

Recuperação de Perfis Verticais de Propriedades Óticas Inerentes com o Uso da Radiação Emergente da Água

Roberto P. Souto
CAP/SPG/INPE
roberto@lac.inpe.br

Haroldo F. Campos Velho
LAC/INPE
haroldo@lac.inpe.br

Stephan Stephany
LAC/INPE
stephan@lac.inpe.br

Resumo

Este trabalho refere-se ao emprego de uma metodologia de recuperação de perfis verticais dos coeficientes de absorção e de espalhamento utilizando exclusivamente dados da radiação emergente da água, medida imediatamente acima da superfície e em vários comprimentos de onda. Esta abordagem se torna possível com o uso de modelos bio-ópticos que relacionam estes coeficientes com a concentração de clorofila em profundidade e com o comprimento de onda da radiação. Deste modo, a falta de informação de radiação em profundidade, é compensada e substituída pelo dado de natureza multiespectral da radiação observada somente na superfície. É utilizada uma formulação implícita de resolução de problema inverso, caracterizando-se assim um problema de otimização, o qual se buscou resolver através do uso da meta-heurística de população de formigas Ant Colony System (ACS), com uma adaptação que pré-seleciona a soluções candidatas que atendam a um critério de suavidade. Foi necessário entretanto fazer uma média de rodadas do ACS, para obter um resultado satisfatório.

Palavras-chave: transferência radiativa, ótica hidrológica, problemas inversos, meta-heurísticas, ant colony optimization

1. Problema Direto - A Equação de Transferência Radiativa

A equação de transferência radiativa para a intensidade de radiação I (radiância) é dada por

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu, \varphi, \lambda) + I(\tau, \mu, \varphi, \lambda) &= \frac{\varpi(\tau, \lambda)}{4\pi} \\ &\times \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{\lambda} \beta(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau, \mu', \varphi', \lambda) d\lambda' d\varphi' d\mu' \\ &+ S(\tau, \lambda), \end{aligned} \quad (1)$$

sujeita às condições de contorno

$$\begin{aligned} I(0, \mu, \varphi, \lambda) &= f(\mu, \varphi, \lambda) \\ &= I_0(\lambda) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \quad (2a)$$

$$I(\zeta, -\mu, \varphi, \lambda) = g(\mu, \varphi, \lambda) = 0, \quad (2b)$$

sendo $\tau \in [0, \zeta]$ a variável óptica, onde ζ é a denominada profundidade ótica do meio. $\mu \in (0, 1]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ são o cosseno do ângulo polar θ e o ângulo azimutal, respectivamente. A função de fase de espalhamento, que fornece a distribuição angular do feixe espalhado, é representada por $\beta(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$, enquanto o termo fonte é dado por $S(\tau, \lambda)$. Por fim, $\varpi(\tau, \lambda)$ representa o albedo de espalhamento simples, que é dado pela razão entre os coeficientes de espalhamento b e atenuação c

$$\varpi(\tau, \lambda) = \frac{b(\tau, \lambda)}{c(\tau, \lambda)} = \frac{b(\tau, \lambda)}{a(\tau, \lambda) + b(\tau, \lambda)}, \quad (3)$$

onde a é o coeficiente de absorção.

Ao discretizar-se a variável do comprimento de onda λ em intervalos (bandas) $\Delta\lambda_g$, os valores das funções dependentes de λ nas equações (1) e (2) são dados pela média dos mesmos nestes intervalos [2]. Deste modo, para uma função genérica $F(\lambda)$, têm-se

$$F_g = F(\lambda_g) = \frac{1}{\Delta\lambda_g} \int_{\Delta\lambda_g} F(\lambda) d\lambda, \quad (4)$$

onde λ_g é o comprimento de onda médio no intervalo g . Considerando que o espalhamento ocorre apenas dentro de um mesmo intervalo, não se emprega esta notação para a função de fase. Logo, para um comprimento de onda λ_g , a equação (1) torna-se

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_g(\tau, \mu, \varphi) + I_g(\tau, \mu, \varphi) &= \frac{\varpi_g(\tau)}{4\pi} \\ &\times \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \beta(\tau, \mu, \varphi; \mu', \varphi') I_g(\tau, \mu', \varphi') d\varphi' d\mu' \\ &+ S_g(\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

sujeita às condições de contorno

$$I_g(0, \mu, \varphi) = I_{0,g} \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (6a)$$

$$I_g(\zeta, -\mu, \varphi) = 0, \quad (6b)$$

para $\mu \in (0, 1]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Por sua vez, a função de fase ainda pode ser expressa por uma expansão polinomial finita de Legendre em termos do ângulo de espalhamento ψ , representada por $p(\cos \psi)$:

$$\beta(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \approx p(\cos \psi) = \sum_{l=0}^L \omega_l P_l(\cos \psi), \quad (7)$$

com $\omega_l = 1$, para $l = 0$

$|\omega_l| < 2l + 1$ para $0 < l \leq L$,

onde $\{\omega_l\}$ são os coeficientes da expansão de L -ésima ordem da função de fase. Esta ordem também fornece o *grau de anisotropia* do espalhamento. A radiância e o termo fonte são também expandidos através de uma decomposição de Fourier [3],

$$I_g(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^L I_g^m(\tau, \mu) \cos(m \varphi) \quad (8a)$$

$$S_g(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^L S_g^m(\tau, \mu) \cos(m \varphi) \quad (8b)$$

Desta feita, a equação de transferência radiativa dada pela equação (5), pode também ser representada por

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_g^m(\tau, \mu) + I_g^m(\tau, \mu) &= \frac{\varpi_g(\tau)}{2} \\ &\times \sum_{l=m}^L \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I_g^m(\tau, \mu') d\mu' \\ &+ S_g^m(\tau, \mu) \end{aligned} \quad (9)$$

onde

$$P_l^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) \quad (10)$$

define um função de Legendre associada, com

$$\omega_l^m = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \omega_l, \quad (11)$$

e termo fonte dado por

$$S_g^m(\tau, \mu) = \frac{\varpi_g(\tau)}{2} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{l=m}^L \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu_0) \quad (12)$$

sujeita as condições de contorno

$$I_g^m(0, \mu) = I_g^m(\zeta, -\mu) = 0 \quad (13)$$

para $\mu \in (0, 1]$.

1.1 Formulação para geometria multi-região

As equações apresentadas até aqui, descrevem a equação de transferência radiativa em um meio homogêneo, onde consideram-se que os coeficientes são constantes com relação à profundidade. Na situação oposta, com $a(z, \lambda)$ e $b(z, \lambda)$ variando conforme a profundidade, têm-se um caso de meio não-homogêneo. Configura-se deste modo um sistema com R regiões com valores de coeficientes **diferentes** entre as regiões, mas **constantes** dentro de cada uma. A variável espacial τ é discretizada então em $R+1$ valores, de $\tau_0 = 0$ a $\tau_R = \zeta$. Então, para $r = 1, 2, \dots, R$ e $\mu \in (0, 1]$, o problema em geometria multi-região pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_{r,g}^m(\tau, \mu) + I_{r,g}^m(\tau, \mu) &= \frac{\varpi_{r,g}}{2} \\ &\times \sum_{l=m}^L \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I_{r,g}^m(\tau, \mu') d\mu' \\ &+ S_{r,g}^m(\tau, \mu) \end{aligned} \quad (14)$$

com

$$\varpi_g(\tau) = \varpi_{r,g} = \frac{b_{r,g}}{c_{r,g}} = \frac{b_{r,g}}{a_{r,g} + b_{r,g}}, \quad (15)$$

sendo constante em toda a região r , para qualquer valor de τ , onde $c_{r,g}$, $a_{r,g}$ e $b_{r,g}$ são os coeficientes de atenuação, de absorção e de espalhamento, respectivamente, para o intervalo de comprimento de onda g . A equação (14) está sujeita as condições de contorno

$$I_{1,g}^m(\tau_0, \mu) = I_{R,g}^m(\tau_R, -\mu) = 0 \quad (16)$$

e para as interfaces para $r = 1, 2, \dots, R-1$, considera-se a condição de continuidade

$$I_{r,g}^m(\tau_r, \pm\mu) = I_{r+1,g}^m(\tau_r, \pm\mu) \quad (17)$$

para $\mu \in (0, 1]$. A fim de se obter uma aproximação da integral da equação 14 utiliza-se uma quadratura de ordem N , com nós $\{\mu_j\}$ e pesos $\{\eta_j\}$. Portanto, discretizando o valor de μ em μ_j , com $j = 1, 2, \dots, N$, a equação de ordenadas discretas que define a equação e transferência radiativa é dada por

$$\begin{aligned} \mu_j \frac{d}{d\tau} I_{r,g}^m(\tau, \mu_j) + I_{r,g}^m(\tau, \mu_j) &= \\ \frac{\varpi_{r,g}}{2} \sum_{l=m}^L \omega_l^m P_l^m(\mu_j) \sum_{i=1}^N \eta_i P_l^m(\mu_i) I_{r,g}^m(\tau, \mu_i) \\ &+ S_{r,g}^m(\tau, \mu_j), \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (18)$$

onde agora o termo fonte não-homogêneo é dado por

$$S^m(\tau, \mu_j) = \frac{\varpi_{r,g}}{2} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{l=m}^L \omega_l^m P_l^m(\mu_j) P_l^m(\mu_0) \quad (19)$$

e as condições de contorno por

$$I_{1,g}^m(0, \mu_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (20a)$$

$$I_{R,g}^m(\zeta, \mu_j) = 0, \quad j = n + 1, n + 2, \dots, N. \quad (20b)$$

Estas são as chamadas equações de ordenadas discretas, ou simplesmente equações S_N , as quais são totalmente desacopladas entre si, fazendo com que a resolução das mesmas seja completamente independente uma da outra.

2. Problema Inverso - Estimção de perfis verticais de clorofila

Mobley [7] apresenta modelos bio-ópticos onde os coeficientes de absorção e de espalhamento mostrados na equação (15), podem ser aproximados pelas equações (21) e (22), apresentadas respectivamente por Morel [9] e Gordon e Morel [5].

$$a_{r,g} = [a_g^w + 0.06 a_g^c C^{0.65}(z)] \times [1 + 0.2 e^{-0.014(\lambda_g - 440)}] \quad (21)$$

e

$$b_{r,g} = \left(\frac{550}{\lambda_g}\right) 0.30 C^{0.62}(z), \quad (22)$$

onde a_g^w é o coeficiente de absorção da água pura, enquanto a_g^c é um coeficiente de absorção adimensional específico de clorofila e $C(z)$ é a concentração de clorofila, em $mg\ m^{-1}$. O exemplo em questão refere-se a um caso de águas do **Caso 1**, que são águas onde a concentração de fitoplânctons é alta comparada com a de partículas não-orgânicas [8], podendo inclusive variar de águas muito claras (oligotróficas) até a águas muito turvas (eutróficas) [7]. Os valores de a_g^w e a_g^c são tabelados para diferentes comprimentos de onda, podendo ser encontrado em [11]. Deste modo, o problema original de estimção dos coeficientes de absorção e de espalhamento, converte-se na estimção do perfil vertical de concentração de clorofila, o qual é discretizado em N_z profundidades:

$$C(z_k) = C_z = [C(z_1) C(z_2) C(z_3) \cdots C(z_{N_z})]^t \quad (23)$$

$$= [C_1 C_2 C_3 \cdots C_{N_z}]^t$$

Uma outra abordagem consiste na adoção de um modelo expresso por um valor de funto (*background*) mais uma Gaussiana:

$$C(z) = C_0 + \frac{h}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-z_{max}}{s}\right)^2} \quad (24)$$

onde z é a profundidade dada em metros. Partindo-se então desta hipótese de modelagem, o problema resume-se a estimar somente quatro parâmetros (C_0, h, s, z_{max}), reduzindo-se a complexidade do problema inverso.

3. Meta-heurística de população de formigas - Ant Colony System

O método que emprega uma meta-heurística baseada no comportamento coletivo de formigas na escolha do melhor caminho até a fonte de alimento é denominado de “Ant Colony System-ACS [4]. Cada formiga deposita durante a sua trajetória uma quantidade de feromônio, a qual será posteriormente uma referência para as demais formigas. Para exemplificar, a Figura 1 mostra formigas se deslocando do ponto A para o ponto E (a). Um obstáculo é introduzido bloqueando o caminho bem no meio (b). Agora dois novos caminhos podem ser escolhidos, para a esquerda do obstáculo (ponto H) ou para a direita (ponto C). Como num primeiro instante, o número de formigas que escolhem os dois caminhos é mesmo, a *quantidade* de feromônio será *igual* no caminhos. No entanto, como a caminho dado pelos pontos BCD é mais curto que o formado pelos pontos BHD, a *concentração* de feromônio será *maior*. Portanto, nos instantes seguintes, as formigas tenderão a seguir por este caminho mais curto.

No método de otimização ACS, várias gerações de formigas são produzidas. Para cada geração, uma quantidade fixa de formigas (na) é avaliada. Cada formiga é associada com um possível caminho, o qual representa a solução candidata, sendo composta por um conjunto particular de vértices de um grafo que contém todas as possíveis soluções. A melhor formiga de cada geração é então escolhida, e o seu caminho percorrido é marcado com feromônio. Isto irá influenciar na criação de novas formigas em gerações posteriores. Ao final de todas as gerações, assume-se que a melhor solução é alcançada. A solução é

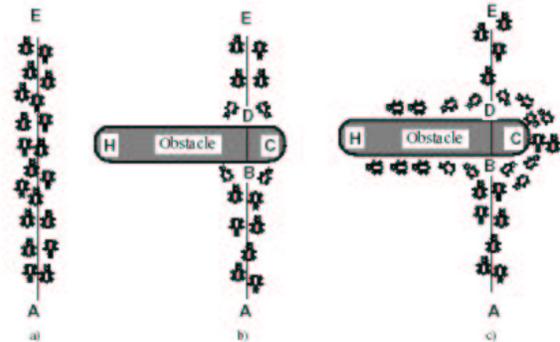


Figura 1. Formigas contornando obstáculo na trilha (Dorigo et al [4]).

formada pela conexão de ns nós. Entre cada par de nós np valores discretos podem ser escolhidos. Esta abordagem é usada para se mapear um domínio contínuo. Portanto, ex-

istem $ns \times np$ possíveis caminhos $[i, j]$ disponíveis, com $i = 1, 2, \dots, ns$ e $j = 1, 2, \dots, np$. Denotando por ρ a taxa de decaimento de feromônio e σ_0 a quantidade inicial de feromônio, a cada geração t tem-se:

$$\sigma_{ij}(t) = (1 - \rho)\sigma_{ij}(t) + \sigma_0. \quad (25)$$

Aqui, σ_0 é calculado conforme é sugerido em [1], usando uma avaliação Q da função objetivo, obtida com uma heurística gulosa:

$$\sigma_0 = 1/(ns * Q), \quad (26)$$

A probabilidade de um dado caminho $[i, j]$ ser escolhido é

$$P_{ij}(t) = \frac{[\sigma_{ij}(t)]^\alpha [\nu_{ij}]^\beta}{\sum_l \{[\sigma_{il}(t)]^\alpha [\nu_{il}]^\beta\}} \quad (27)$$

onde $l \in [1, np]$ e ν_{ij} é a visibilidade/custo de cada caminho, um conceito emprestado do problema do caixeiro viajante (Travelling Salesman Problem-TSP), onde o custo é inversamente proporcional a distância de um caminho particular. Os parâmetros α e β são valores que estabelecem uma ponderação entre a influência do feromônio e da visibilidade na probabilidade de cada caminho. Na Eq. 27 é assumido que todos os caminhos tem a mesma visibilidade/custo.

Para escolher o caminho entre cada par de nós i e $i + 1$, com $i = 1, 2, \dots, ns - 1$, se utiliza um parâmetro denotado por q_0 . Um número aleatório a_0 é gerado no intervalo $[0, 1]$ é comparado com q_0 . Se este número aleatório for menor, escolhe-se o caminho j^{max} , com $j = 1, 2, \dots, np$, cuja probabilidade dada por P_{ij} for a maior até a presente geração/iteração. Caso contrário, Será escolhido o caminho j^{choose} cuja a soma acumulada das probabilidades ultrapasse o valor do número a_0 gerado aleatoriamente, ou seja, $(\sum_{j=1}^{j^{choose}} P_{ij}) > a_0$.

4. Formulação da inversão multiespectral

Neste trabalho o problema inverso é formulado de acordo com uma abordagem implícita, caracterizando-se como um problema de otimização [6]. O conjunto de parâmetros a serem estimados é representado por \mathbf{p} , que aqui vem a ser os R valores discretos de concentração de clorofila C em função da variável ótica τ . Deste modo, $p_r = C(\tau_r)$ para $r = 0, 1, \dots, R - 1$. Os dados experimentais são valores discretos de radiância multiespectral logo acima da superfície $I^{exp}(0, -\mu_i, \lambda_j)$ para $i = 1, 2, \dots, N_\mu/2$ e $j = 1, 2, \dots, N_\lambda$. Portanto, os R valores discretos de concentração de clorofila são estimados a partir de $N_\mu/2 \times N_\lambda$ valores de radiância. A função objetivo $J(\mathbf{p})$ é dada pelo quadrado da diferença entre as radiâncias

experimental e do modelo, mais um termo de regularização.

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N_\mu/2} \sum_{k=1}^{N_\lambda} [I^{exp}(0, -\mu_i, \lambda_k) - I_{\mathbf{p}}(0, -\mu_i, \lambda_k)]^2 + \gamma \Omega(\mathbf{p}) \quad (28)$$

$\Omega(\mathbf{p})$ é a função de regularização, que é ponderada pelo parâmetro de regularização γ . Por exemplo, a regularização de Tikhonov de 2^a ordem [14] é definida por

$$\Omega(\mathbf{p}) = \sum_{i=2}^{R-1} (p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1})^2 \quad (29)$$

Como problemas inversos são via de regra mal-postos, quando houver ruído nos dados, o termo de regularização será necessário. Neste tipo de problema, uma pequena mudança no perfil de concentração irá causar grandes alterações na radiância observada, e vice-versa.

Existem alguns critérios para a escolha de um valor de γ , tais como o princípio de discrepância de Morozov, o da curva-L, etc. No entanto, um valor ótimo é muito difícil encontrar, o que pode demandar muitas execuções do método de resolução do problema direto. Um γ muito pequeno pode resultar em um perfil com muitas oscilações, enquanto que para valores altos o perfil tenderá a ser suave demais.

É utilizado neste trabalho, uma versão do método ACS que incorpora um esquema de regularização implícita [10], que prescinde da regularização convencional ($\gamma = 0$). Uma vez que de antemão se sabe que o perfil da solução deve ser suave, tal informação é utilizada já na geração das soluções candidatas, por meio de uma seleção prévia das formigas mais suaves, antes mesmo da avaliação pela função objetivo. O critério de suavidade escolhido para selecionar os caminhos de acordo com sua suavidade, foi o de Tikhonov de 2^a ordem, que é normalmente usado como função de regularização.

5. Resultados

Como em todo método de otimização estocástico, a variação dos parâmetros do ACS influencia bastante nos resultados obtidos. Logo, para produzir os resultados apresentados, foi necessário um ajuste dos parâmetros, tais como a taxa de decaimento do feromônio ρ , o número de possíveis caminhos entre cada nó np , e o número de formigas na em cada geração. Outro parâmetro adicional que teve de ser levado em conta, refere-se ao critério de pré-seleção das formigas. O método ACS foi executado usando $na = 450$ e pré-selecionado $\frac{1}{30}$ destas formigas ($na_p = 15$) de acordo com sua suavidade. Observou-se ainda que na

maior parte das vezes usando $q_0 = 0$ resultou numa melhor solução. Os valores utilizados dos parâmetros são então mostrados na Tabela 1. O método ACS foi empregado

Tabela 1. Parâmetros do ACS

ns	np	na	na _p	ρ	q_0
10	3000	450	15	0.30	0.0

para solucionar o problema inverso de recuperação de perfil vertical de concentração de clorofila em águas oceânicas, numa geometria multi-região ($R = 10$), a partir de dados sintéticos de radiância multiespectral sem simetria azimutal, e na ausência de ruído de qualquer natureza.

Os dados são relacionados à radiância emergente da superfície d'água, sem simetria azimutal, com grau de anisotropia $L = 174$, e incluem $N_\mu/2 = 10$ direções polares para cada um dos $N_\lambda = 10$ comprimentos de onda. Dados sintéticos foram usados para simular valores experimentais referentes ao perfil de concentração de clorofila do mar Céltico, conforme mencionado na seção 2. Este é um perfil unimodal, obtido através da Eq. 24, com parâmetros $(C_0, h, s, z_{max}) = (0.2, 144, 9, 17)$.

Nenhuma regularização tradicional da função objetivo foi utilizada ($\gamma = 0$), somente aquela baseada na pré-seleção das formigas, baseada na suavidade da solução associada a cada formiga, de acordo com o critério de Tikhonov de 2ª ordem.

Para solucionar o problema direto de transferência radiativa foi empregado o método LTS_N [12], que consiste da aplicação de transformada de Laplace sobre as equações S_N , dadas em (18). Como resultado, obtem-se um sistema de equações algébricas simbólicas.

Foram utilizadas dez diferentes sementes no método ACS, na geração dos números pseudo-aleatórios. Na Figura 2 verifica-se a real dependência da escolha da semente na obtenção de uma estimativa, onde não há garantia de que o método converge para uma solução confiável para qualquer que seja o valor da semente. No entanto, foi observado que a média dos perfis representa uma solução bem mais satisfatória quando comparada com qualquer solução individual para cada semente.

Neste trabalho considera-se um perfil vertical unimodal de concentração de clorofila, contendo um pico localizado próximo à metade da profundidade total do perfil. Uma estratégia utilizada então para tentar melhorar o resultado obtido, foi a de se calcular a média dos cinco perfis com maior valor de concentração de clorofila na profundidade de pico. Este novo perfil médio é mostrado na Figura 3, onde se percebe, de fato, uma melhora na solução.

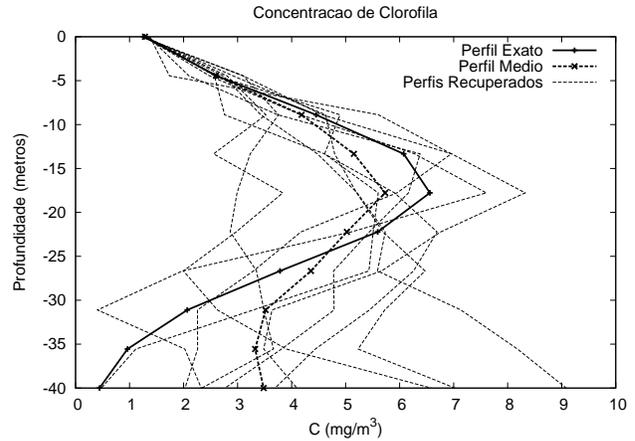


Figura 2. Perfis de concentração de clorofila exato, e aqueles estimados por dez diferentes sementes e respectivo perfil médio.

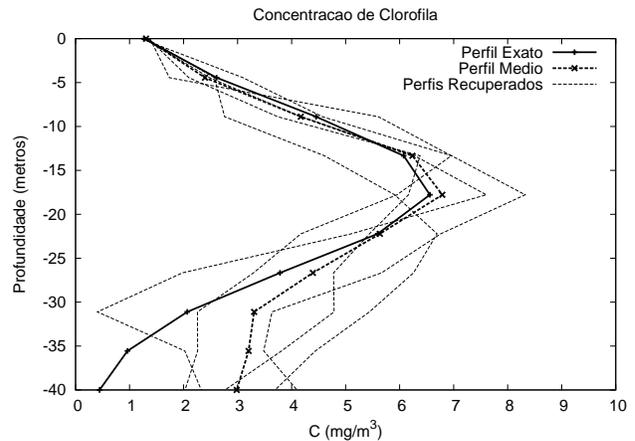


Figura 3. Perfis de concentração de clorofila exato, e aqueles estimados pelas cinco sementes onde ocorreram os maiores valores de pico, e o respectivo perfil médio.

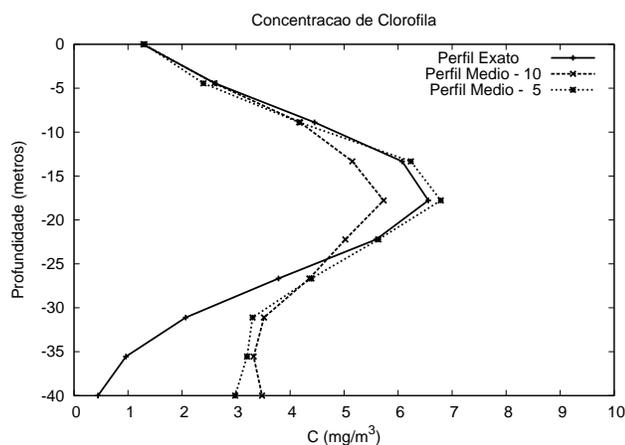


Figura 4. Comparação entre os perfis obtidos fazendo-se a média de todos e dos cinco com maior pico.

6. Considerações Finais

Resultados prévios com estimação multi-espectral para a concentração de clorofila foram obtidos com simetria azimutal [13]. No presente estudo, tal hipótese simplificadora não é adotada. Uma estratégia adotada em [13] que permite uma melhoria nos resultados da inversão, onde a estimação é feita em dois estágios, o primeiro estimando a concentração de clorofila em todo o corpo d'água e após, congela-se o resultado para a primeira metade da camada de oceano e se repete o procedimento de inversão para a subcamada mais profunda, não foi adotada aqui. Este procedimento será investigado em trabalhos futuros. Outra atividade de investigação futura, é aplicação de ruídos nos dados de trabalho.

Agradecimentos

O autor Roberto P. Souto ao CNPq pelo suporte financeiro durante este doutoramento, processo número 140217/2001-0.

Referências

- [1] Bonabeau, E.; Dorigo, M.; Theraulaz, G. *Swarm intelligence: from natural to artificial systems*, Oxford University Press, UK, 1999.
- [2] Chalhoub, E.S.; Campos Velho, H.F. Multispectral Reconstruction of Bioluminescence Term in Natural Waters. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (accepted), 2003.
- [3] Chandrasekhar, S. *Radiative Transfer*. New York: Dover Publications, 1960. 394p.
- [4] Dorigo M.; Maniezzo V; Colomi A., The ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics–Part B*, 26(2):29-41, 1996.
- [5] Gordon, H.R.; Morel, A. Remote assessment of ocean color for interpretation of satellite visible imagery, a review; Lectures notes on coastal estuarine studies, Volume 4 New York: Springer Verlag, 1983, 114p.
- [6] Lamm, P.K. Inverse problems and ill-posedness. *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, ed. by N. Zabarar, K.A. Woodbury and M. Raynaud, ASME, pp. 1-10, Palm Coast, USA, 1993.
- [7] Mobley, C.D. *Light and water: radiative transfer in natural waters*. San Diego: Academic Press, 1994, 592p.
- [8] Morel, A.; Prieur, L. Analysis of variations in ocean color *Limnol. Oceanogr.* v. 22, n. 4, p. 709, 1977.
- [9] Morel, A. Light and marine photosynthesis: A spectral model with geochemical and climatological implications *Progress in Oceanography* v. 26, n. 3, p. 263–306, 1991.
- [10] Preto, A. J.; Campos Velho, H. F.; Becceneri, J. C.; Arai, N. N.; Souto; R. P.; Stephany; S. A new regularization technique for an ant-colony based inverse solver applied to a crystal growth problem. In *13th Inverse Problem in Engineering Seminar (IPES-2004)*, 14-15 June 2004, University of Cincinnati, Ohio, USA.
- [11] Prieur, L.; Sathyendranath, S. An optical classification of coastal and oceanic waters based on the specific spectral absorption curves of phytoplankton pigments, dissolved organic matter, and other particulate materials, *Limnol. Oceanogr.* v. 26, n. 4, p. 671–689, 1991.
- [12] Segatto, C.F.; Vilhena M.T. Extensions of the LTS_N formulation for discrete ordinates problems without azimuthal symmetry. *Ann. Nucl. En.* v. 21, p. 701–710, 1994.
- [13] Souto, R.P.; CamposVelho, H.F.; Stephany, S.; Reconstruction vertical profiles of absorption and scattering coefficients from upwelling water radiances In: PanAmerican Workshop on Applied and Computational Mathematics, Tegucigalpa, **Anais**, 2004.
- [14] Tikhonov, A.N.; Arsenin, V.S. *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston and Sons, Washington, 1977.