Análise de sinais turbulentos na copa da floresta amazônica: em busca de caos e estruturas coerentes

Andriana Susana L. O. Campanharo[1] Fernando Manuel Ramos[2] Elbert E. N. Macau[2]
[1]*Programa de Pós-graduação em Computação Aplicada - CAP*
[2]*Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LAC*
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
andriana@lac.inpe.br fernando@lac.inpe.br elbert@lac.inpe.br

Resumo

A possível natureza caótica da turbulência na camada limite atmosférica, no interior e acima da copa da floresta é investigada. Em particular, este trabalho considera dados de temperatura de alta resolução, coletados em três diferentes elevações na Floresta Amazônica, Rondônia, Brasil. O objetivo é determinar se as séries temporais incluem componentes que podem ser descritas (individualmente) por um conjunto de equações diferenciais não-lineares. Análises sugerem que de fato existe em uma das séries temporais uma componente com características de dinâmica caótica (determinísticas) que se desenvolve em um atrator estranho cuja dimensão é aproximadamente 3.4*. Esses resultados suportam a existência de um atrator caótico de baixa dimensão na atmosfera.*

Palavras Chaves: atrator estranho, caos, dimensão de correlação, expoentes de Lyapunov, turbulência.

1. Introdução

A turbulência, durante o último século, tem sido considerada um dos problemas mais intratáveis da Física Clássica. Diversos modelos propostos ao longo do tempo, que incluem aqueles introduzidos por Kolmogorov e Landau têm deixado a desejar na descrição, explicação e predição do movimento turbulento [11]. Novos modelos para o problema têm surgido recentemente, influenciados pelo advento da teoria do caos, em particular através da caracterização via "atratores estranhos" [12].

A idéia de caos tem sido investigada desde o trabalho de Poincaré sobre a estabilidade de equações diferenciais não-lineares [5]. Recentemente, o avanço da tecnologia dos computadores e da matemática tem permitido melhor compreender o fenômeno não-linear caótico, levando à melhores visualizações de suas soluções e à compreensão de sua dinâmica.

Merece destaque especial o trabalho pioneiro empreendido por Edward Lorenz sobre um conjunto de equações não-lineares determinísticas (uma forma truncada das equações de Navier Stokes) em um modelo de convecção térmica na atmosfera [8]. Em tal trabalho ficam claras as diferenças existentes entre sistemas lineares e não-lineares, além de mostrar que comportamentos complexos podem ser obtidos de equações determinísticas não-lineares de baixa dimensão.

Equações diferenciais não-lineares podem ser estudadas seguindo a evolução de condições iniciais arbitrárias. Em um tempo fixo, as coordenadas resultantes definem um ponto no espaço de fase do sistema. Quando o tempo passa, elas definem uma trajetória (órbita) nesse mesmo espaço. O mais simples dos comportamentos resultantes é quando todas as trajetórias convergem para um único ponto fixo. Neste caso, todas as trajetórias são "atraídas" para o único estado de equilíbrio, independente das condições iniciais.

Quando o sistema de equações em estudo (com dimensão maior que 2) se contrae, ou seja, quando o volume de conjuntos iniciais arbitrários decresce à medida que o tempo passa, comportamentos mais sofisticados podem ser observados. Para esses sistemas, conhecidos como dissipativos, as trajetórias no espaço de fase podem tender para um comportamento aperiódico e irregular, e se mantêm confinadas dentro de uma região do espaço. Neste caso, a figura geométrica que surge no espaço de fase é denominada de atrator estranho. Esses objetos levam esse nome devido a sua natureza fractal que os fazem parecerem similares quando visualizados em diferentes escalas. Quando tais atratores existem, sensibilidades às variações nas condições iniciais são tipicamente observadas. Duas trajetórias que se iniciam muito próximas uma da outra no espaço de fase, afastam-se em média exponencialmente uma da outra. Esta sensibilidade às variações nas condições iniciais é uma característica de um movimento caótico.

Diferentes tipos de fluxos turbulentos têm apresentado comportamento caótico, com um atrator estranho presente em um espaço de fase de baixa dimensão (com poucas coordenadas): (i) fluxo de Couette-Taylor [1], (ii) convecção de Rayleigh-Benard [7], (iii) fluxo turbulento em tubos [13], etc.

2. Reconstrução do espaço de fase de séries temporais experimentais

Em diversos sistemas experimentais, é impossível ter-se acesso a todo o conjunto de variáveis de estado a fim de se ter o atrator. Porém, de acordo com o teorema de Takens, o atrator referente a um sistema dinâmico pode ser reconstruído à partir da medida de uma única variável de estado. Ou seja, é possível definir um espaço de fase que capture a dinâmica do sistema em uma estrutura geométrica imersa nesse espaço [15]. O conjunto geométrico imerso é chamado de *atrator reconstruído* e ele é topologicamente equivalente ao atrator que seria produzido pela evolução do sistema dinâmico de equações, caso suas equações fossem conhecidas. Em particular, a dimensão e os expoentes de Lyapunov são aproximadamente os mesmos tanto para o atrator original como para o atrator reconstruído.

Um método utilizado freqüentemente é o método das *coordenadas de atraso temporal* [16], onde cada ponto no espaço de fase é uma *n*-tupla de consecutivos valores de uma série: $(X(t), X(t+\tau), X(t+2\tau), ..., X(t+(m-1)\tau))$. O tempo τ é algum múltiplo do espaçamento Δt entre os pontos da série temporal. Os atratores obtidos desta maneira são chamados *atratores reconstruídos*. A qualidade do atrator reconstruído é bastante sensível ao valor escolhido para o tempo de atraso. Por qualidade do atrator entende-se quão similar o atrator reconstruído é do atrator original.

De forma geral, considerando a série temporal $X(t_1), X(t_2), ...$, sucessivos pontos no espaço de fase formados pelas coordenadas de atraso temporal podem ser escritos como vetores $\overrightarrow{v_i}$:

$$\begin{cases} v_1 = (X(t_1), X(t_1+\tau), ..., X(t_1+(m-1)\tau)) \\ v_2 = (X(t_2), X(t_2+\tau), ..., X(t_2+(m-1)\tau)), \\ \vdots \\ v_j = (X(t_j), X(t_j+\tau), ..., X(t_j+(m-1)\tau)) \end{cases} \tag{1}$$

2.1. Escolhendo o tempo de atraso τ

A reconstrução do atrator com coordenadas de atraso temporal não é um processo automático. A escolha de um atraso apropriado τ é importante para o sucesso da recontrução. Para um número infinito de pontos livres de ruído, não há nenhuma restrição para a escolha do tempo de atraso [15]. Obviamente, para um conjunto finito de dados, τ não pode ser escolhido arbitrariamente. Se τ é muito pequeno, as coordenadas $X(t_j), X(t_j+\tau), X(t_j+2\tau), ...$ de um dado vetor $\overrightarrow{v_i}$ são quase iguais umas as outras. A inclinação de cada vetor no espaço de coordenadas de atraso se encontrará próxima da diagonal, e a recontrução será inútil. Se τ é muito grande, as coordenadas estão muito distantes uma da outra e conseqüentemente a correlação entre elas é muito baixa. Dobras e esticamentos significantes ocorrem e desta forma não há uma relação de causa entre os dados usados para formar as coordenadas de um ponto no espaço de fase.

Uma simples aproximação, para a escolha de τ, é examinar a correlação entre os pares de pontos como uma função de seu tempo de separação. A função de autocorrelação é definida por

$$C(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-\tau} \left(X_i - \overline{X}\right)\left(X_{i+\tau} - \overline{X}\right) \tag{2}$$

onde N é o número de pontos da série e $\overline{X}$ sua média. Após determinar o tempo do primeiro "zero" desta função, uma modesta fração deste valor é uma escolha razoável para o atraso τ.

Um gráfico de $X_{t+\tau}$ versus X_t (mapa de primeiro retorno) pode também ser útil na decisão do tempo de atraso ideal. Em muitos sistemas de baixa dimensão, os pontos no mapa de primeiro retorno estão localizados próximos à diagonal para pequenos valores de τ, e começam a se dispersar com o incremento de τ, indicando que as correlações decresceram. O valor do tempo de atraso onde esta trasição ocorre fornece uma estimativa razoável do tempo de atraso a ser utilizado no procedimento de imersão.

2.2. Medindo caos

2.2.1. O espectro de potência

Visto que o movimento de um sinal caótico é não-periódico, seu espectro de potência (a transformada de Fourier da sua função de auto correlação) não exibe picos definidos. Ao invés disso, ele produz tipicamente uma função banda-larga, que em geral mostra um decaimento exponencial com a frequência [14].

2.2.2. Dimensões generalizadas

Um atrator estranho tem uma estrutura fractal no espaço de fase. Conseqüentemente, sua dimensão fractal é uma das medidas básicas usadas para descrevê-lo. Esta dimensão fractal determina o número de graus de liberdade do fenômeno, ou seja, a parte inteira desta dimensão mais um é a mínima dimensão de imersão. Desta forma, o valor desta dimensão coincide com o número de equações diferenciais necessárias para descrever o movimento.

Para uma dimensão de imersão fixa, a série temporal de vetores $\overrightarrow{v_i}$ em um espaço de imersão é usado para calcular a correlação integral proposta por Grassberger e Procaccia [4]:

$$C(r, M) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1, i\neq j} H\left(r - |\overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_j}|\right), \tag{3}$$

onde M é o número de pontos no atrator, $H(x)$ é uma função de Heavyside e $|\overrightarrow{y}|$ indica a distância medida no espaço de imersão. A correlação integral (3) conta a

frequência relativa de pares cuja separação é menor que a escala r. A dimensão de correlação é então definida como

$$D_c = \lim_{r \to 0} \lim_{M \to \infty} \frac{\log C(r, M)}{\log r} \tag{4}$$

Na prática, para um conjunto finito de dados com resolução temporal discreta e finita exatidão, o limite em (4) pode não ser rigorosamente alcançado. Porém, em um gráfico de $\log C(r, M)$ versus $\log r$, uma parte linear aparece para valores intermediários de r. Sua inclinação fornece uma estimativa da dimensão de correlação [17].

A dimensão de correlação D_c é uma das principais ferramentas usadas para idenficar a existência de dinâmica caótica. Todos os procedimentos considerados na literatura encontram-se sobre gráficos em escalas $\log$-$\log$ entre dois pontos da função de correlação $C(r, M)$ versus a distância r.

Caos determinístico, em geral, é identificado se a inclinação de $C(r, M)$ versus r converge para um valor de saturação, em valores cada vez mais altos da dimensão de imersão m [4]. Em sinais caóticos determinísticos, a inclinação D_c alcança um valor máximo devido a natureza de baixa dimensão do sistema. Como explicado anteriormente, a dimensão de saturação obtida, sendo menor que a dimensão fractal do atrator, é um limite inferior do número de equações diferenciais ordinárias que podem ser escritas para descrever os dados [5].

Embora processos estocásticos com lei de potência no espectro, da forma $S(w) \approx w^{-\alpha}$, levem a uma saturação na dimensão de correlação conforme a relação $D_c = 2/(\alpha - 1)$ [9], em geral, a inclinação de $C(r, M)$ versus r aumenta continuamente para processos estocásticos, quando a dimensão de imersão m é incrementada [4]. Isto acontece quando as coordenadas do espaço de fase são totalmente aleatórias, como o ruído branco.

2.2.3. Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov contêm informações sobre a taxa média com que as trajetórias exponencialmente divergem ou convergem dentro do atrator. Eles estão relacionados às direções de expansão ou contração no espaço de fase [18]. Um sistema caótico é caracterizado por uma divergência exponencial de condições iniciais próximas, o que implica em pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. A magnitude do maior expoente positivo (caso exista) reflete a escala temporal sobre a qual o sistema dinâmico torna-se imprevisível [5]. A estimativa dos expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico dissipativo m-dimensional requer que se acompanhe a evolução de uma esfera infinitesimal m-dimensional de condições iniciais. Com o passar do tempo, a esfera evolui para a forma de um elipsóide. Os expoentes de Lyapunov são definidos tomando o eixo principal do elipsóide. Especificamente, o i-ésimo maior expoente λ_i é definido em termos da taxa de crescimento do i-ésimo maior eixo principal, P_i:

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log_2 \left[\frac{P_i(t)}{P_i(0)} \right] \tag{5}$$

Diversos métodos têm sido propostos para estimar esses expoentes em séries temporais experimentais. Entre eles, o método de Wolf e Vastano [18], o método de Eckmann, Ruelle e Ciliberto [2], etc. O método proposto por Wolf e Vastano é o primeiro que segue a separação dinâmica entre pares de pontos próximos sobre o atrator.

Basicamente, este método calcula a divergência média de órbitas inicialmente muito próximas sobre o atrator, considerando muitos pontos ao longo da trajetória. O algoritmo inicia por considerar ao mesmo tempo uma trajetória sobre o atrator e um ponto próximo sobre uma trajetória vizinha. Desta forma, ele mede a taxa de divergência em relação às duas trajetórias envolvidas. Quando a distância entre essas trajetórias torna-se muito grande, o algoritmo olha para uma nova trajetória vizinha e define uma nova e pequena separação. O procedimento é realizado em diferentes regiões do atrator, e o maior expoente de Lyapunov é estimado através da equação:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^{N} \frac{P_i(t_k)}{P_i(t_{k-1})} \tag{6}$$

onde N é o número total de vezes que um novo vizinho foi escolhido próximo à trajetória fiducial.

3. Análise experimental

3.1. Descrição dos experimentos

Os dados utilizados foram coletados em um sítio experimental localizado no estado de Rondônia, Brasil, na Reserva Biológica do Jaru, uma área florestal densa com 270 hectares. Medidas de resposta rápida da velocidade do vento, em três direções ortogonais, e medidas de temperatura foram amostradas a 60 Hz em períodos de 30 minutos, com o auxílio de anemômetros e termômetros. Os dados foram coletados durante uma campanha micrometeorológica intensiva, a saber WETAMC (Campanha de Mesoescala Atmosférica na Estação Úmida), que é parte do projeto LBA (Experimento de Grande Escala de Interação Biosfera-Atmosfera na Amazônia). O experimento foi realizado durante os meses de janeiro a março de 1999. O projeto LBA, é uma iniciativa internacional liderada pelo Brasil, que visa compreender o funcionamento climatológico, ecológico, biogeoquímico e hidrológico da Amazônia. Este projeto investiga o impacto das mudanças no uso da terra, especialmente o desflorestamento, e desta forma analisa as interações entre a Amazônia e a atmosfera.

As medidas foram feitas com o auxílio de uma torre micrometeorológica de 66 m de altura, simultanemante em três diferentes alturas: Nível Superior (66 m - acima da copa); Nível Médio (45 m - no topo da copa); e Nível

Inferior (21 m - abaixo da copa). Dois períodos de medidas distintos foram selecionados: às 12 horas, quando a copa da floresta é aquecida pelo sol e o topo da copa é mais quente que os arredores, e assim a região acima da copa é instável; e às 23 horas, quando as condições são opostas, e a região acima da copa é estável [10].

3.2. Procurando por caos na camada limite atmosférica

Conforme a Seção 2, o espectro de potência, a função de correlação integral, e o maior expoente de Lyapunov fornecem uma orientação para verificar a existência de uma dinâmica caótica em séries temporais experimentais. Tais ferramentas serão aplicadas, em particular, à série temporal de temperatura medida no nível superior da copa às 12 horas.

Primeiramente, tal série temporal foi decomposta em todas as possíveis freqüências por meio da filtragem com Wavelet de Haar [6]. A Wavelet de Haar é utilizada para detectar variações bruscas nos sinais, ou seja, um aspecto de localização no espaço físico. Por ser discreta, esta categoria de ondeletas trabalha com sinais temporais que tenham comprimentos da ordem da potência de dois mais próxima, ou seja, $2^f = s$, onde s é o comprimento total da série, e f é o número de freqüências possíveis para a decomposição. Ainda não há na literatura um consenso de qual seja a melhor função ondeleta a ser utilizada para a decomposição e filtragem de uma série temporal. O que comumente se aceita é que a função ondeleta possua um formato característico próximo das características encontradas na série temporal. Isso explica o fato da Wavelet de Haar ter sido escolhida para a decomposição da série temporal de temperatura.

A Figura 1 mostra a série temporal total, a série temporal coerente (soma das baixas freqüências da série total) e a série temporal incoerente (soma das altas freqüências da série total), respectivamente.

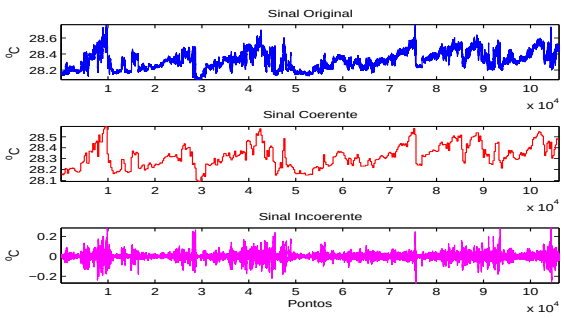

Figura 1: Sinal original (superior), soma das nove primeiras freqüências (meio), soma das sete últimas freqüências (inferior)

Pode-se observar que a decomposição nas últimas freqüências corresponde a baixos períodos de oscilação do sinal original. Também, devido a forma da ondeleta de Haar, percebe-se que estas oscilações de baixos períodos tornam-se retangulares. Este procedimento de decomposição, disponível através da Transformada em Ondeletas Discretas, permite estudar características particulares de cada freqüência, ou seja, estudar fenômenos que ocorrem somente em determinadas freqüências. Desta forma, este trabalho busca a caracterização de uma dinâmica caótica nas mais baixas freqüências do sinal, como também caracterizar turbulência em suas mais altas freqüências.

Em seguida os espectros de potência das séries temporais total, coerente e incoerente foram estimados usando a Tranformada Rápida de Fourier (FFT). Resultados mostram que a inclinação desses espectros em escala log-log coincidem com a lei $-5/3$ de Kolmogorov em todas as séries. Isto leva a conclusão de que o fenômeno da turbulência está presente em todas as escalas (freqüências) da série temporal. Além disso, a série temporal incoerente mostra uma inclinação adicional em escala log-log de aproximadamente 2.7, o que confirma a presença de ruído em algumas de suas escalas (freqüências). Este comportamento é consistente com outros estudos em fluxos turbulentos [3].

A Figura 2 apresenta os espectros de potência para cada uma das séries. Como todos os espectros não exibem nenhuma freqüência dominante, o comportamento caótico nas séries (em particular, na série coerente) não pode ser excluído de análises posteriores.

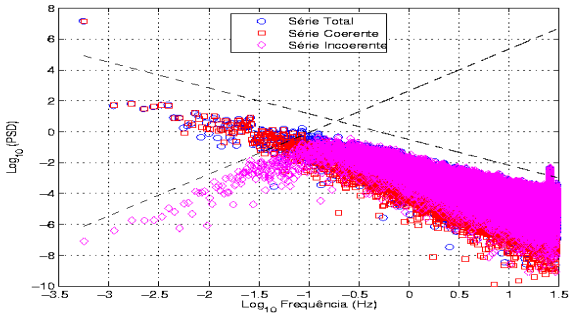

Figura 2: Espectro de potência da série temporal total, da série temporal coerente e da série temporal incoerente

O tempo de atraso τ foi estimado a partir da Equação 2. A Figura 3 mostra a função de autocorrelação para as séries temporais total, coerente e incoerente, respectivamente. O primeiro zero desta função para série total corresponde a $\tau = 7391 \approx 123s$, para a série coerente corresponde a $\tau = 8057 \approx 134s$, e para a série incoerente corresponde a $\tau = 70 \approx 1s$. Desta forma, o valor de τ correspondente à 10% do valor da função de autocorrelação é uma escolha razoável para o atraso em cada uma das séries.

As Figuras 4, 5 e 6 apresentam os mapas de primeiro retorno para as séries total, coerente e incoerente, respectivamente. Os valores escolhidos para τ em cada uma dessas séries correspondem à frações dos valores deste parâmetro já estimados através da função de autocorrelação. Pode-se observar em todas as séries que

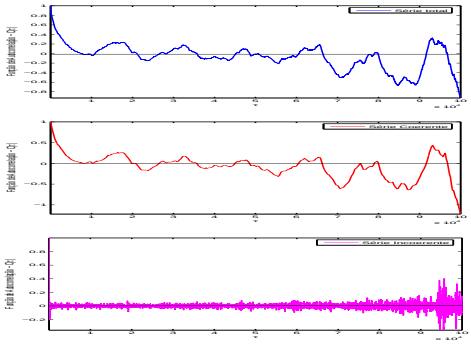

Figura 3: Função de autocorrelação das séries temporais.

para o valor de $\tau = 1$ os pontos estão muito próximos da diagonal, enquanto que para o valor de τ correspondente à 100% do valor do primeiro zero da função de autocorrelação, os pontos estão muito dispersos. Desta forma, o valor de τ que corresponde à 10% do valor do primeiro zero da função de autocorrelação confirma a escolha feita para o atraso em todas as séries.

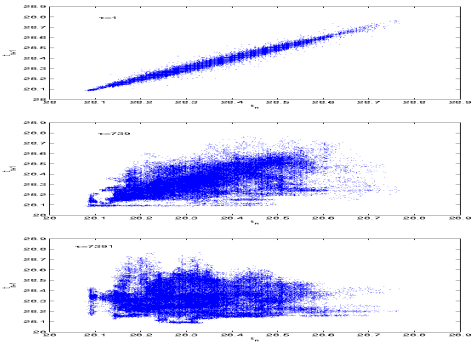

Figura 4: Mapas de primeiro retorno com diferentes valores de τ para a série total.

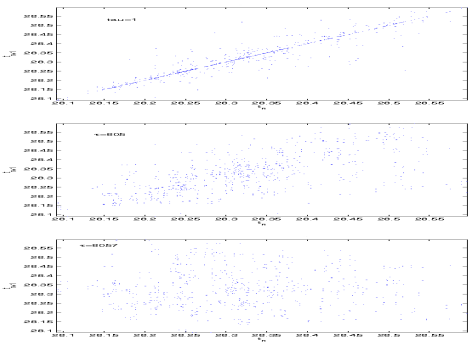

Figura 5: Mapas de primeiro retorno com diferentes valores de τ para a série coerente.

As reconstruções dos espaços de fase, a partir de cada uma das séries foram realizadas utilizando a Equação 1. Desta forma, o cálculo da função de correlação integral entre os pares de pontos é feito com base no algoritmo desenvolvido por Grassberger e Procaccia [4]. As dimensões de imersão usadas para as pseudo-fases variam

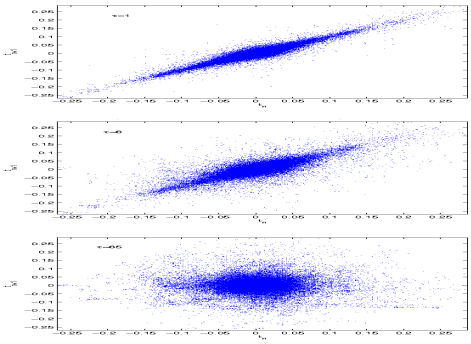

Figura 6: Mapas de primeiro retorno com diferentes valores de τ para a série incoerente.

de 1 a 15.

As Figuras 7, 8 e 9 mostram as correlações integrais das séries temporais total, coerente e incoerente versus a escala r em diferentes dimensões de imersão. Pode-se observar que cada uma destas curvas possue seções lineares cujos valores das inclinações, calculados via regressão linear, saturam ou não quando as dimensões de imersão são incrementadas. Estes valores de inclinações em função das dimensões de imersão (dimensão de correlação) podem ser vistos através da Figura 10 para cada uma das séries em estudo. Nesta figura pode ser observada também a dimensão de correlação obtida de um processo puramente estocástico. Tanto para a série total quanto para a série coerente a dimensão de correlação satura em $D_c = 3.7$ e $D_c = 3.4$, respectivamente com o incremento da dimensão de imersão. Este fato indica a existência de um atrator de baixa dimensão, e caos determinístico, cuja confirmação necessita ainda de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

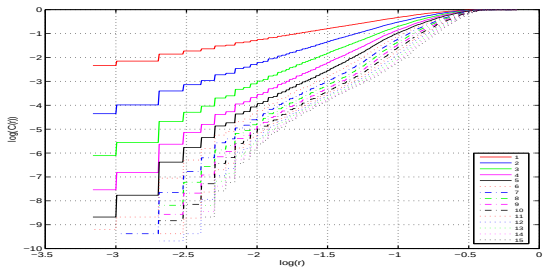

Figura 7: Função de correlação integral para a série total.

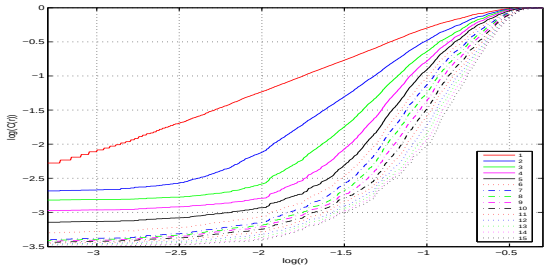

Figura 8: Função de correlação integral para a série coerente.

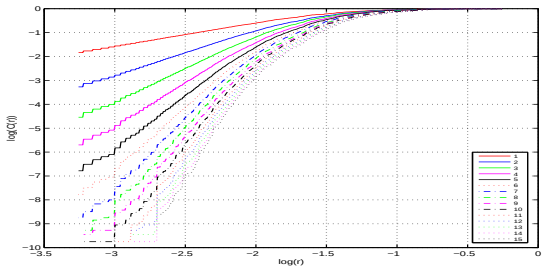

Figura 9: Função de correlação integral para a série incoerente

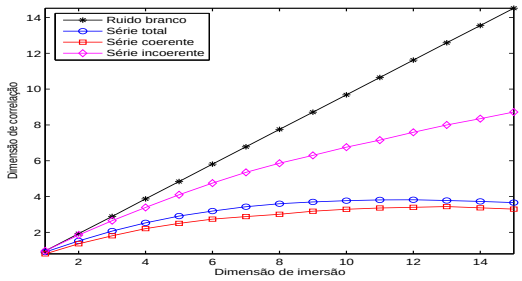

Figura 10: Dimensão de correlação das séries total, coerente e incoerente, respectivamente. Asteriscos representam um sinal puramente aleatório.

4. Conclusões

Um atrator de baixa dimensão, cuja dimensão de correlação é igual a $D_c = 3.4$ foi identificado na camada limite atmosférica acima da copa da Floresta Amazônica. Este valor é consistente com o trabalhos realizados por Xin, Fei e Gang [19] que utilizaram dados de temperatura e velocidade do vento medidos em Beijing, China. A dinâmica caótica precisa ainda ser confirmada, para o campo turbulento, através do cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Referências

[1] A. Brandstater, J. Swift, H. L. Sweeney, and A. Wolf. Low dimensional chaos in a hydrodynamic system. *Physical Review Letters*, 51:1442–1444, 1983.

[2] J. P. Eckmann, D. Ruelle, and S. Ciliberto. Lyapunov exponents from time series. *Physical Review A*, 34(6), 1986.

[3] M. Farge, G. Pellegrino, and K. Schneider. Coherent vortex extraction in 3d turbulent flows using orthogonal wavelets. *Physical Review Letters*, 87:054501, 2001.

[4] P. Grassberger and I. Procaccia. Characterization of strange attractors. *Physical Review Letters*, 50, 1983.

[5] G. P. Jaramillo and C. E. Puente. Strange attractors in atmospheric boundary-layer turbulence. *Bundary-Layer Meteorology*, 64:175–197, 1993.

[6] G. Katul, J. D. Albertson, C. R. Chu, and M. B. Parlange. *Intermittency in atmospheric surface layer turbulence: the orthonormal wavelet representation*. Wavelets in Geophysics, (Foufoula-Georgiou, E. and Kumar, P.), Academic Press, San Diego, 1994. pp. 81-105.

[7] A. Libchaber. From chaos to turbulence in benard convection. In *Proceedings, Series A - Mathematical and Physical Sciences*, volume 413. Royal Society (London), 1987.

[8] E. N. Lorenz. Deterministic non-periodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20:130–41, 1963.

[9] A. R. Osborne and A. Provenzale. Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra. *Physica D*, 35:357–381, 1989.

[10] F. M. Ramos, M. J. A. Bolzan, L. D. A. Sá, and R. R. Rosa. Atmospheric turbulence within and above an amazon forest. *Physica D*, 193:278–291, 2004.

[11] D. Ruelle. *Chance and chaos*. Princeton: University Press, USA, 1991. 214 p.

[12] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Communications in Mathmatical Physics*, 20:167–192, 1971.

[13] M. Sieber. Experiments on the attractor-dimension for turbulent pipe flow. *Physics Letters A*, 122:467–469, 1987.

[14] D. Sigeti and W. Horsthemke. High-power spectra for systems subject to noise. *Physical Review A*, 35:2276–2282, 1987.

[15] F. Takens. Dynamical systems and turbulence. In *Proceedings of a symposium held at the university of warwick*, Berlin, 1979-1980. Springer-Velag.

[16] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In D. A. Rand and L. S. Young, editors, *Dynamical systems and turbulence*, volume 898. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[17] R. O. Weber, P. Talkner, G. Stefanicki, and L. Arvisais. Search for finite dimensional attractors in atmospheric turbulence. *Bundary-Layer Meteorology*, 64:175–197, 1993.

[18] A. Wolf, J. B. Swift, and J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica*, 16D, 1985.

[19] L. Xin, H. Fei, and L. Gang. Characteristics of chaotic attractors in atmospheric boundary-layer turbulence. *Bundary-Layer Meteorology*, 99:335–345, 2001.