.

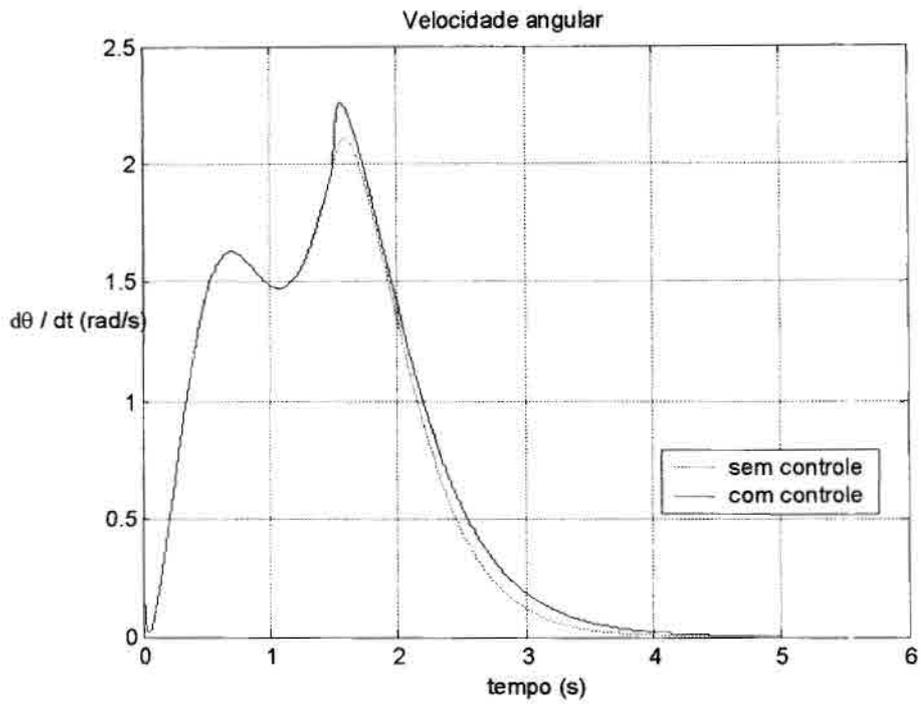


Figura 3.19 – Velocidade angular para $U=1V$ – sistema não ideal e não linear.

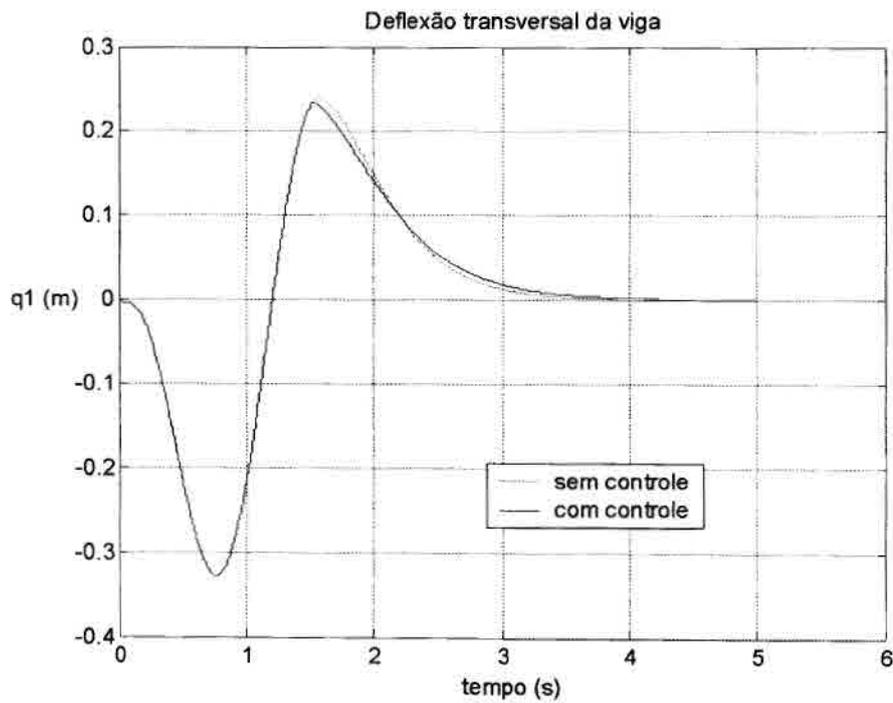


Figura 3.20– Deflexão da viga para $U=1V$ – sistema não ideal e não linear.

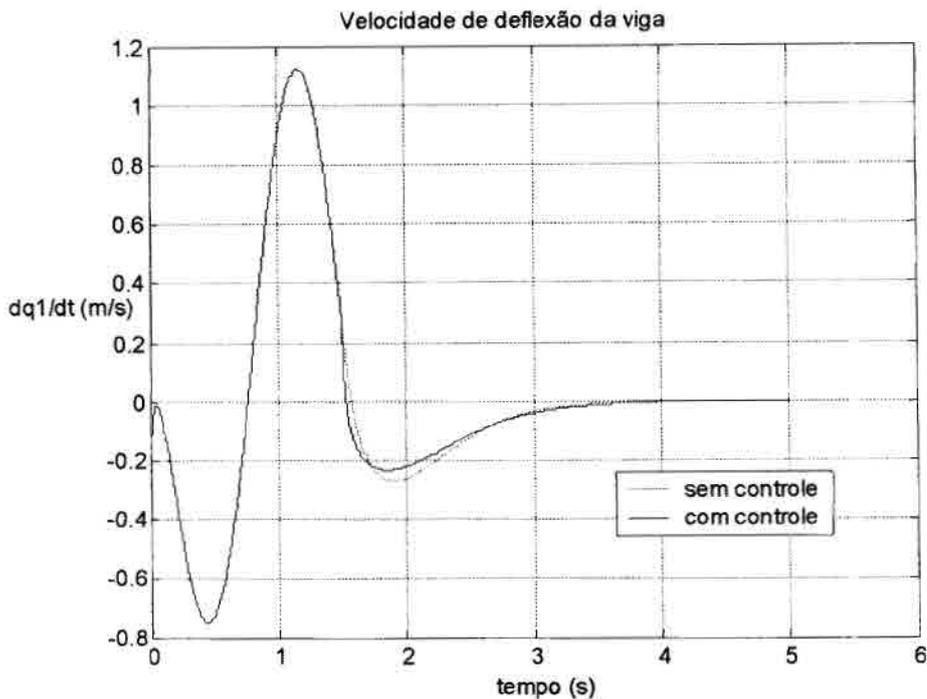


Figura 3.21 - Velocidade da viga para $U=1V$ - sistema não ideal e não linear.

Nas Figuras (3.10) e (3.11), considerando a abordagem ideal, verifica-se a eficiência do controlador, o qual atua sobre a vibração da estrutura flexível no sentido de amortecê-la mais rapidamente. De acordo com as Figuras (3.12) a (3.21), para a abordagem não ideal, a ação do controlador utilizado (e para o ganho escolhido) mostra-se menos significativa.

O controlador foi utilizado com sucesso tanto para o caso linear quanto para o caso não linear. Ao aumentar-se ainda mais a tensão no motor, o sistema não linear em malha fechada torna-se instável. No entanto, para valores altos de amplitude de excitação, a deflexão na viga atinge valores não reais para o modelo de curvatura considerado (em malha aberta, ou seja, antes de atingir a posição angular desejada). Assim, para a faixa de validade da teoria utilizada para modelar a estrutura flexível, pode-se concluir que o controlador linear PD controla satisfatoriamente o sistema não linear (aonde a não linearidade é representada pelo termo de rigidez centrípeta). Vale ressaltar que o termo não linear não foi considerado no projeto do controlador.

Capítulo 4

Conclusões

A estratégia de controle PD proposta para a estrutura flexível de rastreamento (considerando curvatura linear) mostrou-se eficaz tanto para o caso linear quanto para o caso não linear (este último quando se considera o termo de rigidez centrípeta), fazendo com que a vibração da estrutura amortecia mais rapidamente assim que uma determinada posição angular do eixo do motor é atingida. Essa ação pode ser observada mais facilmente para o caso ideal e linear (veja, por exemplo, a Figura 3.5, Capítulo 3). No instante em que a malha é fechada, a tensão elétrica no motor passa a atuar como um sinal de controle.

É interessante observar a maneira como a interação atuador-estrutura característica da abordagem não ideal naturalmente amortece a vibração da estrutura flexível, aparentemente eliminando a necessidade de um controlador. Novas possibilidades de ganho para o controlador PD poderão ser futuramente investigadas para esse tipo de sistema.

Um aumento na tensão elétrica no motor (U) torna instável o sistema não linear (não ideal) em malha fechada. No entanto, para valores altos de U , a deflexão na viga atinge valores não reais para o modelo de curvatura considerado (em malha aberta) e a teoria utilizada para modelar a estrutura flexível já não se aplica mais. Assim, pode-se concluir que o controlador linear PD controla satisfatoriamente o sistema não linear (aonde a não linearidade é representada pelo termo de rigidez centrípeta) dentro da faixa de validade da teoria de curvatura linear. Vale ressaltar que o termo não linear não foi considerado no projeto do controlador.

Controladores não lineares deverão também ser futuramente investigados, projetados e testados, com a eficiência comparada com os resultados apresentados neste trabalho.

Capítulo 5

Referências Bibliográficas

- [1] Craig, Jr., R. R., "Structural dynamics - An introduction to computer methods", John Wiley and Sons, 1981.
- [2] Fenili, A., "Modelagem matemática e análise dos comportamentos ideal e não ideal de estruturas flexíveis de rastreamento", Tese de Doutorado financiada pela Fapesp e defendida em dezembro de 2000 pela Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
- [3] Popov, E. P., "Introdução à mecânica dos sólidos", Editora Edgar Blücher Ltda, 1978.
- [4] Kononenko, V. O., "Vibrating systems with a limited power supply", Iliffe Books Ltd., 1969.
- [5] Ogata, K., "Engenharia de Controle Moderno", Editora Prentice-Hall do Brasil Ltd, 1993.
- [6] Thomson, W.T., "Theory of vibration with applications", Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- [7] Meirovitch, L., "Analytical methods in vibrations", Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1967.

Apêndice A

O método dos modos assumidos

O método dos modos assumidos, também conhecido como Método de Ritz, é um método matemático que busca contornar o problema de se trabalhar com variáveis espaço-temporais, discretizando-as por meio de uma expansão em funções espaciais e temporais [1], [6] e [7]. De acordo com este método, a variável relacionada ao comportamento flexível da estrutura, $v(x,t)$, pode ser reescrita como [1], [6] e [7]:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (\text{A.1})$$

onde n representa o número de modos a ser adotado na discretização. Cada uma das funções $\phi_i(x)$ que aparece em (A.1) representa um modo próprio do sistema. As variáveis $q_i(t)$ são os estados (ou amplitudes modais) que se pretende determinar (numericamente, através de algum integrador numérico tal como Runge-Kutta, previsor-corretor, ...).

De acordo com [1] e [2], as funções $\phi_i(x)$ para uma viga engastada-livre são dadas por:

$$\phi_i(x) = \cosh(a_i x) - \cos(a_i x) - \alpha_i (\sinh(a_i x) - \sin(a_i x)) \quad (\text{A.2})$$

onde :

$$\alpha_i = \frac{\cosh(a_i L) + \cos(a_i L)}{\sinh(a_i L) + \sin(a_i L)} \quad (\text{A.3})$$

e $a_i L$ está associado aos autovalores do sistema livre e não amortecido.

A Figura A.1 apresenta a forma para os três primeiros modos de vibrar da viga engastada-livre, os quais são:

$$a_1 L = 1.8780$$

$$a_2 L = 4.6943$$

$$a_3 L = 7.8548$$

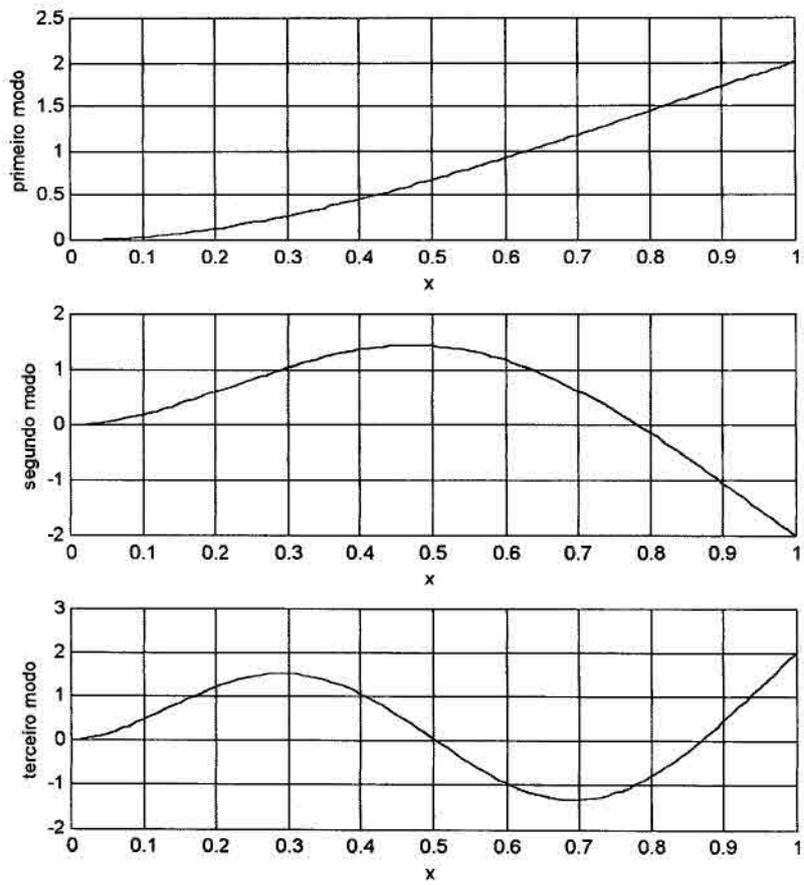


Figura A.1 - Os tres primeiros modos de vibrar do sistema viga engastada-livre linear sem amortecimento e livre de esforços externos

Apêndice B

Modelagem de um motor de corrente contínua ideal e não ideal

O balanço de tensão elétrica em um motor de corrente contínua controlado por armadura é dado, de acordo com a Lei de Kirchoff, por:

$$L_m \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \dot{\theta}_{motor} = U \quad (B.1)$$

onde U representa a tensão de armadura (tensão aplicada aos terminais do motor); R_a representa a resistência da armadura; i_a representa a corrente de armadura; L_m representa a indutância do motor; K_b representa a constante de força contra-eletromotriz e θ_{motor} representa a posição angular do motor.

A somatória dos torques em relação ao eixo do motor fornece a equação mecânica do motor de corrente contínua controlado por armadura, dada por:

$$\tau_m = K_t i_a - c_m \dot{\theta}_{motor} - I_{motor} \ddot{\theta}_{motor} \quad (B.2)$$

onde I_{motor} representa a inércia do motor; c_m representa o atrito interno ao motor; τ_m representa o torque aplicado à transmissão mecânica (caso haja) entre o atuador e a carga ou diretamente à carga e K_t representa a constante de torque do motor.

O deslocamento angular do eixo do motor e o torque aplicado à transmissão mecânica entre o motor e a carga relacionam-se ao deslocamento angular desta carga e ao torque aplicado à mesma por:

$$\theta_{motor} = N_g \theta \quad (B.3)$$

$$\tau = N_g \tau_m \quad (B.4)$$

aonde τ representa o torque aplicado pelo motor de corrente contínua à estrutura a ser movida, θ representa o deslocamento angular desta estrutura e N_g representa a relação de

transmissão entre o motor e a estrutura. Em relação aos parâmetros da estrutura a ser movida, as Equações (B.1) e (B.2) podem ser rescritas como:

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (B.5)$$

$$I_{\text{motor}} N_g^2 \ddot{\theta} + c_m N_g^2 \dot{\theta} - N_g K_t i_a + \tau = 0 \quad (B.6)$$

No estudo realizado aqui, trabalha-se com o modelo mais geral do motor onde não se despreza a indutância, L_m , e, portanto, considera-se possíveis variações na corrente de armadura. Com efeito, o comportamento dinâmico do motor no caso não ideal é uma incógnita e deverá ser verificado devidamente.

A opção por uma abordagem de sistema dinâmico ideal ou por uma abordagem de sistema dinâmico não ideal [2] e [4] irá depender da maneira como o acoplamento atuador-estrutura for considerado. Na Equação (B.6), dependerá das considerações feitas para a representação do torque τ . Optou-se aqui por explorar inicialmente a abordagem não ideal, a mais geral. A abordagem ideal, como será visto adiante, representa uma simplificação da abordagem do tipo não ideal.

Seja o esquema apresentado na Figura B.1 [2]. Se o eixo em questão for suficientemente curto, poder-se-á considerá-lo rígido. Assim, o torque total, τ , atuando sobre a estrutura flexível pode ser escrito como :

$$\tau = -M + I_{\text{eixo}} \ddot{\theta} \quad (B.7)$$

onde o parâmetro M representa o momento de flexão da viga atuando sobre o eixo do motor (ou sobre o eixo que produz o deslocamento angular, θ , no caso de haver uma caixa de transmissão mecânica). Nesta figura, a caixa de transmissão não está representada; I_{eixo} também representa a inércia das engrenagens associada ao sistema de transmissão mecânica. Desta forma, a Equação (B.6) pode ser rescrita como:

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - M = 0 \quad (B.8)$$

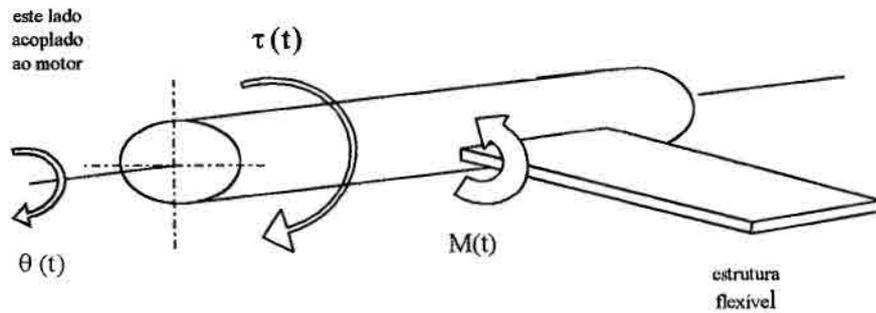


Figura B.1 - Acoplamento atuador-estrutura flexível.

O momento M pode ser representado, para o modelo de curvatura linear [1] e [2], como:

$$M = EIv'' \quad (\text{B.9})$$

aonde os parâmetros E e I e a variável v foram definidos anteriormente. Valendo-se novamente da expansão para v também discutida anteriormente, pode-se finalmente escrever (B.8) como :

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - \beta EI \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i''(0) = 0 \quad (\text{B.10})$$

As Equações (B.5) e (B.10) representam as equações governantes do movimento de um motor de corrente contínua atuando como uma fonte de potência não ideal. A fonte de potência é considerada limitada, neste caso, porque depende da dinâmica da estrutura, ou seja, de q_i , que é uma quantidade limitada. A vibração da estrutura flexível altera o comportamento do atuador (fonte da potência), que altera o comportamento da viga que altera o comportamento do atuador e assim por diante, tornando impossível prescrever θ sem conhecer a vibração da estrutura flexível. Para o caso ideal, basta fazer $\beta = 0$ em (B.10); a equação (B.5) não se altera.

Apêndice C

Justificativa para $\phi_i''\phi_j'' = \phi_i^{iv}\phi_j$

Para a obtenção dos modos de vibrar e das frequências naturais da viga engastada-livre, considera-se sempre a equação governante do movimento não amortecida e livre de esforços externos, dada por:

$$EIv^{iv} + \rho A\ddot{v} = 0$$

utilizando o método dos modos assumidos:

$$EI\sum_{i=1}^n[\phi_i^{iv} q_i] + \rho A\sum_{i=1}^n[\phi_i \ddot{q}_i] = 0$$

e integrando de 0 a L, obtém-se:

$$EI\int_0^L \sum_{i=1}^n[\phi_i^{iv} q_i]dx + \rho A\int_0^L \sum_{i=1}^n[\phi_i \ddot{q}_i]dx = 0$$

ou:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ EI\left(\int_0^L \phi_i^{iv} dx\right)q_i + \rho A\left(\int_0^L \phi_i dx\right)\ddot{q}_i \right\} = 0 \quad (C.1)$$

Multiplicando (C.1) por ϕ_j resulta:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ EI\left(\int_0^L \phi_i^{iv} \phi_j dx\right)q_i + \rho A\left(\int_0^L \phi_i \phi_j dx\right)\ddot{q}_i \right\} = 0 \quad (C.2)$$

Integrando por partes o primeiro termo de (C.2) (concentrando-se apenas na integral) tem-se:

– primeira integração por partes:

Seja:

$$u = \phi_j \Rightarrow du = \phi_j' dx$$

$$dv = \phi_i^{iv} dx \Rightarrow v = \phi_i'''$$

e:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\text{portanto: } \int_0^L \phi_i^{iv} \phi_j dx = \phi_j \phi_i''' \Big|_0^L - \int_0^L \phi_i''' \phi_j' dx$$

ou:

$$\int_0^L \phi_i^{iv} \phi_j dx = \phi_j(L) \phi_i'''(L) - \phi(0)_j \phi_i'''(0) - \int_0^L \phi_i''' \phi_j' dx$$

mas, de acordo com as condições de contorno:

$$\phi_i'''(L) = 0$$

$$\phi_j(0) = 0$$

Então, finalmente:

$$\int_0^L \phi_i^{iv} \phi_j dx = - \int_0^L \phi_i''' \phi_j' dx \quad (C.3)$$

- segunda integração por partes:

$$\text{O termo a ser integrado por partes agora é: } - \int_0^L \phi_i''' \phi_j' dx$$

Seja:

$$u = \phi_j' \Rightarrow du = \phi_j'' dx$$

$$dv = \phi_i''' dx \Rightarrow v = \phi_i''$$

e:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\text{portanto: } - \int_0^L \phi_i''' \phi_j' dx = - \left[\phi_j' \phi_i'' \Big|_0^L - \int_0^L \phi_i'' \phi_j'' dx \right]$$

ou:

$$-\int_0^L \phi_i''' \phi_j' dx = -\phi_j'(L) \phi_i''(L) - \phi_j'(0) \phi_i''(0) + \int_0^L \phi_i'' \phi_j'' dx$$

mas, de acordo com as condições de contorno:

$$\phi_i''(L) = 0$$

$$\phi_j'(0) = 0$$

Então, finalmente:

$$-\int_0^L \phi_i''' \phi_j' dx = \int_0^L \phi_i'' \phi_j'' dx$$

ou, de acordo com (C.3):

$$\int_0^L \phi_i^{iv} \phi_j dx = \int_0^L \phi_i'' \phi_j'' dx \quad (C.4)$$

ou seja:

$$\phi_i^{iv} \phi_j = \phi_i'' \phi_j'' \quad (C.5)$$

Apêndice D

Trabalhos publicados

Modelagem e Controle de Estruturas Flexíveis - Abordagem Ideal e Não Ideal: Caso Linear Ao DINCON 2004*

Cíntia Prado de Rezende†

EEI - Escola de Engenharia Industrial
Av. Barão do Rio Branco, 882
12242-800, São José dos Campos, SP
E-mail: Cintiasjc@aol.com

André Fenili*, **Luiz Carlos Gadelha de Souza**

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Divisão de Mec. Espacial e Controle)
Av. dos Astronautas, 1758 - 12227-010 São José dos Campos, SP
e Prof. Visitante na UNITAU - Universidade de Taubaté (Depart. de Eng. Mec. e Mecatrônica)
Rua Daniel Danelli s/n (Campus da Juta) - CEP: 12060-440 Taubaté, SP - Brasil
E-mails: fenili@dem.inpe.br, gadelha@dem.inpe.br

José Manoel Balthazar

UNESP - Universidade Estadual Paulista
13500-230 Rio Claro, SP
E-mail: jmbaltha@rc.unesp.br

Resumo: *Este trabalho investiga a dinâmica em malha aberta e em malha fechada de um sistema composto por um atuador (motor dc) e uma estrutura flexível. Para a modelagem matemática da estrutura flexível considera-se curvatura linear. O formalismo Lagrangeano é utilizado para a obtenção das equações governantes do movimento. Duas diferentes abordagens são utilizadas: em uma delas o sistema atuador-estrutura é tratado como sistema ideal e na outra como sistema não ideal. Para cada uma dessas abordagens projeta-se uma malha de controle com o objetivo de amortecer a vibração da estrutura flexível. É utilizado um controlador clássico do tipo PD.*

Palavras-chave: estruturas flexíveis, sistema ideal, sistema não ideal, controle, modelagem, PD.

Introdução

Estruturas flexíveis em movimento de rastreamento (*slewing*) possuem vasta (e crescente) aplicação na indústria e no programa espacial em geral. Uma analogia para o movimento de rastreamento é o de uma porta se movendo em torno de suas dobradiças. A estrutura flexível descrita neste

trabalho é matematicamente modelada utilizando-se a hipótese de curvatura linear. Apesar desta consideração, o sistema completo possui um termo não linear que será inicialmente negligenciado por determinadas razões (baixas velocidades de rastreamento). Duas abordagens serão utilizadas neste trabalho tendo-se em vista a transferência de energia entre o atuador e a estrutura flexível: a abordagem de sistema ideal e a abordagem de sistema não ideal. Na abordagem não ideal, a dinâmica da estrutura pode influenciar o comportamento do atuador, o que não acontece na abordagem ideal, onde apenas o atuador influencia o comportamento da estrutura flexível. O atuador utilizado aqui é um motor de corrente contínua.

Uma vez que o modelo matemático tenha sido definido, este trabalho concentra-se no projeto de uma estratégia de controle para o amortecimento das vibrações da estrutura flexível, utilizando para tal um controlador PD (não colocado). Os ganhos são obtidos e o sistema satisfatoriamente controlado para ambas as abordagens propostas.

*Realização SBMAC, apoio FAPESP, URL:
<http://www.ibiloe.unesp.br/eventos/cnmac/home.htm>

†Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

Algumas simulações numéricas ilustram os resultados de um caso investigado em malha aberta e em malha fechada.

Este estudo é um primeiro passo na investigação de estruturas flexíveis rápidas.

Equações Governantes do Movimento

A abordagem utilizada para a obtenção das equações governantes do movimento consiste na aplicação das equações de Lagrange. Esta formulação trabalha com a energia acumulada em um sistema dinâmico durante a sua evolução no tempo e é invariante com respeito ao sistema de coordenadas utilizado. Adota-se neste trabalho o modelo de viga de Euler-Bernoulli [1].

Seja uma estrutura flexível de rastreamento apresentando curvatura linear (ou seja, o suficiente para provocar apenas deslocamentos transversais dos pontos ao longo da estrutura) e conduzida por um torque aplicado ao eixo de rastreamento. Esta estrutura movimenta-se no plano, conforme mostra a Figura 1.

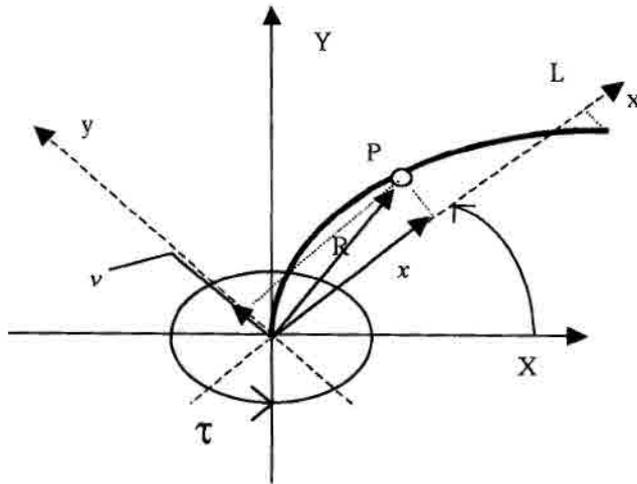


Figura 1 - Estrutura flexível de rastreamento (planar) – curvatura linear

Seja T a energia cinética e V a energia de deformação transversal acumuladas pela estrutura flexível de rastreamento durante uma evolução qualquer no tempo. Assim:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho |\dot{\mathbf{R}}|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2] dx \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (2)$$

onde cada uma das quantidades que aparecem em (1) e (2) estão, de alguma forma, referenciadas na Figura 1. De acordo com (2), a curvatura da estrutura é representada por v'' .

Seja o lagrangiano, L, definido por:

$$L = T - V \quad (3)$$

Utilizando (1) e (2) em (3) obtém-se:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho [\dot{v}^2 + 2vx\dot{\theta} + (x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2] - EI v''^2 \right\} dx \quad (4)$$

Expandindo $v(x,t)$ em (4) através do método dos modos assumidos [2] e [3] obtém-se:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho \left[\left(\sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right) x \dot{\theta} + (x\dot{\theta})^2 + \left(\dot{\theta} \sum_{i=1}^n \phi_i \dot{q}_i \right)^2 \right] \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[-EI \left(\sum_{i=1}^n \phi_i'' q_i \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

Seja a equação de Lagrange definida como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6), onde $q_i = v$, resulta:

$$\int_0^L \left[\rho \left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \phi_i x \ddot{\theta} - \sum_{i=1}^n \phi_i^2 q_i \dot{\theta}^2 \right) + EI \sum_{i=1}^n \phi_i'' \phi_j'' q_i \right] dx = 0 \quad (7)$$

Fazendo [4]:

$$\phi_i'' \phi_j'' = \phi_i^{iv} \phi_j \quad (8)$$

$$\phi_i^{iv}(x) = \frac{w_i^2 \rho A}{EI} \phi_i(x) \quad (9)$$

e substituindo (8) e (9) em (7) obtém-se:

$$\int_0^L \left[\rho \left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \phi_i x \ddot{\theta} - \sum_{i=1}^n \phi_i^2 q_i \dot{\theta}^2 \right) + EI \sum_{i=1}^n \frac{\rho A \omega_i^2}{EI} \phi_i \phi_j q_i \right] dx = 0 \quad (10)$$

Utilizando a propriedade de ortogonalização dos modos, definida como $\int_0^L \phi_i \phi_j dx = 1$ se $i=j$ e

$$\int_0^L \phi_i \phi_j dx = 0 \text{ se } i \neq j, \text{ e integrando (10) de } x=0 \text{ a } x=L,$$

obtem-se a equação governante do movimento discretizada dada por:

$$\ddot{q}_j + \alpha_j \ddot{\theta} - \dot{\theta}^2 q_j + \omega_j^2 q_j = 0 \quad (11)$$

onde: $\alpha_j = \int_0^L x \phi_j dx$.

Modelagem de um Motor de Corrente Contínua Ideal e Não Ideal

O balanço de tensão elétrica em um motor de corrente contínua controlado por armadura é dado, de acordo com a Lei de Kirchoff, por:

$$L_m \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \dot{\theta}_{motor} = U \quad (12)$$

onde U representa a tensão de armadura (tensão aplicada aos terminais do motor); R_a representa a resistência da armadura; i_a representa a corrente de armadura; L_m representa a indutância do motor; K_b representa a constante de força contra-eletromotriz e θ_{motor} representa a posição angular do motor.

A somatória dos torques em relação ao eixo do motor fornece a equação mecânica do motor de corrente contínua controlado por armadura, dada por:

$$\tau_m = K_t i_a - c_m \dot{\theta}_{motor} - I_{motor} \ddot{\theta}_{motor} \quad (13)$$

onde I_{motor} representa a inércia do motor; c_m representa o atrito interno ao motor; τ_m representa o

torque aplicado à transmissão mecânica (caso haja) entre o atuador e a estrutura a ser movida ou diretamente à estrutura a ser movida e K_t representa a constante de torque do motor.

O deslocamento angular do eixo do motor e o torque aplicado pelo mesmo eixo à transmissão mecânica entre o motor e a carga a ser movida relacionam-se ao deslocamento angular da estrutura sobre a qual o motor está atuando e ao torque aplicado à mesma por:

$$\theta_{motor} = N_g \theta \quad (14)$$

$$\tau = N_g \tau_m \quad (15)$$

aonde τ representa o torque aplicado pelo motor de corrente contínua à estrutura a ser movida, θ representa o deslocamento angular desta estrutura e N_g representa a relação de transmissão entre o motor e a estrutura. Portanto, em relação aos parâmetros da estrutura a ser movida, as Equações (12) e (13) podem ser reescritas como:

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (16)$$

$$I_{motor} N_g^2 \ddot{\theta} + c_m N_g^2 \dot{\theta} - N_g K_t i_a + \tau = 0 \quad (17)$$

A opção por uma abordagem de sistema dinâmico ideal ou por uma abordagem de sistema dinâmico não ideal [4] e [5] está vinculada à maneira pela qual o acoplamento atuador-estrutura for considerado. Na Equação (17), portanto, dependerá de considerações feitas em relação ao torque τ .

Seja o esquema representativo do eixo do motor e seu acoplamento a estrutura flexível de rastreamento sob análise conforme representado na Figura 2 [4].

Se o eixo em questão for suficientemente curto, poder-se-á considerá-lo rígido. Assim, o torque total, τ , atuando sobre a estrutura flexível pode ser escrito como:

$$\tau = -M + I_{eixo} \ddot{\theta} \quad (18)$$

onde o parâmetro M representa o momento de flexão da viga atuando sobre o eixo do motor.

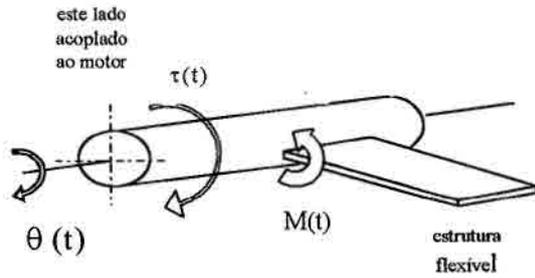


Figura 2 - Acoplamento atuador-estrutura flexível de rastreamento (Fenili, 2000)

Desta forma, a Equação (17) pode ser reescrita como:

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - M = 0 \quad (19)$$

O momento M pode ser representado, para o modelo de curvatura linear [1] e [6], como:

$$M = EI v'' \quad (20)$$

Utilizando novamente a expansão para v , pode-se reescrever (19) como:

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - EI \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i''(0) = 0 \quad (21)$$

Sistema Ideal e Sistema Não Ideal

Adicionando a Equação (11) às equações do motor dadas por (16) e (21) e acrescentando o termo de amortecimento $\mu \dot{q}_j$ em (13), as equações governantes do movimento para a estrutura flexível de rastreamento considerando fonte de potência ideal ($\beta=0$) e considerando fonte de potência não ideal ($\beta=1$) tornam-se:

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + K_b N_g \dot{\theta} = U \quad (22)$$

$$(I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2) \ddot{\theta} + (c_m N_g^2) \dot{\theta} - (N_g K_t) i_a - \beta \left(EI \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i''(0) \right) = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{q}_j + \mu \dot{q}_j + w_j^2 q_j + \alpha_j \ddot{\theta} - \hat{\theta}^2 q_j = 0 \quad (24)$$

mais as condições de contorno $\phi''(L,t)=0$, $\phi'''(L,t)=0$ e as condições iniciais $i_a(0)=0$, $\theta(0)=0$ e $\dot{\theta}(0)=0$.

Neste trabalho será considerado apenas um modo na expansão para v .

Controle PD de uma Estrutura Flexível de Rastreamento (Linear)

Um método denominado imposição de pólos ou técnica de atribuição de pólos. Admite-se que todas as variáveis de estado sejam mensuráveis e estão disponíveis para realimentação. Uma nova localização dos pólos será proposta para o sistema em malha fechada e os ganhos necessários para que esta nova posição seja atingida serão determinados. Embora o sistema linear seja inicialmente estável, pretende-se fazer com que a vibração da viga se extinga o mais rápido possível (apresente um amortecimento maior).

Escrevendo as equações diferenciais ordinárias governantes do movimento (22 a 24) na forma de estado, considerando baixas velocidades de rastreamento (o termo não linear associado à rigidez centrípeta é negligenciado) e escrevendo o sistema resultante de equações na forma matricial, obtém-se:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (25)$$

onde:

$$x = \{x_1 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6\}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_m} & 0 & -\frac{K_b N_g}{L_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{N_g K_t}{I} & 0 & -\frac{c_m N_g^2}{I} & \frac{\beta EI \phi_1''(0)}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_1 N_g K_t}{I} & 0 & \frac{\alpha_1 c_m N_g^2}{I} & -\frac{\alpha_1 \beta EI \phi_1''(0)}{I} - w_1^2 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$I = I_{\text{eixo}} + I_{\text{motor}} N_g^2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Seja o esquema de controle de retroação de estado [7] dado por:

$$u = -K_1 x \quad (26)$$

onde K_1 é a matriz dos ganhos a ser determinada, x é o vetor de estado e $u=U$. Este tipo de estratégia de controle é denominado controle proporcional mais derivativo.

O teste de controlabilidade:

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \end{bmatrix} \quad (27)$$

garante que o sistema é a estados completamente controláveis.

A equação característica do sistema em malha aberta é dada por:

$$|sI-A| = s^5 + a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 + a_4s + a_5 = 0 \quad (28)$$

A localização dos pólos desejados em malha fechada foi determinada modificando (aumentando) a parte real de um par conjugado (encontrado para o caso em estudo e de acordo com os valores apresentados na Tabela 1), mantendo os demais pólos idênticos àqueles obtidos em malha aberta. A equação característica em malha fechada é dada por:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) = s_5 + \alpha_1s^4 + \alpha_2s^3 + \alpha_3s^2 + \alpha_4s + \alpha_5 \quad (29)$$

Os pólos desejados são dados por: $\mu_1 = 0.0000$, $\mu_2 = -0.5000 + 3.7322i$, $\mu_3 = -0.5000 - 3.7322i$, $\mu_4 = -60.897$ e $\mu_5 = -603.1560$.

A determinação da matriz de ganho de retroação de estado, K , será dada por:

$$K = [\alpha_5 - a_5 \mid \alpha_4 - a_4 \mid \alpha_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1} \quad (30)$$

onde a matriz T é dada por:

$$T = MW \quad (31)$$

a matriz M é dada pela Equação (27) e a matriz W é dada por:

$$W = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Assim, a matriz de ganho de retroação (novamente utilizando os dados da tabela 1) é dada por:

$$K = [-0.00303 \quad 0 \quad 0.003961 \quad -0.244 \quad 0.0004073] \quad (33)$$

Por conseguinte, o sinal de controle u (a ser substituído em (25)) é dado por:

$$u = 0.00303x_1 - 0.003961x_3 + 0.244x_4 - 0.0004073x_5 \quad (34)$$

Simulações Numéricas

Os parâmetros do sistema são apresentados na Tabela 1.

Motor DC			Viga (seção reta 0.0150m x 0.0005m)		
C_m	0.0046290	$\frac{Nm \cdot s}{rad}$	L	1.2000	m
K_t	0.0528140	$\frac{Nm}{A}$	μ	0.100	$\frac{kg}{ms}$
K_b	0.0528140	$\frac{Vs}{rad}$	E	$0.7000 \cdot 10^{11}$	$\frac{N}{m^2}$
L_m	0.003100	H	I	$1.5625 \cdot 10^{-13}$	m^4
R_a	1.9149520	Ω	ρ	2700.0000	$\frac{kg}{m^3}$
I_{motor}	0.0000654	$\frac{kg}{m^2}$	w_1	11.3097	rad/s
			$\phi_1^*(0)$	4.8984	
			$\alpha^1 = \int_{x_1}^x \alpha_1 dx$	0.8210	

Tabela 1 - Parâmetros do sistema

As simulações numéricas foram realizadas utilizando-se os parâmetros da Tabela 1. O controle é

acionado assim que a estrutura flexível atingir o seu destino (uma posição angular desejada). As Figuras (4) a (9) e (11) a (16) ilustram o deslocamento angular, velocidade angular e a deflexão da viga, comparando os sistemas com e sem controle para diferentes velocidades angulares (diferentes tensões aplicadas ao motor, conforme figuras (3) e (10)) para o sistema ideal e para o sistema não ideal.

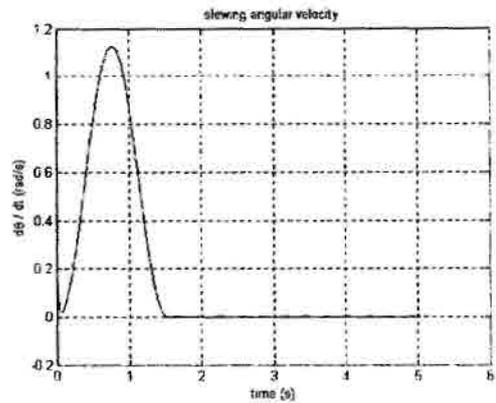


Figura 5 – Sistema Ideal/Velocidade angular para U=0.25V

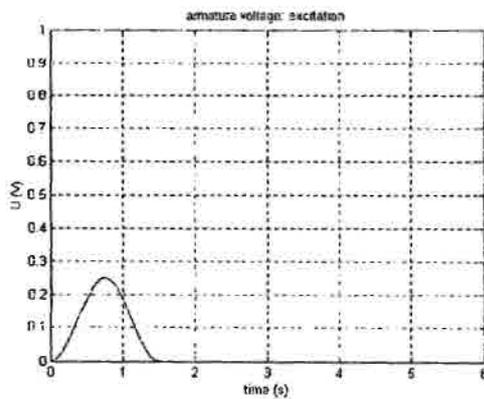


Figura 3 – Tensão de excitação U=0.25V

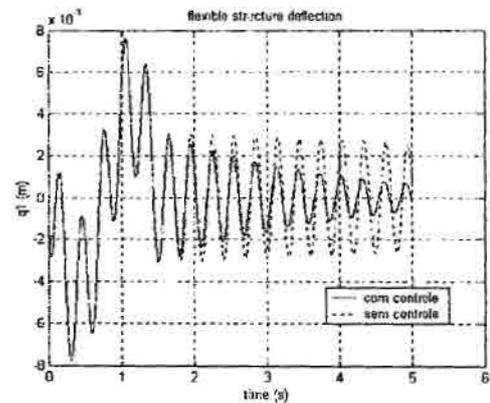


Figura 6 – Sistema Ideal/Deflexão da viga para U=0.25V

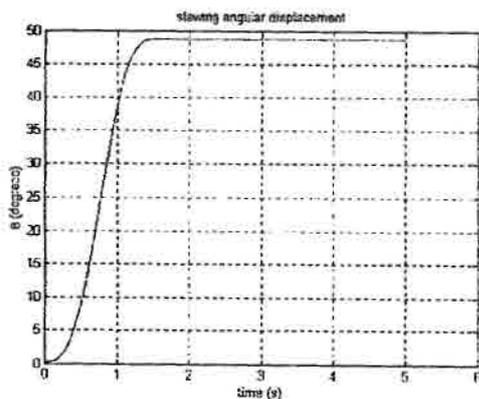


Figura 4 – Sistema Ideal/Deslocamento angular para U=0.25V

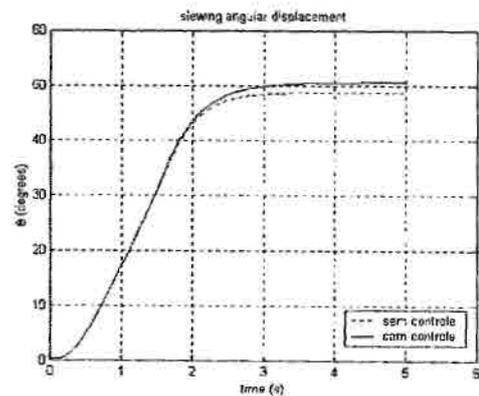


Figura 7 – Sistema Não Ideal/Deslocamento angular p/ U=0.25V

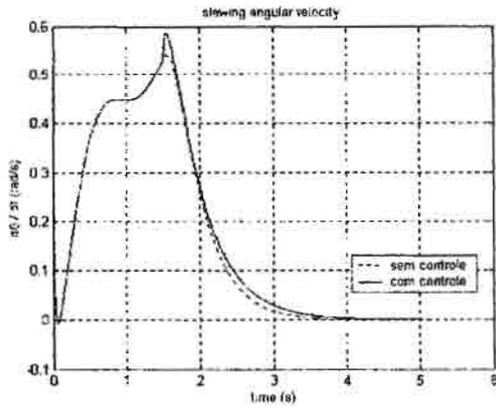


Figura 8 – Sistema Não Ideal/Velocidade angular para U=0.25V

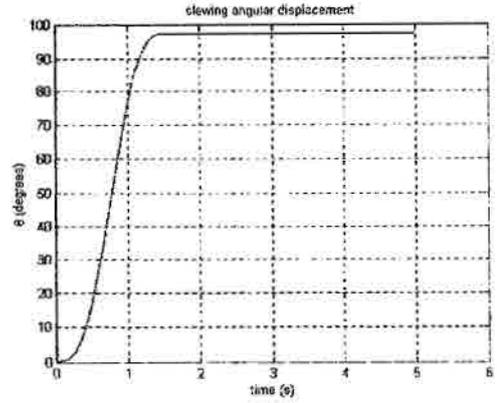


Figura 11 – Sistema Ideal/Deslocamento angular para U=0.5V

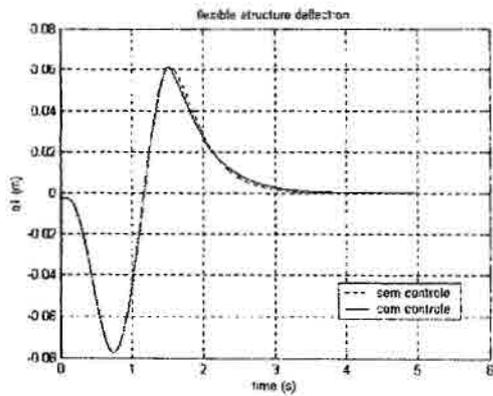


Figura 9 – Sistema Não Ideal/Deflexão da viga para U=0.25V

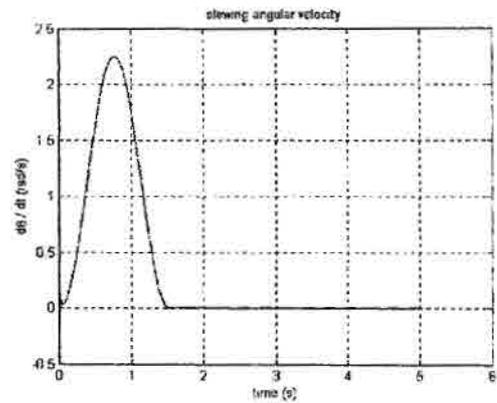


Figura 12 – Sistema Ideal/Velocidade angular para U=0.5V

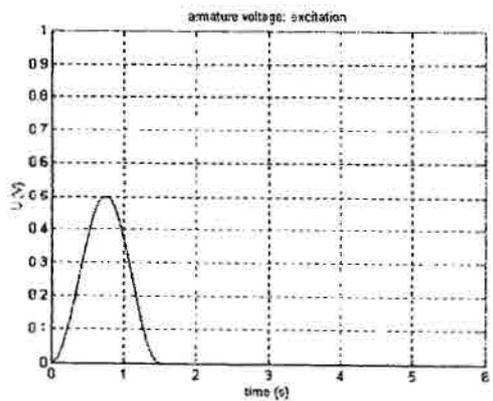


Figura 10 – Tensão de excitação U=0.5V

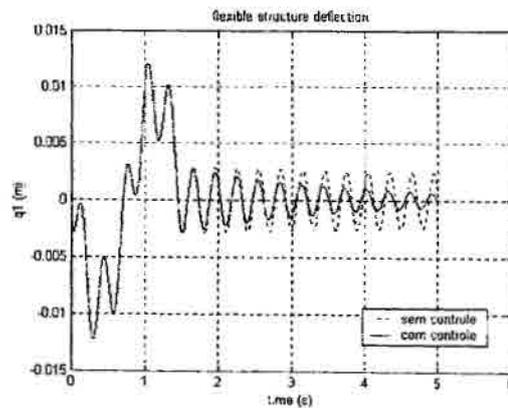


Figura 13 – Sistema Ideal/Deflexão da viga para U=0.5V

