

Tubo de Vórtice: Implementação Numérica e Identificação

Helcio Francisco Villa Nova
*CAP-Pós-graduação em Computação
Aplicada*
*Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-
INPE*
hnova@lac.inpe.br

Jerônimo dos Santos Travelho
*Laboratório Associado de Matemática
Aplicada e Computação-LAC*
*Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-
INPE*
jeff@lac.inpe.br

Resumo

Em vários casos a estrutura de um escoamento é bem caracterizada por seus vórtices, especialmente para a proposta de visualização. Neste trabalho é apresentada uma nova forma para a implementação numérica de um tubo de vórtice a qual permite a fácil identificação no escoamento complexo. Seja pelo campo de velocidades ou pelo campo de pressão, o tubo de vórtice pode ser identificado. A implementação do tubo de vórtice é feita na condição inicial, sendo testado a sua dispersão ao longo do tempo por meio da velocidade tangencial. A expressão numérica evita singularidades, podendo ser imposta facilmente. São apresentados resultados para um tubo de vórtice com intensidade de $2,5 m^2/s$ e com um núcleo de $1 m$ de raio, para um escoamento laminar de água contido em um domínio semi-esférico com $10 m$ de raio. As equações de Navier-Stokes são discretizadas espacialmente por volumes finitos, empregando-se uma malha não-estruturada tetraedral.

Palavras-chave: tubo de vórtice, hidrodinâmica do vórtice, modelagem do vórtice, escoamento turbulento.

1.Introdução

A turbulência nos escoamentos é um dos problemas mais complexos da mecânica dos fluidos e tem sido alvo de estudo de muitos cientistas. Como tem feito Villa Nova (2005), o escoamento turbulento pode ser modelado a partir de um escoamento laminar com um conjunto de vórtices

distribuídos, os quais são normalmente representados por tubos de vórtices. Para se descrever os vórtices deste conjunto é necessário conhecer a forma da distribuição e a modelagem matemática do tubo de vórtice. A forma da distribuição pode ser encontrada em Castaing et al. (1990) ou Villa Nova (2005). Lamb (1932), Batchelor (1967) e Saffman (1992) apresentam uma descrição matemática de um tubo de vórtice para o caso potencial. Batchelor (1967) apresenta o escoamento gerado pela rotação de um cilindro, que representa de forma semelhante um tubo vórtice não potencial. Contudo, será mostrada a representação na forma potencial é ineficiente, pois esta representa uma singularidade no centro do tubo de vórtice. Kim et al. (1995) apresenta um estudo numérico com a representação do tubo de vórtice conhecida por Spalart, o qual não representa o vórtice potencial.

Dentro deste contexto tem-se uma série de trabalhos direcionados para a análise da simulação de tubos de vórtices. Overman & Zabusky (1982) estudaram a evolução de vórtices isolados. Leweke et al. (2001) analisaram a interação de vórtices com rotações opostas. Marshall et al. (2001) analisaram a interação de vórtices com intensidades diferentes. Dentro outros trabalhos, a uma grande quantidade de estudos de interação entre esteiras de partículas onde se tem uma grande quantidade de vórtices presente.

Portanto, a modelagem e simulação de tubos de vórtice são dois temas de grande importância no estudo dos escoamentos complexos.

Para a identificação do vórtice, Banks & Singer (1994) sugerem uma série de métodos de identificação, entre eles o método da baixa pressão que é bastante eficiente para este caso.

Para o futuro o autor propõe um algoritmo de identificação de tubo de vórtice.

2. Modelagem matemática do tubo de vórtice:

Um tubo de vórtice representa segundo Batchelor (1967) uma estrutura tridimensional, gerada a partir de uma geratriz bidimensional. No caso particular de um tubo de vórtice cilíndrico, tem-se uma estrutura regular de revolução.

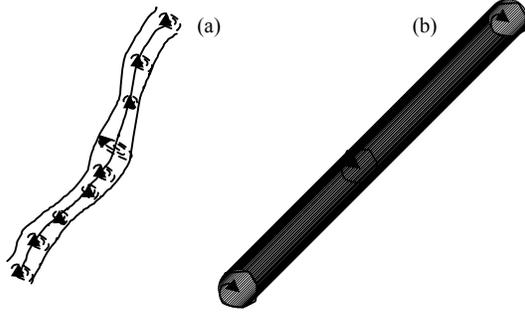


Figura 1-Tubo de vórtice (a) e Tubo de vórtice cilíndrico (b).

No que se refere à geratriz do tubo de vórtice, de acordo com Lamb (1932) e Batchelor (1967), existem dois modelos de vórtices bidimensionais que podem ser empregados como tal. O primeiro é definido como ponto vórtice, sendo estabelecido para o escoamento ideal, sem rotação (escoamento potencial) e cujo campo de velocidades \vec{u}_v é expresso por:

$$\vec{u}_v = \frac{\Gamma_v}{2\pi r} \hat{\theta}. \quad (1)$$

Onde Γ_v é a circulação do vórtice ou intensidade ($\Gamma = \oint_v \vec{u} \cdot d\vec{s}$), $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}$ é o raio e $\hat{\theta}$ é o versor na direção tangencial do vórtice.

Um segundo modelo é baseado no vórtice forçado (escoamento entre cilindros, p.ex.), o qual gera um escoamento rotacional, onde o campo de velocidades é:

$$\vec{u}_v = \omega r \hat{\theta}. \quad (2)$$

onde ω representa a rotação angular do vórtice.

Em ambos os casos apresentados acima ocorrem uma singularidade. Dentro do aspecto numérico, o ideal seria um modelo misto com domínios de aplicação limitados pelo núcleo do vórtice. Dessa forma, a abordagem potencial pode ser mantida para o escoamento fora do núcleo.

Kim et al. (1995) emprega uma expressão para a linha de corrente do escoamento induzido pelo vórtice no instante inicial, a qual é dada como:

$$\psi_v(r_v, t_0) = -\frac{\Gamma_v}{2\pi} \ln[r^2 + \sigma^2], \quad (3)$$

onde σ é o raio do núcleo do vórtice.

O campo de velocidade inicial induzida pelo vórtice pode ser descrito a partir de (3) pelas definições de velocidades ortogonais do escoamento potencial, conforme Batchelor (1967). Com isso, tem-se que:

$$\vec{u}_v = -\frac{\partial \psi_v}{\partial r_v} \hat{r} = \frac{\Gamma_v}{\pi} \frac{r}{r^2 + \sigma^2} \hat{\theta}. \quad (4)$$

O campo de pressão inicial devido ao vórtice é obtido a partir da componente radial da equação de Navier-Stokes, a qual mostra o balanço entre a aceleração centrífuga e o gradiente de pressão para as linhas de corrente circulares, isto é:

$$\frac{\rho u_v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (5)$$

Integrando (4.5) com (4.4), do infinito até próximo ao núcleo do vórtice, tem-se que:

$$p(r, t_0) = \rho \frac{\Gamma_v}{\pi} \int_{\infty}^r \frac{r}{[r^2 + \sigma^2]^2} dr + p_{\infty} \quad (6)$$

a qual produz a seguinte expressão:

$$p(r, t_0) = -\rho \frac{\Gamma_v^2}{2\pi^2} \frac{1}{r^2 + \sigma^2} + p_{\infty}. \quad (7)$$

Onde ρ é a densidade do fluido e p_{∞} é a pressão no infinito.

3. Simulação Numérica do Vórtice:

A simulação numérica do vórtice é implementada para um domínio semi-esférico com raio de 10σ

para se garantir simetria de malha não-estruturada. O vórtice é colocado no centro do domínio, sendo verificado o campo de velocidades induzido.

Para se facilitar a implementação das condições iniciais nos nós da malha emprega-se o campo de velocidades apresentado em (4) em coordenadas cartesianas. Assim, usando a definição de velocidade para o escoamento potencial, tem-se que:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \psi_v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{\Gamma_v}{2\pi} \ln[r^2 + \sigma^2] \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{\Gamma_v}{2\pi} \ln[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 + \sigma^2] \right\} \\ &= -\frac{\Gamma_v}{\pi} \frac{(z-z_0)}{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 + \sigma^2]}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u_z &= -\frac{\partial \psi_v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\Gamma_v}{2\pi} \ln[r^2 + \sigma^2] \right\} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\Gamma_v}{2\pi} \ln[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 + \sigma^2] \right\} \\ &= \frac{\Gamma_v}{\pi} \frac{(x-x_0)}{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 + \sigma^2]}. \end{aligned} \quad (9)$$

As equações governantes são continuidade (conservação da massa) e quantidade de movimento, as quais são dadas na forma abaixo para o escoamento incompressível:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (11)$$

onde $\vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}$ e ν a viscosidade cinemática.

As condições de contorno implementadas na superfície do domínio semi-esférico são do tipo Dirichlet, sendo dadas por:

$$u_x = u_y = u_z = 0, \quad (12)$$

$$p = 0. \quad (13)$$

Para o plano de simetria que divide o domínio esférico a condição é mista, sendo dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

$$u_y = 0. \quad (15)$$

A condição inicial é dada pelo campo de velocidade e pressão aplicado pelo tubo vórtice cilíndrico estabelecido em $(x_0, z_0) = (0, 0)$, com raio do núcleo $\sigma = 1 [m]$ e intensidade $\Gamma_v = 2.5 [m^2/s]$, isto é:

$$p_0 = P_v, \quad (16)$$

$$u_x = -\frac{\Gamma_v}{\pi} \frac{z}{[x^2 + z^2 + \sigma^2]} \quad e$$

$$u_z = \frac{\Gamma_v}{\pi} \frac{x}{[x^2 + z^2 + \sigma^2]}. \quad (17)$$

A solução numérica é obtida por esquema numérico tridimensional que emprega volumes finitos, com a correção pressão-velocidade do tipo Poisson.

3. Resultados:

As Figura 2 mostram a dissipação do tubo de vórtice ao longo do tempo. Os resultados apresentados são referentes a uma simulação com uma malha de 100000 elementos do tipo tetraédrico são mostrados. O tubo de vórtice é caracterizado por uma isovelocidade de duas folhas no instante $t = 4s$. Foram gerados resultados para malhas de 100000, 480000 e 1000000 de elementos.

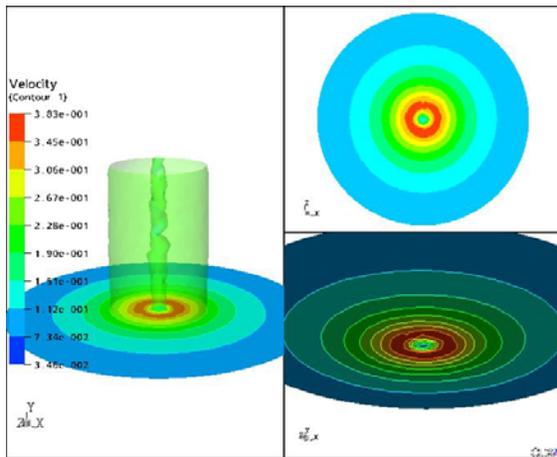


Figura 2a-Tubo de vórtice-distribuição de velocidades.

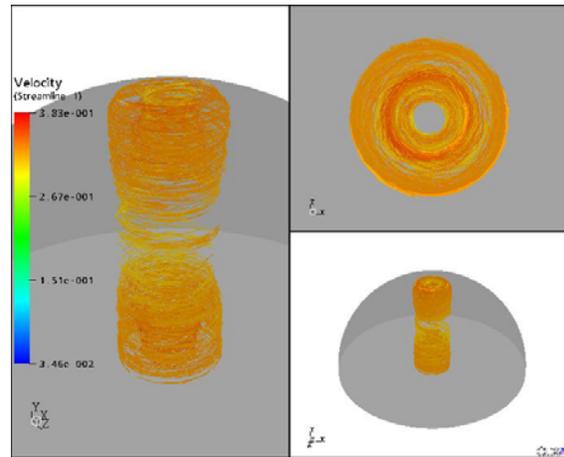


Figura 2c-Pseudolinhas de corrente.

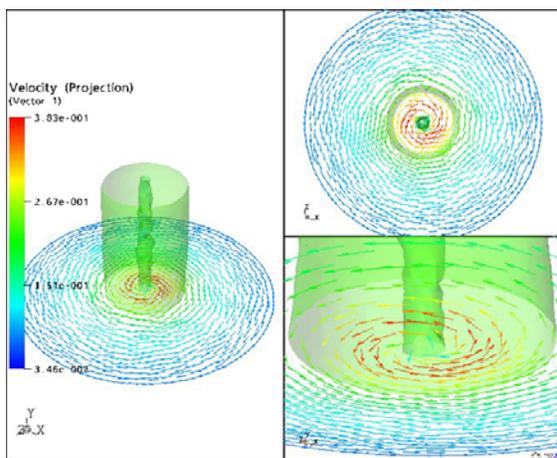


Figura 2b-Tubo de vórtice-vetor velocidade.

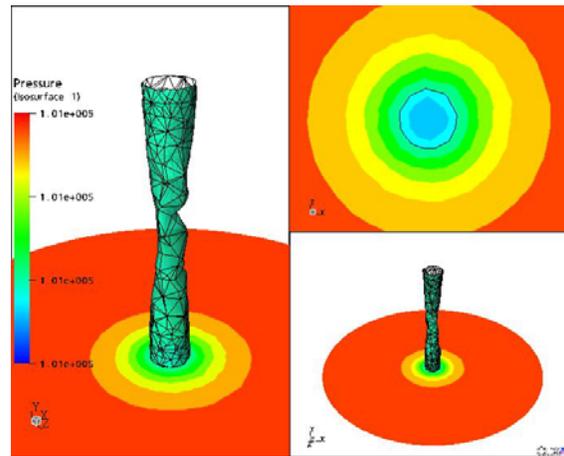


Figura 2d-Tubo de vórtice-distribuição de pressão.

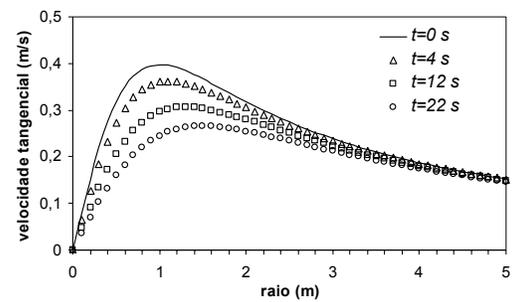


Figura 3-Velocidade tangencial do vórtice.

A figura 3 mostra a quantificação dos resultados de velocidade tangencial ao longo do tempo. O objetivo principal desta simulação é verificar a consistência numérica da expressão (3), a qual define o vórtice de Spalart.

4. Conclusões & comentários finais:

A expressão para a representação numérica do tubo de vórtice é viável e bastante interessante, desde que ela não produz nenhum valor singular. Além disso, a expressão proposta permite controlar o tamanho do núcleo do vórtice, o que está associado com a região de baixa pressão. Por outro lado, esta representação leva a um efeito nulo quando o raio tende ao infinito, de forma semelhante ao caso potencial.

Outro aspecto importante, o qual não foi apresentado aqui, é referente ao deslocamento do vórtice com a corrente média do escoamento. Este ponto será explorado, visando analisar a dispersão do vórtice com a velocidade da corrente média.

A interação entre vórtices deve também ser analisada, buscando-se obter resultados referentes à intensidade do vórtice gerado.

No que se refere à visualização e identificação do vórtice, o autor apresentará no futuro um algoritmo eficiente o qual foi empregado nestes cálculos.

5. Referências:

Batchelor, G.K. An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. Great Britain, 1967.

D.C. Banks and B.A. Singer. Vortex Tubes in Turbulent Flows: Identification, Representation, Reconstruction. ICASE Report No. 94-11; NASA CR-194882 (1994).

Kim, I., Elghobashi, S. and Sirignano, W. Unsteady flow interactions between an advected cylindrical vortex tube and a spherical particle. *J. Fluid Mech.* (1995), vol. 288, pp. 123-155.

Lamb, H. Hydrodynamics. Cambridge University Press. Great Britain, 1932.

Leweke, T., Meunier, P., Laporte, F. and Darracq, D. Controlled interaction of co-rotating vortices. *ODAS* 2001.

Marshall, J.S., Brancher, P. and Giovannini Interaction of unequal anti-parallel vortex tubes. *J. Fluid Mech.* (2001), vol. 446, pp. 229-252.

Overman, E. and Zabusky N. Evolution and merger of isolated vortex structures. *Phys. Fluids* 25(8),1982.

Saffman, P.G. Vortex Dynamics. Cambridge University Press. Great Britain, 1992.

Villa Nova, H. F. Modelagem da Interação Vórtice-Partícula em Escoamentos Bifásicos. Tese de Doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2005 (a defender).