

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-8980-TDI/811

**MODELAGEM BIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS
VISCOSOS INCOMPRESSÍVEIS COM MALHAS NÃO
ESTRUTURADAS UTILIZANDO A ABORDAGEM
BASEADA NO CIRCUNCENTRO**

Álvaro Luiz Fazenda

Tese de Doutorado em Computação Aplicada, orientada pelo Dr. Jeronimo dos Santos
Travelho, aprovada em 27 de fevereiro de 2002.

INPE
São José dos Campos
2002

681.3

FAZENDA, A. L.

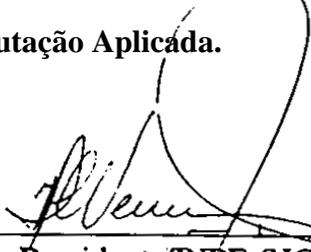
Modelagem bidimensional de escoamentos viscosos incompressíveis com malhas não estruturadas utilizando a abordagem baseada no circuncentro / A. L. Fazenda. – São José dos Campos: INPE, 2002.

157p. (INPE-8980-TDI/811).

1.Malhas não estruturadas. 2.Método de volumes finitos. 3.Dinâmica de fluidos computacional. 4.Escoamento incompressível. 5.Escoamento laminar. 6.Escoamento bidimensional. I.Título.

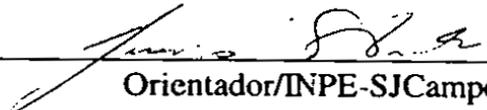
Aprovado pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Doutor** em **Computação Aplicada**.

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho



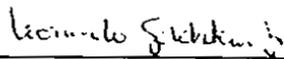
Presidente/INPE-SJCampos/SP

Dr. Jerônimo dos Santos Travelho



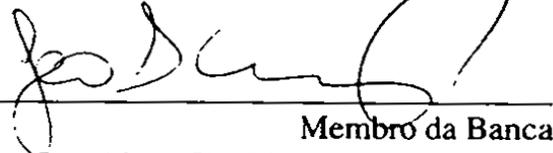
Orientador/INPE-SJCampos/SP

Dr. Leonardo Goldstein Júnior



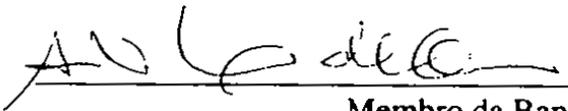
Membro da Banca
Convidado UNICAMP-Campinas/SP

Dr. João Andrade de Carvalho Júnior



Membro da Banca
Convidado UNESP-Guaratinguetá/SP

Dr. Antônio Marmo de Oliveira



Membro da Banca
Convidado UNITAU-Taubaté/SP

Candidato (a): Álvaro Luiz Fazenda

São José dos Campos, 27 de fevereiro de 2002.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente aos meus pais, minha esposa e minha irmã pelo apoio, paciência e dedicação nos momentos difíceis enfrentados ao longo do desenvolvimento desta tese.

Ao meu orientador Jeff, pela paciência, orientação e amizade, sem a qual seria impossível a conclusão e até mesmo o início deste trabalho.

Aos professores Haroldo e Maurício Fabbri, pela ajuda na confecção desta monografia e ao longo do desenvolvimento.

Aos professores membros da Banca Examinadora pela contribuição para melhoria deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro em parte do trabalho.

A Universidade de Taubaté, especialmente ao Departamento de Informática e Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, pelo apoio.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, especialmente ao Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC), pela disponibilização de todos os recursos necessários ao desenvolvimento da tese.

Aos meus amigos e colegas de curso, Eduardo, Nelson, Jean, Lombardi, Marcelo, Massaru, Nanci, Lamosa, Majú, Erwin, Helcio, Reinaldo, Roberto, Flávia, Linhares e tantos outros, pela amizade e apoio, imprescindíveis ao bom andamento da tese.

RESUMO

Uma possível abordagem para modelagem de problemas bidimensionais envolvendo convecção e difusão em esquemas centrados na célula para malhas não-estruturadas consiste no uso do circuncentro. Neste caso, utiliza-se o método de volumes finitos com um arranjo de variáveis co-localizado (no círculo escrito que passa pelos vértices de uma célula triangular). Os testes computacionais foram realizados em problemas clássicos de escoamento incompressível em duas dimensões como o escoamento em desenvolvimento entre placas planas (*Poiseuille Flow*), escoamento em uma cavidade (*Lid-Driven Cavity*) e o escoamento em um degrau com expansão súbita (*Backward-facing step*). Também foram obtidos resultados para convecção natural utilizando a aproximação de Boussinesq. O método mostrou-se simples e flexível, sendo que seus resultados apresentam boa concordância com estimativas analíticas, experimentais e numéricas disponíveis, dependendo do teste envolvido.

BIDIMENSIONAL MODELING FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW WITH UNSTRUCTURED GRID CIRCUMCENTER BASED APPROACH

ABSTRACT

A possible approach for modeling two-dimensional convection-diffusion problems in a Cell-Centered scheme with unstructured triangular grid is the use of the Circumcenter, that is the center of the circumference that pass through the vertices of the triangular volume. This point is used to calculate all variables involved in the numerical simulation, and a Finite Volume Method was use to discretize the equations of an Incompressible Viscous Flow. This work analyzes classical problems of bidimensional flow like the inlet region of a Poiseuille flow, lid-driven cavity, backward-facing step and free convection with Boussinesq approximation. The application of the method has showed to be a simple and flexible scheme, and the results fits the analytical, experimental or numeric data presents in the literature.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS
LISTA DE TABELAS
LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	19
1.1 – Revisão Bibliográfica.....	20
1.2 – Organização do trabalho	31
CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA MODELAGEM NUMÉRICA	33
2.1 – Equações de Transporte	34
2.2 – Acoplamento Pressão Velocidade para Escoamentos Incompressíveis.....	36
2.3 – Condições de Contorno.....	39
CAPÍTULO 3 – DISCRETIZAÇÃO E SOLUÇÃO	43
3.1 – Malhas Estruturadas e Não Estruturadas	44
3.2 – Abordagem Baseada no Circuncentro	50
3.3 – Tratamento dos termos convectivos.....	56
3.4 – Aproximação de Boussinesq.....	58
3.5 – Equações Discretizadas.....	60
3.5.1. – Condições de Contorno.....	65
3.5.1.1. – Condição de Contorno de Dirichlet para Velocidade	66
3.5.1.2. – Fronteira com derivada da velocidade nula (condição de saída)	70
3.5.1.3. – Fronteira adiabática com condição de aderência para velocidade	72
3.5.1.4. – Fronteira com condição de aderência para velocidade e Condição de Dirichlet para temperatura	73
3.6 – Algoritmo de Solução	74
3.7 – Solução do sistema linear de equações - “SOLVER”	75
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS	83
4.1 – Difusão de calor	83
4.2 – Escoamento incompressível.....	88
4.2.1 – Escoamento entre placas planas.....	89
4.2.2 – Escoamento em uma cavidade.....	108
4.2.3 – Escoamento com expansão súbita (sobre um degrau)	123
4.3 – Convecção natural.....	129
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	137
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141
APÊNDICE A – DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	151
APÊNDICE B – APROXIMAÇÃO PARA O VALOR DA PRESSÃO SOBRE O CONTORNO REFERENTE A UMA PAREDE SÓLIDA	157

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1: Malha com coordenadas cartesianas	45
3.2: Malha com coordenadas coincidentes com a fronteira	46
3.3: Comparativo de geometria discretizada pela metade com malha estruturada e metade com malha não estruturada.....	46
3.4: Comparativo entre volumes de controle formado por técnica <i>median-dual</i> (linha contínua) e diagramas de Voronoi (linha tracejada).....	48
3.5: Exemplo de malha triangular não estruturada gerada pelo software Easymesh.....	49
3.6: Aproximação do termo difusivo para malhas estruturadas.....	52
3.7: Aproximação do termo difusivo para malhas não estruturadas usando baricentro .	52
3.8: Aproximação do termo difusivo para malhas não estruturadas usando circuncentro	54
3.9: Stencil de cálculo para um elemento triangular da malha utilizada	54
3.10: Subconjunto de células da malha triangular usado no SOLVER	76
3.11: Malha triangular não estruturada gerada pelo software EasyMesh, e usada para cálculo de escoamento em uma cavidade	79
4.1: Domínio de solução para o problema de difusão de calor	84
4.2: Erro Quadrático da solução numérica em relação ao incremento no número de células da malha.....	85
4.3: Erro Quadrático Médio da solução numérica para $k = 1$ com a abordagem pelo Circuncentro, Diagramas de Voronoi e método de Mathur & Murthy em relação ao incremento no número de células da malha	86
4.4: Erro Quadrático Médio da solução numérica para $k = aT + b$ onde $a = 0.5$ e $b = 1.0$	86
4.5: Perfis de Temperatura para $k = 1$ obtidos com a abordagem pelo Circuncentro, Diagramas de Voronoi e método de Mathur e Murthy em relação a solução analítica.....	87
4.6: Perfis de Temperatura para $k = aT + b$ obtidos com a abordagem pelo Circuncentro, Diagramas de Voronoi e método de Mathur e Murthy em relação a solução analítica.....	88
4.7: Escoamento laminar em um canal formado por placas planas paralelas	89
4.8: Domínio bidimensional para <i>Poiseuille flow</i>	90
4.9: Perfil inicial de velocidade para $Re=100$. Entrada com perfil parabólico e o restante com perfil plano.....	96
4.10: Perfil de velocidade para $Re=100$ em escoamentos plenamente desenvolvidos ...	96
4.11: Campo de pressão para $Re=100$ em escoamentos plenamente desenvolvidos.....	97
4.12: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade. ($Re = 100$ e condição entrada com perfil parabólico).....	98
4.13: Perfil de velocidade para $Re = 100$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades	99

4.14: Perfil de velocidade para $Re = 400$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades	100
4.15: Perfil de velocidade para $Re=800$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades	100
4.16: $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}$ relativo médio ($Re = 100$, cond. entrada com perfil plano).....	102
4.17: $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}$ relativo médio ($Re = 200$, cond. entrada com perfil plano).....	102
4.18: Campo de pressão para $Re=100$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades	103
4.19: Campo de pressão para $Re=400$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades	103
4.20: Campo de pressão para $Re=800$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades	104
4.21: Componente u (longitudinal - X) do vetor velocidade para $Re = 100$	105
4.22: Componente v (transversal - Y) do vetor velocidade para $Re = 100$	105
4.23: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade. ($Re = 100$ e condição de entrada com perfil plano).....	106
4.24: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade. ($Re = 400$ e condição de entrada com perfil plano).....	106
4.25: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade. ($Re = 800$ e condição de entrada com perfil plano).....	107
4.26: Domínio bidimensional para o escoamento sobre uma cavidade	108
4.27: Perfil de velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 10$	111
4.28: Sentido do vetor velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 10$	111
4.29: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade. (Cavidade com $Re = 10$)	112
4.30: Perfil de velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 100$	113
4.31: Sentido do vetor velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 100$	113
4.32: Campo de pressão para $Re = 100$	114
4.33: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade. (Cavidade com $Re = 100$)	115
4.34: Perfis da componente u (direção X) do vetor velocidade ao longo de $x = L/2$ com $Re 100$	115
4.35: Perfis da componente v (direção Y) do vetor velocidade ao longo de $y = H/2$ com $Re = 100$	116
4.36: Perfil de velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 400$	116
4.37: Sentido do vetor velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 400$	117

4.38: Linhas de corrente para um escoamento em uma cavidade com $Re = 400$	117
4.39: Vorticidade para um escoamento em uma cavidade com $Re = 400$	118
4.40: Perfis da componente u (direção X) do vetor velocidade ao longo de $x = L/2$ com $Re = 400$	118
4.41: Perfis da componente v (direção Y) do vetor velocidade ao longo de $y = H/2$ com $Re = 400$	119
4.42: Perfil de velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 1000$...	119
4.43: Sentido do vetor velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 1000$	120
4.44: Linhas de corrente para um escoamento em uma cavidade com $Re = 1000$	120
4.45: Vorticidade para um escoamento em uma cavidade com $Re = 1000$	121
4.46: Perfis da componente u (direção X) do vetor velocidade ao longo de $x = L/2$ com $Re = 1000$	121
4.47: Perfis da componente v (direção Y) do vetor velocidade ao longo de $y = H/2$ com $Re = 1000$	122
4.48: Domínio bidimensional para <i>Backward-facing step</i>	123
4.49: Perfil de velocidade para $Re = 50$ em um domínio onde $H/h = 2$	126
4.50: Vetores com o sentido do vetor velocidade para $Re = 50$ em um domínio onde $H/h = 2$	126
4.51: Perfil de velocidade para $Re = 150$ em um domínio onde $H/h = 2$	127
4.52: Vetores com o sentido do vetor velocidade para $Re = 150$ em um domínio onde $H/h = 2$	127
4.53: Linhas de corrente para o resultado experimental de um escoamento sobre um degrau com $Re = 150$ em um domínio onde $H/h = 2$	128
4.54: Linhas de corrente para o resultado numérico de um escoamento sobre um degrau com $Re = 150$ em um domínio onde $H/h = 2$	128
4.55: Linhas de corrente para o resultado numérico de um escoamento sobre um degrau com $Re = 50$ em um domínio onde $H/h = 2$	129
4.56: Domínio bidimensional para o escoamento com convecção natural	130
4.57: Cromograma de Temperatura para $Ra = 10^3$	132
4.58: Cromograma de Temperatura para $Ra = 10^4$	132
4.59: Perfil de velocidades para um escoamento com convecção natural com $Ra = 10^3$	133
4.60: Perfil de velocidades para um escoamento com convecção natural com $Ra = 10^4$	133
4.61: Sentido do vetor velocidades para um escoamento com convecção natural com $Ra = 10^3$	134
4.62: Sentido do vetor velocidades para um escoamento com convecção natural com $Ra = 10^4$	134

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 – Comparativo entre o número de iterações	81
3.2 – Comparativo entre o tempo gasto	81
4.1 – $\frac{\partial P}{\partial x}$ em diferentes malhas – Reynolds = 100	99
4.2 – Valores previstos para o comprimento de entrada.....	101
4.3 – Gradiente de pressão para diferentes números de Reynolds - Malha com 36846 Triângulos.....	107
4.4 – Divergente quadrático médio e tempo computacional em diferentes malhas - Reynolds = 100.....	122
4.5 – Localizações do vórtice e ponto de realinhamento.....	128
4.6 – Número de Nusselt médio em convecção natural – comparativo.....	135
4.7 – Variação do momento angular	135

LISTA DE SÍMBOLOS

Latinos

- a - Coeficiente de uma equação algébrica discretizada
- b - Termo conhecido e constante de uma equação algébrica discretizada
- c - Valor constante arbitrário
- c_p - Calor específico a pressão constante
- d - Distância entre dois pontos
- $Dist$ - Distância entre dois circuncentros vizinhos ou do circuncentro a face
- F - Componente normal do fluxo difusivo
- g - Aceleração da gravidade
- \vec{g} - Vetor correspondente a aceleração da gravidade
- H - Altura
- h - Altura do degrau em um escoamento com expansão súbita
- k - Condutividade térmica
- k_i - Média ponderada de uma propriedade na face i
- L - Largura
- Le - Comprimento de entrada em escoamento entre placas planas
- \max - Função para extrair o maior entre dois números
- n - Direção ortogonal (normal) a fronteira
- \hat{n} - Vetor normal à face
- NT - Número total de triângulos em uma malha
- P - Pressão
- R - Constante para a mistura de gás utilizada
- Ra - Número de Rayleigh
- Re - Número de Reynolds
- R_p - Resíduo da solução iterativa de um sistema linear de equações
- R_u - Resíduo da solução de uma equação envolvendo u
- R_v - Resíduo da solução de uma equação envolvendo v
- S - Tamanho da face triangular
- S_b - Termo fonte
- T - Temperatura
- t - Tempo
- u - Componente do vetor velocidade no sentido do eixo X
- v - Componente do vetor velocidade no sentido do eixo Y
- V - Volume
- \vec{V} - Vetor velocidade
- X - Eixo em coordenadas Cartesianas
- Y - Eixo em coordenadas Cartesianas
- Z - Eixo em coordenadas Cartesianas

Gregos

α - Difusividade térmica

α_i - coeficiente de uma interpolação linear na face i da célula

β - Coeficiente de expansão volumétrica

β_i - coeficiente de uma interpolação linear na face i da célula

ΔT - Diferença de temperatura

ε - Valor próximo de zero

ϕ - Variável de uma equação diferencial

Γ - Coeficiente de difusão

μ - Viscosidade

ν - Viscosidade cinemática

ρ - Densidade do fluido

τ - Direção tangencial (paralela) a fronteira

\equiv

σ - Tensor tensão

Ω - Espaço interior de um domínio fechado

$\partial\Omega$ - Fronteira de um domínio fechado

$\overline{\Omega}$ - Domínio fechado completo

Ψ

- Parte do termo não homogêneo de uma equação de Poisson para P

Índices superiores

NT - Número de triângulos

Índices inferiores

a, b, c - face a, b ou c do triângulo

A, B, C - Localização do circuncentro do Triângulo vizinho A, B ou C

i - face $i = (a, b$ ou $c)$ do triângulo P

I - Vizinho $I = (A, B$ ou $C)$ de um triângulo P

o - Valor de referência (usado em ρ, P, T, u)

P - Localização do circuncentro do Triângulo

Va - Índice referente ao vértice a de um triângulo

Vb - Índice referente ao vértice b de um triângulo

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nos últimos 40 anos, a modelagem e simulação dos fenômenos associados à dinâmica dos fluidos ganharam um grande impulso com o avanço dos computadores digitais. A modelagem numérica, conhecida dentro dos meios de utilização tais como indústria e laboratórios como Dinâmica de Fluidos Computacional¹ (DFC), tem sido largamente empregada, tendo em vista a facilidade de aplicação e o baixo custo com relação aos experimentos.

A modelagem numérica de escoamentos viscosos incompressíveis tem sido bastante estudada, sobretudo perante o desenvolvimento de algoritmos de acoplamento pressão - velocidade. Com isso, uma grande quantidade de estratégias para se obter a solução numérica das equações que modelam os fenômenos associados à dinâmica dos fluidos tem sido desenvolvidas.

Neste trabalho faz-se uso de malhas não-estruturadas com elementos triangulares para a discretização do domínio de cálculo. Foi usado o arranjo co-localizado centrado na célula com variáveis primitivas, permitindo o cálculo das variáveis envolvidas no mesmo local. Para a modelagem dos fenômenos associados à dinâmica dos fluidos faz-se uso das equações de Navier-Stokes, cujos termos viscosos têm sido discretizados com a abordagem baseada no circuncentro (Travelho et al, 1999) do elemento triangular o qual representa a célula de controle. Já os termos convectivos são discretizados por um esquema espacial do tipo *up-wind*.

A evolução do campo de pressão é obtida tomando-se o divergente da equação de quantidade de movimento, aplicando-se condições de contorno do tipo Neumann. O algoritmo de solução é de aplicação simples, sem necessidade de termos de correção ou

¹ Computational Fluid Dynamics (CFD)

relaxação para qualquer propriedade envolvida. E, na solução do sistema de equações lineares, um “SOLVER” específico foi desenvolvido de acordo com a forma e largura de bandas da matriz resultante.

Os testes computacionais (*benchmarks*) foram realizados em problemas clássicos de escoamento bidimensional, incompressível, viscoso e laminar, como o escoamento em desenvolvimento entre placas planas (*Poiseuille Flow*), o escoamento em uma cavidade (*Lid-Driven Cavity*), o escoamento em um degrau com expansão súbita (*Backward-facing step*) e em problemas de convecção natural ou livre com aproximação de Boussinesq.

O trabalho situa-se como um desenvolvimento do método da Abordagem Baseada no Circuncentro (Travelho et al, 1999) e também como uma aplicação do trabalho de Pereira Filho (2000), com novas simulações numéricas envolvendo diferentes condições de contorno, campo de velocidade com a presença de vórtices e acoplamento de mais uma equação de transporte.

1.1 – Aspectos Históricos da DFC e Revisão Bibliográfica

Inicialmente, como aspecto histórico, serão tratados os trabalhos que contribuíram, ainda em um estágio inicial, para o avanço da DFC e, posteriormente, será efetuada uma análise dos trabalhos que contribuíram e que se relacionam mais fortemente a esta tese.

L.F. Richardson, na primeira década do século passado, realizou o primeiro ensaio para se obter a solução numérica de equações diferenciais parciais, conforme Roache (1998). Um esquema foi desenvolvido para se obter uma solução iterativa da equação de Laplace semelhante ao método de Jacobi. Libmann, na segunda década do século passado, da mesma forma, resolveu a equação de Laplace, fazendo se uso de um algoritmo semelhante àquele de Gauss-Seidel.

Griebel et al (1998) cita que o primeiro trabalho a resolver numericamente equações diferenciais parciais diretamente aplicadas à dinâmica de fluidos foi obra de Thom em 1933. Thom utilizou uma discretização por diferenças finitas com espaçamentos espaciais mais refinados em áreas específicas e de interesse no domínio de cálculo. Nesta época já se podia antever as possibilidades de solução de problemas de mecânica de fluidos através da solução numérica; entretanto, os computadores digitais ainda não estavam disponíveis o que inviabilizava a aplicação.

Roache (1998) relembra que muitos trabalhos pioneiros em DFC foram realizados no Laboratório Científico de Los Alamos. Entre eles destaca-se o trabalho de John Von Neumann, especificamente na ocasião da II Guerra Mundial, o qual desenvolveu um critério de estabilidade para equações parabólicas de diferenças finitas, apresentando um método para análise de sistemas linearizados. Em seu trabalho juntamente com Ritchmyer foi introduzido, pela primeira vez, o conceito de viscosidade artificial, que introduz um efeito viscoso com o objetivo de dissipar a solução, reduzindo os gradientes e espalhando o perfil.

Ainda na década de 50, ocorreu o aparecimento de diversos métodos numéricos para tratamento de equações diferenciais parciais, como o método Alternating direction implicit (ADI) e o método conhecido por “*LeapFrog*” de DuFort e Frankel. Na década de 60 apareceram vários trabalhos que possibilitaram verificar, na prática, a potencialidade dos métodos numéricos, especialmente para solução de escoamentos viscosos e incompressíveis. Em um artigo de Fromm, de 1964 (citado por Fortuna, 2000), são discutidos detalhes da aplicação de diferentes condições iniciais e de contorno no problema testado.

Um método numérico da mesma década que se tornou rapidamente popular foi o *Marker-and-cell* (MAC) descrito por Harlow e Welch em 1965 e desenvolvido no Laboratório de Los Alamos. Griebel et al (1998) destaca que, “apesar de sua simplicidade, o método é surpreendentemente flexível e eficiente, além de ser de fácil entendimento e por isto continua a ser usado ainda nos dias de hoje”. Foi também um

dos primeiros métodos numéricos a usar um arranjo deslocado de malha para posicionar as diferentes propriedades para cálculo. O método de MAC recebeu muitos esforços e melhorias que merecem ser citadas, como o método Simplified MAC (SMAC) de Amsden e Harlow (1970) e o método SOLA de Hirt e Cook (1972) que, conforme Fortuna (2000), simplifica a implementação das condições de contorno para pressão no método MAC.

Ainda sobre o método MAC, em 1968, Amsden e Harlow utilizaram-no para produzir um dos primeiros estudos numéricos da turbulência em fluidos, incorporando um modelo de turbulência diretamente ao método MAC. Os resultados apresentaram boa concordância com resultados experimentais.

Ao mesmo tempo em que, conforme cita Roache (1998), nos artigos de Harlow e Fromm e o de Macagno, ambos de 1965, ficaram estabelecidos, pela primeira vez, os conceitos de simulação numérica ou experimento computacional. Roache (1998) cita ainda que o aparecimento destes dois artigos marca, claramente, o aparecimento da Dinâmica de Fluidos Computacional como um importante assunto a merecer esforços da comunidade científica.

Chorin (1967), através de seu método de compressibilidade artificial, simulou o escoamento de um fluido através de um canal. Tal método consistia em tratar o problema incompressível como compressível, de maneira que a compressibilidade artificial possa desaparecer quando o sistema obtiver a convergência. Um ano mais tarde apresenta outro método, conhecido como método da projeção (ou método de passo fracionário), o qual, conforme citado por Fortuna (2000), consiste em outra filosofia para a resolução das equações de escoamento.

É importante citar também que as equações de transporte para dinâmica de fluidos podem ser descritas não apenas em função de suas variáveis primitivas, ou seja, em função de propriedades físicas do problema como pressão e velocidade, mas também através de formulações alternativas que usam, especialmente, função de corrente e

vorticidade. Conforme Fortuna (2000), estas formulações coexistiram até a década de 80, quando a formulação com variáveis primitivas passou a predominar nos artigos que tratam do assunto. O uso de formulações baseadas em vorticidade apareceram devido à dificuldade na determinação da pressão. Conforme Patankar (1980), vários autores destacaram-se no uso de tais métodos, entre eles, Dix, Fromm e Harlow em 1963, que se tornaram mais facilmente acessíveis após a publicação do livro dos autores Gosman et al em 1969.

Conforme Venkatakrisnan (1995), outros métodos e esquemas numéricos que surgiram e fizeram relativo sucesso, agora já na década de 70, foram os esquemas FCT – Flux Corrected Transport – por Boris e Book e o esquema *Total Variation Diminishing* (TVD) de Harten, ambos em 1973, os quais introduzem fluxos anti-difusivos para prevenir o aparecimento de oscilações espúrias. Deve-se citar também o método *Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws* (MUSCL) de Van Leer, surgido em 1979, que se tornou popular na década seguinte.

Outro método de sucesso, especificamente para o tratamento de escoamentos incompressíveis, e do qual derivam vários outros, é o conhecido *Semi IMPLICIT Linked Equations* (SIMPLE) de Patankar e Spalding (1972), que se baseia em uma discretização temporal semi-implícita, e usa conceitos de malha com arranjo deslocado ou desencontrado².

Seguindo o método SIMPLE, vários outros foram desenvolvidos com melhores propriedades numéricas, como o *SIMPLE Revised* (SIMPLER) (Patankar, 1980), *Pressure Implicit Momentum Explicit* (PRIME) (Maliska, 1981), QUICK (Leonard, 1979) e *SIMPLE Consistent* (SIMPLEC) (Van Doormaal e Raithby, 1984), assim como vários livros que popularizam o uso destes métodos como Patankar (1980) e Maliska (1995).

² Staggered grid

Tanto os métodos baseados no SIMPLE quanto o método de Chorin procuraram tratar especificamente o acoplamento entre pressão e velocidade em escoamentos incompressíveis. Sobre este assunto, Maliska (1995) cita que “... é didático deixar claro que desenvolver um algoritmo para este fim é obter uma equação para avançar os valores da pressão de uma maneira eficiente.”.

Abdallah (1987) e Roache (1998) citam que a forma mais precisa de se obter uma equação de evolução para pressão é através de uma equação do tipo Poisson para pressão, obtida através da aplicação do operador divergente à equação de conservação da quantidade de movimento, juntamente com uma condição do tipo Neumann para evolução dos valores do campo de pressão.

Outra importante discussão sobre o assunto pode ser encontrado em Gresho e Sani (1987), no qual se pode verificar a importância e também a dificuldade na obtenção de uma condição de contorno para pressão que satisfaça as leis de conservação de massa e quantidade de movimento. O autor propõe a utilização, também, de uma condição de contorno do tipo Neumann, como Abdallah (1987), obtida através da projeção da equação de conservação da quantidade de movimento na direção do vetor normal às fronteiras.

Outro fator analisado por Gresho e Sani (1987), Abdallah (1987) e, posteriormente, por Doescher et al (2001) trata de uma restrição do modelo para a conservação global de massa e necessária para que o problema tenha solução. Nestes trabalhos verifica-se se a condição de compatibilidade deve ser satisfeita. A condição de compatibilidade, relaciona o termo fonte da equação de Poisson com a condição de contorno de Neumann para pressão.

A solução da equação de Poisson de pressão pode ser obtida de muitas maneiras, sendo que a maioria dos autores preferem métodos iterativos clássicos. Entretanto, no trabalho de Bravo (1997) e de Platte (1998) usa-se um algoritmo explícito e direto para o cálculo da pressão.

Quase todos os trabalhos citados acima utilizam uma malha computacional retangular estruturada para o cálculo das grandezas de interesse, sendo esta tendência predominante até meados da década de 80. Com o avanço da computação e dos métodos de solução para problemas de DFC surgiram novos problemas que poderiam ser resolvidos com a aplicação dos trabalhos já desenvolvidos. Entretanto, a geração e adaptação de malhas computacionais a geometrias complexas representavam, e ainda representam, um sério desafio.

Muitas alternativas surgiram para o uso de malhas estruturadas, como o sistema de coordenadas coincidentes com a fronteira, técnicas de multi-blocos (Vatsa, Sanetrick, Parlette, 1993) ou a técnica conhecida por Chimera (Benek, Buning e Steger, 1985), a qual permite que diferentes malhas geradas, especificamente para diferentes variáveis, possam se sobrepor.

No intuito de gerar malhas computacionais que pudessem, com mais flexibilidade, se adaptar a domínios e geometrias complicados, procurou-se resolver as mesmas equações de transporte em uma malha na qual o elemento, célula ou volume de controle tivesse um formato arbitrário e, em muitas vezes, um diferente número de vizinhos, conforme seu formato, a qual não pode ser determinada por uma simples relação ou lei que conecte explicitamente seus pontos nodais ou células. Desta forma as células não seguem uma ordenação e organização espacial rígida.

Usualmente, as malhas não-estruturadas, em duas dimensões, são formadas por triângulos e, para domínios tridimensionais, por tetraedros, devido à relativa capacidade de adaptação a geometrias complexas que uma malha formada por estes tipos geométricos apresenta. Deve-se lembrar que estes elementos possuem uma vizinhança fixa; entretanto, como os elementos podem estar distribuídos ou arranjados em qualquer ordem dentro do domínio de cálculo, seus vizinhos não podem ser determinados naturalmente, o que exige, em termos computacionais, uma estrutura de dados que permita este relacionamento.

O algoritmo para geração de malhas não-estruturadas foge ao escopo deste trabalho, mas é uma área de pesquisa que se tornou popular desde meados da década de 80. Maiores referências podem ser encontradas no livro de Thompson et al (1985) e em Thompson e Weatherill (1993).

As vantagens e desvantagens do uso de malhas estruturadas e não-estruturadas são discutíveis e pode-se dizer que não existe ainda um consenso na comunidade entre o uso de qual tipo de malha. Os adeptos do método de elementos finitos foram os primeiros a utilizar malhas não estruturadas, que se popularizaram depois entre os adeptos do método de volumes finitos. O trabalho de Jameson e Mavriplis (1986) foi um dos primeiros a mostrar resultados da resolução de uma equação de Euler em uma malha bidimensional triangular regular, onde as células triangulares foram obtidas a partir da subdivisão de uma malha regular com volumes quadrangulares.

Mavriplis (1988) desenvolveu o chamado “Esquema Nodal”, no qual as grandezas de interesse são calculadas nos vértices dos triângulos da malha bidimensional. O volume de controle para cada ponto é formado pela união de todos os triângulos que compartilham um determinado vértice. Tal técnica implica na sobreposição dos volumes de controle formados. Mavriplis afirma que a aproximação utilizada é equivalente à utilização de uma discretização por Elementos Finitos com aproximação de Galerkin. Para resolver o sistema de equações discretizado é utilizado um esquema “Multigrid”.

Bonhaus (1993) optou por calcular as propriedades nos vértices, construindo volumes de controle conhecidos por “*median-dual*” a partir de uma malha triangular. Através do método de volumes finitos foi utilizado um esquema de diferenças centradas na discretização dos termos difusivos. Para a parte convectiva foi feito uso de um esquema de *flux-splitting*. Um algoritmo multigrid foi utilizado para resolver o sistema de equações discretizado.

Venkatakrishnan et al (1991) usaram o mesmo volume de controle *median-dual* em uma malha triangular na solução da equação de Euler. O cálculo das propriedades requer a resolução das integrais nos lados dos elementos triangulares da malha. Um esquema de Runge-Kutta de quarta ordem foi usado para avaliar a solução da equação de Euler no tempo. Todo o sistema foi, então, resolvido em máquinas paralelas do tipo *Multiple Instruction/Multiple Data* (MIMD).

Batina (1991) resolve a equação de Euler bidimensional em uma malha triangular com uma discretização seguindo o esquema *flux-difference-splitting*. Neste método o fluxo é dividido em suas contribuições avante e a ré. Assim, para cada face de uma célula triangular, os fluxos são calculados em um sistema local de coordenadas cartesianas na direção perpendicular e tangente à face. Para resolução do sistema de equações foi adotado um esquema de Gauss-Seidel.

Frink et al (1991) obtiveram a solução da equação de Euler em escoamentos compressíveis sobre uma malha não-estruturada tridimensional composta de elementos tetraedrais, utilizando um arranjo co-localizado, onde todas as variáveis são calculadas no centro da célula. A discretização foi feita através do esquema *flux-difference-splitting*, seguido de um novo processo de reconstrução da célula de cálculo. No próximo trabalho de Frink (1994) foi efetuada uma adaptação e ampliação do método original para permitir a solução de problemas viscosos. Os fluxos difusivos foram calculados nos vértices de células tetraedrais e, depois, através de uma média em torno dos vértices, foi possível obter o valor no centróide.

Mavriplis (1992) utilizou-se do método “multigrid” para solução da equação de Euler em malhas formadas por tetraedros, onde as propriedades são calculadas nos vértices. Foi criado um “solver” bastante eficiente no tratamento da estrutura de dados baseada em arestas.

Halt e Agarwal (1992) descrevem dois métodos para se construir aproximações de ordem mais alta para discretizações seguindo um esquema *cell-centered* em malhas

triangulares. Os resultados demonstram que os esquemas de ordem mais alta conseguiram resultados com melhorias de precisão da ordem de uma magnitude em relação aos métodos convencionais. Os resultados mostram também um comparativo entre os dois métodos desenvolvidos, enfocando prós e contras de suas aplicações a diferentes tipos de problemas.

Barth e Linton (1995) utilizaram uma discretização por volumes finitos para uma malha triangular e tetraedral, onde as propriedades de massa, quantidade de movimento e energia são calculadas nos vértices dos triângulos ou tetraedros. Os volumes de controle são formados pelo esquema *median-dual*. As integrais são aproximadas por quadratura numérica. Para resolução do sistema de equações usa-se um algoritmo iterativo de Newton. Para o caso tridimensional recorre-se a recursos de computação paralela em multiprocessadores.

Em outro trabalho, Venkatakrishnan e Mavriplis (1995) usam o mesmo esquema *median-dual*. Entretanto, neste caso, resolvem a equação de Navier-Stokes bidimensional, incluindo termos viscosos para uma malha seguindo os contornos do aerofólio NACA 0012. As integrais nas células são, então, calculadas sobre as faces do volume de controle usando a regra do trapézio. O sistema de equações resultante é resolvido de forma implícita em conjunto com um esquema “Multigrid”.

Hwang (1995) usou uma malha com arranjo deslocado (“*staggered grid*”), na qual grandezas escalares são calculadas no baricentro da célula triangular e grandezas vetoriais como velocidade, por exemplo, são calculadas nos lados ou paredes da célula triangular. Neste trabalho, para o cálculo do fluxo difusivo, é definido um novo sistema de coordenadas local para cada face da célula. Adota-se também um esquema do tipo SIMPLE para correção de pressão.

Outro trabalho seguindo esta linha é o de Despotis e Tangaris (1995), no qual a equação de Navier-Stokes discretizada para uma malha triangular é resolvida utilizando o método de volumes finitos em uma malha deslocada, mas calculando a pressão no

centro da célula e a velocidade nos vértices. Assim, tem-se dois volumes de controle diferentes para resolver um sistema de equações.

Date (1996) apresenta uma nova equação para correção de pressão, específica para malhas com arranjo co-localizado, a qual deve ser, ainda, submetida a um processo de suavização antes de ser aplicada. Os problemas testados incluem o escoamento de Hagen-Poiseuille entre placas planas, o escoamento em uma cavidade e o escoamento em um degrau. Date também discute a causa para as oscilações numéricas na solução da equação de evolução de pressão, comuns na solução com malhas de arranjo co-localizado.

Mathur e Murthy (1997) resolvem o problema do escoamento incompressível em malhas não estruturadas feitas de poliedros convexos e arbitrários. O arranjo é co-localizado no centróide das células e o algoritmo de solução assemelha-se ao método SIMPLE. Neste artigo também encontra-se uma interessante maneira para aproximação dos termos difusivos das equações de transporte.

Pereira Filho (2000) resolveu o problema de Hagen-Poiseuille em tubos e dutos de seção quadrada utilizando-se de uma malha tridimensional formada por elementos prismáticos retos de base triangular. As grandezas de interesse eram co-localizadas no ponto equidistante das bases sobre o eixo que passa pelo circuncentro (Travelho et al, 1999) dos triângulos da base. A malha utilizada pode ser considerada estruturada no sentido perpendicular às bases e não estruturada e triangular nos planos da base. A estratégia de solução mostrou-se viável em problemas tridimensionais, que podem adaptar-se a prismas, como os citados acima. A equação para evolução da pressão foi obtida através da aplicação do operador divergente à equação de Navier-Stokes, obtendo, assim, uma equação de Poisson. A aproximação dos termos viscosos segue a abordagem baseada no circuncentro de Travelho et al (1999).

Um desenvolvimento independente e paralelo à abordagem baseada no circuncentro, mas que segue os mesmos princípios e também uma discretização por volumes finitos, é

o esquema de quatro pontos, encontrado nos trabalhos de Herbin (1995), Herbin e Labergerie (1997) e Gallouët et al (2000). Nestes artigos utiliza-se, também, do circuncentro de um triângulo como local onde são calculadas as variáveis de interesse. Em Herbin (1995) é exibida a solução de uma equação de convecção-difusão para uma propriedade escalar em uma malha triangular não estruturada com o esquema de quatro pontos. Em Herbin e Labergerie (1997), é apresentada a comparação de vários esquemas que utilizam o método de volumes finitos incluindo a solução, novamente, da equação de convecção-difusão e também a solução de um sistema de equações acopladas com grandezas escalares. Finalmente, em Gallouët et al (2000) é testada a solução da mesma equação com diferentes condições de contorno.

No trabalho de Kwak et al (1999) é apresentado um esquema de solução do tipo Multigrid para a solução de uma equação envolvendo uma propriedade escalar ($-\Delta u = f$), pelo método de diferenças finitas. A malha utilizada para cálculo é regular e triangular, sendo que a propriedade de interesse é calculada no circuncentro da célula triangular.

Doecher et al (2000) resolveram as equações de Navier-Stokes em escoamento incompressível em uma malha computacional mista, formada em parte por uma malha retangular estruturada, e em parte por uma malha não estruturada. A região de intersecção entre as duas malhas permite a sobreposição das células. A equação para cálculo da pressão é obtida, também, através da aplicação do operador divergente à equação de Navier-Stokes, sendo suas condições de contorno do tipo Neumann, como definido em Gresho e Sani (1987).

1.2 – Organização do trabalho

O próximo Capítulo propõe-se a fornecer um embasamento teórico da modelagem numérica de escoamentos viscosos incompressíveis e laminares tratados por esta tese. Detalha-se também a questão do acoplamento pressão – velocidade e suas condições de contorno.

No Capítulo 3 será mostrada a forma de transformação das equações diferenciais em equações algébricas prontas a serem resolvidas numericamente, explicitando a aproximação para os termos convectivos e difusivos das equações de transporte. Serão discutidas também as condições de contorno aplicadas às equações discretizadas, o algoritmo de solução geral e específico para o “SOLVER”.

Os resultados das simulações numéricas de todos os casos testados podem ser encontrados no Capítulo 4. Nele também podem ser verificados os resultados comparativos da Abordagem Baseada no Circuncentro aplicado a transferência de calor com dois outros métodos clássicos disponíveis na literatura.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões e sugestões para futuros desenvolvimentos e aplicações que poderiam ser derivadas deste trabalho. Nas conclusões serão ressaltadas a simplicidade e a flexibilidade do método nas simulações apresentadas, lembrando que seus resultados apresentaram boa concordância com estimativas analíticas, experimentais ou numéricas disponíveis, conforme o teste envolvido. Serão citadas também as limitações da presente técnica.

Finalizando, no Apêndice A é possível encontrar detalhadamente o processo de discretização por volumes finitos para a equação de conservação da quantidade de movimento e no apêndice B discute-se a aplicação da condição de contorno para pressão nas fronteiras referentes a uma parede sólida.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA MODELAGEM NUMÉRICA

Neste capítulo é apresentado, sucintamente, o embasamento teórico para modelagem numérica dos problemas tratados por esta tese, abordando alguns dos aspectos mais gerais da Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC). A dinâmica de fluidos computacional (em inglês CFD – *Computational Fluid Dynamics*) é uma sub-área da Computação Científica que trata dos estudos de métodos computacionais para modelagem de fenômenos físicos, envolvendo o escoamento de fluidos.

Com base nos dados obtidos com este tipo de simulação, um engenheiro pode melhorar suas análises e projetos, simulando condições extremas onde o custo e dificuldade da experimentação prática torna a simulação proibitiva. Os dados obtidos através da experimentação numérica devem ser, evidentemente, confiáveis para que possam ser aplicados. Entretanto, os desvios da solução correta subdividem-se em duas classes:

- Erros puramente numéricos, resultado de uma solução errada obtida mesmo a partir do correto modelamento matemático. Neste caso, os aspectos de precisão numérica da máquina envolvida, e restrições de convergência dos métodos e algoritmos aplicados, podem ser os causadores.
- Erros da Modelagem Matemática, no qual as equações aplicadas ao problema não modelam bem, fisicamente, o fenômeno que ocorre.

As subseções seguintes tratarão de indicar a modelagem matemática para os problemas de interesse nesta tese.

2.1 – Equações de Transporte

As equações mais freqüentes em mecânica de fluidos expressam princípios de conservação e definem um balanço entre os vários modos de transporte e o termo transiente referente à uma variável de interesse. Esta variável dependente representa uma grandeza física intensiva. Para a representação destes fenômenos de transporte pode-se utilizar uma equação diferencial parcial na qual a variável dependente será dada pela variável genérica ϕ . A partir desta, pode-se construir todas as equações diferenciais presentes neste trabalho. Esta equação diferencial escrita na forma conservativa em notação vetorial será dada pela Equação (2.1) a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{V}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_b, \quad (2.1)$$

onde ρ representa a densidade do fluido, o vetor \vec{V} representa o vetor velocidade, Γ representa o coeficiente de difusão e S_b o termo fonte. Através da utilização desta equação é possível efetuar, por exemplo, o cálculo de escoamento incompressível ou de transferência de calor, como os tratados nesta tese. Convém citar que as próximas equações estarão também em notação vetorial, como pode ser encontrada em Schlichting (1979), Maliska (1995), Fortuna (2000), Patankar (1980) e Griebel et al (1998).

Na Equação (2.1) o primeiro termo representa a variação temporal da quantidade total da grandeza $\rho\phi$ no volume de controle; o segundo termo representa a variação devido ao transporte convectivo; o terceiro termo representa a variação devido ao transporte difusivo, e o último é responsável pela geração ou destruição da entidade por unidade volume. A primeira equação a ser obtida a partir da Equação (2.1) é a equação de conservação de massa estacionária, sem fontes ou sumidouros, que representa o princípio de conservação de massa. Para esta equação temos que $\phi = 1$, $\Gamma = 0$ e $S = 0$,

sendo que a derivada $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Assim, a equação de conservação de massa será dada por (2.2):

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.2)$$

A próxima equação envolve o princípio da conservação da quantidade de movimento, sendo uma aplicação da Segunda Lei de Newton, resultando em uma equação onde as taxas de variação temporal do momento são iguais às forças de campo e de superfície que atuam sobre o fluido. Assim, a equação de quantidade de movimento estacionária sem fontes ou sumidouros, será obtida quando $\phi = \vec{V}$ e considerando o termo $(\Gamma \nabla \vec{V})$, representado o fluxo difusivo de momento, como $\nabla \cdot \vec{\sigma}$.

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f}, \quad (2.3a)$$

onde o termo $\rho \vec{f}$ representa as forças de corpo, a qual, neste caso, representará a força gravitacional por unidade de massa. Assim, $\vec{f} = \vec{g}$.

Considerando um fluido newtoniano com viscosidade (μ) e densidade (ρ) constantes, pode-se modelar o termo $\nabla \cdot \vec{\sigma}$ convenientemente de maneira a se obter a conhecida equação de Navier-Stokes (para ρ e μ constantes), dada por (2.3b):

$$\rho \nabla \cdot (\vec{V} \vec{V}) = \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g} - \nabla P, \quad (2.3b)$$

onde o termo ∇P representa o gradiente de pressão.

A terceira Equação (2.4) representa o princípio de conservação da energia aplicado a um fluido newtoniano, em estado estacionário, sem fontes ou sumidouros de calor,

considerando constantes a condutividade térmica (k) e calor específico a pressão constante (C_p). Para tanto, pode-se obtê-la de maneira simplificada, tomando $\phi = T$

(temperatura) e $\Gamma = \frac{k}{c_p}$:

$$\nabla \cdot (\rho \nabla T) = \nabla \cdot \left(\frac{k}{c_p} \nabla T \right) \quad (2.4)$$

Importante ressaltar que todos os problemas aqui tratados referem-se a escoamentos laminares e incompressíveis, assim o valor de ρ será tratado como constante. Nos problemas de interesse neste trabalho o coeficiente de viscosidade também será considerado constante. Para modelagem do problema de convecção natural o escoamento não será isotérmico, embora as variações de temperatura serão suficientemente pequenas de modo a não causar grandes variações de densidade e viscosidade do fluido.

2.2 - Acoplamento Pressão Velocidade para Escoamentos Incompressíveis

O acoplamento entre pressão e velocidade concentra grande parte dos esforços para solução de problemas de escoamentos de fluidos. A forma do acoplamento varia pois o escoamento poder ser compressível ou incompressível. Em escoamentos onde a densidade ρ varia principalmente com a pressão P , a equação de estado pode fazer o relacionamento entre ρ , P e T (temperatura) e, conseqüentemente, fechar o sistema de equações a ser resolvido, bem como fornecer um meio para o cálculo da pressão. Este tipo de escoamento é comum, por exemplo, quando se trabalha com gases em alta velocidade. A equação de estado para gases perfeitos pode ser descrita pela Equação (2.5):

$$P = \rho RT, \quad (2.5)$$

sendo R a constante para a mistura de gás que está sendo usada.

Se a massa específica não varia de forma significativa o escoamento é considerado incompressível e a equação de estado não pode ser usada. Assim, não se tem mais uma equação de evolução para a determinação da pressão. Esta costuma ser definida, geralmente, a partir das equações de conservação de massa e quantidade de movimento. Este acoplamento pressão-velocidade costuma ser o grande desafio nos escoamentos incompressíveis.

Em alguns casos, como a convecção natural, permite-se que o valor de ρ apresente pequenas variações apenas com relação a temperatura, entretanto, a determinação da pressão P continua a ser calculada sem o uso da equação de estado. Tanto na convecção natural quanto em escoamentos incompressíveis, a determinação do campo de pressão é necessária para que o campo de velocidades satisfaça a equação de conservação de massa.

São vários os métodos de solução para esta classe de problemas. No capítulo 1 é possível encontrar uma revisão bibliográfica que inclui assuntos relacionados à solução de escoamentos incompressíveis. Apenas como informação adicional deve-se lembrar que a modelagem de escoamentos incompressível em duas dimensões foi tratada durante muito tempo através do uso da função de corrente e vorticidade, a qual eliminava a pressão da formulação com variáveis primitivas, resolvendo o problema do acoplamento pressão-velocidade. Entre os trabalhos que se destacaram utilizando esta formulação estão Dix (1963), Fromm e Harlow (1963), Gosman e outros (1969).

Atualmente, a maioria dos métodos de solução trabalha com as variáveis primitivas, procurando obter uma equação para cálculo da pressão de maneira que a equação de conservação de massa seja satisfeita. Seguindo esta idéia, uma das primeiras técnicas utilizadas foi a da “Compressibilidade Artificial” ou “pseudocompressibilidade”, que procura resolver o problema do escoamento incompressível através de técnicas numéricas utilizadas em escoamentos compressíveis. Chorin (1967) resolveu um

problema de convecção térmica em duas e três dimensões, através de uma formulação que introduzia um termo $\partial P/\partial t$ na equação de conservação de massa, de maneira que quando a solução no estado estacionário for obtida, este parâmetro não interfira na solução.

Em alguns trabalhos utiliza-se uma equação de Poisson para pressão. Uma maneira de se obtê-la foi definida pelo método SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), desenvolvido por Patankar e Spalding (1972), no qual, através da substituição da equação de conservação da quantidade de movimento na equação de conservação de massa discretizada era possível obter-se uma equação para P , mas que, de acordo com o método, deve se comportar com uma equação para correção de pressão.

Mais tarde, aprimorando o método, Patankar (1980) desenvolveu o esquema SIMPLER (SIMPLE Revised), no qual a equação de correção de pressão era aplicada apenas para o cálculo do campo de velocidades, deixando o campo de pressão ser determinado diretamente por meio de uma equação de Poisson para pressão. Depois deste, outros métodos derivados do SIMPLE apareceram, como o SIMPLEC (Van Doormaal e Raithby, 1984) e o PRIME (Maliska, 1995). Uma descrição detalhada pode ser encontrada em Maliska (1995).

Neste trabalho o procedimento empregado segue o trabalho de Gresho e Sani (1987), o qual utiliza uma equação de Poisson para pressão. Esta equação é responsável pelo acoplamento entre Pressão-Velocidade e deverá satisfazer a equação de conservação de massa. A equação pode ser obtida através da aplicação do operador divergente à equação de conservação da quantidade de movimento (2.3b), obtendo assim:

$$\nabla \cdot [\rho \nabla \cdot (\overset{\mu}{V} \overset{\mu}{V})] = \nabla \cdot [-\nabla P + \mu \nabla^2 \overset{\mu}{V} + \rho \overset{\rho}{g}] \quad (2.6)$$

Esta, após um rearranjo, pode ser escrita como:

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot \left[-\rho \nabla \cdot (\overset{\mu}{V}\overset{\mu}{V}) + \mu \nabla^2 \overset{\mu}{V} + \rho \overset{\rho}{g} \right] \quad (2.7)$$

Assim, as equações a serem discretizadas por algum método numérico e resolvidas como um sistema de equações algébricas serão, para problemas isotérmicos: (2.3b) e (2.7). Para problemas não isotérmicos, como o de convecção natural, deve-se utilizar: (2.3b), (2.4) e (2.7). Lembrando que, em ambos os casos, a solução deve satisfazer a Equação de conservação de massa (2.2).

2.3 – Condições de Contorno

Considerando um domínio fechado $\bar{\Omega} \equiv \Omega + \partial\Omega$, onde $\partial\Omega$ representa a fronteira (contorno) e Ω a região interna, uma estimativa inicial que deve ser respeitada para escoamentos incompressíveis é a satisfação a equação da conservação de massa, ou seja:

$$\nabla \cdot \overset{\mu}{V} = 0 \text{ em } \bar{\Omega} \quad (2.8)$$

Quanto às condições de contorno, existem casos bem estabelecidos para a velocidade, uma vez que, conforme Gresho e Sani (1987), a definição de condições de contorno para o vetor velocidade deve ser suficiente para a determinação de $\overset{\mu}{V}$ e P , uma vez que não existem, *a priori*, condições de contorno para P . Assim, tem-se para a velocidade:

$$\int_{\partial\Omega} \overset{\mu}{V} \cdot \overset{h}{n} = 0, \quad (2.9)$$

onde $\overset{h}{n}$ representa o vetor normal à face definida por $\partial\Omega$, sendo que a condição (2.9) implica que o sistema deve respeitar a conservação global de massa.

A condição de contorno para o vetor velocidade quando este é definido no contorno, e portanto, condição de Dirichlet para $\overset{\mu}{V}$ em $\partial\Omega$, será:

$$\vec{V} \cdot \hat{n} = C \text{ em } \partial\Omega, \quad (2.10)$$

onde C é uma constante. Um caso particular e muito comum de (2.10), devido à condição de aderência presente em paredes sólidas (*no slip condition*), será:

$$\vec{V} = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (2.11)$$

Outro caso a ser citado, especialmente em escoamentos onde é definida uma região de saída do fluido, é a condição de Neumann (2º tipo) para o vetor velocidade. Nesta tese interessam apenas as condições onde:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (2.12)$$

Para todos estes casos, novamente seguindo Gresho e Sani (1987), a definição da condição de contorno para a pressão pode ser obtida como uma condição de Neumann, formulada através da projeção da Equação de conservação da quantidade de movimento (2.3b) sobre o contorno $\partial\Omega$ na direção da normal externa \hat{n} , resultando na Equação (2.13):

$$\hat{n} \cdot \nabla P = \hat{n} \cdot \left[-\rho \nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g} \right] \text{ em } \partial\Omega \quad (2.13)$$

Conforme os mesmos autores, a existência de uma força de flutuação, como por exemplo, na aproximação de Boussinesq utilizada em problemas de convecção natural, não causa nenhuma dificuldade adicional. Assim, quando se necessitar da pressão ou de sua derivada definida em alguma região do contorno, como na equação discretizada da equação de conservação da quantidade de movimento, pode-se usar a Equação (2.13) para sua determinação.

Para que o problema descrito tenha solução, é necessário a satisfação de uma restrição do modelo para a conservação global de massa, a qual pode ser obtida utilizando-se a Identidade de Green:

$$\iint_{\Omega} (\nabla^2 P) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial P}{\partial n} d(\partial\Omega) \quad (2.14)$$

A Equação (2.14) relaciona o termo heterogêneo da equação de Poisson de pressão com a condição de contorno de Neumann aplicada à mesma. (Gresho e Sani, 1987, Abdallah, 1987 e Doescher et al , 2001). Ainda conforme Doescher et al (2001), se o domínio de cálculo Ω for subdividido em outros N sub-domínios ou células Ω_i , onde $i = 1, 2, \dots, N$, e aplicando em (2.14), tem-se a condição de compatibilidade:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial P}{\partial n} d(\partial\Omega_i) = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_i} [(-\rho \nabla \cdot (\frac{\rho \rho}{V V}) + \mu \nabla^2 V + \rho g) \cdot \hat{n}] d(\partial\Omega_i) \quad (2.15)$$

Os mesmos autores citam que, como cada fronteira interna (ou face) $\partial\Omega_i$, divide dois sub-domínios (ou células) Ω_i , as integrais de (2.15) deverão aparecer com sinais invertidos, anulando-se mutuamente. Desta forma, a integral (2.15) deve ser calculada apenas nos contornos $\partial\Omega$ do domínio total Ω .

Admitindo uma aproximação para as integrais calculadas em $\partial\Omega$, a Equação de compatibilidade (2.15) pode ser escrita como:

$$\sum_{i \in \partial\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \Big|_i S_i \right) = \sum_{i \in \partial\Omega} [(-\rho \nabla \cdot (\frac{\rho \rho}{V V}) + \mu \nabla^2 V + \rho g) \cdot \hat{n}_i] S_i \quad (2.16a)$$

ou

$$\sum_{i \in \partial\Omega} \left\{ \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_i - \left[(-\rho \nabla \cdot (\overset{\rho}{V} \overset{\rho}{V}) + \mu \nabla^2 \overset{\rho}{V} + \rho \overset{\rho}{g}) \cdot \hat{n}_i \right] \right\} S_i = 0 \quad (2.16b)$$

Conforme Doescher et al (2001), a Equação (2.16b) é uma condição necessária, porém, não suficiente para que o sistema tenha solução. No capítulo seguinte será possível examinar a aplicação das condições de contorno aqui definidas nas equações discretizadas.

CAPÍTULO 3

DISCRETIZAÇÃO E SOLUÇÃO

Como se sabe, com o uso de técnicas numéricas de solução de equações diferenciais parciais (EDPs), a região do domínio Ω não é tratada como contínua, mas sim como um conjunto discreto e finito de pontos ou sub-domínios na qual as variáveis de interesse são calculadas, sendo que quanto maior for o seu número, mais próxima da solução exata será a solução aproximada. O conjunto discreto de pontos ou sub-domínios constitui a malha. Conforme Boris (1989), esta é a idéia fundamental das técnicas numéricas: a dimensão espacial é dividida em um conjunto discreto de pontos ou células (malha) e o tempo é discretizado em pequenos intervalos.

Uma vez que o domínio deve estar discretizado, isto é, dividido em pontos ou células, deve se obter um conjunto de equações escritas em função dos valores das variáveis em outros pontos da malha. Este procedimento resulta em um sistema de equações algébricas, geralmente lineares, que representam as EDPs no espaço computacional. Os principais métodos numéricos para discretização de EDPs são, atualmente, o Método de Diferenças Finitas (MDF), o Método de Elementos Finitos (MEF) e o Método de Volumes Finitos (MVF).

No MDF as derivadas da EDP são aproximadas por diferenças, as quais podem ser obtidas, por exemplo, utilizando-se de expansões em série de Taylor ao redor de pontos nodais distribuídos no domínio. Historicamente, o MDF vem sendo empregado, há muito tempo, pelos analistas na área de DFC e teve seu desenvolvimento baseado em sistemas de coordenadas ortogonais. No MEF são empregadas funções de interpolação e as equações discretizadas aproximadas são obtidas através da minimização de um resíduo ponderado baseado em um critério adequado, através da escolha de uma função peso onde o mais conhecido é o método de Galerkin. O MEF foi muito empregado, no início, para solução de problemas de elasticidade na área estrutural, e teve a vantagem de utilizar, desde seu desenvolvimento, malhas não estruturadas.

Conforme citado por Maliska (1995), recentes desenvolvimentos no MEF aplicado em nível de volumes elementares, resultou no método dos elementos finitos baseado no volume de controle, conhecido na literatura como CVFEM (Control Volume Finite Element Method), cujo objetivo é obter as equações aproximadas em nível de volumes elementares em uma base de elementos finitos. Entretanto, muitos autores não consideram o CVFEM como um método derivado do MEF. Nesta tese trabalhar-se-á apenas com o Método de Volumes Finitos (MVF), o qual será descrito com mais detalhes na seção 3.2.

3.1 - Malhas Estruturadas e Não Estruturadas

Malhas são usadas em muitas áreas de aplicação. Em cartografia e geoprocessamento, por exemplo, o uso de malhas possibilita uma representação compacta das propriedades de um determinado terreno. Em computação gráfica muitos objetos são representados por malhas antes de serem “renderizados”. Finalmente, malhas são também essenciais para a solução numérica de equações diferenciais parciais que surgem nas mais diversas áreas da física. Esta seção pretende concentrar-se nesta última área de aplicação, com particular interesse na resolução de problemas de DFC.

Como foi visto no início do capítulo, quando se utiliza um método numérico deve se discretizar o domínio do problema em um conjunto de pontos ou sub-domínios. A primeira escolha é a utilização de um sistema de coordenadas cartesianas para discretização devido a sua simplicidade. Entretanto, deve-se saber que este sistema é bastante limitado para resolver problemas do mundo real, onde, na maioria dos casos, a geometria é bastante complicada. Como exemplo, pode-se citar uma discretização cartesiana para um domínio não simplesmente conexo apresentando uma região circular no centro, conforme a Figura 3.1. Uma solução seria usar uma malha preenchendo todo o domínio, inclusive o buraco, e bloquear ou desabilitar algumas células referentes à posição do buraco.

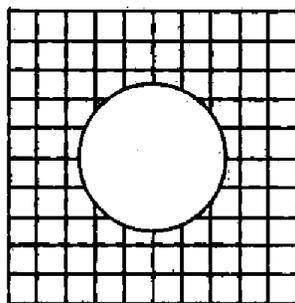


Fig. 3.1: Malha com coordenadas cartesianas.
FONTE: Maliska (1995).

Se a discretização utilizada for obtida através da utilização de um sistema de coordenadas dizemos que a discretização resultante é estruturada, uma vez que cada volume ou ponto interno tem sempre o mesmo número de vizinhos e a numeração dos mesmos tem uma seqüência natural. Este tipo de discretização apresenta uma série de vantagens para a implementação do programa computacional, pois a regra de ordenação dos elementos simplifica todas as rotinas. Além disso, e principalmente, a matriz resultante tem diagonais fixas, permitindo que métodos para matrizes com banda fixa possam ser aplicados. (Maliska, 1995)

Outro tipo de malha estruturada é a chamada malha em coordenadas generalizadas, na qual geralmente se constrói uma malha baseada em um sistema de coordenadas coincidentes com a fronteira ou que permita a concentração de pontos em áreas específicas do domínio. O uso de tais malhas exige que se encontre uma transformação entre o sistema cartesiano (x, y, z) , representando o domínio físico, e um sistema generalizado, representando o domínio transformado ou computacional. Um exemplo pode ser encontrado na figura 3.2:

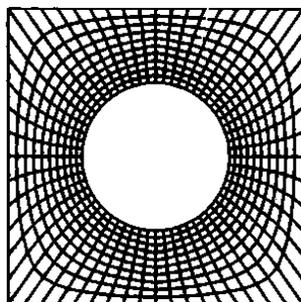


Fig. 3.2: Malha com coordenadas coincidentes com a fronteira.
FONTE: Maliska (1995).

Neste trabalho, as técnicas numéricas basearam-se em malhas não estruturadas, que, em geral, permitem a discretização de geometrias complexas de maneira mais direta do que seria possível com malhas estruturadas, pois apresentam uma adaptatividade e versatilidade muito maior, devido ao fato de não exigir a obrigatoriedade e rigidez de ordenação e vizinhança entre células ou pontos (Figura. 3.3). Entretanto, este aspecto também caracteriza uma de suas grandes desvantagens: a dificuldade de estabelecer uma regra de ordenação. O resultado dessa ordenação estabelece o tamanho das bandas da matriz e o número de vizinhos. Essa variação no tamanho da banda da matriz impossibilita a aplicação de muitos métodos de solução de sistemas lineares. As vantagens e desvantagens são discutíveis e pode-se dizer que ainda não existe um consenso na área de DFC quanto ao uso dos dois tipos de malhas.

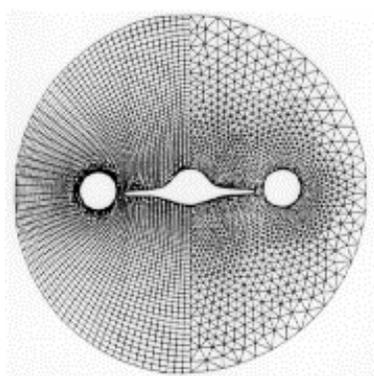


Fig. 3.3: Comparativo de geometria discretizada pela metade com malha estruturada e metade com malha não estruturada.
FONTE: McGrory et al (1991).

O trabalho de Jameson e Mavriplis (1986) foi um dos primeiros a mostrar resultados da resolução de uma equação de Euler em uma malha bidimensional triangular regular, obtida a partir da subdivisão de uma malha de volumes quadrangulares. Normalmente, em malhas bidimensionais, a discretização consiste em um conjunto de triângulos e para o caso tridimensional, de tetraedros.

Existem diversos métodos para geração de malhas não estruturadas, como por exemplo a técnica de avanço de frente e a técnica de triangulação de Delaunay. Se a malha resultante for baseada em triângulos ou tetraedros, procura-se gerar volumes o mais homogêneos e regulares possíveis, ou seja todos respeitando um certo formato, não tendo ângulos internos muito agudos ou obtusos. Além disso, devido a precisão numérica, não é aconselhável a existência de volumes muito pequenos na vizinhança imediata de volumes bem maiores, sendo necessária sempre uma certa suavidade na transição dos volumes pequenos para os grandes. Os métodos e técnicas de geração de malhas não estruturadas fogem do escopo deste trabalho. Assim, maiores informações podem ser encontradas em Thompson e Weatherill (1993).

Cada discretização consiste de um conjunto de pontos e de um sistema de equações algébricas para calcular os valores nos pontos discretos. Existem diferentes maneiras para se transformar uma equação diferencial parcial, baseada na hipótese do *continuum*, em uma equação algébrica discretizada. Cada diferente forma tem propriedades distintas, conseguindo aproximar melhor uma situação que outra. A escolha correta depende de muitas propriedades do problema a ser resolvido e dos recursos computacionais disponíveis.

O uso do método de volumes finitos permite que se calcule as propriedades discretas tanto nos vértices, comumente chamado na literatura de esquema “*cell-vertex*”, quanto em uma posição no centro da célula, ou “*cell-centered*”. Para Venkatakrishnan (1995a), os esquemas baseados em uma discretização *cell-vertex* adaptam-se melhor no cálculo de fluxos viscosos, especialmente quando os volumes são muito irregulares. Isto se

deve, provavelmente, devido à dificuldade de cálculo dos fluxos difusivos nas faces de um volume de controle.

O volume de controle adotado no uso de esquemas *cell-centered* é, normalmente, obtido diretamente através das triangulações ou tetralizações no momento da geração da malha, ou seja, é formado basicamente por triângulos ou tetraedros. No caso de esquemas do tipo *cell-vertex* é necessário que se construam volumes poligonais a partir da malha original. Estes polígonos podem ser formados por segmentos das medianas, num esquema chamado de “*median-dual*”. Outra forma de se criar os polígonos é através do uso do diagrama de Voronoi, conforme Santos *et al* (1996), no qual as células são formadas unindo-se os circuncentros das células triangulares que compartilham um vértice (bissetores perpendiculares às faces das células triangulares). Entretanto, estes não são os únicos volumes possíveis de se formar. Um comparativo entre eles pode ser visto na Figura 3.4:

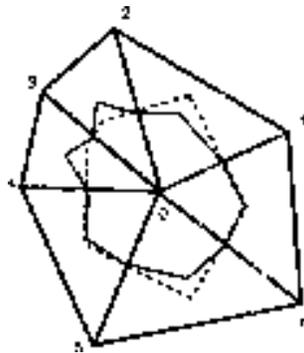


Fig. 3.4: Comparativo entre volumes de controle formado pela técnica *median-dual* (linha contínua) e diagramas de Voronoi (linha tracejada).

FONTE: Barth (1995).

Deve-se notar que o volume de controle formado para o esquema *cell-vertex* não é necessariamente convexo, podendo assumir formas muito irregulares. No caso de se usar diagramas de Voronoi esta desvantagem desaparece (conforme Venkatakrisnan, 1995b), uma vez que o dual das células de Voronoi formadas é a triangulação de Delaunay. Assim, o polígono de Voronoi tem seus lados perpendiculares as linhas que unem os centros dos polígonos vizinhos (lados dos triângulos), mas é preciso tomar cuidado na criação de células próximas ao contorno do problema.

Os algoritmos de solução de problemas de DFC presentes neste trabalho foram aplicados utilizando-se de um esquema *Cell-Centered* a domínios bidimensionais, discretizados com malhas triangulares não estruturadas, gerados através do software de domínio público Easymesh (Niceno, 1997), que utiliza a técnica de triangulação de Delaunay para geração dos volumes de controle.

Neste tipo de técnica, o círculo que passa por todos os vértices de qualquer triângulo gerado não pode conter vértices de outro triângulo vizinho. Se isto ocorrer no decorrer do processo deve-se efetuar uma modificação no formato dos triângulos vizinhos alterando-se um dos lados. Um exemplo de malha gerada pelo Easymesh, na qual pode ser observada a malha triangular obtida, pode ser observado na figura 3.5 a seguir:

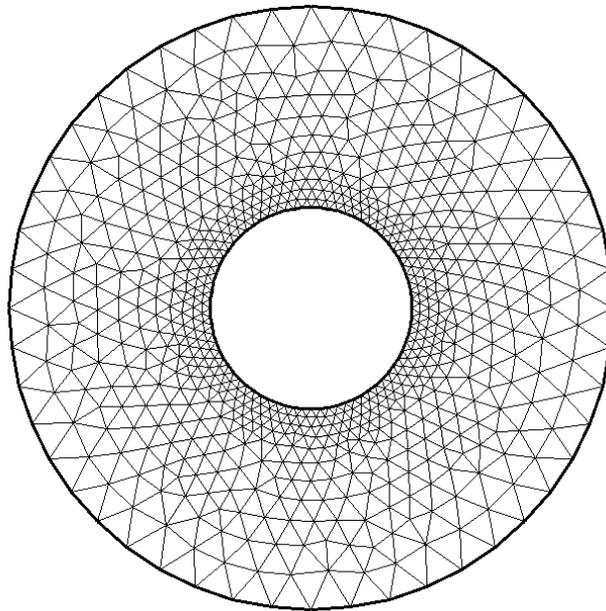


Fig. 3.5: Exemplo de malha triangular não estruturada gerada pelo software Easymesh.

3.2 – A Abordagem Baseada no Circuncentro (ABC)

Antes da definição da ABC deve-se especificar o método empregado na discretização das equações. Como já mencionado, este trabalho utiliza-se do MVF, o qual será sintetizado a seguir. Conforme Patankar (1980), a idéia principal da formulação por volumes finitos (ou volumes de controle) é de fácil entendimento e apresenta uma interpretação física direta. Neste método o domínio de cálculo é dividido em um certo número de volumes de controle que não se sobrepõem, onde cada um destes volumes tem dentro de si um ponto nodal.

Uma maneira simples de discretizar uma EDP por volumes finitos é integrá-la sobre cada volume de controle. Pode-se usar perfis constantes em pequenos segmentos (*piecewise*) para variação de uma entidade ϕ entre os pontos usados no cálculo da integração. A equação algébrica discretizada obtida desta maneira expressa o princípio de conservação de ϕ para um volume de controle finito, assim como a equação diferencial expressa este mesmo princípio para um volume de controle infinitesimal.

A aproximação por volumes finitos é particularmente útil quando a malha não é uniforme, particularmente em duas e três dimensões (Fortuna, 2000). Como o objetivo é trabalhar com malhas não estruturadas triangulares, basta integrar as EDPs do problema sobre o elemento triangular para obter a equação algébrica discretizada.

A solução de problemas difusivos em malhas estruturadas é considerada simples pois as faces do volume de integração são todas perpendiculares à linha que passa pelos centros das células envolvidas no cálculo, conforme se verifica na figura 3.6. Tal facilidade geralmente não é encontrada quando se usam malhas não estruturadas, sendo que o uso de Diagramas de Voronoi resolve esta questão, pois as faces do polígono formado são perpendiculares à linha que une dois vértices do elemento triangular (face do triângulo). Entretanto, o uso de Diagramas de Voronoi implica na utilização de esquemas centrados no vértice (*cell-vertex*).

Para esquemas com arranjo centrado na célula, o mesmo cálculo, geralmente, envolve métodos de solução mais elaborados, como o esquema proposto por Frink (1994) ou o esquema de Mathur e Murthy (1997). Na abordagem baseada no circuncentro, ABC, (Travelho et al, 1999) a discretização pode ser aplicada tanto para problemas bidimensionais quanto para tridimensionais, e consiste na utilização do circuncentro ou circunsefera, respectivamente, como o local onde as variáveis envolvidas são calculadas, ao invés do centróide comumente usado em esquemas “cell-centered”. Convém lembrar que o centro do círculo ou esfera que passa por um triângulo ou tetraedro é definido pelo local de encontro de suas mediatrizes, sendo que esta propriedade garante que duas células que compartilham um mesmo lado têm a linha que passa pelos seus circuncentros perpendicular a esta mesma parede. Assim, este esquema torna-se especialmente útil para problemas difusivos. Para a discretização de termos referente ao transporte convectivo, forças de corpo e de variação temporal não se notam alterações com o uso da ABC em relação a esquemas tradicionais de discretização por volumes finitos.

Para demonstração da ABC deve-se considerar a equação para o transporte difusivo de uma variável genérica ϕ em estado estacionário, sendo esta Equação definida pelo primeiro termo do lado direito da Equação diferencial (2.1), escrita na forma vetorial e conservativa.

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = 0 \quad (3.1)$$

A discretização da Equação (3.1) para uma malha triangular bidimensional pelo MVF pode ser feita integrando a equação no volume de controle:

$$\iint_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV \quad (3.2)$$

Pelo teorema de Gauss:

$$\iint_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \oint_S \mathbf{h} \cdot (\Gamma \nabla \phi) dS \quad (3.3)$$

Onde \mathbf{h} são as normais às faces do volume de controle.

Para a discretização em malhas estruturadas, como os volumes definidos na figura 3.6, a aproximação dos termos difusivos resultará:

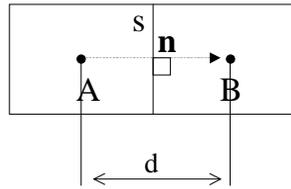


Fig. 3.6: Aproximação do termo difusivo para malhas estruturadas.

$$\oint_S \mathbf{h} \cdot (\Gamma \nabla \phi) dS = \frac{\partial(\Gamma \phi)}{\partial n} S \cong \Gamma_{(AB)} \frac{\phi_B - \phi_A}{d} S \quad (3.4)$$

Para uma malha não estruturada de elementos triangulares, na qual o local onde a variável ϕ está sendo calculada é o centróide (ou baricentro) da célula, a linha que une os dois centros adjacentes pode não estar exatamente na direção da normal externa \mathbf{h} , como pode-se verificar na figura 3.7.

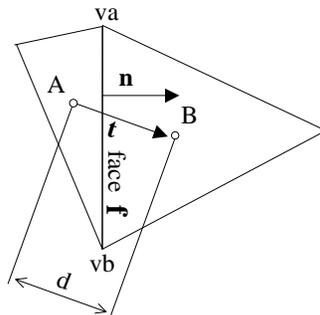


Fig. 3.7: Aproximação do termo difusivo para malhas não estruturadas usando baricentro.

Um esquema de solução para o problema apresentado acima foi proposto por Mathur e Murthy (1997), no qual a aproximação para o termo difusivo de (3.3) pode ser escrito por:

$$\oint_S \vec{h} \cdot (\Gamma \nabla \phi) ds \cong \Gamma_{(AB)} \left(\frac{\phi_B - \phi_A}{d} \frac{\vec{h} \cdot \vec{h}}{\vec{h} \cdot \vec{t}} + \frac{\phi_{vb} - \phi_{va}}{face} \frac{\vec{h} \cdot \vec{h}}{\vec{h} \cdot \vec{t}} \vec{f} \cdot \vec{t} \right) \quad (3.5)$$

No caso acima, se os vetores \vec{h} e \vec{t} forem iguais, \vec{f} é perpendicular a \vec{t} e, portanto, o segundo termo de (3.5) é nulo e tem-se novamente uma aproximação como uma malha estruturada da Equação (3.4). Com o uso de baricentros, isto ocorrerá apenas caso os triângulos sejam equiláteros, o que ocorre, geralmente, em uma quantidade muito pequena de células de malhas aplicadas a domínios de interesse prático.

A idéia da ABC é localizar as células não no baricentro, que é, geralmente, o local escolhido pela maioria dos métodos centrados na célula, mas sim no circuncentro para malhas bidimensionais triangulares ou na circunfera para malhas tridimensionais formada de tetraedros. Em duas dimensões o circuncentro é definido pelo cruzamento de suas mediatrizes.

Conforme Pereira Fo. (2000), o circuncentro em todos os casos dista igualmente de todos os vértices. A primeira propriedade acima significa que dois triângulos que têm um lado em comum têm seus circuncentros sobre a mediatriz daquele lado. Ou seja, a linha que passa por dois centros de triângulos adjacentes é perpendicular ao lado comum e passa pelo seu ponto médio. Uma vez que o circuncentro pode ser determinado como o local de encontro das mediatrizes de um triângulo, sendo que a mediatriz de um lado do triângulo inicia-se no ponto médio do lado e faz um ângulo de 90° com o mesmo. A figura a seguir ilustra esta característica.

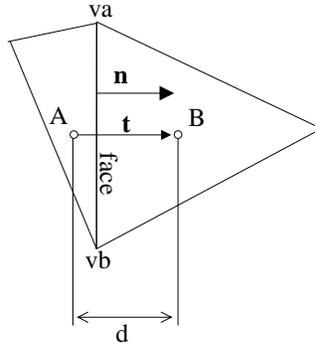


Fig. 3.8: Aproximação do termo difusivo para malhas não estruturadas usando circuncentro.

Desta forma obtêm-se uma aproximação para os fluxos difusivos idêntica a aplicada na malha estruturada (Travelho et al, 1999 e Fazenda et al, 2000):

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \phi) ds = \frac{\partial(\Gamma \phi)}{\partial n} S \cong \Gamma_{(AB)} \frac{\phi_B - \phi_A}{d} S \quad (3.6)$$

Para uma malha triangular, cada volume de controle terá três vizinhos, denominados neste trabalho de A , B e C , sendo o triângulo central identificado por P . Assim, para um triângulo com faces a , b e c , conforme se pode verificar na figura 3.9, tem-se para o termo difusivo a Equação discretizada dada por (3.7),

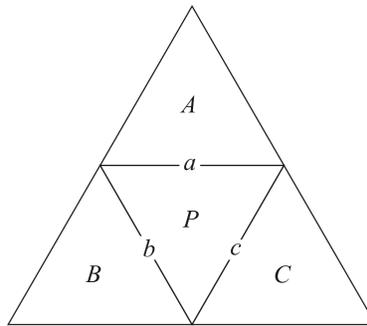


Fig. 3.9: *Stencil* de calculo para um elemento triangular da malha utilizada.

$$S_a \Gamma_a F_a + S_b \Gamma_b F_b + S_c \Gamma_c F_c = 0, \quad (3.7)$$

onde S_a , S_b e S_c representam o tamanho das paredes a , b e c , respectivamente. Γ_a , Γ_b e Γ_c são os valores do coeficiente de difusão avaliado na parede do volume de controle e finalmente para os componentes F_a , F_b e F_c teremos:

$$F_i = \frac{\partial \phi}{\partial n_i}, \quad (3.8)$$

sendo i uma face da célula triangular (a , b ou c).

Uma vez que a linha que une os circuncentros de duas células vizinhas é perpendicular à parede da célula, a aproximação para a derivada direcional, Equação (3.8), se resume a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_i} \cong \frac{\phi_P - \phi_I}{Dist_{P-I}}, \quad (3.9)$$

onde ϕ_P representa a variável ϕ na célula central P e ϕ_I representa a mesma variável na célula vizinha. $Dist_{P-I}$ representa a distância entre os circuncentros da célula P até a célula vizinha I . Assim, a discretização para a Equação (3.2) ficará:

$$S_a \Gamma_a \frac{\phi_P - \phi_A}{Dist_{P-A}} + S_b \Gamma_b \frac{\phi_P - \phi_B}{Dist_{P-B}} + S_c \Gamma_c \frac{\phi_P - \phi_C}{Dist_{P-C}} = 0 \quad (3.10)$$

Lembrando que os sub-índices com letras minúsculas referem-se a propriedades calculadas nas paredes da célula e aquelas cujos sub-índices apresentam letras maiúsculas referem-se a propriedades calculadas nos circuncentros das células.

3.3 – Tratamento dos termos convectivos

Em escoamentos nos quais a convecção tem papel importante, como aqueles com altos números de Reynolds, a adequada discretização dos termos convectivos é de extrema importância para a qualidade da solução numérica (Fortuna, 2000), pois é comum encontrar-se efeitos como difusão e dispersão numéricas em aproximações para estes termos.

A equação a ser trabalhada corresponde ao segundo termo de (2.1), sendo convenientemente repetido aqui por (3.11) e integrada no volume V .

$$\iint_V \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) dV \quad (3.11)$$

Conforme o Teorema de Gauss e considerando ρ como constante, a Equação (3.11) pode ser escrita como (3.12).

$$\rho \oint_S (\vec{h} \cdot \vec{V}) \phi dS \quad (3.12)$$

Resolvendo para uma malha triangular com faces a , b e c tem-se:

$$\rho \sum_{i=a,b,c} [(\vec{h}_i \cdot \vec{V}_i) \phi_i] S_i \quad (3.13)$$

O problema aqui é como aproximar as variáveis \vec{V} e ϕ nas faces a , b ou c do volume de controle triangular, uma vez que, para esquemas *Cell-Centered*, as variáveis são definidas e calculadas no centro de cada volume de controle.

Novamente, conforme Fortuna (2000), a maioria dos esquemas de discretização dos termos convectivos depende da direção local do escoamento, ou seja, da direção do

escoamento em um ponto da malha. Fisicamente, isso reflete o fato de que as propriedades do escoamento, em um ponto qualquer, dependem fortemente das propriedades do escoamento a montante desse ponto, ou seja, que são transportadas para esse ponto.

Um dos esquemas que seguem esta abordagem é o bem conhecido Esquema *UpWind* de primeira ordem, o qual define o cálculo da variável ϕ na célula central ou na vizinha conforme a direção do escoamento nas faces. Neste caso, basta calcular a velocidade na face através de uma média ponderada, por exemplo, e posteriormente verificar se o fluido está entrando ou saindo do volume de controle, através do produto escalar da velocidade pela normal unitária externa a face $(\vec{h}_i \cdot \vec{V}_i)$.

Caso o valor deste produto escalar resulte positivo o fluido está saindo e, portanto, deve-se usar os valores a montante da face para o cálculo, ou seja, o valor do ponto P . Caso contrário usa-se o valor da célula vizinha, conforme se verifica abaixo:

$$\text{Caso } (\vec{h}_i \cdot \vec{V}_i) > 0 \text{ tem-se } \phi_i = \phi_P, \quad (3.14a)$$

$$\text{Caso } (\vec{h}_i \cdot \vec{V}_i) < 0 \text{ tem-se } \phi_i = \phi_I, \quad (3.14b)$$

Para tornar a notação mais compacta, utiliza-se a função $\max(a,b)$, a qual retorna como resultado o maior valor entre dois argumentos (a,b) especificados. Assim, tem-se:

$$\rho \sum_{i=a,b,c} [(\vec{h}_i \cdot \vec{V}_i) \phi_i] \mathcal{S}_i = \rho \sum_{i=a,b,c} \{ \max[(\vec{h}_i \cdot \vec{V}_i), 0] \phi_P - \max[-(\vec{h}_i \cdot \vec{V}_i), 0] \phi_I \} \mathcal{S}_i \quad (3.14c)$$

Uma forma alternativa, inspirada no esquema *UpWind* descrito acima, foi desenvolvida por Travelho (2002a), para o cálculo desta variável. Assim, caso o escoamento aponte para fora do volume de controle, deve-se levar em consideração não apenas a variável

em P , mas uma média ponderada entre P e sua célula vizinha I , sendo o valor de ϕ na célula I tomada no instante anterior, denotado por ϕ^* . Assim temos:

$$\text{Caso } (h_i \cdot \mathbf{V}_i^U) > 0 \text{ tem-se } \phi_i = [\beta_i (h_i \cdot \mathbf{V}_i^U) \phi_P + \alpha_i (h_i \cdot \mathbf{V}_i^U) \phi_i^*], \quad (3.15a)$$

$$\text{Caso } (h_i \cdot \mathbf{V}_i^U) < 0 \text{ tem-se } \phi_i = [\beta_i (h_i \cdot \mathbf{V}_i^U) \phi_P^* + \alpha_i (h_i \cdot \mathbf{V}_i^U) \phi_I], \quad (3.15b)$$

onde α_i e β_i são os termos referentes à interpolação linear entre a célula P e seu vizinho I para a posição do meio da face i (maiores informações sobre a forma de cálculo destes fatores podem ser encontrados no Apêndice A, equações (A.5a) e (A.5b)).

Reescrevendo (3.15) de uma maneira mais compacta, tem-se:

$$\rho \sum_{i=a,b,c} \{ \max[(h_i \cdot \mathbf{V}_i^U), 0] [\beta_i \phi_P + \alpha_i \phi_i^*] - \max[-(h_i \cdot \mathbf{V}_i^U), 0] [\beta_i \phi_P^* + \alpha_i \phi_I] \} \mathcal{S}_i \quad (3.16)$$

3.4 – Aproximação de Boussinesq

Para solução do problema de convecção natural, tratado por este trabalho, será necessário a utilização da aproximação de Boussinesq. Em tal técnica assume-se que somente a densidade relacionada com as forças de corpo, $\rho \mathbf{g}^U$, varie proporcionalmente com a temperatura e pressão, sendo mantida constante, ρ_0 nos outros termos, assim:

$$\rho \mathbf{g}^U = \rho(T, P) \mathbf{g}^U \quad (3.17)$$

Desenvolvendo ρ em série de Taylor em torno de uma temperatura de referência T_0 e de uma pressão de referência P_0 tem-se:

$$\rho \cong \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P (T - T_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T (P - P_0) + \dots \quad (3.18)$$

O termo de flutuação de pressão presente na Equação (3.18) é desprezível em relação ao termo de flutuação de temperatura na maioria dos problemas encontrados em engenharia térmica (Bejan, 1996). Assim, a Equação (3.18) se resume a:

$$\rho \cong \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P (T - T_0) + \dots \quad (3.19)$$

Introduzindo-se o coeficiente de expansão volumétrica β definido por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad (3.20)$$

e rearranjando a Equação (3.20):

$$\rho \cong \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] + \dots \quad (3.21)$$

Substituindo a aproximação dada pela Equação (3.21) em (3.17) tem-se:

$$\rho_g^U = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]_g^U \quad (3.22)$$

Entretanto deve-se ressaltar que o gradiente de pressão que age no sistema pode ser decomposto em dois termos, um referente à pressão hidrostática e outro referente à influência do movimento do fluido. Assim:

$$\nabla P = \rho_0 \hat{g} + \nabla \hat{P}, \quad (3.23)$$

onde o primeiro termo do lado direito de (3.23) se refere à pressão hidrostática e o segundo termo refere-se ao gradiente de pressão que sofre variações devido ao movimento do fluido. Substituindo (3.22) e (3.23) na equação de conservação da quantidade de movimento (2.3b) tem-se:

$$\rho \nabla \cdot (\overset{\mu}{V} \overset{\mu}{V}) = \mu \nabla^2 \overset{\mu}{V} + \rho_0 \overset{p}{g} - \nabla \hat{P} - \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \overset{p}{g} \quad (3.24a)$$

Simplificando:

$$\rho \nabla \cdot (\overset{\mu}{V} \overset{\mu}{V}) = \mu \nabla^2 \overset{\mu}{V} - \nabla \hat{P} + \rho_0 [\beta(T - T_0)] \overset{p}{g} \quad (3.24b)$$

A maneira pela qual se obtém o coeficiente β depende da natureza do fluido. Para gases perfeitos tem-se a equação de estado, na temperatura e pressão de referência, definida por $P_0 = \rho_0 R T_0$ (Equação (2.5)), a qual, substituída em (3.20), resulta em:

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) = \frac{1}{\rho_0} \frac{P_0}{R(T_0)^2} = \frac{1}{T_0} \quad (3.25)$$

Para líquidos e gases considerados não perfeitos, β pode ser obtido de tabelas apropriadas comumente encontradas na literatura (Bejan, 1996).

3.5 – Equações Discretizadas

Nesta seção encontrar-se-ão as Equações (2.3b), (2.4) e (2.7) discretizadas pelo método de volumes finitos seguindo a Abordagem Baseada no Circuncentro (ABC) para os termos difusivos e o esquema *Up-Wind* da seção 3.3 para os termos convectivos. Todas as equações serão discretizadas para uma malha triangular; portanto, admite-se a existência de três vizinhos para cada volume de controle. Serão analisadas também as condições de contorno para alguns casos testados neste trabalho.

O esquema utilizado para nomenclatura dos coeficientes da equação algébrica discretizada segue aquele proposto por Patankar (1980), substituindo a nomenclatura para os vizinhos de uma malha formada por quadriláteros (N, S, E, W) pelos sub-índices A , B e C referentes aos 3 vizinhos de cada célula triangular, resultando em:

$$a_P \phi_P + a_A \phi_A + a_B \phi_B + a_C \phi_C = \check{b} \quad (3.26)$$

Assim, para a EDP de conservação da quantidade de movimento (2.3b), a Equação algébrica correspondente será definida por (3.26) assumindo $\phi = \check{V}$, com os coeficientes dados por (3.27) (no apêndice A encontra-se, detalhadamente, a discretização da equação de conservação da quantidade de movimento):

$$a_A = - \left\{ \frac{\mu}{Dist_{PA}} + \rho \alpha_a \max[-(h_a \cdot \check{V}_a^*), 0] \right\} S_a, \quad (3.27a)$$

$$a_B = - \left\{ \frac{\mu}{Dist_{PB}} + \rho \alpha_b \max[-(h_b \cdot \check{V}_b^*), 0] \right\} S_b, \quad (3.27b)$$

$$a_C = - \left\{ \frac{\mu}{Dist_{PC}} + \rho \alpha_c \max[-(h_c \cdot \check{V}_c^*), 0] \right\} S_c, \quad (3.27c)$$

$$a_P = \left\{ \begin{array}{l} \mu \left(\frac{S_a}{Dist_{PA}} + \frac{S_b}{Dist_{PB}} + \frac{S_c}{Dist_{PC}} \right) + \\ \rho \left\{ \begin{array}{l} S_a \beta_a \max[(h_a \cdot \check{V}_a^*), 0] + \\ S_b \beta_b \max[(h_b \cdot \check{V}_b^*), 0] + \\ S_c \beta_c \max[(h_c \cdot \check{V}_c^*), 0] \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \quad (3.27d)$$

$$\rho \underset{b}{\overset{b}{\mathbf{g}}} = \left\{ \begin{array}{l} \rho \underset{b}{\overset{b}{\mathbf{g}}} V - (h_a P_a S_a + h_b P_b S_b + h_c P_c S_c) + \\ \left[S_a [\beta_a \max[-(h_a \cdot \underset{V}{V}_a^*), 0] \underset{V}{V}_a^* - \alpha_a \max[(h_a \cdot \underset{V}{V}_a^*), 0] \underset{V}{V}_a^*] + \right. \\ \rho \left[S_b [\beta_b \max[-(h_b \cdot \underset{V}{V}_b^*), 0] \underset{V}{V}_b^* - \alpha_b \max[(h_b \cdot \underset{V}{V}_b^*), 0] \underset{V}{V}_b^*] + \right. \\ \left. S_c [\beta_c \max[-(h_c \cdot \underset{V}{V}_c^*), 0] \underset{V}{V}_c^* - \alpha_c \max[(h_c \cdot \underset{V}{V}_c^*), 0] \underset{V}{V}_c^*] \right] \end{array} \right\}, \quad (3.27e)$$

sendo os valores α_i e β_i os coeficientes resultantes de uma aproximação linear para a parede i entre os circuncentros P e I (A , B ou C). Os valores P_i representam as pressões no centro de cada face i , a qual deve ser interpolada entre P e o vizinho I convenientemente assim como os valores dos vetores $\underset{V}{V}_i$. Em (3.27e), $\rho \underset{b}{\overset{b}{\mathbf{g}}}$ representa a força de gravitação que atua sobre um elemento por unidade de volume.

No caso de se utilizar a aproximação de Boussinesq, como definido na seção anterior, pode-se integrar o terceiro termo do lado direito da Equação (3.24b) no volume de controle. Considerando que a temperatura mantém-se constante dentro do mesmo chega-se à equação:

$$\iint_V \rho \beta (T_p - T_0) \underset{g}{\mathbf{g}} dV = \rho \beta (T_p - T_0) \underset{g}{\mathbf{g}} V, \quad (3.28)$$

onde V representa o volume (ou área, para o caso bidimensional) do volume de controle, T_p representa a temperatura no circuncentro da célula, T_0 representa a temperatura de referência e $\underset{g}{\mathbf{g}}$ o vetor que representa a aceleração da gravidade.

Na equação de conservação da quantidade de movimento discretizada, sua solução deve ser avaliada, para o caso bidimensional em estudo, sobre os componentes x e y do vetor velocidade $\underset{w}{\mathbf{V}}$, os quais serão denominados u e v , respectivamente. Os coeficientes definidos por (3.27a), (3.27b), (3.27c) e (3.27d) serão idênticos para ambos os componentes do vetor velocidade. Já o coeficiente b , que corresponde ao lado direito da equação, será específico para cada componente, pois deve expressar o gradiente de pressão nos componentes x e y para u e v separadamente e também a contribuição de

termos fontes. Caso seja usada a aproximação de Boussinesq, como em (3.24), o mesmo raciocínio se aplica com relação ao vetor definido por \vec{g} , que pode ter valores diferentes para as direções x e y .

Para a Equação de transporte de energia (2.4), ϕ será igual à temperatura T e os coeficientes a serem aplicados em (3.26) serão:

$$a_A = - \left\{ \frac{\alpha}{Dist_{PA}} + \alpha_a \max[-(\vec{h}_a \cdot \vec{V}_a^*), 0] \right\} S_a, \quad (3.29a)$$

$$a_B = - \left\{ \frac{\alpha}{Dist_{PB}} + \alpha_b \max[-(\vec{h}_b \cdot \vec{V}_b^*), 0] \right\} S_b, \quad (3.29b)$$

$$a_c = - \left\{ \frac{\alpha}{Dist_{PC}} + \alpha_c \max[-(\vec{h}_c \cdot \vec{V}_c^*), 0] \right\} S_c, \quad (3.29c)$$

$$a_p = \begin{cases} \alpha \left(\frac{S_a}{Dist_{PA}} + \frac{S_b}{Dist_{PB}} + \frac{S_c}{Dist_{PC}} \right) + \\ S_a \beta_a \max[(\vec{h}_a \cdot \vec{V}_a^*), 0] + \\ S_b \beta_b \max[(\vec{h}_b \cdot \vec{V}_b^*), 0] + \\ S_c \beta_c \max[(\vec{h}_c \cdot \vec{V}_c^*), 0] \end{cases}, \quad (3.29d)$$

$$\rho \vec{b} = \begin{cases} S_a [\beta_a \max[-(\vec{h}_a \cdot \vec{V}_a^*), 0] T_P^* - \alpha_a \max[(\vec{h}_a \cdot \vec{V}_a^*), 0] T_A^*] + \\ S_b [\beta_b \max[-(\vec{h}_b \cdot \vec{V}_b^*), 0] T_P^* - \alpha_b \max[(\vec{h}_b \cdot \vec{V}_b^*), 0] T_B^*] + \\ S_c [\beta_c \max[-(\vec{h}_c \cdot \vec{V}_c^*), 0] T_P^* - \alpha_c \max[(\vec{h}_c \cdot \vec{V}_c^*), 0] T_C^*] \end{cases}, \quad (3.29e)$$

onde α (sem sub-índices) representa a difusividade térmica dada por $\frac{k}{\rho c_p}$.

Para a Equação de Poisson de Pressão dada por (2.7) a integração nos volumes de controle para obter a equação algébrica discretizada resulta em:

$$\iint_V (\nabla^2 P) dV = \iint_V \nabla \cdot [-\rho \nabla \cdot (\overset{\mu}{V}\overset{\mu}{V}) + \mu \nabla^2 \overset{\mu}{V} + \rho \overset{\rho}{g}] dV, \quad (3.30)$$

a qual, pela aplicação do teorema de Gauss fica:

$$\oint_S \frac{\partial P}{\partial n} dS = \oint_S (\overset{h}{n} \cdot \overset{\rho}{\Psi}) dS, \quad (3.31)$$

sendo $\overset{\rho}{\Psi} = -\rho \nabla \cdot (\overset{\mu}{V}\overset{\mu}{V}) + \mu \nabla^2 \overset{\mu}{V} + \rho \overset{\rho}{g}$.

Para a aproximação da derivada direcional do lado esquerdo de (3.31), uma discretização seguindo o esquema da ABC pode ser aplicada. Para o lado direito da mesma equação, optou-se por calcular o termo $\overset{\rho}{\Psi}$ para cada volume de controle e depois interpolá-lo no centro das faces a , b e c de cada triângulo. Este vetor, $\overset{\rho}{\Psi}_i$, uma vez calculado em cada face, será submetido ao produto escalar com a normal unitária externa $\overset{h}{n}_i$ resultando em um valor escalar. Assim:

$$\oint_S (\overset{h}{n} \cdot \overset{\rho}{\Psi}) dS = \sum_{i=a,b,c} \overset{h}{n}_i \cdot \overset{\rho}{\Psi}_i \quad (3.32)$$

A discretização para $\overset{\rho}{\Psi}$ seguirá o mesmo esquema das Equações (2.3) e (2.4) descritas acima, apenas ressaltando o fato de que cada discretização dos termo de $\overset{\rho}{\Psi}$ deve apresentar-se dividido pelo volume, V , da célula.

Para adequar (2.8) ao esquema da Equação algébrica discretizada (3.26), ϕ deve ser igual a P e os coeficientes a_i serão dados por:

$$a_A = -\frac{S_a}{Dist_{PA}} \quad (3.33a)$$

$$a_B = -\frac{S_b}{Dist_{PB}} \quad (3.33b)$$

$$a_C = -\frac{S_c}{Dist_{PC}} \quad (3.33c)$$

$$a_P = -(a_A + a_B + a_C) \quad (3.33d)$$

$$\vec{V}_b = -\left[(\vec{\Psi}_a \cdot \vec{h}_a) S_a + (\vec{\Psi}_b \cdot \vec{h}_b) S_b + (\vec{\Psi}_c \cdot \vec{h}_c) S_c \right] \quad (3.33e)$$

3.5.1. – Condições de Contorno

Nesta seção serão aplicadas as condições de contorno (2.10), (2.11) e (2.12), definidas na seção 2.3, as equações discretizadas de conservação da quantidade de movimento e Poisson para pressão. Lembrando que em todas as fronteiras onde se considera uma parede sólida, será utilizado condições de contorno de 1ª espécie (Dirichlet), na qual se conhece o valor do vetor velocidade: $\vec{V} = 0$.

Como premissa básica, deve ser assumido que, na malha triangular utilizada, as células que se encontram na região do contorno sempre estarão com a face nomeada de “a” localizada sobre o mesmo, e que apenas uma face por triângulo estará localizada no contorno, permanecendo as demais (b e c) inalteradas em seu tratamento, pois sempre compartilharão duas células.

3.5.1.1. – Condição de Contorno de Dirichlet para Velocidade

Inicialmente, será considerada a condição de contorno de 1° tipo (Dirichlet) para a velocidade, fixando, portanto, o valor do vetor \vec{V} na face “a” do triângulo no contorno, comum nos problemas de Hagen-Poiseuille e da Cavidade onde em um dos contornos do domínio a velocidade é mantida fixa ao longo do tempo. Conforme se pode verificar na condição definida anteriormente em (2.9), aqui reproduzida como (3.34a).

$$\vec{V}_a \cdot \vec{n}_a = C \text{ em } \partial\Omega \quad (3.34a)$$

Um caso especial de (3.34a) e extremamente comum em problemas práticos é a conhecida “condição de aderência” (*no slip condition* – em inglês), onde o valor de $\vec{V}_a = 0$. Sendo definida pela condição (3.34b), ou seja:

$$\vec{V}_a \cdot \vec{n}_a = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (3.34b)$$

A igualdade (3.34a) define que a contribuição do termo convectivo para a face a do triângulo é considerada como constante na equação de conservação da quantidade de movimento. No caso especial de fronteira com condição de aderência, (3.34b), implica que a contribuição do termo convectivo é nula. Esta dedução é aplicada à Equação de conservação da quantidade de movimento discretizada (3.27), à Equação de energia (3.29) e ao lado direito da Equação de Poisson para pressão (3.33).

Para o termo difusivo, aproximado pela derivada direcional $\left. \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} \right|_a$ da equação de conservação da quantidade de movimento e presente em Ψ na equação de Poisson da pressão, a aproximação pode ser feita por uma diferença centrada entre o circuncentro P e o valor em a , onde \vec{V}_a representará o valor do vetor velocidade no centro da face a .

Para a condição de fronteira não escorregadia, (3.34b), \dot{V}_a é nulo. Portanto, tem-se a Equação (3.35) a seguir:

$$\oint_a \frac{\partial \dot{V}}{\partial h} dS_a = \frac{\dot{V}_a - \dot{V}_P}{Dist_{Pa}}, \quad (3.35)$$

considerando $Dist_{Pa}$ como a distância do circuncentro P até o meio da face a .

Com as Equações (3.34a) e (3.35) pode-se escrever os coeficientes para a Equação discretizada de conservação da quantidade de movimento avaliada no contorno, com condição de Dirichlet. Assim:

$$a_A = 0, \quad (3.36a)$$

$$a_P = \begin{cases} \mu \left(\frac{S_a}{Dist_{Pa}} + \frac{S_b}{Dist_{PB}} + \frac{S_c}{Dist_{PC}} \right) + \\ \rho \left\{ \begin{array}{l} S_a \beta_b \max[(h_b \cdot \bar{V}_b^*), 0] + \\ S_c \beta_c \max[(h_c \cdot \bar{V}_c^*), 0] \end{array} \right\} \end{cases}, \quad (3.36b)$$

$$b^{\rho} = \begin{cases} \rho g V - (h_a P_a S_a + h_b P_b S_b + h_c P_c S_c) + (h_a \cdot \dot{V}_a) \rho S_a + \mu \frac{S_a}{Dist_{Pa}} \dot{V}_a \\ \rho \left\{ \begin{array}{l} S_b [\beta_b \max[-(h_b \cdot \bar{V}_b^*), 0] \bar{V}_P^* - \alpha_b \max[(h_b \cdot \bar{V}_b^*), 0] \bar{V}_B^*] + \\ S_c [\beta_c \max[-(h_c \cdot \bar{V}_c^*), 0] \bar{V}_P^* - \alpha_c \max[(h_c \cdot \bar{V}_c^*), 0] \bar{V}_C^*] \end{array} \right\} \end{cases}, \quad (3.36c)$$

considera-se, ainda, que os coeficientes a_B e a_C permaneçam inalterados em relação aos definidos pelas Equações (3.27b) e (3.27c), respectivamente. Caso se trabalhe com fronteira com condição de aderência, os termos $(h_a \cdot \dot{V}_a) \rho S_a$ e $\mu \frac{S_a}{Dist_{Pa}} \dot{V}_a$ serão iguais a

zero. Entretanto, ainda resta definir quanto será a pressão no contorno a , representada por P_a .

Fazendo-se uma análise de grandeza, como a encontrada no Apêndice B, é possível mostrar que a pressão na direção normal a fronteira e na região próxima a mesma é praticamente constante. Assim, chega-se a conclusão de que se pode usar o valor da pressão no circuncentro P como valor para pressão na face a nestas situações, como se pode ver em (3.37).

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_a \cong 0 \Rightarrow P_a \cong P \quad (3.37)$$

Existem casos onde a fronteira tem uma condição de Dirichlet para o vetor velocidade, mas o valor da pressão no centro da face triangular a não pode ser aproximado pela Equação (3.37). Assim, ocorre na região de entrada de um escoamento entre placas planas (*Poiseuille flow*), na qual, geralmente, se define um valor para o vetor velocidade na fronteira. Neste caso o valor de P_a deve ser aproximado de outra maneira. Estas aproximações serão discutidas mais detalhadamente na seção 4.2.1.

Uma vez definida a condição de contorno para a equação de conservação da quantidade de movimento, deve-se também definir as condições de contorno para a equação de Poisson de pressão. Neste caso pode-se explicitar o termo responsável pela contribuição da face a da célula da Equação (3.31):

$$\int_a \frac{\partial P}{\partial h} dS_a + \int_{S=b,c} \frac{\partial P}{\partial h} dS = \int_a (h_a \cdot [-\rho \nabla \cdot (\overline{VV}) + \mu \nabla^2 \overline{V} + \rho \overline{g}]_a) dS_a + \int_{S=b,c} (h \cdot \overline{\Psi}) dS \quad (3.38)$$

Lembrando que o termo $\overline{\Psi}_a$ já foi convenientemente substituído e que o segundo termo do lado esquerdo e também do lado direito de (3.38) continuarão a receber o mesmo tratamento definido no início da seção 3.4.

Se for usada a condição de Neumann para pressão, Equação (2.13), e se for substituída a própria Equação (2.13) no primeiro termo do lado esquerdo de (3.38), verifica-se que a contribuição das variáveis calculadas na face a de uma célula no contorno desaparecerão da equação. Assim a Equação de Poisson para pressão avaliada no contorno será definida por (3.39):

$$\int_{S=b,c} \frac{\partial P}{\partial n} dS = \int_{S=b,c} (\hat{n} \cdot \Psi) dS, \quad (3.39)$$

ou seja, será necessário apenas o cálculo da pressão nos pontos interiores do domínio de cálculo. Neste caso, pode-se estabelecer uma pressão de referência em uma dada célula do domínio para a devida normalização dos valores, fazendo com que nesta célula a pressão seja sempre igual a zero, por exemplo. É preciso lembrar, mais uma vez, que para o problema do escoamento incompressível, o importante será sempre o gradiente de pressão e não o valor absoluto da mesma. Para a Equação discretizada de (3.39) tem-se os seguintes coeficientes:

$$a_A = 0 \quad (3.40a)$$

$$a_B = -\frac{S_b}{Dist_{PB}} \quad (3.40b)$$

$$a_C = -\frac{S_c}{Dist_{PC}} \quad (3.40c)$$

$$a_P = -(a_A + a_B + a_C) \quad (3.40d)$$

$$b = -[(\Psi_b \cdot \hat{n}_b)S_b + (\Psi_c \cdot \hat{n}_c)S_c] \quad (3.40e)$$

3.5.1.2. – Fronteira com Derivada de Velocidade nula (Condição de Saída)

Neste caso, tem-se uma condição de 2º tipo (Neumann) para a velocidade, onde se está interessado apenas no caso em que a derivada é nula na fronteira, comum na região de saída do escoamento de Hagen-Poiseuille, como previamente definido em (2.12) aqui reproduzido como (3.41).

$$\left. \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} \right|_a = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (3.41)$$

Em (3.41) o valor do vetor velocidade na face a do triângulo do contorno, exatamente sobre a fronteira, será aproximado pelo mesmo valor do vetor velocidade em P , pois:

$$\left. \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} \right|_a = \frac{\vec{V}_a - \vec{V}_P}{Dist_{Pa}} = 0 \Rightarrow \vec{V}_a = \vec{V}_P \quad (3.42)$$

Esta aproximação pode ser usada quando se necessitar de \vec{V}_a nos termos convectivos da equação de conservação da quantidade de movimento, no lado direito da equação de Poisson para pressão e no termo de convecção de energia térmica.

No caso dos termos difusivos de velocidade da equação de conservação da quantidade de movimento e no termo não homogêneo da equação de Poisson para pressão, o valor da derivada é zero, conforme (3.42). Assim, os coeficientes da Equação discretizada de conservação da quantidade de movimento para este tipo de fronteira será definida por:

$$a_A = 0, \quad (3.43a)$$

$$a_p = \left\{ \begin{array}{l} \mu \left(\frac{S_b}{Dist_{PB}} + \frac{S_c}{Dist_{PC}} \right) + \\ \rho \left\{ \begin{array}{l} S_a (h_a \cdot V_a^*) + \\ S_a \beta_b \max[(h_b \cdot V_b^*), 0] + \\ S_c \beta_c \max[(h_c \cdot V_c^*), 0] \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \quad (3.43b)$$

$$b_p = \left\{ \begin{array}{l} \rho g V - (h_a P_a S_a + h_b P_b S_b + h_c P_c S_c) + \\ \rho \left\{ \begin{array}{l} S_b [\beta_b \max[-(h_b \cdot V_b^*), 0] V_p - \alpha_b \max[(h_b \cdot V_b^*), 0] V_B^*] + \\ S_c [\beta_c \max[-(h_c \cdot V_c^*), 0] V_p - \alpha_c \max[(h_c \cdot V_c^*), 0] V_C^*] \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \quad (3.43c)$$

considerando ainda que, novamente, os coeficientes a_B e a_C permanecem inalterados em relação aos definidos pelas Equações (3.27b) e (3.27c), respectivamente.

Para o valor da pressão na face a definida por P_a , não será conveniente o uso da mesma aproximação de (3.37). Neste pode-se usar a mesma abordagem citada em Pereira Fo (2000), onde o valor de P_a é aproximado pela extrapolação dos valores a montante de P_p . Entretanto, deve-se lembrar que neste caso bidimensional leva-se a desvantagem de se trabalhar com malhas não estruturadas o que dificulta esta aproximação. Uma outra abordagem para o cálculo de P_a será o uso da Condição de Neumann para pressão, Equação (2.13), avaliada diretamente no contorno em questão.

A Equação de Poisson de pressão avaliada no contorno onde a derivada de velocidade é nula na fronteira será a mesma definida em (3.39) e sua versão algébrica discretizada (3.40).

3.5.1.3. – Fronteira adiabática com condição de aderência para velocidade

Encontra-se nesta seção a equação algébrica discretizada para transporte de calor avaliada em um contorno na qual se tem, para a velocidade, a condição de aderência como definida em (3.34b), e considerando a parede adiabática, isto é, a derivada de T na direção da normal externa à parede nula, como se pode verificar na Equação (3.44).

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_a = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad (3.44)$$

Uma vez definidas as condições (3.34b) e (3.44), a contribuição do termo difusivo de T na direção da normal a é nulo e, já que existe a condição de aderência (3.34b), a contribuição do termo convectivo com relação a T também é nulo, pois a velocidade sobre a face a é zero. Assim, os coeficientes da Equação discretizada serão:

$$a_A = 0, \quad (3.45a)$$

$$a_B = - \left\{ \frac{\alpha}{Dist_{PB}} + \alpha_b \max[-(\mathbf{h}_b \cdot \mathbf{V}_b^*), 0] \right\} S_b, \quad (3.45b)$$

$$a_c = - \left\{ \frac{\alpha}{Dist_{PC}} + \alpha_c \max[-(\mathbf{h}_c \cdot \mathbf{V}_c^*), 0] \right\} S_c, \quad (3.45c)$$

$$a_p = \begin{cases} \alpha \left(\frac{S_b}{Dist_{PB}} + \frac{S_c}{Dist_{PC}} \right) + \\ S_a \beta_b \max[(\mathbf{h}_b \cdot \mathbf{V}_b^*), 0] +, \\ S_c \beta_c \max[(\mathbf{h}_c \cdot \mathbf{V}_c^*), 0] \end{cases} \quad (3.45d)$$

$$\rho_b = \begin{cases} S_b [\beta_b \max[-(h_b \cdot \frac{\mathbf{u}}{V_b^*}), 0] T_P^* - \alpha_b \max[(h_b \cdot \frac{\mathbf{u}}{V_b^*}), 0] T_B^*] + \\ S_c [\beta_c \max[-(h_c \cdot \frac{\mathbf{u}}{V_c^*}), 0] T_P^* - \alpha_c \max[(h_c \cdot \frac{\mathbf{u}}{V_c^*}), 0] T_C^*] \end{cases}, \quad (3.45e)$$

lembrando mais uma vez que α (sem sub-índices) representa a difusividade térmica dada por $\frac{k}{\rho c_p}$.

3.5.1.4. – Fronteira com condição de aderência para velocidade e Condição de Dirichlet para temperatura

Neste caso, o valor da temperatura é definido no contorno sendo, portanto, uma condição de Dirichlet.

$$T_a = C \text{ em } \partial\Omega \quad (3.46)$$

A condição de contorno para velocidade permanece a mesma da seção anterior, ou seja, condição de aderência. Portanto, a contribuição do termo convectivo permanece nula pelos mesmos motivos da seção anterior.

A condição de contorno (3.46) será adicionada ao sistema através da aproximação para a derivada de T na direção da normal externa entre os valores no circuncentro P e o valor fixo na parede a , como se pode verificar em (3.47):

$$\alpha \oint_{S_a} h_a \cdot (\nabla T) ds_a = \alpha \frac{\partial T}{\partial n_a} S_a = \alpha \frac{T_a - T_P}{Dist_{Pa}} S_a \quad (3.47)$$

Assim, os coeficientes da Equação discretizada serão:

$$a_A = 0 \quad (3.48a)$$

$$a_B = - \left\{ \frac{\alpha}{Dist_{PB}} + \alpha_b \max[-(h_b \cdot V_b^*), 0] \right\} S_b \quad (3.48b)$$

$$a_c = - \left\{ \frac{\alpha}{Dist_{PC}} + \alpha_c \max[-(h_c \cdot V_c^*), 0] \right\} S_c \quad (3.48c)$$

$$a_p = \begin{cases} \alpha \left(\frac{S_a}{Dist_{Pa}} + \frac{S_b}{Dist_{PB}} + \frac{S_c}{Dist_{PC}} \right) + \\ S_a \beta_b \max[(h_b \cdot V_b^*), 0] + \\ S_c \beta_c \max[(h_c \cdot V_c^*), 0] \end{cases} \quad (3.48d)$$

$$b = \begin{cases} \alpha \frac{S_a}{Dist_{Pa}} T_a + \\ S_b [\beta_b \max[-(h_b \cdot V_b^*), 0] T_P^* - \alpha_b \max[(h_b \cdot V_b^*), 0] T_B^*] + \\ S_c [\beta_c \max[-(h_c \cdot V_c^*), 0] T_P^* - \alpha_c \max[(h_c \cdot V_c^*), 0] T_C^*] \end{cases} \quad (3.48e)$$

3.6 – Algoritmo de Solução

O algoritmo iterativo de solução para o problema do escoamento incompressível, incluindo uma possível variação de temperatura, foi implementado de maneira que as equações envolvidas são resolvidas separadamente, apesar de estarem acopladas, convergindo, após um certo número de iterações, para a solução no estado estacionário. Sempre de acordo com as condições iniciais e de contorno, e com a geometria da malha computacional, conforme se pode verificar nos passos a seguir:

- 1) Leitura dos dados de entrada (geometria da malha, propriedades do fluido, condições iniciais e de contorno).
- 2) Cálculo dos coeficientes que devem se manter constantes ao decorrer de todo o processo iterativo, especialmente os que dependem apenas da geometria da malha computacional, como os termos relativos ao transporte difusivo de calor, transporte difusivo de quantidade de movimento e lado esquerdo da equação de Poisson de Pressão.
- 3) Cálculo da parcela referente aos termos convectivos dos coeficientes para equação de transporte de calor (se houver), incluindo as condições de contorno.
- 4) SOLVER para o sistema de equações algébricas de transporte de calor (se houver).
- 5) Cálculo da parcela referente aos termos convectivos, de gradiente de pressão e de flutuação de temperatura para os coeficientes da equação de quantidade de movimento, incluindo as condições de contorno.
- 6) SOLVER para o sistema de equações algébricas de conservação da quantidade de movimento.
- 7) Cálculo de Ψ , referentes ao termo não homogêneo da equação de Poisson de Pressão, incluindo as condições de contorno.
- 8) SOLVER para o sistema de equações algébricas de pressão.
- 9) Verificação dos critérios de convergência. Caso a convergência não seja atingida volte ao passo 3.
- 10) Fim.

3.7 – Solução do sistema linear de equações - “SOLVER”

Para a solução do sistema linear de equações algébricas discretizadas para velocidade (3.27), para temperatura (3.29) e para pressão (3.33), pode ser usado qualquer um dos métodos iterativos clássicos como o Jacobi, Gauss-Seidel ou SOR (Successive Over-

Relaxation). As vantagens e desvantagens de cada um dos métodos acima é bem estabelecida na literatura. Maiores informações podem ser obtidas em Hoffman (1992).

Entretanto, com o intuito de tirar vantagem da estrutura da matriz resultante da discretização em uma malha triangular, foi utilizado um método de solução específico para o sistema linear resultante (Travelho, 2002b). Neste método procura-se resolver exatamente um pequeno sistema de equações, formado pelo conjunto de 4 células representando as incógnitas, que leva em consideração o valor de mais 6 células vizinhas às mesmas, conforme se pode verificar na figura 3.10 a seguir:

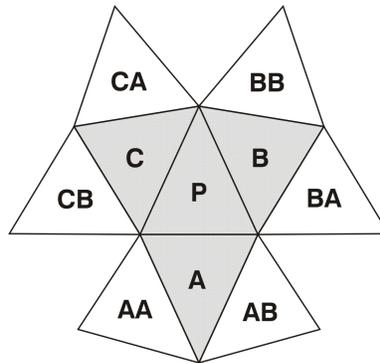


Fig. 3.10: Subconjunto de células da malha triangular usado no SOLVER.

Deve-se lembrar que as células da figura (3.10) representam vários pequenos subconjuntos de células contidas na malha triangular não estruturada. As células denominadas P , A , B e C terão suas variáveis ϕ calculadas através do sistema de Equações abaixo:

$$a_{PP} \phi_P + (a_{AA} \phi_A + a_{BB} \phi_B + a_{CC} \phi_C) = b_P \quad (3.49a)$$

$$a_{PA} \phi_A + (a_{AAA} \phi_{AA} + a_{BAB} \phi_{AB} + a_{CAP} \phi_P) = b_A \quad (3.49b)$$

$$a_{PB} \phi_B + (a_{ABA} \phi_{BA} + a_{BBB} \phi_{BB} + a_{CBP} \phi_P) = b_B \quad (3.49c)$$

$$a_{PC}\phi_C + (a_{ACA}\phi_{CA} + a_{BCB}\phi_{CB} + a_{CCP}\phi_P) = b_C \quad (3.49d)$$

O sistema algébrico de Equações (3.49) consiste de 4 equações e 4 incógnitas, o que permite, portanto, que se obtenha a solução. Uma maneira simplificada de resolução consiste em explicitar o valor de ϕ_A , ϕ_B , e ϕ_C nas Equações (3.49b), (3.49c) e (3.49d) e substituir em (3.49a), obtendo assim a solução para ϕ_P . Posteriormente, substitui-se este valor nas Equações (3.49b), (3.49c) e (3.49d) calculando o valor de ϕ_A , ϕ_B , e ϕ_C respectivamente.

Este procedimento de solução pode ser repetido para vários subconjuntos - como o da figura (3.10) - presentes na malha triangular usada no problema. Entretanto, examinando mais detalhadamente a malha, percebe-se que este algoritmo de solução não necessita ser repetido para todas as células mas apenas para um conjunto destas, uma vez que a cada procedimento procura-se obter a solução para 4 células ao mesmo tempo.

Como se trata de uma malha não estruturada, onde não existem regras para a ordenação dos elementos, as definições de quais subconjuntos devem ser usadas não é tão simples como em uma malha estruturada. Uma providência interessante seria a definição destes subconjuntos da malha apenas uma única vez por algum algoritmo dedicado, já que a malha permanece inalterada ao longo de todo o processo de solução. Este algoritmo dedicado deve levar em consideração também a região de fronteira do domínio de solução, pois as células triangulares localizadas nesta região têm um vizinho a menos e seu subconjunto apresenta-se com três equações e três incógnitas.

O algoritmo dedicado à definição dos subconjuntos deve procurar minimizar o número de células cujas variáveis de interesse serão calculadas mais de uma vez a cada iteração do SOLVER. Entretanto, como se trata de uma malha não estruturada, não é possível garantir a existência de uma definição de subconjuntos que permita que todas as células

tenham suas variáveis calculadas apenas uma vez, não havendo intersecção de células de subconjuntos diferentes.

O algoritmo para definição dos subconjuntos, implementado nesta tese, consiste dos seguintes passos:

- 1) Identificar e selecionar os subconjuntos nos quais o triângulo central tem apenas 1 vértice no contorno (triângulos que são vizinhos aos triângulos cuja face a está na fronteira).
- 2) Identificar e selecionar os subconjuntos nos quais o triângulo central não está marcado, bem como nenhum dos seus 3 vizinhos.
- 3) Identificar e selecionar os subconjuntos nos quais o triângulo central não está marcado, bem como 2 dos seus 3 vizinhos.
- 4) Identificar e selecionar os subconjuntos nos quais o triângulo central não está marcado, bem como apenas 1 dos seus 3 vizinhos.
- 5) Identificar e selecionar os subconjuntos nos quais o triângulo central não está marcado, independente de sua vizinhança.

Uma vez definido os devidos subconjuntos da malha triangular através do algoritmo acima, pode-se armazenar a seqüência escolhida em um arquivo para utilização do SOLVER sempre que necessário. Assim, o processo de seleção dos subconjuntos é efetuado apenas uma única vez durante todo o processo.

Apenas como exemplo, para a malha representada pela figura 3.11, que consiste de 3692 células triangulares, a aplicação do algoritmo listado acima apresenta o seguinte resultado:

- Quantidade de subconjuntos a calcular: 1159.
- Quantidade de células onde o cálculo ocorre três vezes para cada iteração do algoritmo: 85, representando 2,3% do total 3692.
- Quantidade de células onde o cálculo ocorre duas vezes: 774 (20,97%).

- Quantidade de células onde o cálculo ocorre apenas por 1 vez: 2833 (76,73%)

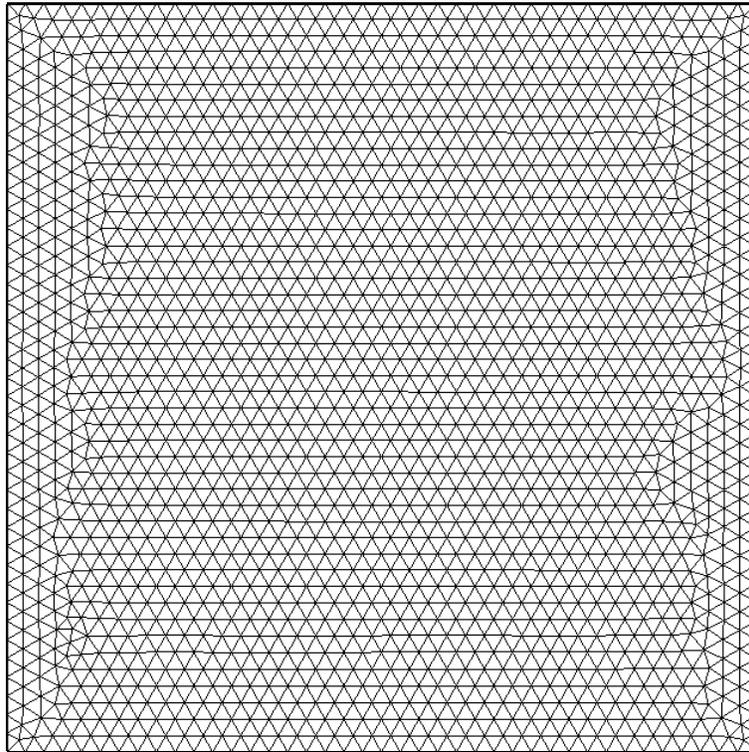


Fig. 3.11: Malha triangular não estruturada gerada pelo software Easymesh, e usada para cálculo de escoamento em uma cavidade.

Caso esta mesma malha fosse adensada de maneira que o comprimento médio de cada face fosse dividido por dois, a malha resultante, gerada pelo Easymesh, apresentaria um total de 14842 células triangulares. Neste caso, a aplicação do algoritmo gera os seguintes resultados:

- Quantidade de subconjuntos a calcular: 4179.
- Quantidade de células onde o cálculo ocorre 3 vezes para cada iteração do algoritmo: 175, representando 1,18% do total 14842.
- Quantidade de células onde o cálculo ocorre 2 vezes: 1524 (10,27%).
- Quantidade de células onde o cálculo ocorre apenas 1 vez: 13143 (88,55%)

Uma vez definidos os subconjuntos, o procedimento para solução do sistema linear de equações será descrito pelo algoritmo abaixo:

- 1) Ler dados de entrada (matriz dos coeficientes a 's, valor inicial do vetor ϕ , identificação dos subconjuntos, critério de convergência).
- 2) Resolver todos os subconjuntos (cada subconjunto apresenta um sistema de equações lineares dado por (3.49)).
- 3) Checar a convergência. Caso o critério não tenha sido atingido voltar ao passo 2

Como teste, será apresentado um comparativo simples entre a solução de um sistema linear de equações pelo método de Gauss-Seidel e pelo SOLVER aqui descrito. O comparativo será efetuado calculando-se a primeira iteração global para solução de um escoamento laminar entre placas planas totalmente desenvolvido com número de Reynolds: $Re = 100$. O critério de convergência para a solução do sistema linear de equações será tomado, neste teste, como o resíduo relativo médio, definido pela Equação abaixo:

$$(3.50)$$

Onde o resíduo será: ϵ , avaliado em cada circuncentro P das células triangulares no domínio de cálculo.

As Tabelas 3.1 e 3.2 indicam o número de iterações e o tempo gasto, respectivamente, na solução do sistema de equações para o vetor velocidade (componentes u e v) e pressão (P). A condição de contorno para o problema tratado consiste no perfil de velocidade plenamente desenvolvido (parabólico) na região de entrada. A condição inicial consiste na velocidade média em todo o restante das células do domínio de cálculo.

TABELA 3.1 – COMPARATIVO ENTRE O NÚMERO DE ITERAÇÕES

Número de iterações com Reynolds = 100						
Precisão (ϵ)	SOLVER			Gauss-Seidel		
	U	v	P	u	v	P
	1	4	1	1	19	1
	1	32	1	8	147	362
	27	198	7	133	590	797

TABELA 3.2 – COMPARATIVO ENTRE O TEMPO GASTO

Tempo com Reynolds = 100 (em segundos)						
Precisão (ϵ)	SOLVER			Gauss-Seidel		
	U	v	P	u	v	P
	0,1	0,4	0,1	0,05	0,98	0,05
	0,1	3,17	0,09	0,41	7,56	18,36
	2,67	19,6	0,69	6,82	30,35	40,42

A Tabela 3.1 mostra que, para um determinado critério de convergência, o SOLVER descrito nesta seção necessita de uma quantidade menor de iterações quando comparado com o tradicional método de Gauss-Seidel, entretanto cada iteração do novo SOLVER é mais “custosa computacionalmente” que o método Gauss-Seidel. Deve-se ressaltar que o tempo total gasto é, nestes casos testados, favorável a utilização do SOLVER desenvolvido em comparação com o método de Gauss-Seidel.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

No capítulo 4 encontram-se os resultados da aplicação do método para alguns problemas comuns em Fenômenos de Transporte como o problema da difusão de calor, escoamento laminar de um fluido viscoso incompressível sobre placas planas (Poiseuille Flow), escoamento em uma cavidade, escoamento com expansão súbita e o problema da convecção natural.

4.1 – Difusão de Calor

O problema presente nesta seção foi apresentado no ERMAC – 2000 (Fazenda et al, 2000) e em parte no XV COBEM (Travelho et al, 1999), consistindo na solução da Equação de transferência de calor (2.4), que se encontra na forma discretizada em (3.27). O problema tratado será apenas de difusão de calor em estado estacionário. Portanto, a Equação (2.4) reduz-se a:

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = 0, \quad (4.1)$$

sendo que a condutibilidade térmica, k , será definida através de uma variação linear com a temperatura dada por:

$$k = aT + b, \quad (4.2)$$

onde a e b são constantes.

Desta forma, o problema apresenta uma não-linearidade devido à dependência do valor da temperatura na determinação do valor da condutibilidade térmica.

O domínio de solução para o problema apresenta a forma de um anel, como pode ser verificado na figura 4.1, na qual as condições de contorno na fronteira interna (raio r) são do primeiro tipo (Dirichlet), e na fronteira externa (raio R) de segundo tipo (Neumann), ou seja, define um valor constante para a temperatura em r e um fluxo de calor em R .

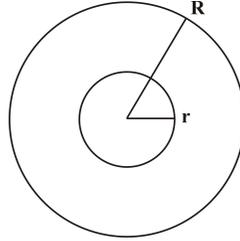


Fig. 4.1: Domínio de solução para o problema de difusão de calor.

A malha triangular discretizada para a figura 4.1 é apresentada na figura 3.5.

A discretização da Equação (4.1) em volumes finitos através da abordagem baseada no circuncentro, levando em consideração a condutibilidade térmica definida em (4.2), necessita do cálculo de k nas faces de cada célula triangular. Uma vez que o valor da temperatura é conhecido apenas nos circuncentros, será necessária alguma forma de interpolação. Uma maneira possível seria o uso de uma média ponderada pela distância do circuncentro à parede, e assim tem-se:

$$k_i = \left(\frac{1-f_i}{k_p} + \frac{f_i}{k_I} \right)^{-1}, \quad f_i = \frac{Dist_{I-i}}{Dist_{p-I}}, \quad (4.3)$$

onde o sub-índice I refere-se à posição do circuncentro da célula vizinha I ($I = A, B$ ou C) e o sub-índice i à posição referente ao meio da face i , situada entre as células I e P .

A solução numérica aplicada a malhas com diferentes números de triângulos foi confrontada com a solução analítica do problema; desta forma foi possível identificar uma queda no erro na medida em que a malha se tornava mais refinada e,

consequentemente, o tamanho característico da parede da célula se tornava menor, conforme se verifica na figura 4.2. A ordem de convergência do método calculada para este caso foi de, aproximadamente, 2,63.

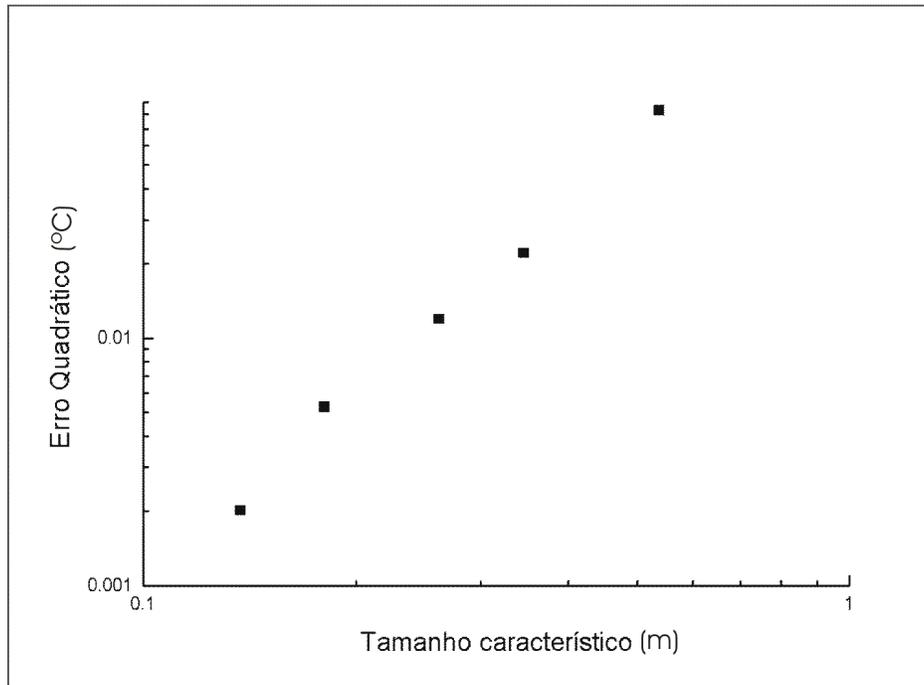


Fig. 4.2: Erro Quadrático da solução numérica em relação ao incremento no número de células da malha.

Outro teste executado foi um comparativo com a abordagem de Mathur e Murthy (1997) para discretização de termos difusivos (Equação (3.5)) e também uma discretização centrada no vértice, como o conhecido diagrama de Voronoi, na mesma malha triangular. A figura 4.3 apresenta a queda no erro em relação ao incremento na quantidade de células da malha para a condutibilidade térmica constante, ou seja, $k = 1$. Neste caso, a solução para diagramas de Voronoi foi a que apresentou as melhores soluções.

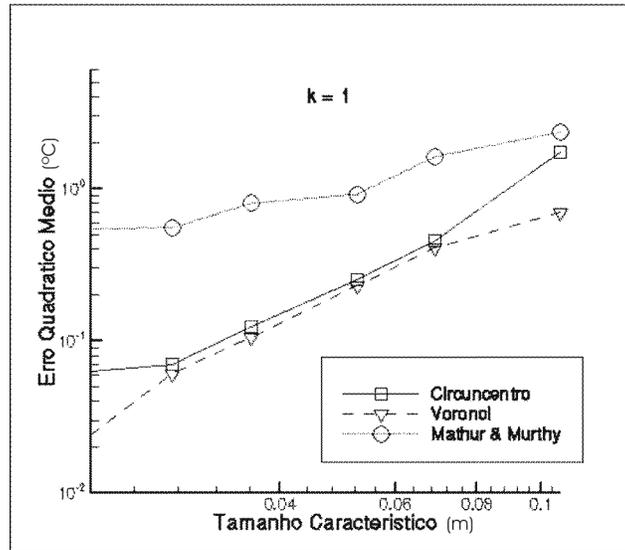


Fig. 4.3: Erro Quadrático Médio da solução numérica para $k = 1$ com a abordagem pelo Circuncentro, Diagramas de Voronoi e método de Mathur e Murthy em relação ao incremento no número de células da malha.

Quando o problema torna-se não linear, devido à dependência do valor de k com a temperatura na forma da Equação (4.2), a solução com a abordagem pelo circuncentro produz melhores resultados, como se pode verificar na figura 4.4.

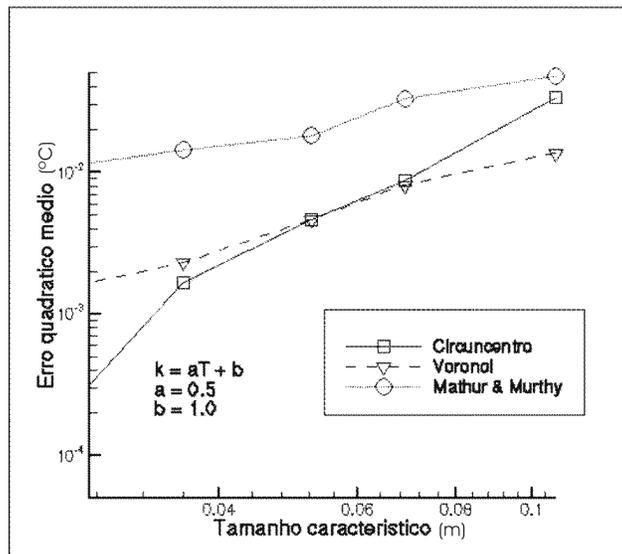


Fig. 4.4: Erro Quadrático Médio da solução numérica para $k = aT + b$ onde $a = 0,5$ e $b = 1,0$.

A maior ordem de convergência em problemas não lineares para a solução utilizando a ABC em comparação com a mesma solução em diagramas de Voronoi se deve ao fato

de que a aproximação para o valor de k seja efetuado exatamente sobre o ponto médio do lado quando se utiliza a ABC, o que não ocorre com os diagramas de Voronoi.

Os perfis de temperatura para os casos testados, ou seja com condutibilidade térmica constante ($k=1$) e com uma dependência linear com a temperatura ($k = aT + b$, $a = 0,5$ e $b = 1$), podem ser observados nas figuras 4.5 e 4.6, respectivamente, para as simulações numéricas obtidas com a ABC, diagramas de Voronoi e método de Mathur e Murthy, em relação a solução analítica.

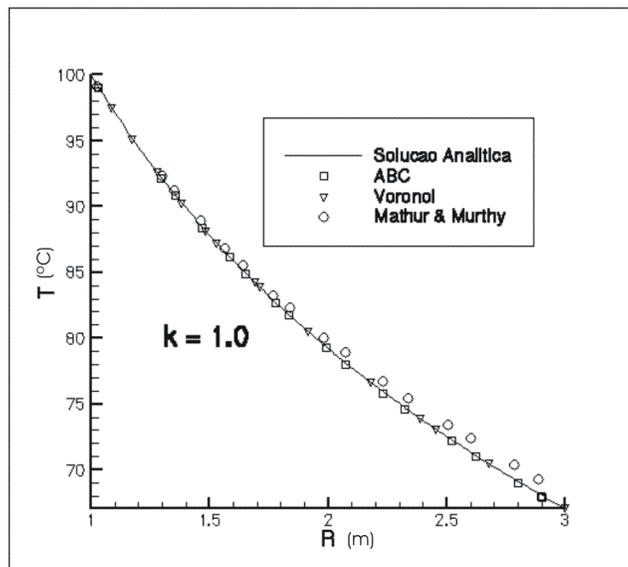


Fig. 4.5: Perfis de Temperatura para $k = 1$ obtidos com a abordagem pelo Circuncentro, Diagramas de Voronoi e método de Mathur e Murthy em relação a solução analítica.

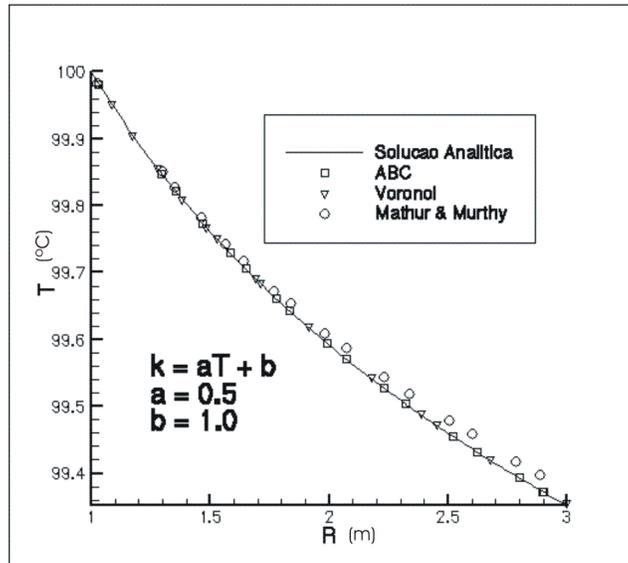


Fig. 4.6: Perfis de Temperatura para $k = aT + b$ obtidos com a abordagem pelo Circuncentro, Diagramas de Voronoi e método de Mathur e Murthy em relação a solução analítica.

Conforme se pode observar nesta seção, a abordagem pelo circuncentro para malhas não estruturadas apresentou uma convergência de 2ª ordem para um problema não linear, além de ter uma implementação computacional simples. O método apresenta as vantagens do uso de diagramas de Voronoi para solução de problemas difusivos sem as dificuldades encontradas na geração da malha de Voronoi, especialmente nos contornos. Além do mais, apresenta um *stencil* menor que o diagrama de Voronoi e também um tamanho médio da célula geralmente menor. Assim, pode-se observar que a abordagem por circuncentro apresenta bons resultados para problemas puramente difusivos.

4.2 – escoamento incompressível

Os resultados apresentados nas subseções seguintes referem-se à aplicação do algoritmo da seção 3.5 para a solução de um problema de escoamento viscoso incompressível em regime permanente e laminar. Serão analisadas as características de cada escoamento, incluindo suas condições de contorno, juntamente com a apresentação dos resultados da visualização do escoamento para as variáveis envolvidas, bem como, em alguns casos, uma comparação com outras soluções numéricas, analíticas e também experimentais.

4.2.1 – Escoamento entre placas planas

O problema do escoamento laminar em um canal formado por duas placas planas paralelas, conhecido por “*Poiseuille Flow*” (Brodkey, 1967), pode ser graficamente visualizado na figura 4.7. A modelagem bidimensional será feita tomando-se uma secção longitudinal do escoamento. Neste caso, supondo um escoamento plenamente desenvolvido, a velocidade máxima na direção paralela às paredes ocorre na região da altura média ($H/2$) e é 50% maior que a velocidade média. Lembrando que a vazão de massa é proporcional ao gradiente longitudinal de pressão, que “força” o escoamento.

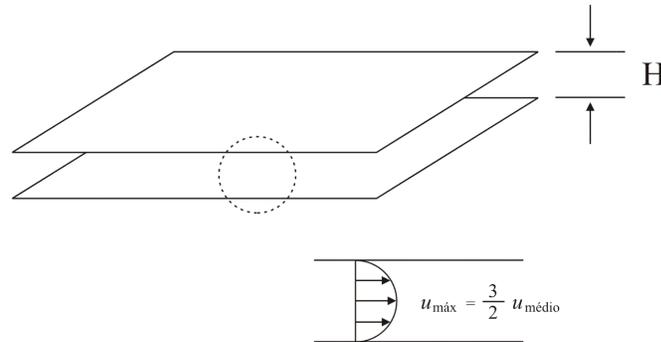


Fig. 4.7: Escoamento laminar em um canal formado por placas planas paralelas.

O domínio bidimensional a ser discretizado com uma malha triangular não estruturada pelo software Easymesh (Niceno, 1997) pode ser visualizado pela figura 4.8 a seguir. Nela pode-se identificar três diferentes condições de contorno. A condição de contorno para a fronteira de entrada, delimitada pela parede vertical à esquerda, será um valor constante para o vetor velocidade. Na condição de contorno para a fronteira de saída do escoamento, referente à parede vertical direita, considerar-se-á que não haverá mudanças no perfil de velocidades ao longo da direção longitudinal. E, finalmente, a condição de contorno para as paredes sólidas, horizontais superior e inferior, serão fronteiras com condição de aderência, onde o vetor velocidade será igual a zero.

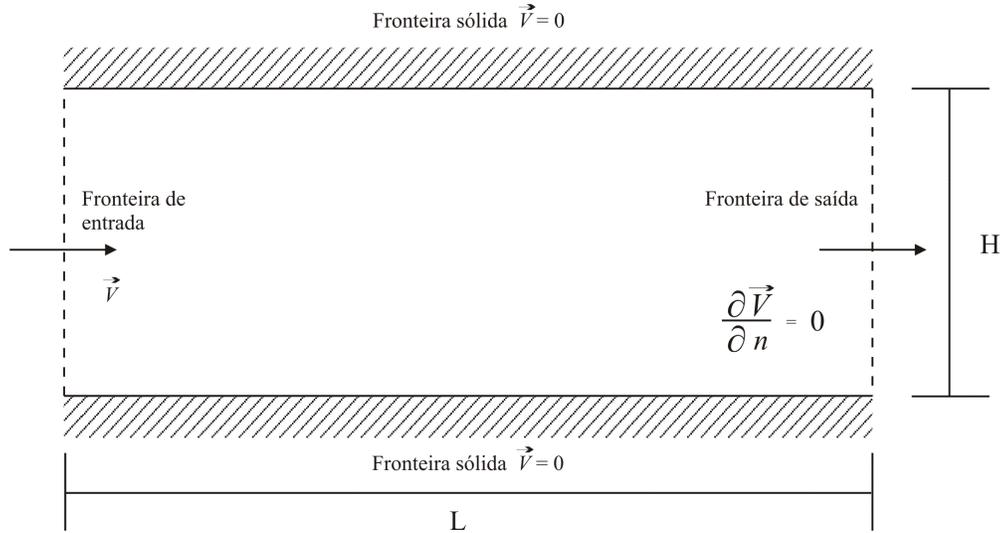


Fig. 4.8: Domínio bidimensional para *Poiseuille flow*.

A solução analítica para o problema em questão é o perfil de velocidades quando o escoamento estiver plenamente desenvolvido, resultando em um perfil parabólico para o componente u do vetor velocidade (componente no sentido longitudinal), dependente unicamente da altura y , conforme se verifica na Equação (4.4):

$$u(y) = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{2\mu} (y^2 - Hy) \quad (4.4)$$

As condições de contorno para as três fronteiras presentes na figura 4.8 serão definidas da seguinte maneira:

Fronteira de Entrada:

Condição de contorno de Dirichlet para o vetor velocidade localizado na fronteira de entrada, como na seção 3.4.1.1. Entretanto apenas o componente na direção longitudinal será diferente de zero. Portanto $\vec{V}_{entrada} = (u_{entrada}, 0)$.

O componente u será fixado na fronteira de duas maneiras distintas. Na primeira forma, usada para teste e validação do método, será inicializada com a solução analítica do

vetor velocidade para o caso totalmente desenvolvido, portanto u dependerá da altura y , exatamente como na Equação (4.4). Assim, supõe-se que o fluido já entre na placa advinda de estágio anterior na qual já sofreu as ações viscosas da parede sólida de maneira suficiente para atingir o seu desenvolvimento. No segundo caso, procura-se obter o cálculo do desenvolvimento do vetor velocidade pela ação viscosa da parede, assim u será constante em toda a fronteira de entrada e com valor igual à velocidade média deste componente ($u_{entrada} = \bar{u}$).

Entretanto, a questão do valor da pressão na fronteira de entrada ainda não foi especificada. Deve-se lembrar, inicialmente, que em um escoamento incompressível, o gradiente de pressão é o que importa para satisfação da equação da conservação de massa. Assim, a aproximação da Equação (3.35), onde se supunha $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$, para a face a do triângulo na fronteira, não pode ser usada neste caso, pois o escoamento apresenta características distintas em relação ao que ocorre nas paredes sólidas.

A solução implementada em Pereira Filho (2000), para o escoamento em um tubo circular (Hagen-Poiseuille), foi especificar condições de Dirichlet tanto para velocidade quanto para pressão na fronteira de entrada. Devido a características da malha prismática utilizada, foi possível posicionar, o centro da célula e não a sua face, na fronteira de entrada, sendo esta a melhor opção para condições de contorno de Dirichlet.

No caso da malha triangular utilizada neste trabalho, o processo de geração da malha através do EasyMesh (Niceno, 1987) não permite a criação de células com seus circuncentros posicionados exatamente sobre uma linha ou fronteira pré-determinadas. Deve-se lembrar que tal tarefa não é impossível de ser realizada, desde que se utilize de um procedimento externo ao programa ou outro software mais adequado.

Ao se utilizar uma malha densa o suficiente, ou seja, com uma grande quantidade de pequenas células na região de interesse, pode-se fixar o valor do vetor velocidade e da pressão nos circuncentros dos triângulos cuja uma de suas faces está posicionado na

fronteira de entrada. Neste caso, os circuncentros não estarão posicionados exatamente sobre a fronteira de entrada, mas em uma região muito próxima à mesma. Assim, o tratamento seria similar ao trabalho de Pereira Filho citado acima.

Para o caso de se posicionar a face da célula no contorno, como foi utilizado neste trabalho, pode-se fixar o valor do gradiente de pressão na fronteira que satisfaça o perfil de velocidades na região, especialmente em escoamentos plenamente desenvolvidos como condição de entrada. Em escoamentos onde o perfil de entrada é plano e igual à velocidade média do escoamento, pode-se também aproximar o valor do gradiente de pressão na fronteira que satisfaça a solução analítica (4.4), sendo esta a solução esperada quando o escoamento estiver plenamente desenvolvido. Mas a aplicação desta aproximação pode introduzir erros no sistema, uma vez que esta hipótese pode não ser válida na restrita região da fronteira de entrada (em desenvolvimento).

A solução adotada foi o cálculo do campo de pressão levando em consideração apenas os pontos internos do domínio de cálculo sem a necessidade de se calcular os valores da pressão em posições sobre as fronteiras, como especificado pelas Equações (3.36) e (3.37). Entretanto, como o valor da pressão na fronteira, P_a , é necessário na equação discretizada de quantidade de movimento (especificamente no coeficiente b^p em (3.36c)), este valor é atualizado a partir do valor médio do gradiente de pressão, $\overline{\frac{\partial P}{\partial n}}$, calculado na vizinhança das células que têm uma face na fronteira de entrada. Este processo será repetido após cada iteração para determinação do campo de pressão.

Fronteira de Saída:

A fronteira de saída do fluido será uma condição de Neumann para o vetor velocidade, assim como definido na seção 3.4.1.2, ou seja, a derivada de \vec{V} em relação a direção da normal externa a fronteira de saída será nula como em (3.39), aqui reproduzida em (4.5).

$$\left. \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} \right|_a = 0 \quad (4.5)$$

Como em (3.42), a aproximação de (4.5) será $\bar{V}_a = \bar{V}_p$.

Assim como acontece na fronteira de entrada, é necessário o valor da pressão na fronteira de saída na equação discretizada de conservação da quantidade de movimento (coeficiente \bar{b} dado por (3.43c)). Será aplicado o mesmo raciocínio da condição de contorno de entrada, ou seja, P_a será determinado de acordo com o valor médio da derivada de P na vizinhança da célula cuja face a está situada na fronteira de saída.

Fronteira com condição de aderência:

As paredes horizontais presentes na figura 4.8 apresentam a condição de aderência; portanto, o valor do vetor velocidade nesta fronteira será igual a zero ($\bar{V}_a = 0$), e os coeficientes da equação discretizada de conservação da quantidade de movimento para este caso será a mesma da fronteira de entrada com condição de Dirichlet para velocidade (3.36).

O valor da pressão na face a do triângulo na parede será o valor da pressão no circuncentro P (ver apêndice B). Assim a aproximação do gradiente de pressão para parede sólida será como em (3.35), aqui reproduzido como (4.6).

$$\left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_a \cong 0 \Rightarrow P_a \cong P_p \quad (4.6)$$

Os resultados para a condição de contorno na fronteira de entrada com perfil parabólico dado por (4.4) e com $Re = 100$ pode ser visualizado na figura 4.10 através do perfil de velocidade, e na figura 4.11 exibindo o decaimento linear da pressão. No teste

apresentado nestas figuras, a malha triangular utilizada é composta de 4.882 vértices e 9.322 células triangulares, sendo o comprimento L dez vezes maior que a altura H de 0.1 metros ($L = 10H$).

Todos os valores estão no Sistema Internacional, sendo que o valor médio do componente longitudinal de velocidade é igual a 0.0001 m/s para o escoamento da água a 20°C , com densidade e viscosidade de aproximadamente 1000 Kg/m^3 e $0.001 \frac{\text{Kg}}{\text{ms}}$, respectivamente. O gradiente de pressão analítico que satisfaz a Equação (4.4) será $\frac{\partial P}{\partial x} = -0.0012 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2}$.

As condições iniciais para o cálculo serão dadas por um perfil plano de velocidades em todo o domínio, $[\mathbf{V}_p^i = (\bar{u}, 0)]$, exceto na fronteira de entrada onde o valor de u será dado pela Equação (4.4), conforme figura 4.9. Os valores de pressão em cada circuncentro P serão dados por um decaimento linear de P conforme o gradiente de pressão do problema. O critério de parada utilizado será composto de 3 condições a serem satisfeitas simultaneamente:

- O divergente quadrático médio do vetor velocidade:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NT} (\nabla \cdot \mathbf{V}_i^p)^2}{NT}} < \epsilon_1, \quad (4.7)$$

onde NT corresponde ao número total de triângulos da malha.

- O Resíduo quadrático relativo médio do componente u da velocidade:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NT} (R_{u_i})^2}{NT}} < \varepsilon_2, \quad (4.8)$$

onde o resíduo relativo é dado por $R_u = \frac{a_p u_p - (a_A u_A + a_B u_B + a_C u_C) - b}{a_p \bar{u}}$, sendo \bar{u} o valor médio da velocidade.

- O Resíduo quadrático relativo médio do componente v da:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NT} (R_{v_i})^2}{NT}} < \varepsilon_3 \quad (4.9)$$

Os resultados da figura 4.10 mostram o perfil de velocidades depois de atingida a convergência para um escoamento com fronteira de entrada com perfil parabólico. Os vetores da figura encontram-se em 20 posições igualmente espaçadas na malha computacional no sentido longitudinal e transversal. Entretanto, tais resultados foram obtidos por interpolação linear, apenas para efeito de visualização, uma vez que em uma malha não estruturada os circuncentros dificilmente estarão posicionados sobre uma linha reta imaginária, pois estarão espalhados pelo domínio computacional.

Ao se analisar os valores numéricos percebe-se, também, uma pequena diferença no perfil de velocidade entre o perfil de entrada, obtido analiticamente através da Equação (4.4), e o perfil parabólico obtido pela solução do problema. A diferença encontrada entre a solução analítica na entrada e a solução numérica da saída foi de, aproximadamente, 1,32% para uma malha de 3476 vértices e 6582 triângulos.

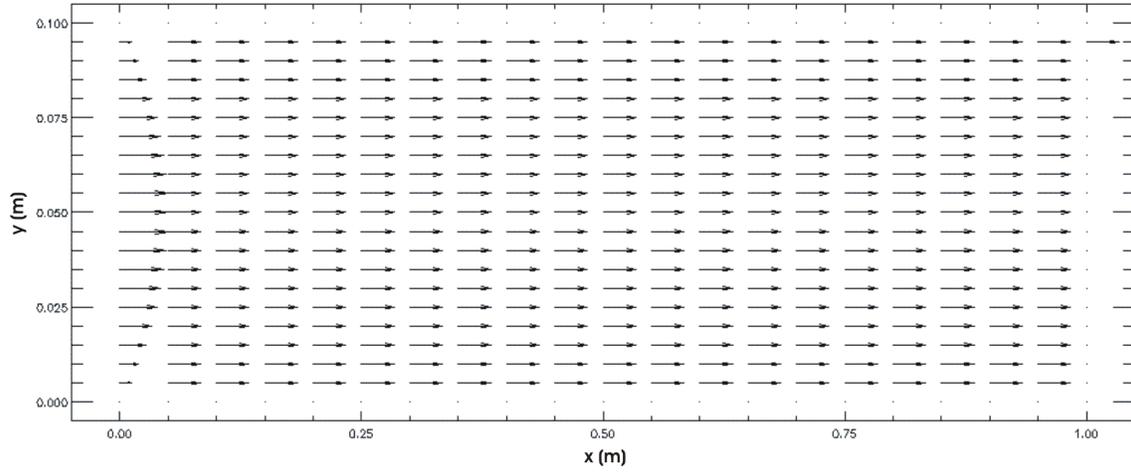


Fig. 4.9: Perfil inicial de velocidade para $Re=100$. Entrada com perfil parabólico e o restante com perfil plano.

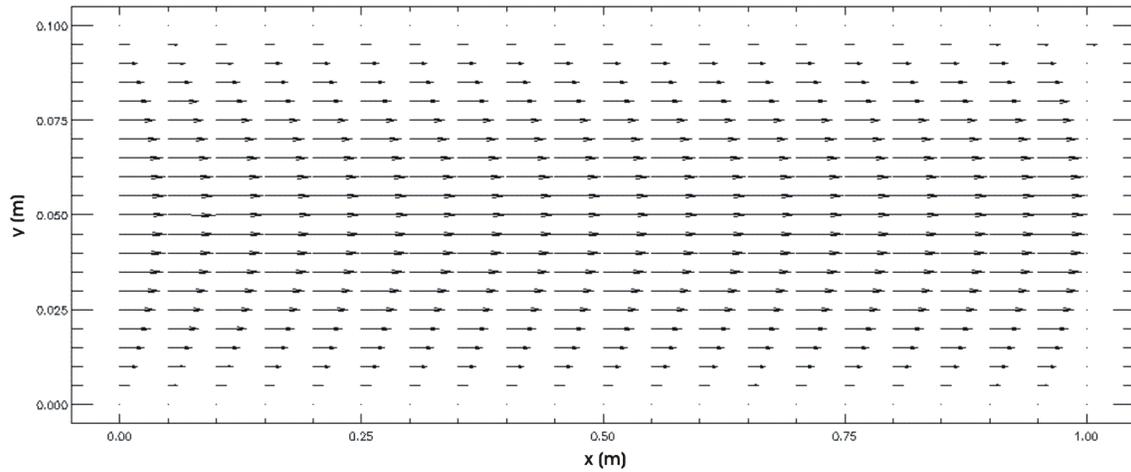


Fig. 4.10: Perfil de velocidade para $Re=100$ em escoamentos plenamente desenvolvidos.

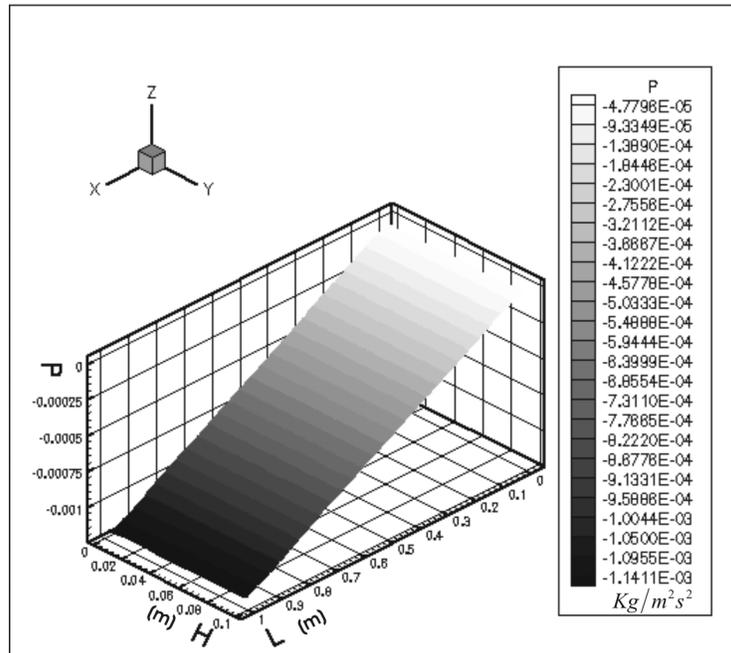
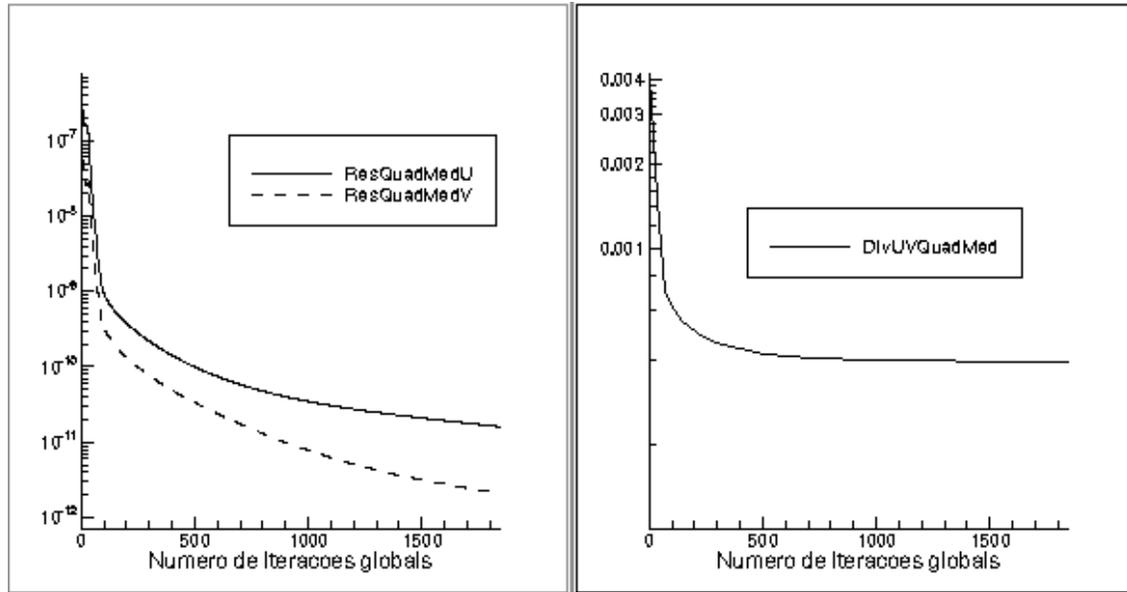


Fig. 4.11: Campo de pressão para $Re=100$ em escoamentos plenamente desenvolvidos.

Os históricos de convergência do segundo e terceiros critérios podem ser visualizados na figura 4.12a, onde se percebe que, nas primeiras iterações, o resíduo quadrático médio de v aumenta levemente para depois cair. Isto se deve à ação das forças viscosas nas paredes agindo sobre o perfil plano inicial de velocidades. A satisfação da equação de continuidade pode ser melhor visualizada pela figura 4.12b, que permite identificar a queda no resíduo quadrático médio de $\nabla \cdot \vec{V}$ à medida que avançam as iterações globais, uma vez que a equação de continuidade para um escoamento incompressível e em estado estacionário tem como característica $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.



(a)

(b)

Fig. 4.12: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade ($Re = 100$ e condição de entrada com perfil parabólico).

A solução analítica para a distribuição do campo de pressão para um perfil totalmente parabólico de velocidades, do início ao fim do domínio, consiste em uma distribuição linear dos valores da pressão ao longo da direção longitudinal do domínio, como exibido na figura 4.11. Assim, foi possível estimar o valor do gradiente de pressão medido ao longo da direção longitudinal, avaliando a variação à medida que se adensavam as quantidades de células nas malhas utilizadas. Estas medidas podem ser encontradas na Tabela 4.1 a seguir, juntamente com os tempos computacionais despendidos na simulação numérica em uma máquina com processador tipo RISC modelo SUN ULTRAPARC II (ULTRA 60) – 360 Mhz com 256 Mbytes, lembrando que o valor da solução analítica prevê: $\frac{\partial P}{\partial x} = -0,0012 \frac{Kg}{m^2 s^2}$.

TABELA 4.1 – $\partial P/\partial x$ EM DIFERENTES MALHAS – REYNOLDS = 100

Quantidade de triângulos	Tamanho médio dos lados dos triângulos	$\partial P/\partial x$ em ($Kg/m^2 s^2$)	Tempo gasto (hh:mm:ss)
2382	H/10, L/100	-0,001188	1:57
9528	H/20, L/200	-0,001205	11:45
21438	H/30, L/300	-0,001205	36:17

Para as situações onde a condição de contorno na entrada é um perfil plano, sendo o valor da velocidade definido como valor médio do componente longitudinal de velocidade, \bar{u} , deseja-se obter um perfil de velocidades em desenvolvimento para $Re = 100$, $Re = 400$ e $Re = 800$. O perfil esperado de velocidades na fronteira de saída será o perfil de velocidades parabólico (totalmente desenvolvido), caso o comprimento L seja suficiente para que ocorra o desenvolvimento em sua plenitude.

A malha utilizada para as simulações com perfil de velocidades em desenvolvimento utiliza 18.864 vértices e 36.846 células triangulares para um domínio computacional retangular discretizado com as dimensões já definidas anteriormente, ou seja, comprimento 10 vezes maior que a altura. Os resultados finais podem ser vistos nas figuras 4.13, 4.14 e 4.15 para o perfil de velocidades, e 4.18, 4.19 e 4.20 para o campo de pressão, para os casos $Re = 100$, $Re = 400$ e $Re = 800$ respectivamente.

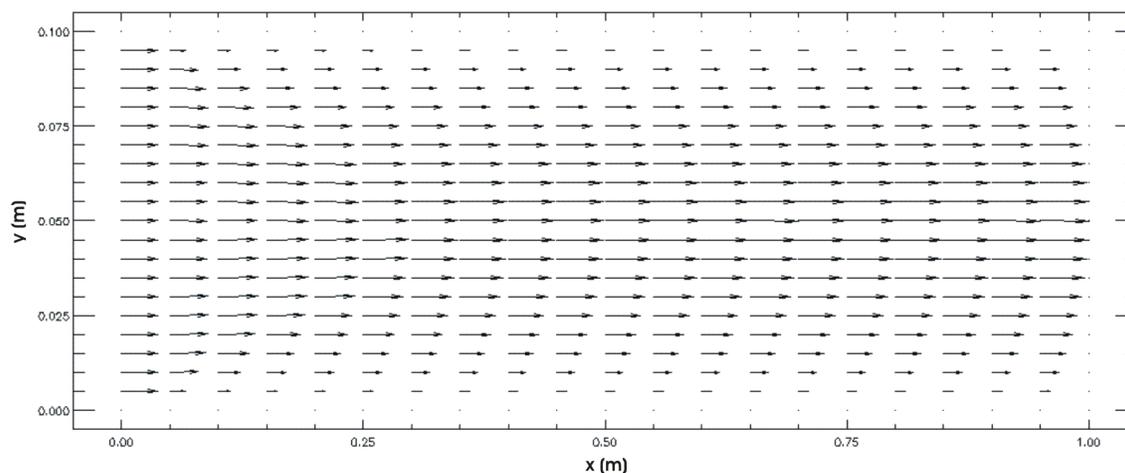


Fig. 4.13: Perfil de velocidade para $Re = 100$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades.

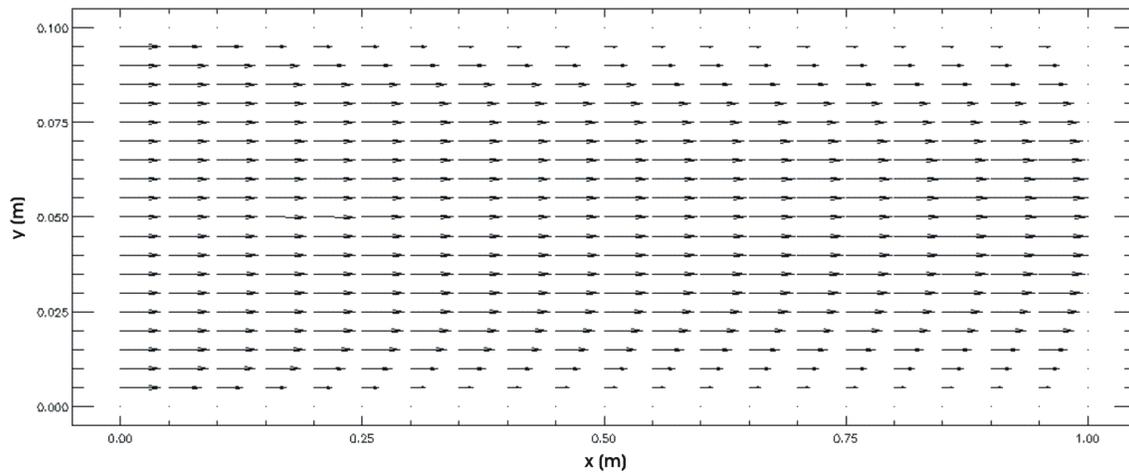


Fig. 4.14: Perfil de velocidade para $Re = 400$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades.

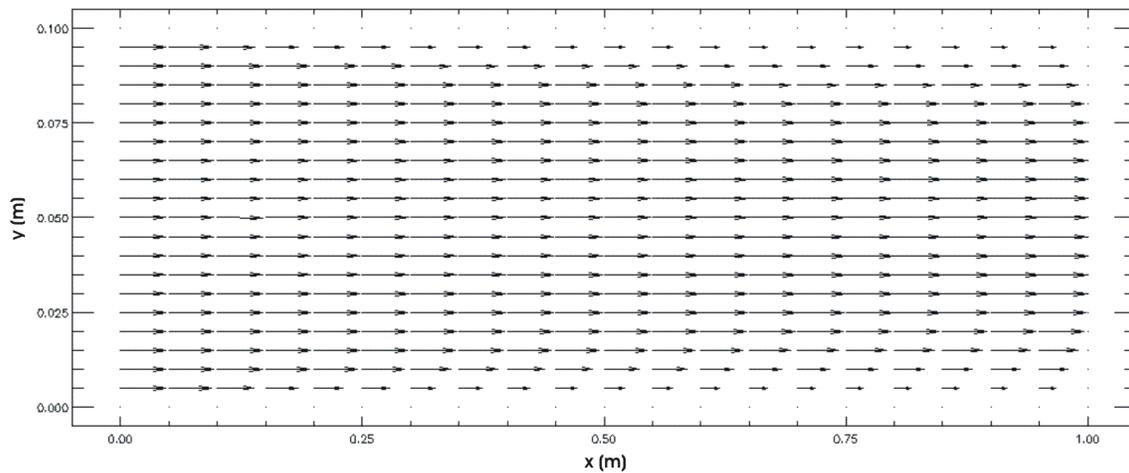


Fig. 4.15: Perfil de velocidade para $Re=800$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades.

Percebe-se que o tamanho da região de entrada do fluido fica progressivamente maior à medida que o número de Reynolds aumenta (conforme as figuras 4.13, 4.14 e 4.15), como era esperado. Para o escoamento com número de Reynolds igual 800 (figura 4.15), percebe-se claramente que este não se encontra plenamente desenvolvido na fronteira de saída, devido ao tamanho da região de entrada.

Existem, na literatura, soluções analíticas para o perfil de velocidades em desenvolvimento na entrada de um tubo (Bennet e Myers, 1978), bem como para um

duto de seção quadrada e também o escoamento entre placas planas. Entretanto, a solução não é trivial e, no caso de tubos, envolve a avaliação de funções de Bessel. Uma estimativa bastante simplificada e confiável para o comprimento de entrada foi proposta por Schlichting (1979), e consiste em:

$$\frac{Le}{H} = 0,04 Re, \quad (4.10)$$

onde Le é o comprimento de entrada, H é a altura entre as placas e Re representa o número de Reynolds. Para confrontar o comprimento de entrada presente nos escoamentos obtidos com a simulação numérica e o estabelecido por (4.10), estabeleceu-se que, no caso das simulações, o escoamento estaria plenamente desenvolvido quando $\partial \bar{v}^p / \partial x < \varepsilon$, onde x representa a direção longitudinal e ε uma constante próxima de zero. Assim, a Tabela abaixo apresenta os valores previstos pela Equação (4.10) para serem comparados ao método.

TABELA 4.2 – VALORES PREVISTOS PARA COMPRIMENTO DE ENTRADA

Reynolds	Le
100	0,4
400	1,6
800	3,2

Os gráficos 4.14 e 4.15 exibem os valores médios relativos da derivada $\partial \bar{v}^p / \partial x$ para as simulações apresentadas com Reynolds de 100 e 200, respectivamente. Para $Re = 100$ (figura 4.16), o valor de $\partial \bar{v}^p / \partial x$ relativo médio é menor que 0,1% para pontos onde a coordenada $x > 0,35 m$, e para $Re = 200$ (figura 4.17) o mesmo patamar é atingido para pontos onde a coordenada $x > 0,75 m$, lembrando que $L = 1,0 m$. Nas simulações para maiores números de Reynolds este limitante não foi atingido, uma vez que o desenvolvimento não se completou para o comprimento de malha testado.

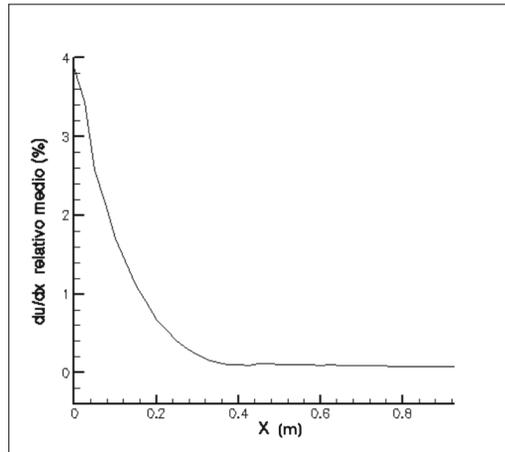


Fig. 4.16: $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ relativo médio ($Re = 100$, cond. entrada com perfil plano).

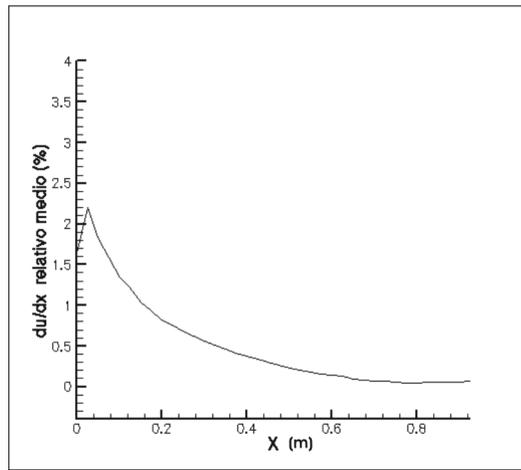


Fig. 4.17: $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ relativo médio ($Re = 200$, cond. entrada com perfil plano).

O campo de pressão exibe um comportamento similar para todos os números de Reynolds testados (conforme as figuras 4.18, 4.19 e 4.20), variando apenas a inclinação da reta, pois o gradiente de pressão deve aumentar conforme o aumento do número de Reynolds. Para uma melhor observação do fenômeno, pode-se utilizar uma técnica numérica que consiste em desprezar as últimas seções do escoamento na fronteira de saída, a fim de que a influência da condição de contorno na fronteira seja menos relevante. Neste caso bastaria desprezar os valores que correspondem a valores de x entre 0,95 e 1,0 m .

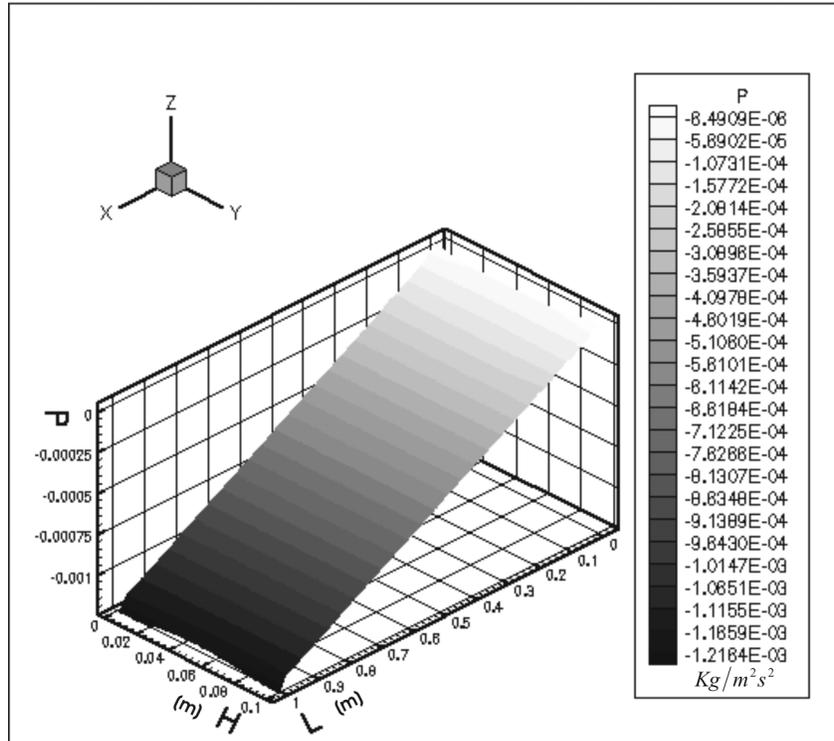


Fig. 4.18: Campo de pressão para $Re=100$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades.

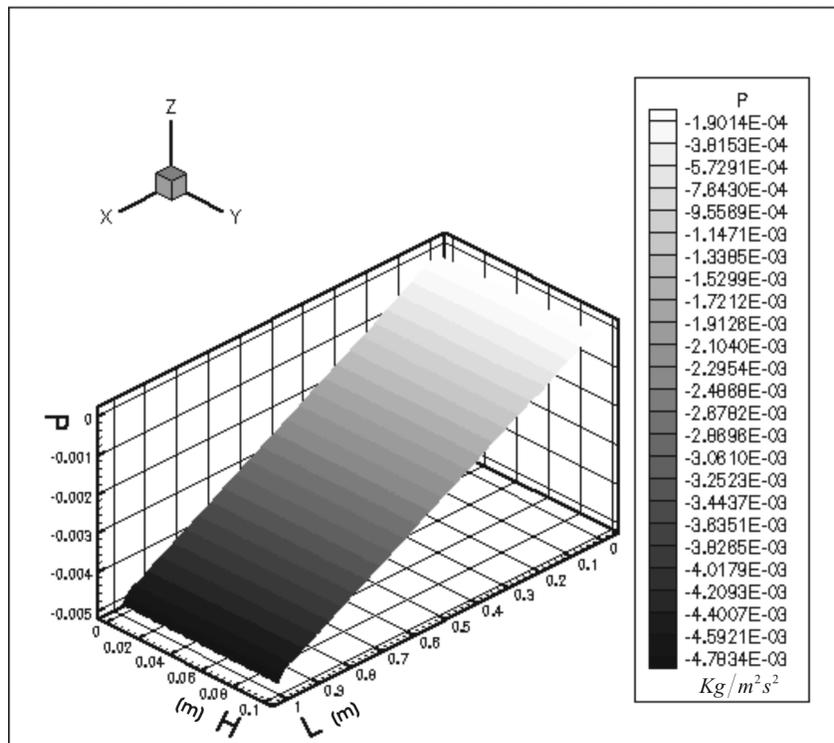


Fig. 4.19: Campo de pressão para $Re = 400$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades.

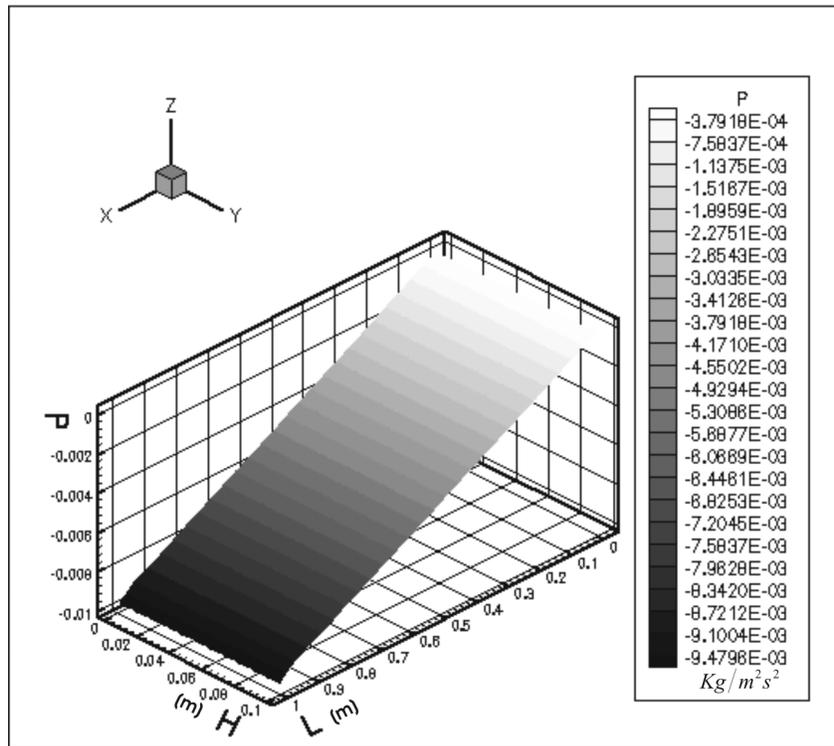


Fig. 4.20: Campo de pressão para $Re = 800$ com fronteira de entrada com perfil plano de velocidades.

A visualização dos componentes u e v do vetor velocidade para Reynolds = 100 pode ser verificada nas figuras 4.21 e 4.22, respectivamente. Percebe-se, na figura 4.21, um perfil parabólico para u (componente longitudinal de velocidade), onde a velocidade máxima está localizada no meio da altura H , exibindo, inclusive, a região referente ao comprimento de entrada. Na figura 4.22 percebe-se a influência da parede sólida com condição de aderência agindo no fluido, pois na região do comprimento de entrada, v tem valores opostos para cada metade da altura H agindo como um freio para o componente u na região próxima à parede, até se estabilizar quando o escoamento já se encontra desenvolvido.

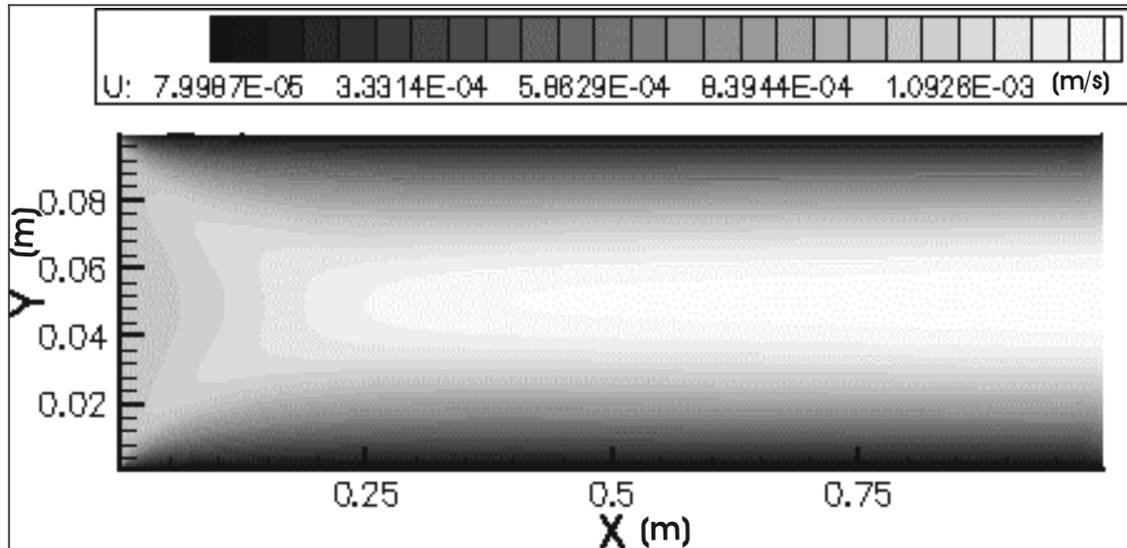


Fig. 4.21: Componente u (longitudinal - x) do vetor velocidade para $Re = 100$.

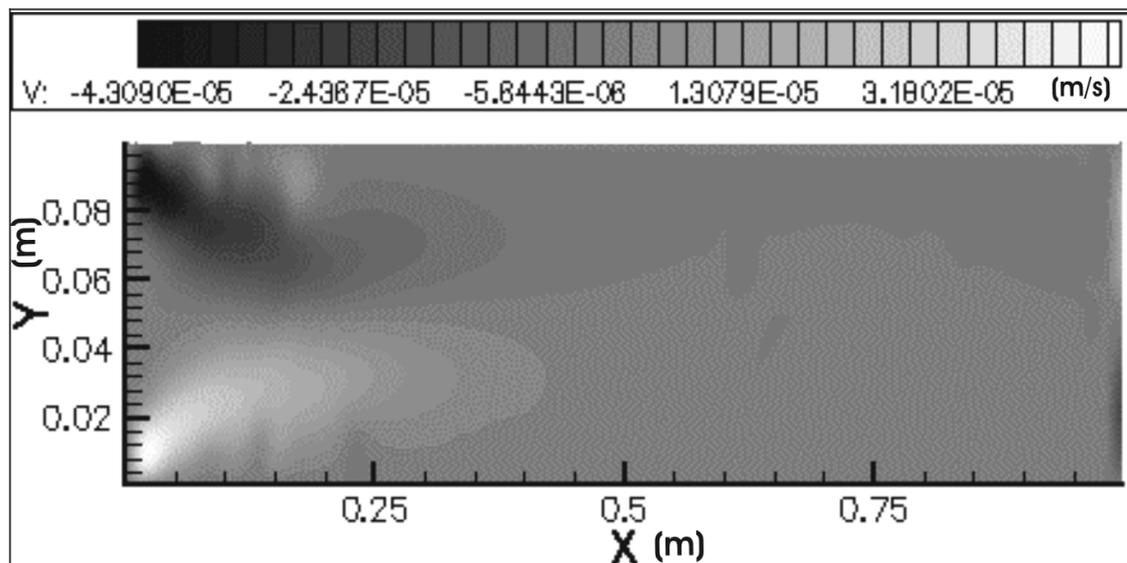
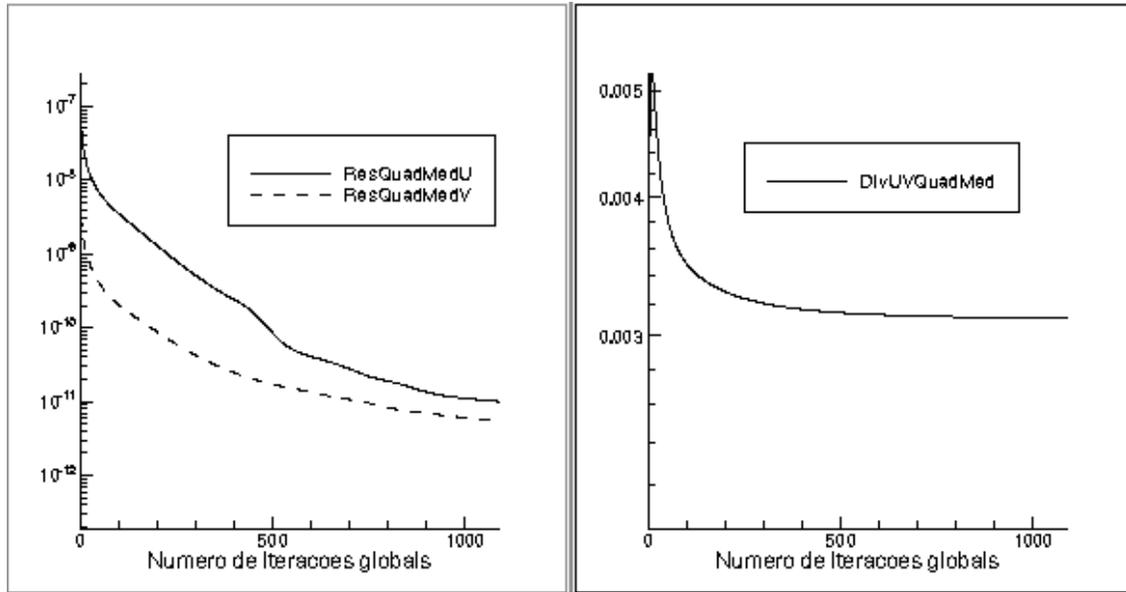


Fig. 4.22: Componente v (transversal - y) do vetor velocidade para $Re = 100$.

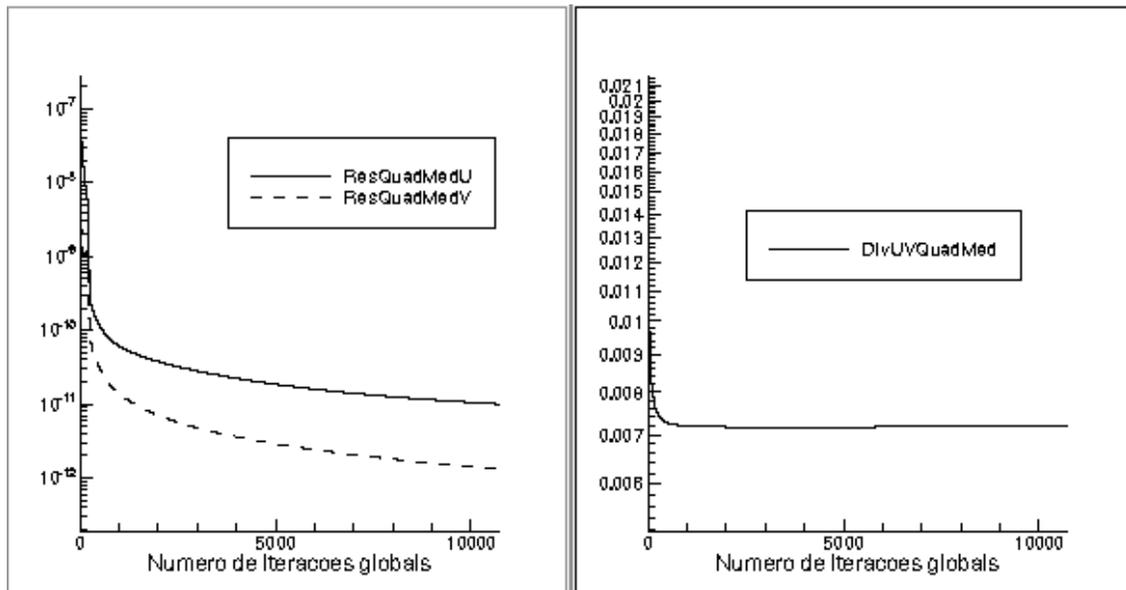
A evolução nos critérios de convergência podem ser visualizados nas figuras 4.23, 4.24 e 4.25.



(a)

(b)

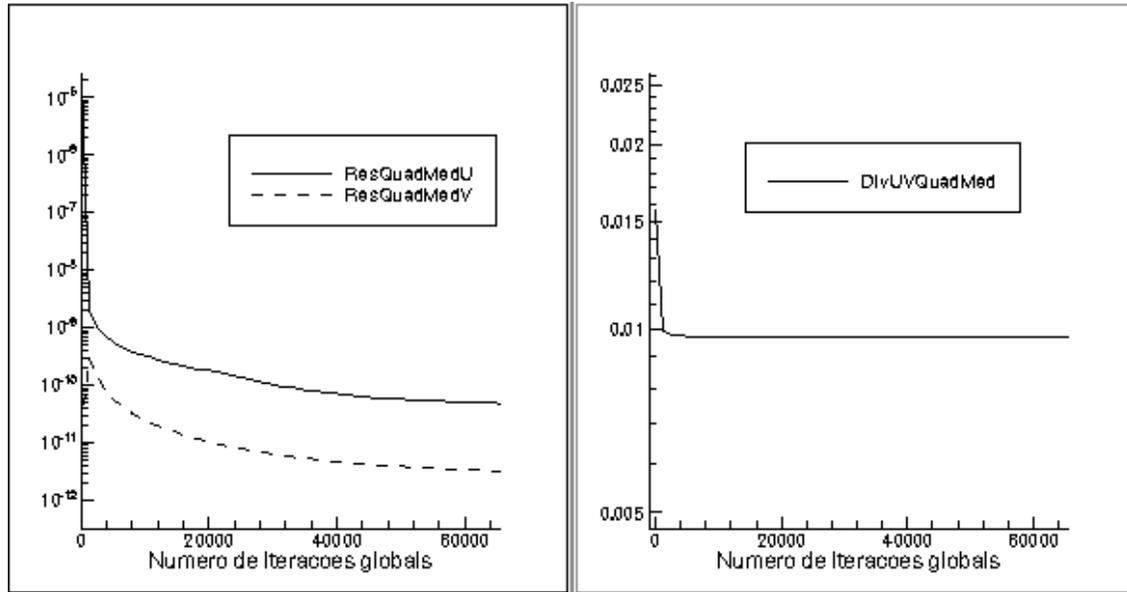
Fig. 4.23: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade ($Re = 100$ e condição de entrada com perfil plano).



(a)

(b)

Fig. 4.24: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade ($Re = 400$ e condição de entrada com perfil plano).



(a)

(b)

Fig. 4.25: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade ($Re = 800$ e condição de entrada com perfil plano).

Na Tabela 4.3 a seguir, pode-se observar os gradientes médios de pressão ao longo da direção longitudinal, confrontados com os valores do gradiente que satisfazem a solução analítica para um perfil de velocidades totalmente desenvolvido. Estes valores não são esperados para o caso onde se tem um perfil de velocidades em desenvolvimento, como aqui tratado, e servem apenas como medida de comparação. Lembrando que os valores estão em $Kg/m^2 s^2$.

TABELA 4.3 – GRADIENTE DE PRESSÃO PARA DIFERENTES NÚMEROS DE REYNOLDS - MALHA COM 36846 (L/400, H/40) TRIÂNGULOS

Número de Reynolds	Valor calculado	Com perfil de velocidades desenvolvido	Tempo de processamento (hh:mm:ss)
100	-0,001244	-0,0012	28:36
200	-0,002499	-0,0024	1:04:22
400	-0,004969	-0,0048	3:51:24
800	-0,0098550	-0,0096	36:11:24

4.2.2 – Escoamento em uma cavidade

Conforme Ghia et al (1982), Platte (1998) e também Fortuna (2000), um tipo de problema muito utilizado para avaliação de algoritmos numéricos para solução de problemas incompressíveis é o escoamento sobre uma cavidade¹. Neste caso, tem-se o interior de uma cavidade totalmente preenchido com fluido, onde na fronteira superior do escoamento há uma camada de fluido que se move com velocidade uniforme, sendo as fronteiras restantes consideradas paredes sólidas com condição de aderência, conforme se pode verificar na figura 4.26.

O domínio bidimensional da figura 4.26 é discretizado através de uma malha triangular não estruturada pelo software Easymesh (Niceno, 1997), assim como o caso anterior. Na mesma figura pode-se identificar duas diferentes condições de contorno. A condição de contorno para a fronteira horizontal superior, correspondente à entrada, receberá um valor constante para o vetor velocidade. As duas fronteiras verticais e também a fronteira horizontal inferior correspondem a paredes sólidas com condição de aderência, onde o vetor velocidade será igual a zero.

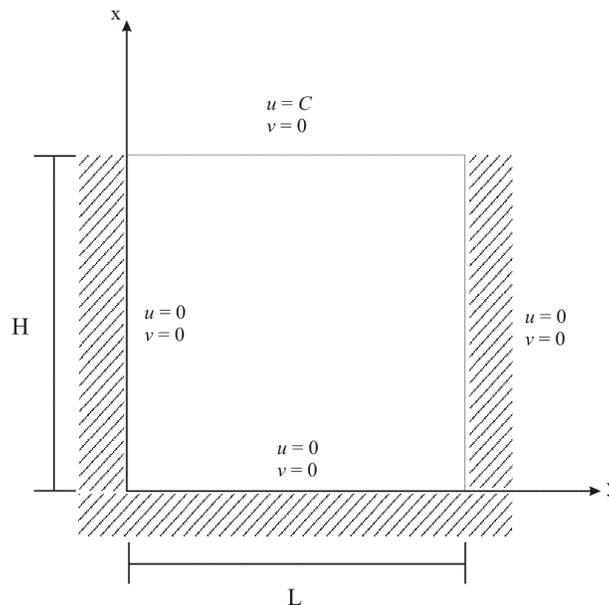


Fig. 4.26: Domínio bidimensional para o escoamento sobre uma cavidade.

¹ *Lid-driven cavity flow*, em inglês.

Devido aos efeitos viscosos, ocorre uma transferência de quantidade de movimento da fronteira de entrada para as camadas de fluido adjacentes, as quais também sofrem os efeitos contrários das paredes sólidas. Assim, a solução final esperada no estado estacionário para o escoamento em uma cavidade será a circulação (movimento rotatório) do fluido confinado ao longo dos contornos, de maneira que se possa perceber um vórtice principal no perfil de velocidades, o qual depende, na sua forma e posição, do número de Reynolds e também das dimensões H e L do domínio. Vórtices secundários são também notados em alguns casos, os quais dependem das mesmas condições citadas.

Nos problemas testados a cavidade é quadrada (isto significa que $L = H$) mas outras configurações do domínio são também possíveis. O trabalho de Platte (1998), apresenta resultados numéricos para cavidades profundas e rasas. O número de Reynolds característico para o escoamento em uma cavidade será definido da seguinte maneira:

$$\text{Re} = \frac{u_0 H}{\nu}, \quad (4.11)$$

sendo H o tamanho de um dos lados da cavidade quadrada.

As definições das condições de contorno para o problema são dadas a seguir:

Fronteira de Entrada:

Condição de contorno de Dirichlet para o vetor velocidade localizado na fronteira de entrada (parede horizontal superior), como na seção 3.4.1.1. Entretanto, dos dois componentes do vetor velocidade, apenas o componente na direção de x , ou seja, u , será diferente de zero, portanto $\vec{V}_{entrada} = (u_{entrada}, 0)$, sendo este valor conhecido na face de uma célula triangular que está no contorno. Os coeficientes para a equação de conservação da quantidade de movimento, utilizada neste caso, serão dadas por (3.36).

Fronteira com condição de aderência:

As paredes verticais e a parede inferior horizontal apresentam a condição de aderência; portanto, o valor do vetor velocidade nesta fronteira será igual a zero ($\vec{V}_a = 0$), novamente conhecido na face da célula triangular. Os coeficientes da equação discretizada de conservação da quantidade de movimento serão os mesmos da fronteira de entrada com condição de Dirichlet para velocidade (3.36), e também da fronteira de entrada definida acima.

A equação discretizada para cálculo de \vec{V} nas células do contorno, exige, conforme o coeficiente b em (3.36c), o valor da pressão na face a do triângulo na parede. Este valor será aproximado pelo mesmo valor da pressão no circuncentro P , como em (3.35), tanto para a fronteira de entrada quanto para a fronteira com condição de aderência. Portanto $P_a \cong P_p$ (ver apêndice B).

A equação de pressão será resolvida apenas para os pontos internos do domínio, não necessitando de valores definidos nos contornos, conforme a aplicação da condição de Neumann para a equação de Poisson de pressão avaliada na fronteira, como especificado pelas Equações (3.36) e (3.37). Os valores obtidos com a equação de Poisson discretizada podem ser normalizados adotando-se o valor zero para a pressão em uma determinada célula triangular da malha de cálculo.

O perfil de velocidades resultantes das simulações com o algoritmo desenvolvido pode ser visualizado na figura 4.27 para Reynolds igual a 10, sendo que os sentidos dos vetores velocidades para o mesmo escoamento podem ser vistos na figura 4.28.

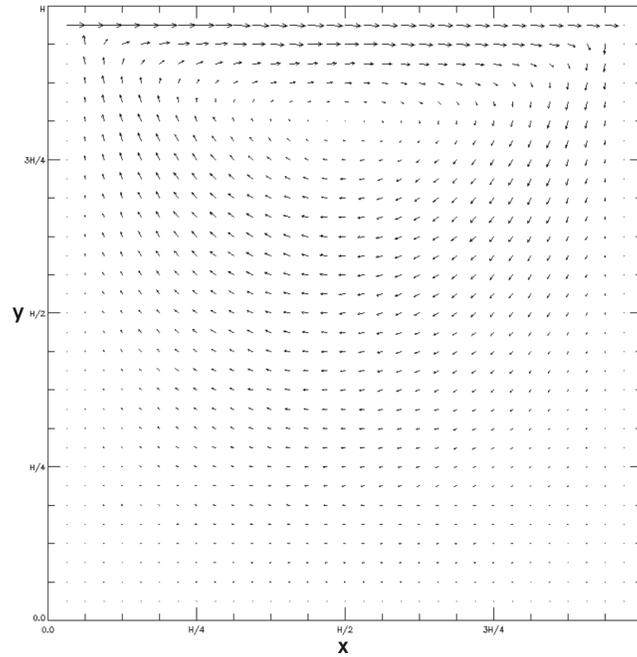


Fig. 4.27: Perfil de velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 10$.

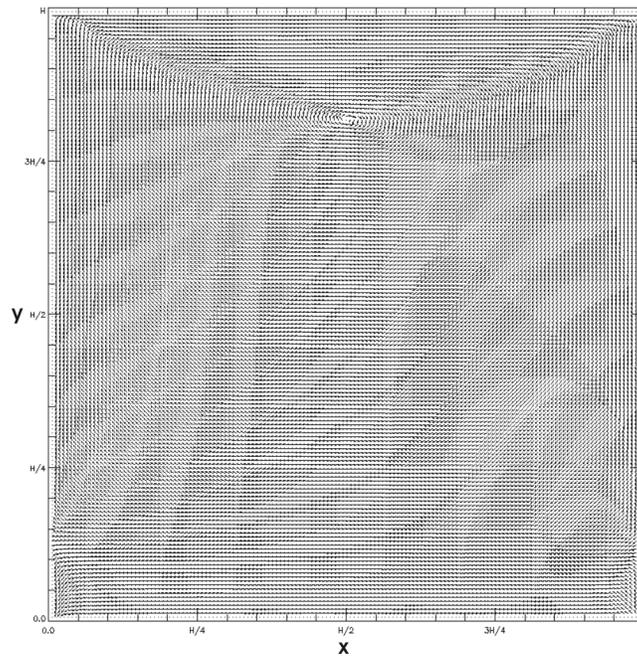


Fig. 4.28: Sentido do vetor velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 10$.

Para o escoamento com $Re = 10$ percebe-se um vórtice próximo à altura $0,8H$ e largura $0,5H$. A posição deste vórtice corresponde aproximadamente à posição encontrada por

Fortuna (2000) em suas simulações para o mesmo número de Reynolds e ocorre devido à recirculação do fluido.

Os históricos dos critérios de convergência para $Re = 10$ podem ser vistos na figura 4.29. O divergente quadrático médio do vetor velocidade, depois de aumentar nas primeiras iterações, permanece praticamente constante. Este aumento ocorre devido à brusca mudança no vetor velocidade do fluido confinado na cavidade, o qual, como condição inicial, tem valor zero. Assim, este critério não será usado como condição de parada, uma vez que este comportamento se repetirá nas simulações para maiores números de Reynolds.

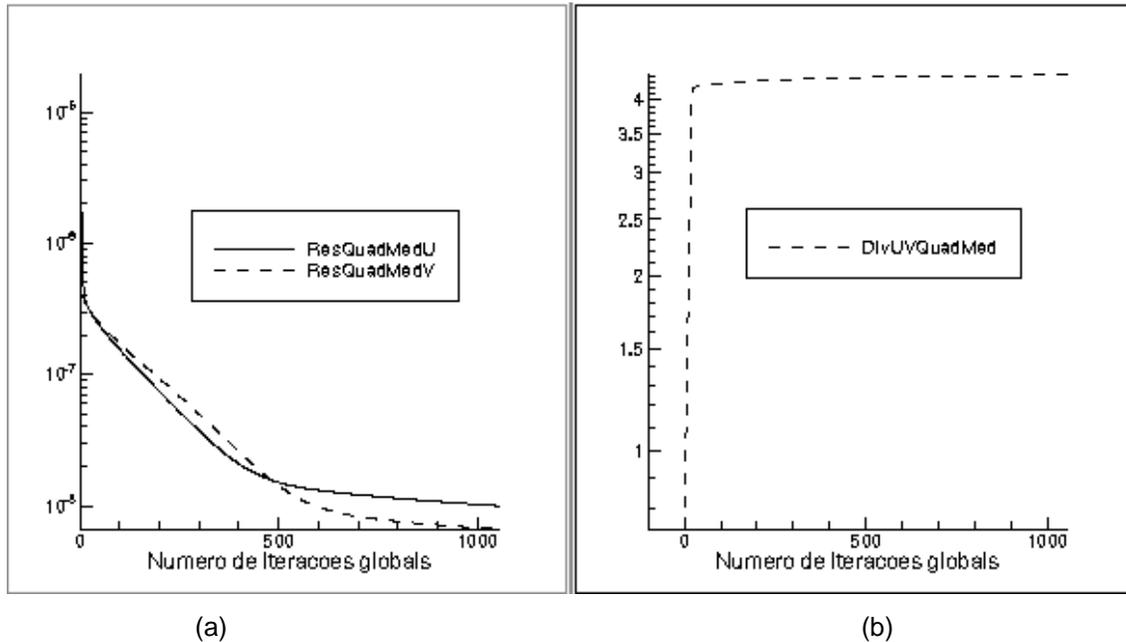


Fig. 4.29: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade (Cavidade com $Re = 10$).

Para $Re = 100$, além do vórtice maior e central, considerado principal, surgem outros dois vórtices menores, localizados nos cantos inferiores esquerdo e direito, sendo o do canto direito ligeiramente maior que o do esquerdo. A figura 4.30 exibe o perfil de velocidades na qual é possível localizar o vórtice maior. Entretanto, os vórtices menores só podem ser vistos na figura 4.31, onde se visualiza o sentido dos vetores velocidades,

pois a magnitude da velocidade nos vórtices menores é muito menor que a velocidade na fronteira de entrada.

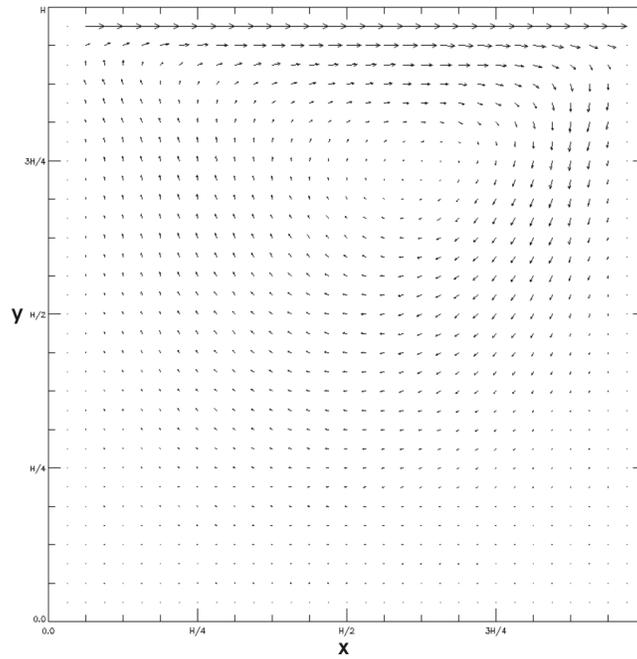


Fig. 4.30: Perfil de velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 100$.

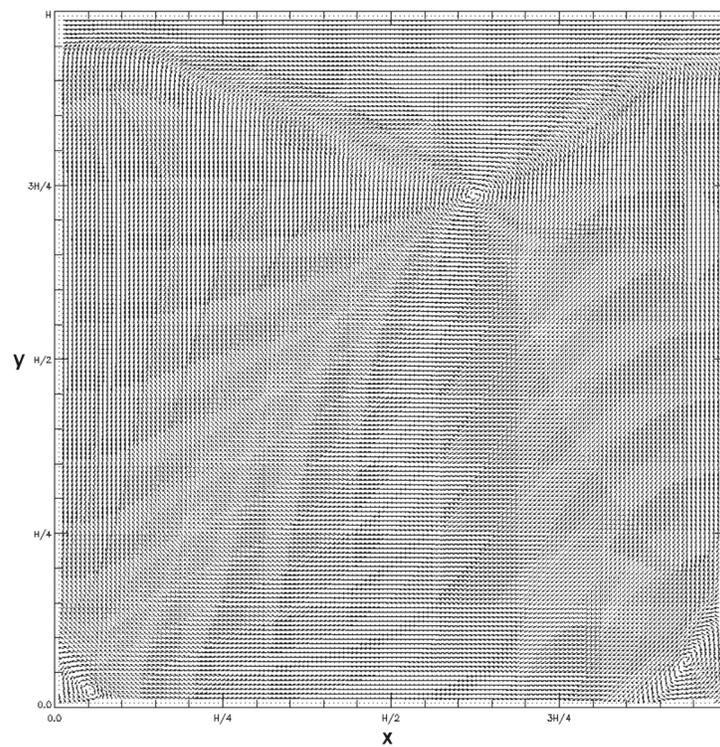


Fig. 4.31: Sentido do vetor velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 100$.

Importante notar que o tamanho dos vetores nos gráficos que exibem o perfil de velocidades é escalonado da mesma maneira para as simulações com diferentes números de Reynolds, onde o tamanho máximo do vetor é definido para a velocidade uniforme na fronteira de entrada para cada caso testado.

Novamente, comparando os resultados com Ghia et al (1982) e também com Fortuna (2000), percebe-se que os vórtices presentes na figura 4.31 correspondem, aproximadamente, às soluções numéricas encontradas por estes dois trabalhos, para os três vórtices do escoamento. O campo de pressão para o mesmo número de Reynolds, e coerente com o perfil de velocidades encontrado, pode ser visto na figura 4.32 a seguir.

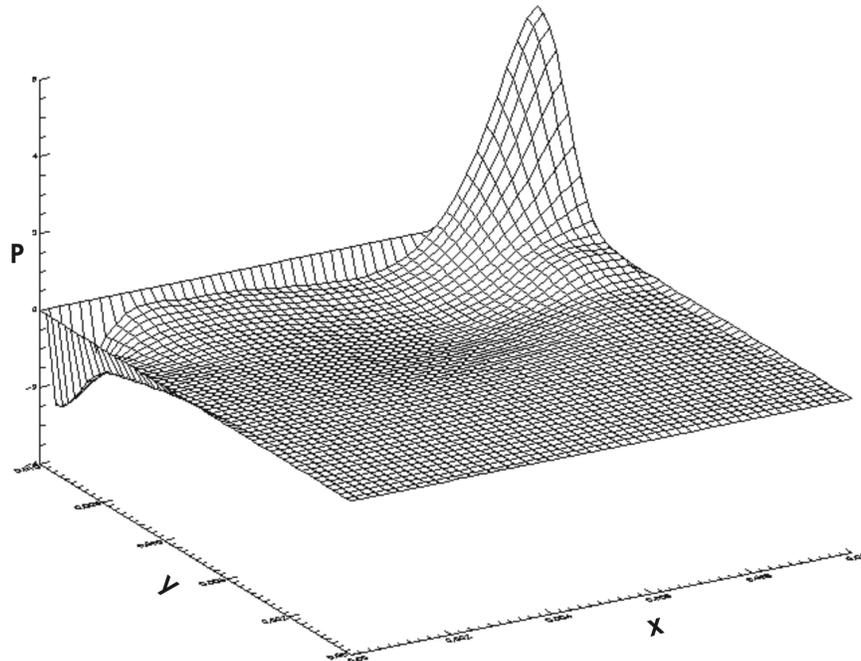
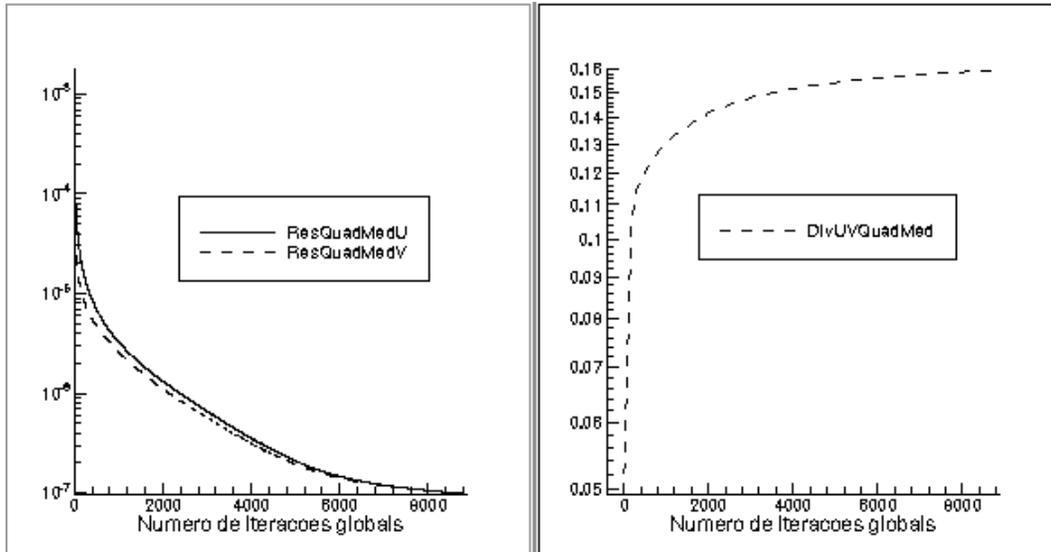


Fig. 4.32: Campo de pressão para $Re = 100$.

Os históricos dos critérios de convergência para os resíduos quadráticos médios de u e v no escoamento com $Re = 100$ apresentam um comportamento similar ao caso encontrado para $Re = 10$, como pode ser verificado na figura 4.33. O divergente quadrático médio de velocidade apresenta também um aumento devido à mesma aplicação da condição de contorno do caso com $Re = 10$.



(a) (b)
 Fig. 4.33: Históricos de convergência dos resíduos relativos quadráticos médios de u e v e também do divergente quadrático médio de velocidade (Cavidade com $Re = 100$).

Diversos autores como Hou et al (1995), Degani e Fox (1996), Platte (1998), entre outros, estabelecem o trabalho de Ghia et al (1982) como parâmetro de referência para métodos que procuram simular o escoamento em uma cavidade quadrada com diversos números de Reynolds. Para efeito de comparação do método aqui tratado, procurou-se confrontar os perfis de velocidade do método ao longo das linhas que passam pelos centros geométricos da cavidade com os valores obtidos por Ghia et al (1982). Os resultados para Reynolds de 100 podem ser verificados nas figuras 4.34 e 4.35 a seguir.

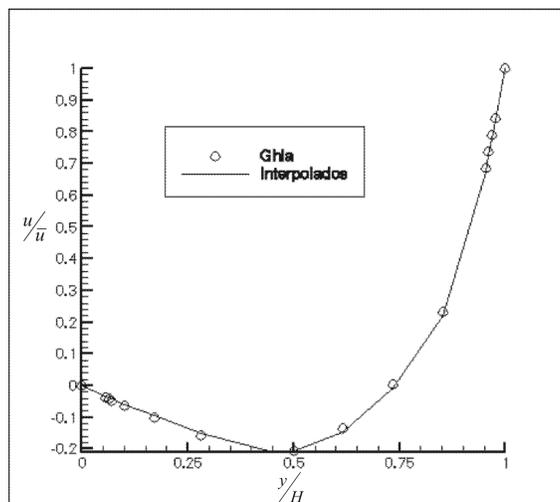


Fig. 4.34: Perfis do componente u (direção x) do vetor velocidade ao longo de $x = L/2$ com $Re = 100$.

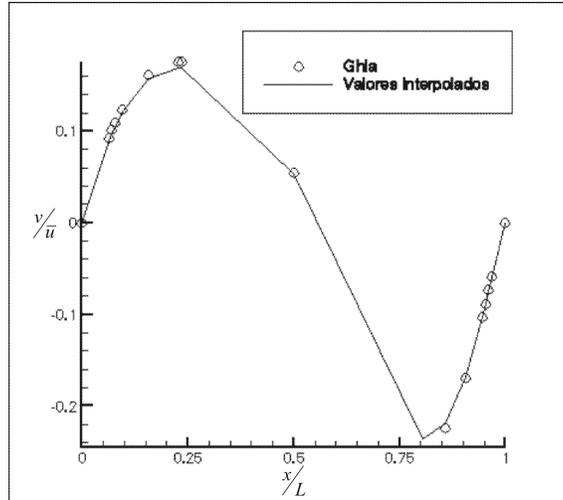


Fig. 4.35: Perfis do componente v (direção y) do vetor velocidade ao longo de $y = H/2$ com $Re = 100$.

Para Reynolds de 400, os resultados podem ser visualizados nas figuras 4.36 e 4.37 para o vetor velocidade e sentido do vetor velocidade, respectivamente. Nestas simulações percebem-se o vórtice principal e os secundários, qualitativamente, como previstos por Ghia et al (1982). Na figura 4.38 pode-se visualizar as linhas de corrente para o mesmo escoamento, onde se pode notar claramente o vórtice principal do escoamento, assim como a figura 4.39 onde se tem a vorticidade para o mesmo escoamento.

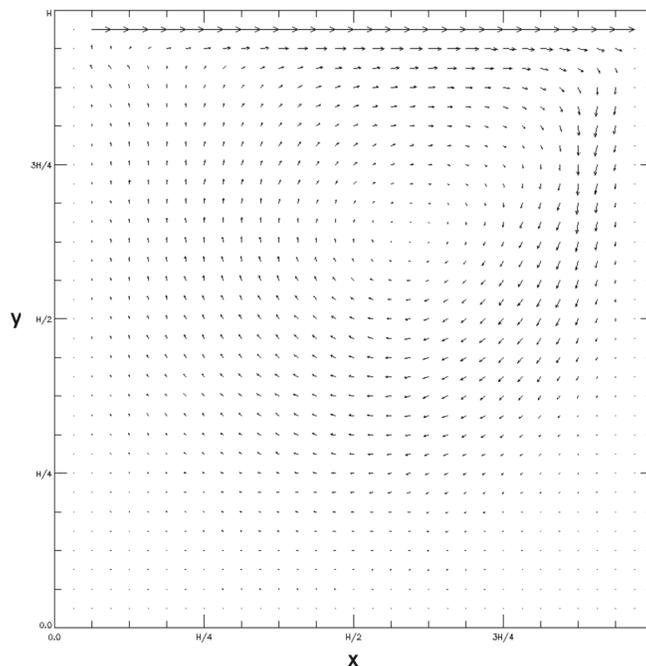


Fig. 4.36: Perfil de velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 400$.

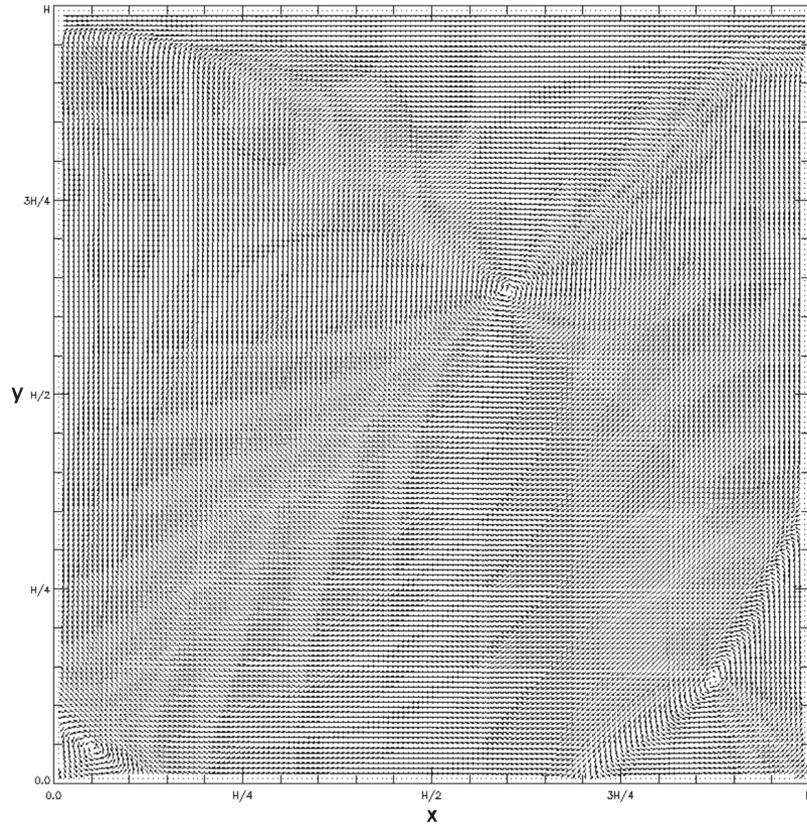


Fig. 4.37: Sentido do vetor velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 400$.

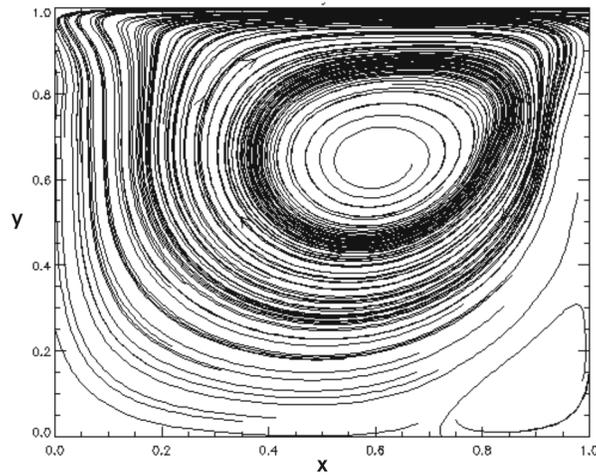


Fig. 4.38: Linhas de corrente para um escoamento em uma cavidade com $Re = 400$.

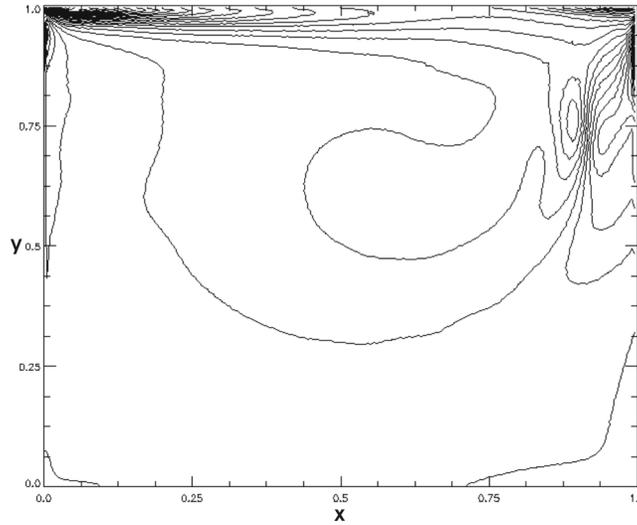


Fig. 4.39: Vorticidade para um escoamento em uma cavidade com $Re = 400$.

Os perfis de u e v também foram confrontados com os dados obtidos por Ghia et al (1982), e podem ser vistos nas figuras 4.40 e 4.41 a seguir:

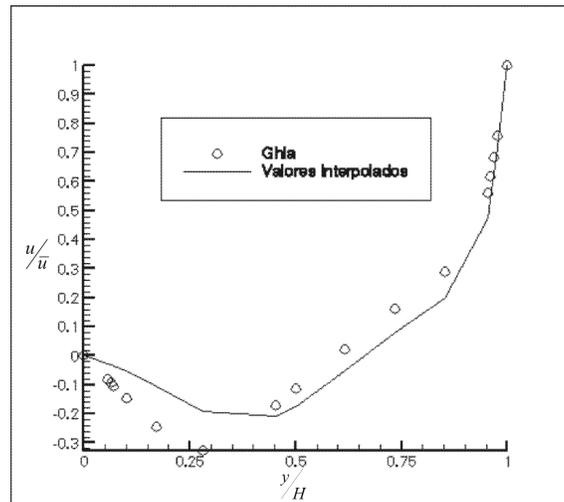


Fig. 4.40: Perfis do componente u (direção x) do vetor velocidade ao longo de $x = L/2$ com $Re = 400$.

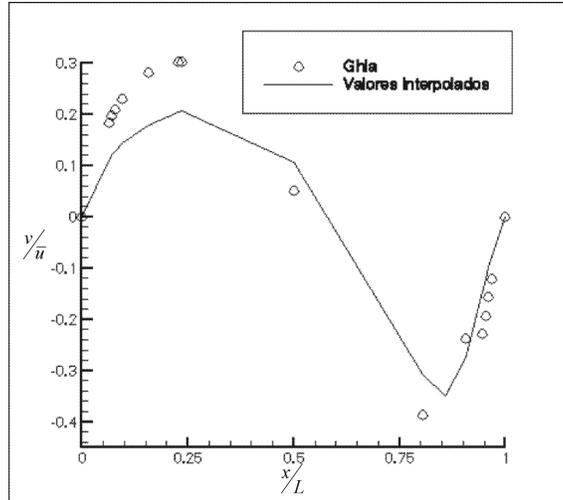


Fig. 4.41: Perfis do componente v (direção y) do vetor velocidade ao longo de $y = H/2$ com $Re = 400$.

Para Reynolds = 1000, pode-se verificar o resultado da simulação nas figuras 4.42 e 4.43 para o vetor velocidade e sentido do vetor velocidade, respectivamente. Novamente, percebem-se o vórtice principal e os secundários, qualitativamente, como previstos por Ghia et al (1982) e Griebel et al (1998). As linhas de corrente estão em 4.44, bem como na figura 4.45, onde se tem a vorticidade para o mesmo escoamento.

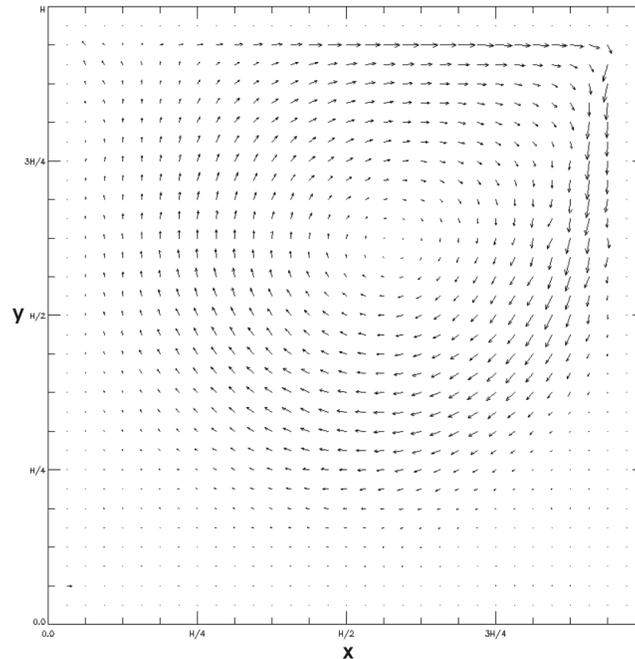


Fig. 4.42: Perfil de velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 1000$.

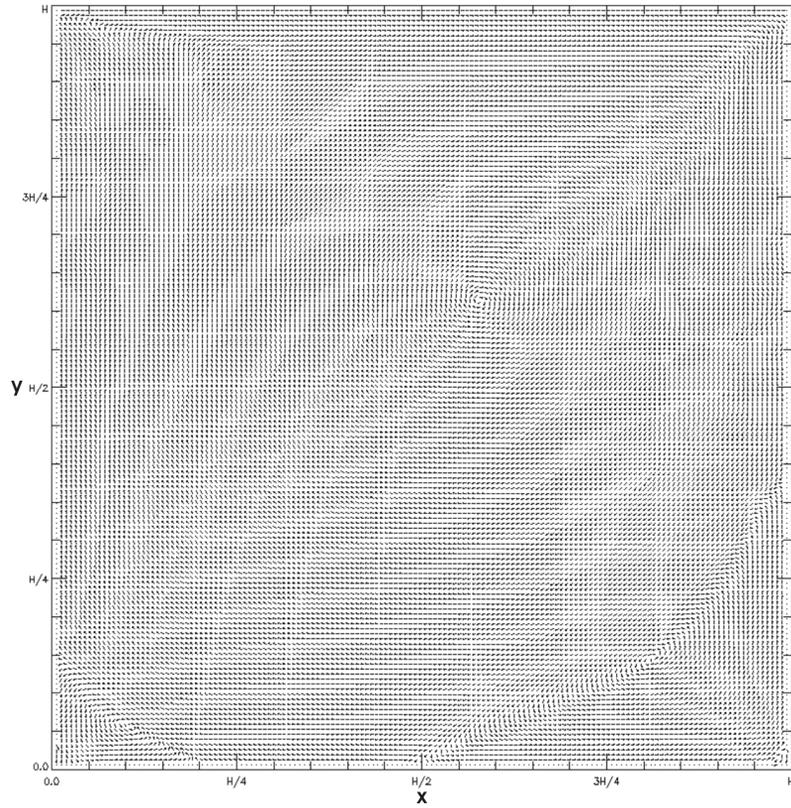


Fig. 4.43: Sentido do vetor velocidades para um escoamento em uma cavidade com $Re = 1000$.

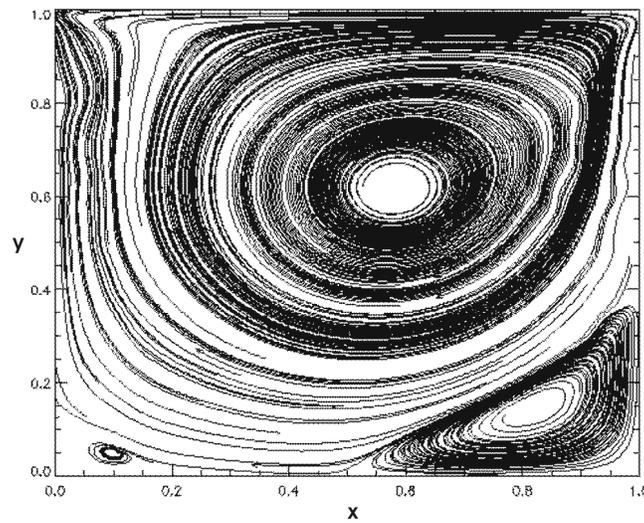


Fig. 4.44: Linhas de corrente para um escoamento em uma cavidade com $Re = 1000$.

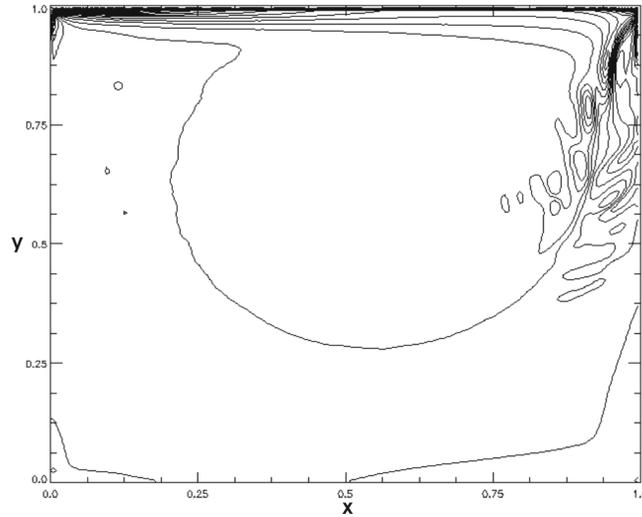


Fig. 4.45: Vorticidade para um escoamento em uma cavidade com $Re = 1000$.

Novamente, como nos casos anteriores, comparando os perfis de u e v com os dados obtidos por Ghia et al (1982), tem-se as figuras 4.46 e 4.47 a seguir. Nestas, pode-se verificar que os dados obtidos pelo método apresentam pequenos desvios não previstos pelo trabalho de citado, apesar da forma da curva apresentar-se de maneira similar.

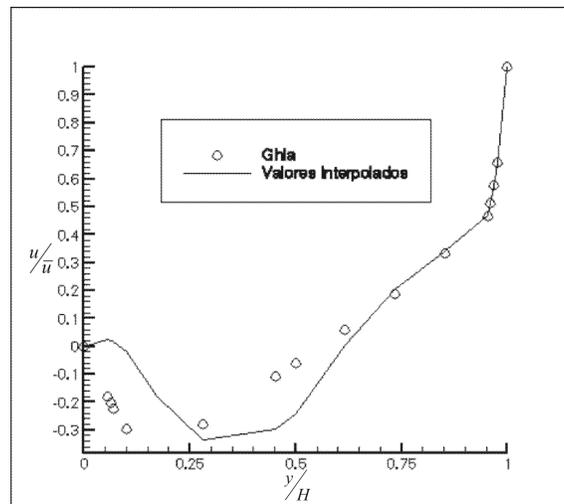


Fig. 4.46: Perfis do componente u (direção x) do vetor velocidade ao longo de $x = L/2$ com $Re = 1000$.

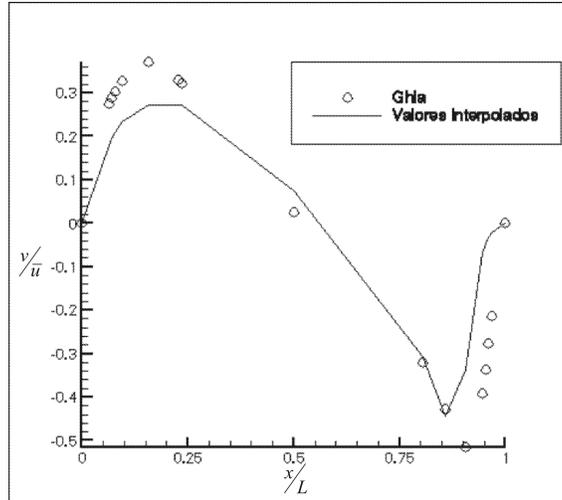


Fig. 4.47: Perfis do componente v (direção y) do vetor velocidade ao longo de $y = H/2$ com $Re = 1000$.

Também foram realizados testes, utilizando-se de diferentes malhas, para se avaliar a variação do divergente quadrático médio do vetor velocidade (Equação 4.7), de maneira a observar uma possível queda a medida em que se aumentava a quantidade de triângulos da malha e, conseqüentemente, diminuía-se o tamanho médio do lado do triângulo. Os valores computados, juntamente com os tempos de processamento necessário à convergência, podem ser observados na Tabela 4.4, a qual permite verificar que à medida que refinamos a malha o valor do divergente quadrático médio diminui assintoticamente:

TABELA 4.4 – DIVERGENTE QUADRÁTICO MÉDIO E TEMPO COMPUTACIONAL EM DIFERENTES MALHAS – REYNOLDS = 100

Quantidade de triângulos	Tamanho médio dos lados dos triângulos	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NT} (\nabla \cdot \mathbf{V}_i)^2}{NT}}$	Tempo de processamento (hh:mm:ss)
3692	H/40	17,7526	59:52
14768	H/80	16,0016	2:43:20
33228	H/120	15,5874	8:41:17
59072	H/160	15,3923	13:42:20

4.2.3 – Escoamento com expansão súbita (sobre um degrau)

Outro teste importante para o método aqui tratado é o cálculo do escoamento sobre um degrau, mais conhecido na literatura como *backward-facing step*. Conforme Griebel et al (1998) e também Zhao e Zhang (2000), este tipo de escoamento é freqüentemente usado como problema-teste para o desenvolvimento de códigos computacionais para escoamentos incompressíveis.

Este problema consiste de um escoamento com uma entrada de fluido em um canal estreito, o qual, abruptamente, se expande. Após a expansão súbita, o fluido continua a escoar sobre placas planas até a fronteira de saída, conforme se pode verificar na figura 4.48. Alguns trabalhos computacionais que tratam do mesmo problema, como Sohn (1988) e Gartling (1990) e experimentais como Armaly (1983) são citados em Griebel et al (1998). Também em Zhao e Zhang (2000) é possível encontrar resultados experimentais de outros autores e resultados numéricos do método desenvolvido pelos mesmos.

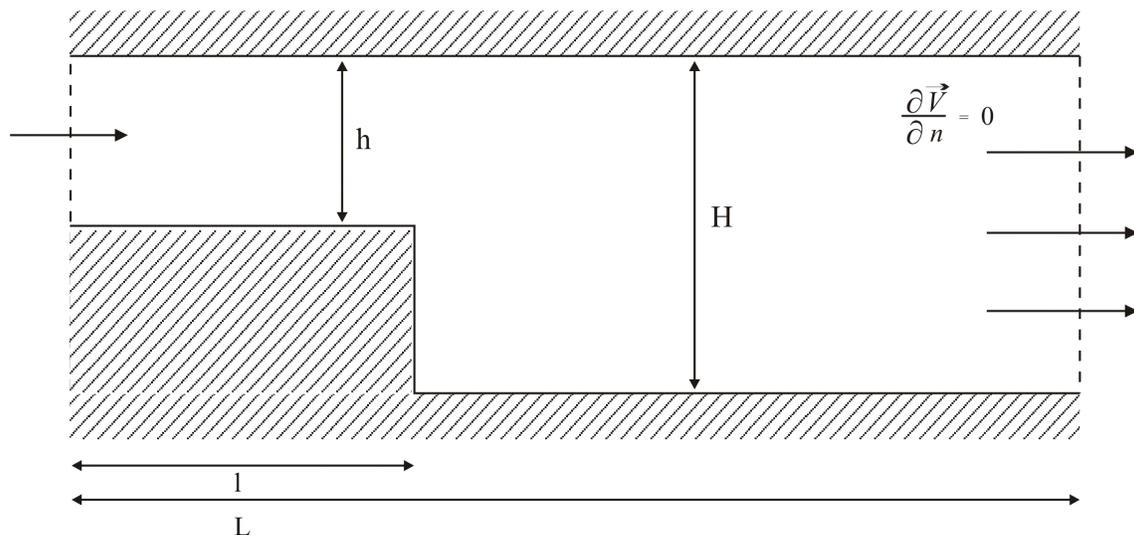


Fig. 4.48: Domínio bidimensional para *Backward-facing step*.

Escoamentos sobre um degrau podem apresentar uma zona de recirculação contendo um vórtice logo abaixo do local da expansão súbita, cuja causa é a mesma do caso anterior

(cavidade). O tamanho e forma desta zona de recirculação variam conforme a geometria do domínio de cálculo, as propriedades físicas do fluido e as condições iniciais e de contorno do problema. Quando esta região termina o escoamento volta a se comportar como um escoamento entre placas planas. Este local é bem determinado e conhecido na literatura como *re-attachment point*. Na figura 4.48 pode-se identificar três diferentes condições de contorno para o problema tratado, cujas definições estão descritas a seguir:

Fronteira de Entrada:

Condição de contorno de Dirichlet para o vetor velocidade localizado na fronteira de entrada (parede vertical à esquerda), como na seção 3.4.1.1., supondo um escoamento plenamente desenvolvido entre placas planas resultando em um perfil parabólico para o componente u , sendo este valor conhecido na face de uma célula triangular que está no contorno. Os coeficientes da equação discretizada de conservação da quantidade de movimento são dados por (3.36).

O valor da pressão na face a do volume de controle será calculado pela aproximação do valor do gradiente de pressão na fronteira que satisfaça a solução analítica (4.4). Lembrando que deve ser esta a solução esperada quando o escoamento estiver plenamente desenvolvido, como é exatamente o caso em questão para a região de entrada.

Fronteiras com condição de aderência:

A parede vertical logo após o degrau e as paredes horizontais inferiores e superiores, apresentam a condição de aderência como já definida em situações anteriores, portanto o valor do vetor velocidade nesta fronteira será igual a zero ($\vec{V}_a = 0$). A equação discretizada de conservação da quantidade de movimento será a mesma da fronteira de entrada com condição de Dirichlet para velocidade e também da fronteira de entrada definida acima. Assim, os coeficientes são encontrados em (3.36).

Assim como nas paredes sólidas dos casos anteriores, o coeficiente dado por (3.36c) exige o valor da pressão na face a do triângulo na parede. Novamente, este valor será aproximado pelo mesmo valor da pressão no circuncentro P , devido à aproximação do gradiente de pressão para parede sólida, como em (3.35). Portanto $P_a \cong P_p$.

Fronteira de Saída:

A fronteira de saída do fluido na região da parede vertical à direita será uma condição de Neumann para o vetor velocidade, assim como definido na seção 3.4.1.2. Tal condição é a mesma utilizada para fronteira de saída no escoamento entre placas planas, definida na seção 4.2.1 deste mesmo capítulo, ou seja, a derivada de \vec{V} será nula:

$$\left. \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} \right|_a = 0.$$

A pressão na face a das células no contorno de saída serão calculadas de maneira similar à definida na seção anterior para placas planas, ou seja, P_a será determinado de acordo com o valor médio da derivada na vizinhança da célula cuja face a está situada na fronteira de saída. Assim como em todos os casos já citados, a equação de pressão será resolvida apenas para os pontos internos do domínio, não necessitando de valores definidos nos contornos. Conforme a aplicação da condição de Neumann para a equação de Poisson de pressão avaliada na fronteira, especificado pelas Equações (3.36) e (3.37).

Para validação do método numérico aqui desenvolvido, o escoamento sobre um degrau foi testado para os números de Reynolds de 50 e 150 de maneira a reproduzir os resultados experimentais e numéricos citados em Zhao e Zhang (2000). Para o domínio de cálculo testado, a altura da região de entrada do degrau terá uma relação dada por $H/h = 2$, onde h corresponde a altura da região do degrau e H à região do escoamento após o degrau até a saída. O comprimento do degrau será de $2H$.

Nesta configuração onde a altura do degrau h é a metade da altura máxima H , os resultados das simulações podem ser verificados nas figuras 4.49 a 4.52. Sendo que os números de Reynolds referem-se ao escoamento antes da expansão súbita, portanto utiliza-se h com tamanho característico.

Deve-se lembrar que as escalas de tamanho nas figuras abaixo estão definidas apenas para efeitos de visualização, de maneira que a altura apresenta-se 4 vezes maior que seu tamanho original em relação ao comprimento. Os valores dos vetores representando as velocidades estão interpolados para 30 estágios igualmente espaçados tanto na horizontal quanto na vertical.

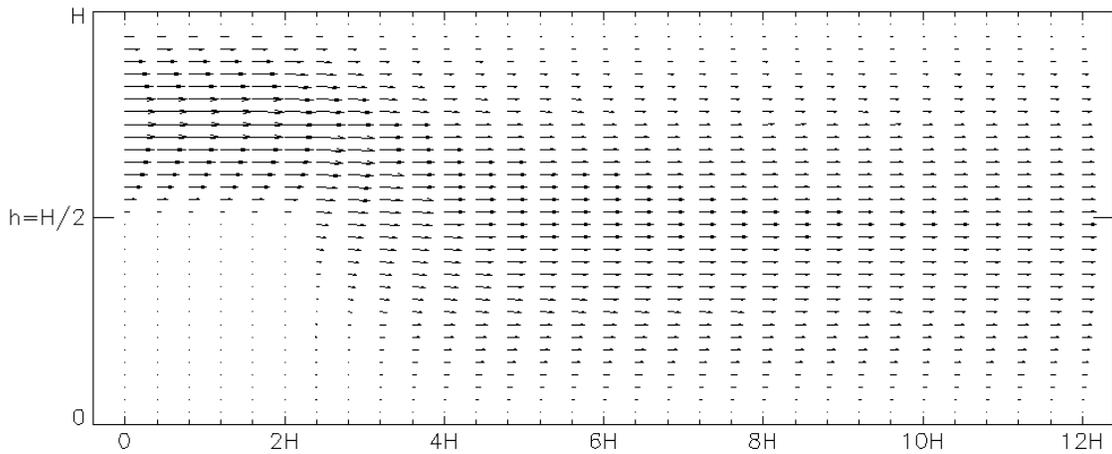


Fig. 4.49: Perfil de velocidade para $Re = 50$ em um domínio onde $H/h = 2$.

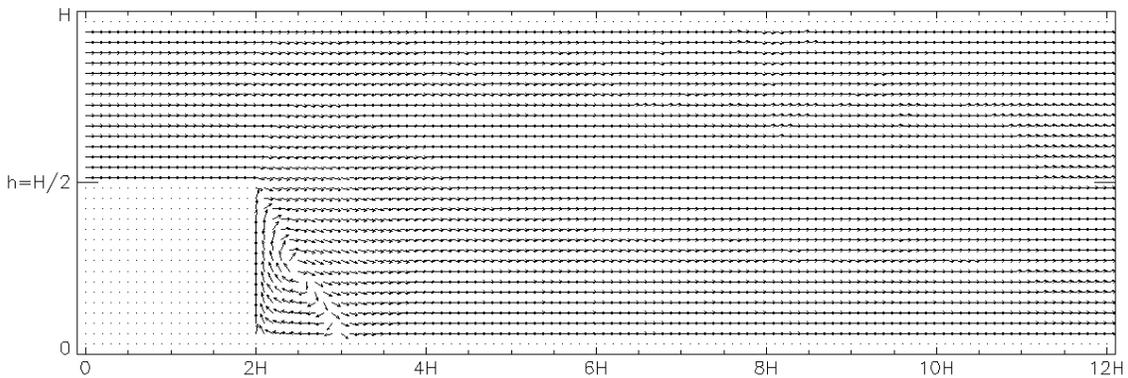


Fig. 4.50: Vetores com o sentido do vetor velocidade para $Re = 50$ em um domínio onde $H/h = 2$.

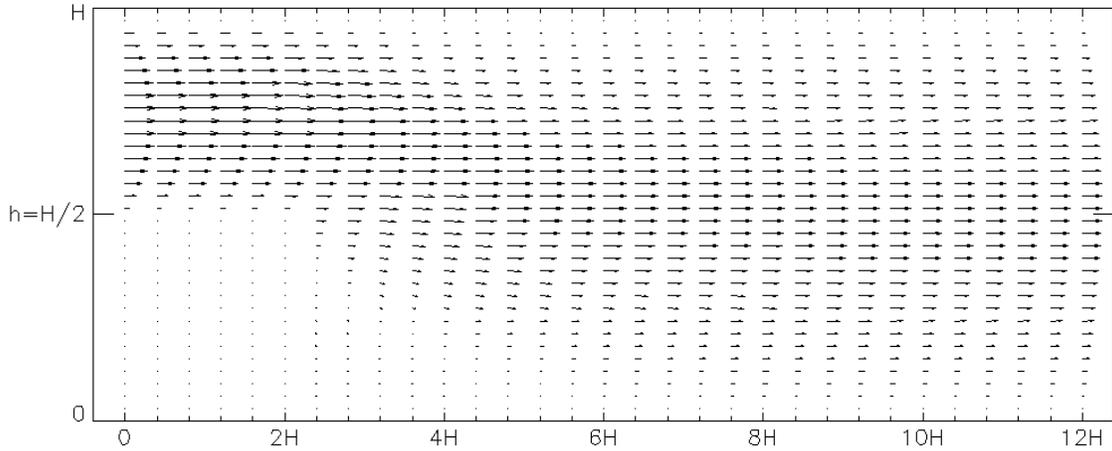


Fig. 4.51: Perfil de velocidade para $Re = 150$ em um domínio onde $H/h = 2$.

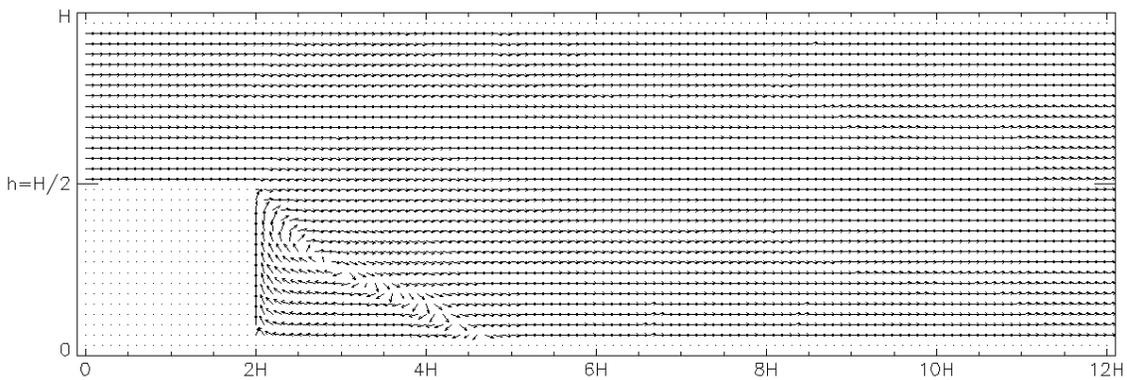


Fig. 4.52: Vetores com o sentido do vetor velocidade para $Re = 150$ em um domínio onde $H/h = 2$.

No trabalho de Zhao e Zhang (2000) pode-se encontrar o resultado experimental e numérico de um escoamento sobre um degrau para Reynolds = 150, em uma configuração onde a relação $H/h = 2$, o qual pode ser visualizado na figura 4.53 e 4.54, respectivamente. As localizações do vórtice após o degrau e do ponto de realinhamento (*re-attachment point*) na simulação experimental para Reynolds = 150 encontram-se na Tabela 4.5 abaixo, juntamente com os valores obtidos pelo algoritmo implementado nesta tese, através da abordagem baseada no circuncentro (ABC). Deve-se ressaltar que as localizações estão descritas em função da altura máxima H .

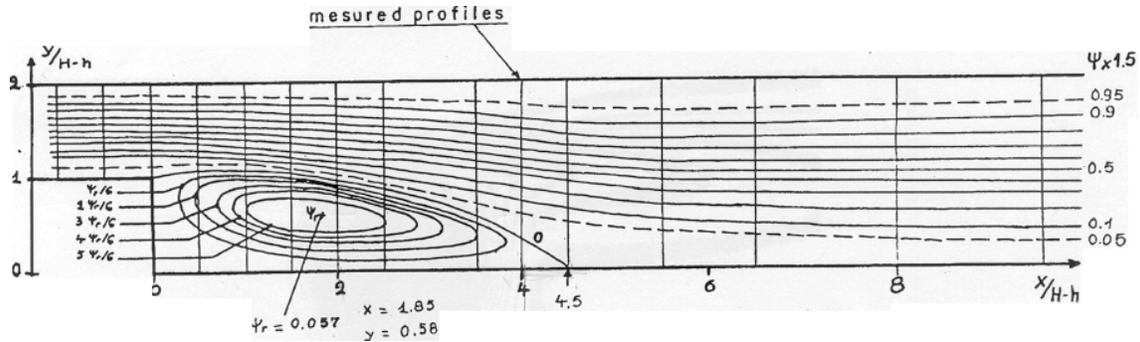


Fig. 4.53: Linhas de corrente para o resultado experimental de um escoamento sobre um degrau com $Re = 150$ em um domínio onde $H/h = 2$.
 FONTE: Zhao e Zhang (2000).

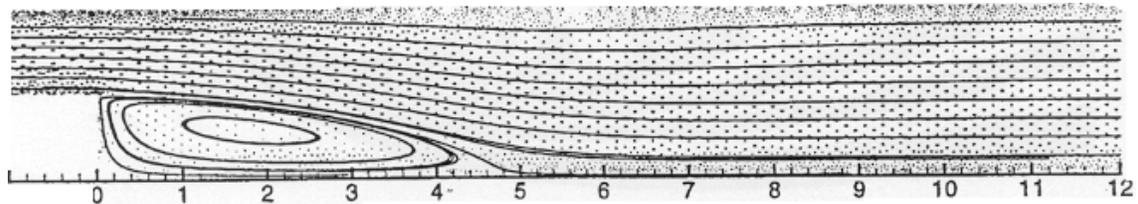


Fig. 4.54: Linhas de corrente para o resultado numérico de um escoamento sobre um degrau com $Re = 150$ em um domínio onde $H/h = 2$.
 FONTE: Zhao e Zhang (2000).

TABELA 4.5 – LOCALIZAÇÕES DO VÓRTICE E PONTO DE REALINHAMENTO

	Coordenada x do vórtice	Coordenada y do vórtice	Ponto de realinhamento
Solução experimental	0,925 H	0,29 H	2,25 H
Numérica com ABC ²	0,9 H	0,24 H	2,6 H

Os valores obtidos para Reynolds = 50 com a configuração $H/h = 2$ podem ser confrontadas com os valores obtidos pela solução numérica de Zhao e Zhang (2000), conforme se observa na figura 4.55, o qual mostra que a solução obtida pelo método implementado apresenta semelhança com a solução numérica do trabalho citado.

² Localizações aproximadas

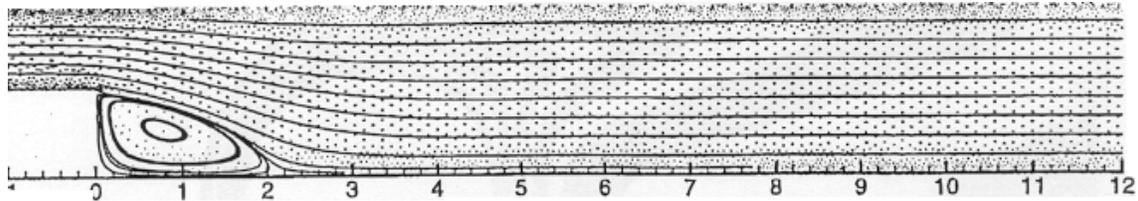


Fig. 4.55: Linhas de corrente para o resultado numérico de um escoamento sobre um degrau com $Re = 50$ em um domínio onde $H/h = 2$.
 FONTE: Zhao e Zhang (2000).

4.3 – Convecção Natural

A convecção natural ou convecção livre (*free or natural convection*) caracteriza-se pelo escoamento “natural” do fluido sem a necessidade de uma condição externa que “força” o escoamento, como nos escoamentos incompressíveis citados acima. Este escoamento ocorre devido a variações na densidade do fluido quando submetido a variações de temperatura ou pressão. A variação de densidade causa um escoamento pois o fluido está, também, submetido à ação de uma força de corpo, geralmente caracterizada pela atração gravitacional.

A variação na densidade do fluido é comumente associada à presença de um gradiente de temperatura, sendo esta exatamente a situação tratada por este sub-capítulo. É importante lembrar que a equação de estado para gases perfeitos (Equação 2.5) permite estabelecer uma relação entre a temperatura, pressão e densidade do fluido, sendo que, geralmente, a densidade diminui com o aumento da temperatura, devido à expansão do fluido.

O domínio de cálculo para o escoamento com convecção natural pode ser visto na figura 4.56, onde se pode identificar duas diferentes condições de contorno térmico no problema. As paredes horizontais superior e inferior adiabáticas e, portanto, com uma condição de Neumann estabelecendo um fluxo nulo de calor, como as Equações definidas na seção 3.4.1.3; e as paredes verticais à esquerda e direita onde se fixa o valor da temperatura do fluido, as quais resultam em uma condição de contorno de Dirichlet para ambas as regiões, sendo as Equações definidas na seção 3.4.1.4.

A condição de contorno para a velocidade será de 1º tipo ou Dirichlet, uma vez que em todas as paredes tem-se a condição de aderência e, portanto, a velocidade nula como nas paredes inferior, esquerda e direita do escoamento incompressível em uma cavidade. Assim, a equação discretizada de conservação da quantidade de movimento utilizada nas fronteiras do escoamento com convecção natural, será a mesma da fronteira de entrada com condição de Dirichlet para velocidade, cujos coeficientes encontram-se em (3.36), incluindo a aproximação dada pela Equação (3.35) para determinação da pressão na face a da célula.

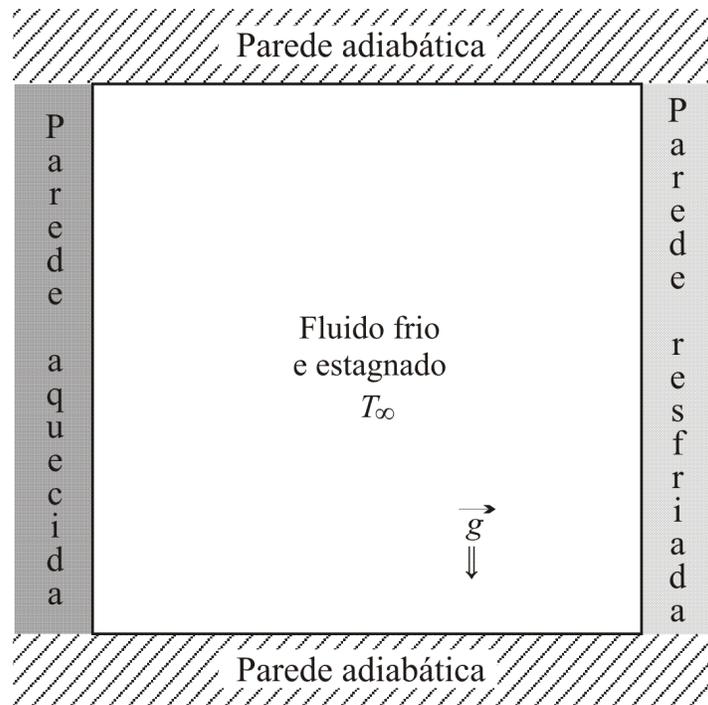


Fig. 4.56: Domínio bidimensional para o escoamento com convecção natural.

A equação de transporte de calor a ser usada nesta simulação foi definida em (2.4) e inclui os termos de transporte convectivo e difusivo de calor, omitindo-se termos fontes, conforme aparece em (4.12). A sua versão algébrica discretizada pode ser encontrada em (3.27).

$$\nabla \cdot (\rho \nabla T) = \nabla \cdot \left(\frac{k}{c_p} \nabla T \right) \quad (4.12)$$

A equação de conservação da quantidade de movimento discretizada inclui a força de campo definida pela atração gravitacional ρg e também a aproximação de Boussinesq para que a equação inclua os efeitos da flutuação na densidade. No capítulo 3, seção 3.4, pode-se encontrar a definição da aproximação de Boussinesq na equação de conservação da quantidade de movimento através das Equações (3.19) a (3.26).

Os resultados são dados para o número adimensional de Rayleigh definido por:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu}, \quad (4.13)$$

onde g define o valor da aceleração da gravidade, β é o coeficiente de expansão volumétrica dada pela Equação (3.22), ΔT é a máxima variação de temperatura, H é o tamanho característico dado por um dos lados do domínio, α é a difusividade térmica dada por $\alpha = k/\rho c_p$ e ν é a viscosidade cinemática $\nu = \mu/\rho$.

Os valores do número de Rayleigh presentes nas simulações são $Ra = 10^3$ e 10^4 , para o escoamento de ar à temperatura média de 20°C. Os perfis de temperatura para os respectivos testes computacionais podem ser vistos nas figuras 4.57 e 4.58 a seguir:

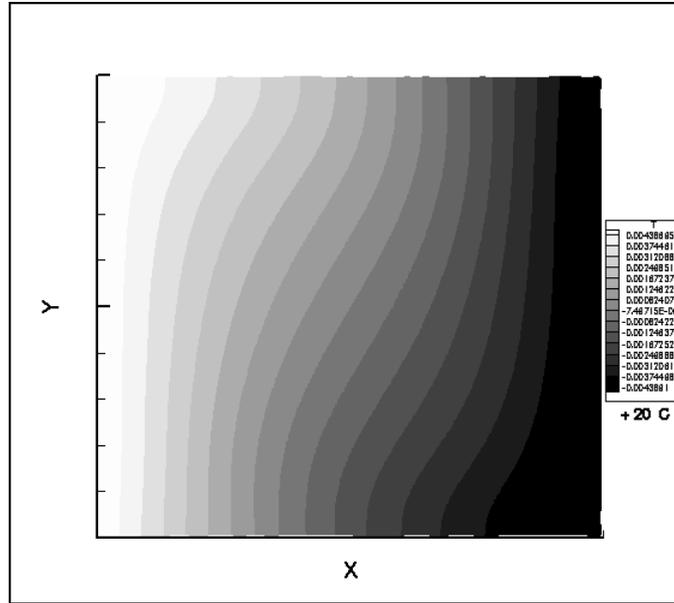


Fig. 4.57: Cromograma de Temperatura para $Ra = 10^3$.

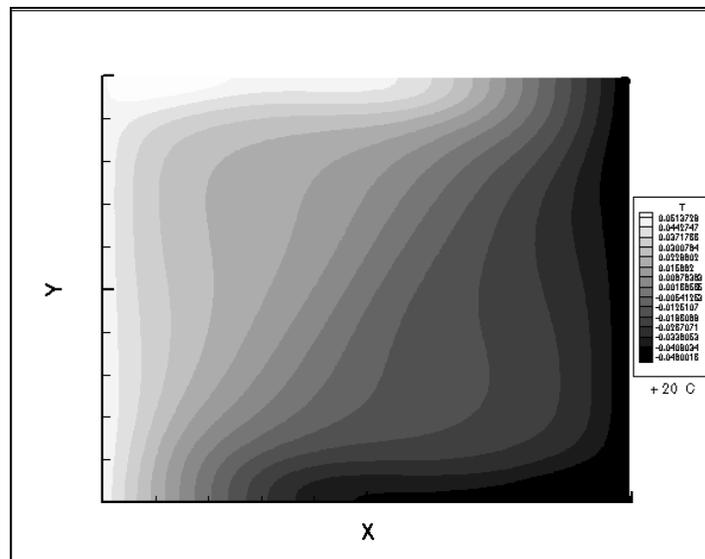


Fig. 4.58: Cromograma de Temperatura para $Ra = 10^4$.

O perfil do campo de velocidades pode ser visualizado nas figuras 4.59 e 4.60 para $Ra = 10^3$ e 10^4 respectivamente. Nas figuras 4.61 e 4.62 tem-se uma visualização do sentido do vetor velocidade, para $Ra = 10^3$ e 10^4 .

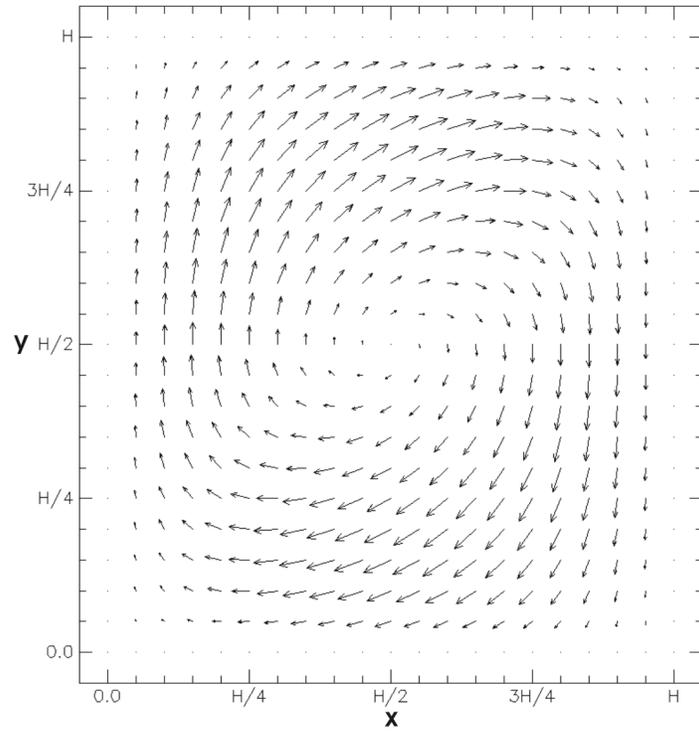


Fig. 4.59: Perfil de velocidades para um escoamento com convecção natural com $Ra = 10^3$.

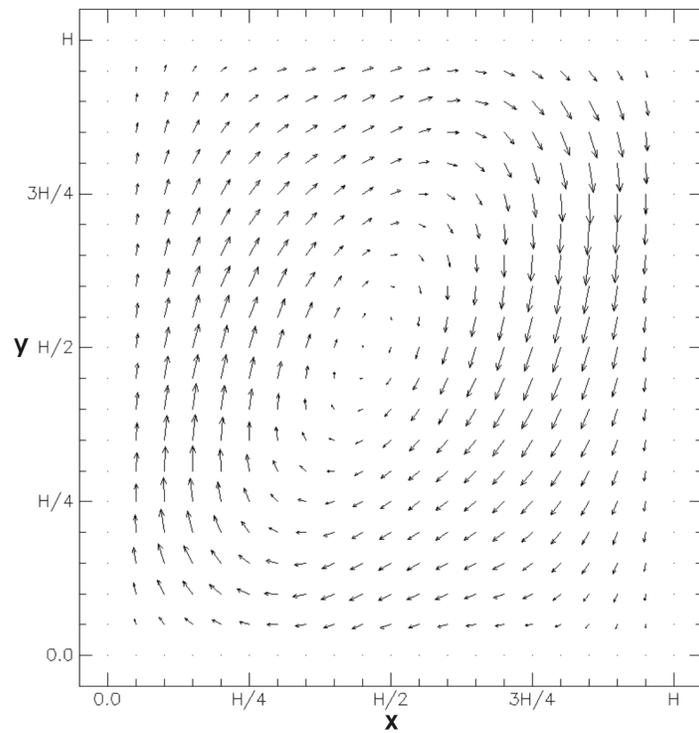


Fig. 4.60: Perfil de velocidades para um escoamento com convecção natural com $Ra = 10^4$.

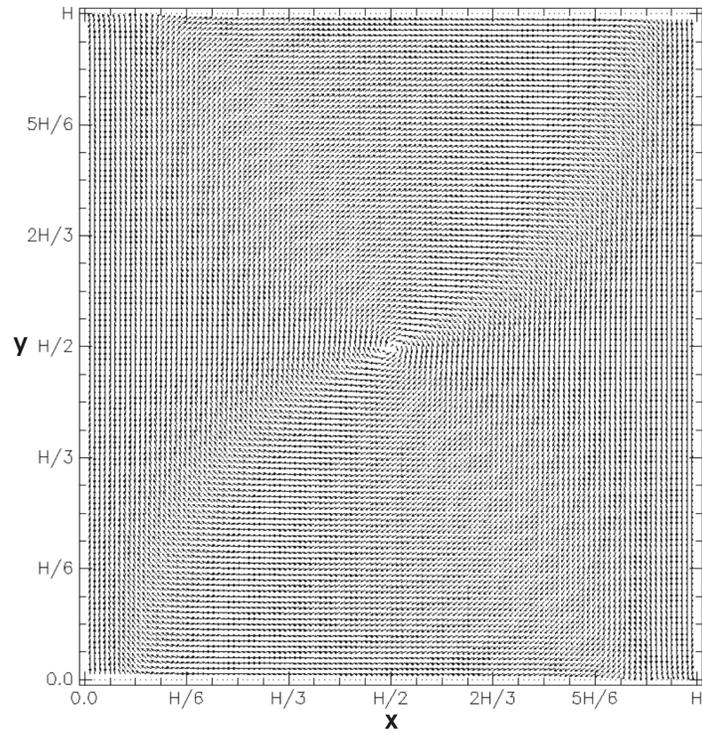


Fig. 4.61: Sentido do vetor velocidades para um escoamento com convecção natural com $Ra = 10^3$.

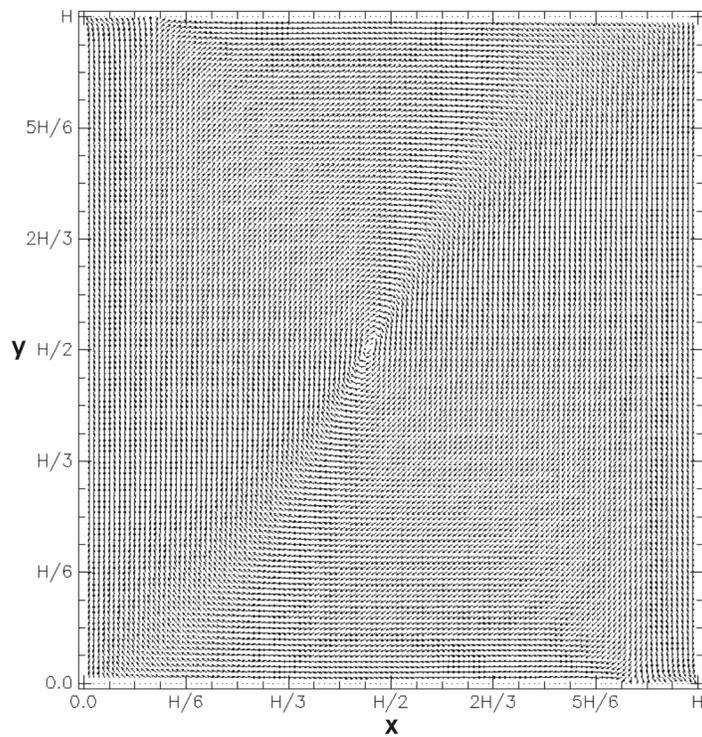


Fig. 4.62: Sentido do vetor velocidades para um escoamento com convecção natural com $Ra = 10^4$.

A Tabela 4.6 a seguir permite uma comparação do número de Nusselt calculado na parede vertical aquecida à esquerda, obtido com as simulações do método desenvolvido com o trabalho de Vahl Davis (1983) para os números de Rayleigh de 10^3 e 10^4 . Os dados da simulação comparativa foram obtidos com uso de uma formulação de função de corrente e vorticidade para as equações de transporte, e discretizadas pelo método de diferenças finitas.

TABELA 4.6 – NÚMERO DE NUSSOLT EM CONVECÇÃO NATURAL - COMPARATIVO

	Ra = 10^3	Ra = 10^4
Vahl Davis (1983) ³	1,116	2,234
Simulação atual	1,06005	2,01911

Na Tabela 4.7 pode-se verificar a variação do momento angular calculado para os números de Rayleigh = 10^3 e 10^4 juntamente com o tempo computacional gasto, à medida que se adensa a malha computacional utilizada.

TABELA 4.7 – VARIAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Tamanho médio do lado	Rayleigh = 10^3		Rayleigh = 10^4	
	Momento Angular	Tempo de processamento (hh:mm:ss)	Momento Angular	Tempo de processamento (hh:mm:ss)
H/10	$-1,69615 \times 10^{-7}$	5:46	Não atingiu a convergência	
H/20	$-1,59496 \times 10^{-7}$	5:44	$-6,11705 \times 10^{-7}$	0:32
H/30	$-1,57189 \times 10^{-7}$	18:18	$-5,9209 \times 10^{-7}$	19:37
H/40	$-1,56479 \times 10^{-7}$	1:11:55	$-5,62084 \times 10^{-7}$	1:03:08

³ Malha retangular estruturada de 40x40 pontos

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho procurou-se reproduzir os principais testes para a simulação numérica em duas dimensões do escoamento de um fluido viscoso incompressível. Foi simulado, também, um caso de convecção natural, onde se utilizou a bem conhecida aproximação de Boussinesq para acoplamento do sistema de equações envolvendo a equação de transporte de energia térmica.

A partir do trabalho de Pereira Filho (2000), o primeiro a fazer uso da ABC em escoamentos incompressíveis, obteve-se um progresso no resultado das simulações numéricas com a abordagem baseada no circuncentro, pois nos casos simulados foi possível a detecção de regiões com recirculações do fluido (cavidade, degrau e convecção natural), além da solução do sistema de equações envolvendo mais uma grandeza de interesse, como na solução de sistemas não-isotérmicos (convecção natural). Deve-se lembrar, ainda, que a malha utilizada não apresenta qualquer direção preferencial estruturada como no trabalho acima, sendo o presente trabalho o primeiro com malhas “totalmente” não estruturadas utilizando-se da ABC, a obter recirculações na modelagem e simulação de problemas de convecção-difusão.

Alguns aspectos referenciados por Pereira Filho (2000) foram também observados neste trabalho como, por exemplo, nas simulações do escoamento sobre placas planas. Neste caso, o programa não conseguiu estabilizar-se e recuperar o campo de pressão e velocidade, a partir de estimativas iniciais para o gradiente de pressão com valores muito diferentes do esperado.

Outro aspecto a ser considerado é que a convergência do sistema linear de equações, para cada iteração global do método, apresenta uma queda no resíduo nitidamente mais acentuada para os componentes da velocidade do que para pressão. “O que indica que o

campo de velocidades se ajusta rapidamente aos campos de pressão gerados.” (Pereira Filho, 2000).

Também foi testado o acoplamento pressão-velocidade baseada no esquema SIMPLE, SIMPLER (Patankar, 1980) e SIMPLEC (Maliska, 1995), com o arranjo co-localizado, sendo que as instabilidades numéricas decorrentes inviabilizaram sua utilização. Assim, optou-se pela utilização do esquema proposto por Gresho e Sani (1987) que utiliza uma equação de Poisson para pressão obtida pela aplicação do operador divergente à equação de quantidade de movimento.

Conforme análise dos resultados (apresentados preliminarmente em Fazenda e Travelho (2001) e Fazenda (2001)), conclui-se que o método pode ser utilizado como uma alternativa para modelagens bidimensionais de escoamentos incompressíveis viscosos e laminares. É possível obter as equações discretizadas em variáveis primitivas de maneira simplificada, sem a necessidade da utilização de malhas deslocadas (*staggered grids*), e equações adicionais de correção das variáveis envolvidas. Apresenta, ainda, um “baixo custo” computacional (menor complexidade algorítmica), devido a menor quantidade de operações aritméticas por iteração e conseqüentemente implica em menos tempo de processamento, quando comparado a outros métodos conhecidos (Frink (1994), Mathur e Murthy (1997), Despotis e Tsangaris (1995) etc).

Os testes mostraram bom comportamento do método, apresentando razoável concordância com casos clássicos encontrados na literatura. Entretanto, instabilidades numéricas foram notadas durante o desenvolvimento do mesmo, com algumas dificuldades na obtenção da solução de escoamentos laminares a números de Reynolds maiores. Devido a tendência do escoamento a se tornar instável conforme o aumento no número de Reynolds, a futura inclusão de uma modelagem para escoamentos turbulentos poderá resultar em um tratamento melhor das instabilidades encontradas. Além disto, o método apresentou uma dependência da qualidade da malha gerada.

Testes preliminares (Siqueira e Travelho, 2001) mostraram perda de precisão na utilização da mesma abordagem aplicada à problemas de transferência de calor em malhas tridimensionais totalmente não estruturadas, formadas de elementos tetraedrais, indicando uma possível limitação da abordagem baseada no circuncentro.

Deve-se lembrar que em malhas onde um elemento triangular se encontre com um ângulo maior que 90° entre dois lados, o circuncentro deverá estar localizado fora do volume de controle (para triângulos com ângulo entre dois lados exatamente a 90° o circuncentro estará sobre a face oposta ao vértice). Estes casos devem ser evitados no momento da geração da malha para não comprometer a qualidade da solução numérica a ser obtida.

Experimentos práticos mostraram que a técnica de geração de malhas com triangulação de Delaunay (como o Easymesh (Niceno, 1997)) minimiza este problema, mas não garante a inexistência deste tipo de célula. Assim, a criação de um gerador para malhas triangulares que respeite este critério pode ser de grande utilidade.

Importante citar que este tipo de problema afeta também os diagramas de Voronoi pois pode acarretar o aparecimento de polígonos com lados que não cruzam a face de um triângulo. Em problemas tridimensionais com malhas de elementos tetraedrais existe o problema similar onde o centro da circunferência esteja posicionado fora do tetraedro.

Deixa-se como sugestão para futuros trabalhos que contribuam com o desenvolvimento da metodologia, a execução de testes comparativos para os casos bidimensionais testados com outras abordagens encontradas na literatura. Como exemplo, pode-se adotar os Diagramas de Voronoi, utilizando assim um esquema centrado no vértice, ou a utilização do esquema encontrado em Frink (1994).

A extensão do método para modelagem de escoamentos em três dimensões através da utilização de uma malha formada por tetraedros também pode ser melhor explorada. Assim, pode-se estender o estudo feito em Siqueira e Travelho (2001) para solução de

problemas envolvendo transporte convectivo, através da solução das equações de Navier-Stokes com escoamento incompressível.

Outro item a ser melhor explorado é a solução de escoamentos compressíveis, envolvendo, inclusive, alguma modelagem para turbulência (estudos preliminares podem ser encontrados em Lombardi, 2001). Uma possível aplicação seria a modelagem de um reator tipo CVD (*Chemical Vapour Deposition*) utilizado na produção de diamantes (Lombardi et al, 2001).

Outros assuntos que merecem ser melhor explorados envolvem a aplicação da aproximação do tipo UpWind utilizada neste trabalho, bem como a forma de solução do sistema linear de equações algébricas (Solver) específico para uma malha triangular. Estes casos podem ser mais profundamente estudados no que se refere a taxas de convergências em relação aos métodos tradicionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdallah, S. Numerical solutions for the pressure Poisson equation with Neumann boundary conditions using a non-staggered grid. *Journal of Computational Physics*, v. 70, p. 182-192, 1987.

Amsden, A.A.; Harlow, F.H. The SMAC method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flows. Los Alamos: Los Alamos Scientific Lab, 1970. *Los Alamos Scientific Report LA-4370*. 85 p.

Barth, T.J.; Linton, S.W. An unstructured mesh Newton solver for compressible fluid flow and its parallel implementation. Moffett Field: NASA Ames Research Center, 1995. *AIAA Paper 95-0221*. 16 p.

Batina, J.T. Implicit flux-split Euler schemes for unsteady aerodynamics analysis involving unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, v. 29, n. 11, p. 1836-1843, 1991.

Bejan, A. *Transferência de calor*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996. 540 p.

Benek, J.A.; Buning, P.G.; Steger, J.L. A 3-d chimera grid embedding technique. Moffett Field: NASA Ames Research Center. 1985. *AIAA Paper 85-1523*. 10 p.

Bennett, C.O.; Myers, J.E. *Fenômenos de transporte: quantidade de movimento, calor e massa*. São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1978. 812 p.

Bonhaus D.L. *An upwind multgrid method for solving viscous flows on unstructured triangular meshes*, Washington. 48 p., M.S. (Thesis) - The Faculty of The School of Engineering and Applied Science of the George Washington University, 1993.

Boris, J.P. New Directions in Computational Fluid dynamics. *Annual Review Fluid Mechanics*, v. 21, p. 345-385, 1989.

Bravo, E. *Escoamento incompressível com condição de Neumann para a pressão: simulação e formulação matricial em variáveis primitivas*. Porto Alegre. 140 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1997.

Brodkey, R.S. *The phenomena of fluid motions*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1967. 737 p.

Chorin, A.J. A numerical method for solving the incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational physics*, v. 2, p. 12-26, 1967.

Date, A.W. Complete pressure correction algorithm for solution of incompressible Navier-Stokes equations on a nonstaggered grid. *Numerical Heat Transfer, Part B*, v. 29, p. 441-458, 1996.

Degani, A.T.; Fox, G.C. Parallel multigrid computation of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 128, p. 223-236, 1996.

Despotis, G.K.; Tsangaris, S. Fractional step method for solution of incompressible Navier-Stokes equations on unstructured triangular meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 20, p. 1273-1288, 1995.

Dix, D.M. The magnetohydrodynamic flow past a non-conducting flat plate in the presence of a transverse magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 15, p. 449-457, 1963.

Doescher, E.; Campos Velho, H.F.; Ramos, F.M. Criteria for mixed grids in computational fluid dynamics, submitted to *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2001.

Fazenda, A.L.; Travelho, J.S.; Enari, E.H. A abordagem baseada no circuncentro para problemas de transferência de calor, In: *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional – ERMAC*, São José dos Campos, 2000, *Resumo*. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

Fazenda, A.L.; Travelho, J.S. A abordagem baseada no circuncentro em escoamentos incompressíveis bidimensionais. In: *Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*, 24, Belo Horizonte, 2001. *Resumo*. Belo Horizonte: Ed. Gráfica Novo Milênio, 2001. p. 213.

Fazenda, A.L. Modelagem bidimensional com malhas não estruturadas para escoamentos incompressíveis utilizando a abordagem baseada no circuncentro. In: *Workshop do curso de Computação Aplicada - Worcap*, 1, São José dos Campos, 2001, *Resumo*. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

Fortuna, A.O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluídos*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000. 426 p.

Frink, N.T.; Parikh, P.; Pirzadeh, S. A fast upwind solver for the Euler equations on three-dimensional unstructured meshes, Reno: NASA Langley Research Center, 1991. *AIAA Paper* 91-0102. 16 p.

Frink, N.T. Recent progress toward a three-dimensional unstructured Navier-Stokes flow solver, Reno: NASA Langley Research Center, 1994. *AIAA Paper* 94-0061. 24 p.

Fromm, J.E.; Harlow, F.H. Numerical solution of the problem of vortex street development. *Physics of Fluids*, v. 6, p. 975-982, 1963.

Gallouët, T.; Herbin, R.; Vignal, M.H. Error estimates for the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with general boundary conditions. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 37, n. 6, p. 1935-1972, 2000.

Ghia, U.; Ghia, K.N.; Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387-411, 1982.

Gosman, A.D.; Pun, W.M; Runchal, A.K.; Spalding, D.B.; Wolfshtein, M. *Heat and mass transfer in Recirculating flows*. New York: Academic Press, 1969. 1130 p.

Gresho, P.M.; Sani, R.L. On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 7, p. 1111-1145, 1987.

Griebel, M.; Dornseifer, T.; Tilman, N. *Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, 1998. 217 p.

Halt, D.W.; Agarwal, R.K. Compact higher order characteristic-based Euler solver for unstructured grids. *AIAA Journal*, v. 30, n. 8, p. 1993-1999, 1992.

Herbin, R. An error estimate for a four point finite volume scheme for the convection-diffusion equation on a triangular mesh. *Numerical Methods on P.D.E.*, p. 165-173, 1995.

Herbin, R.; Labergerie, O. Finite volume schemes for elliptic and elliptic-hyperbolic problems on triangular meshes. *Computational Methods Applied on Mechanical Engineering*, v. 147, p. 85-103, 1997.

Hirt, C.W.; Cook, J.L. Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain. *Journal of Computational Physics*, v. 10, p. 324-340, 1972.

Hoffman, J.D. *Numerical methods for engineers and scientists*. New York: McGraw-Hill, 1992. 823 p.

Hou, S.; Zou, Q.; Chen, S.; Doolen, G.; Cogley, A.C. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, v. 118, p. 329-347, 1995.

Hwang, Y. Calculations of incompressible flow on a staggered triangular grid, part I: mathematical formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B*, v. 27, p. 323-336, 1995.

Jameson, A.; Mavriplis, D.J. Finite volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh. *AIAA Journal*, v. 24, n. 4, p. 611-618, 1986.

Kwak, D.Y.; Kwon, H.J.; Lee, S. Multigrid algorithm for cell centered finite difference on triangular meshes. *Applied Mathematics and Computation*, v. 105, p. 77-85, 1999.

Leonard, B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computational Methods Applied on Mechanical Engineering*, v. 19, p. 59-98, 1979.

Lombardi, J.C.; Baldan, M.R.; Fazenda, A.L.; Travelho, J.S. Role of Nusselt numbers and fluid flow in the chemical vapour deposition of diamond. In: *IV Brazilian Meeting, 4., and Workshop on Diamod, Diamond-like, Nanotubes, Nitrides & Silicon Carbide - IUVISTA*, 33., Campos do Jordão, 2001, *Resumo*. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

Lombardi, J.C. *Modelagem de escoamentos gasosos com transferência de calor e altos gradientes de temperatura*. São José dos Campos. 78 p. Proposta de Tese (Doutorado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2001.

Maliska, C.R. *Transferência de calor e mecânica dos fluídos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1995. 424 p.

Mathur, S.R.; Murthy, J.Y. A pressure-based method for unstructured meshes. *Numerical Heat Transfer, Part B*, v. 31, n. 2, p. 195-215, 1997.

Mavriplis, D.J. Multigrid solution of the two-dimensional Euler equations on unstructured triangular meshes. *AIAA Journal*, v. 26, n. 7, p. 824-831, 1988.

McGrory, W.D.; Walters, R.W.; Löhner, R. Three-Dimensional Space-Marching Algorithm on Unstructured Grids, *AIAA Journal*, v. 29, n. 11, p. 1844-1849, 1991.

Mavriplis, D.J. Three-dimensional unstructured multigrid for the Euler equations. *AIAA Journal*, v. 30, n. 7, p. 1753-1761, 1992.

Niceno, B. *EasyMesh – version 1.4 - A Two-Dimensional Quality Mesh*. [online]. <<http://www-dinma.univ.trieste.it/~nirftc/research/easymesh/easymesh.html>>. June. 1997.

Patankar, S.V.; Spalding, D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v.15, p.1787-1806, 1972.

Patankar, S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York: Hemisphere, 1980. 197 p.

Pereira Filho, N. *Simulação de escoamentos incompressíveis tridimensionais com uso da abordagem baseada no circuncentro*. São José dos Campos. 126 p. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2000.

Platte, R.B. *Simulação em variáveis primitivas de escoamentos incompressíveis com atualização direta e explícita para pressão*. Porto Alegre. 67 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Instituto de Matemática, 1998.

Roache, P.J. *Fundamentals of computational fluid dynamics*. Albuquerque: Hermosa Publishers, 1998. 648 p.

Santos, L.A.; Vasconcellos, J.F.V.; Maliska, C.R. Análise da acurácia de aproximação do laplaciano em volumes finitos usando diagramas de Voronoi, In: *Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas (ENCIT) / Congresso Latinoamericano de Transferencia de Calor y Massa (LATCYM)*, 6., Florianópolis, 1996, *Anais*. Porto Alegre: Ed. Pallotti. 1996, v. 1, p. 565-569.

Schlichting, H. *Boundary layer theory*. 7.ed. New York: McGraw-Hill, 1979. 817 p.

Siqueira, V.R.; Travelho, J.S. Transporte transiente de calor em geometrias complexas. In: *Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*, 24, Belo Horizonte, 2001. *Resumo*. Belo Horizonte: Ed. Gráfica Novo Milênio, 2001. p. xxxx.

Thompson, J.F.; Warsi, Z.U.A.; Mastin, C.W. *Numerical grid generation*, New York: North-Holland, 1985. 483 p.

Thompson, J.F.; Weatherill, N.P. Aspects of numerical grid generation – current science and art, Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993. *AIAA Paper* 93-3539. 42 p.

Travelho, J.S.; Fazenda, A.L.; Enari, E.H. Abordagem pelo circuncentro para malhas não estruturadas em transferência de calor. In: *Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 15., Águas de Lindóia, 1999. *Anais*. [CD-ROM] Campinas: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 1999. Seção Técnica de Métodos Numéricos Aplicados.

Travelho, J.S. *Uma aproximação do tipo upwind de segunda ordem para problemas de convecção*. (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José Campos, 2002a). Comunicação pessoal.

Travelho, J.S. *Solução por blocos do sistema linear de equações de uma discretização para malhas não estruturadas triangulares*. (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José Campos, 2002b). Comunicação pessoal

Van Dormaal, J.P.; Raithby, G.D. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow. *Numerical Heat Transfer*, v. 7, p. 147-163, 1984.

Vatsa, V.N.; Sanetrik, M.D.; Parlette, E.B. Development of a flexible and efficient multigrid-based multi-block flow solver. Hampton: NASA Langley Research Center, 1993. *AIAA Paper 93-0677*. 13 p.

Vahl Davis, G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 3, p.249-264, 1983.

Venkatakrisnan, V. A perspective on unstructured grid flow solvers. Hampton: NASA Langley Research Center, 1995a. *NASA CR-195025, ICASE Report 95-3*. 37 p.

Venkatakrisnan, V. Implicit schemes and parallel computing in unstructured grid CFD. Hampton: NASA Langley Research Center, 1995b. *NASA CR-195071, ICASE Report 95-28*. 60 p.

Venkatakrisnan, V.; Mavriplis, D.J. Implicit method for the computation of unsteady flows on unstructured grids. Hampton: NASA Langley Research Center, 1995. *NASA CR-188206, ICASE Report 95-60*. 35 p.

Venkatakrisnan, V.; Simon, H.D.; Barth, T.J. A MIMD implementation of a parallel Euler solver for unstructured grids. Moffett Field: NASA Ames Research Center, 1991. *NASA-CR-203518 - RNR 91-024*. 28 p.

Zhao, Y.; Zhang, B. A high-order characteristics upwind FV method for incompressible flow and heat transfer simulation on unstructured grids. *Computational Methods Applied Mechanics Engineering*, v. 190, p. 733-756, 2000.

APÊNDICE A

DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A partir da equação de conservação da quantidade de movimento para um fluido incompressível (ρ constante) e em estado estacionário, com a aproximação de Boussinesq para a força de corpo $\rho \mathbf{g}$, definida em (3.26b) será detalhado o processo de discretização. A equação será dividida em quatro diferentes termos antes do início do processo de integração no volume de controle triangular, como se pode observar abaixo:

$$\rho \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \hat{P} + \rho_0 [\beta (T - T_0)] \mathbf{g} \quad (\text{A.1})$$

Integrando o termo, referente ao transporte convectivo, designado como I no volume de controle V :

$$\rho \int_V \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}) dV \quad (\text{A.2})$$

Através da aplicação do Teorema de Gauss a integral no volume pode ser transformada em uma integral de superfície:

$$\rho \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} dS \quad (\text{A.3})$$

A qual pode ser aproximada, para um volume de controle da forma de um elemento triangular com faces a , b e c e vizinhança denominada A , B e C , da seguinte maneira:

$$\rho \sum_{i=a,b,c} [(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i] S_i \quad (\text{A.4})$$

A aproximação para a variável \bar{V} nas faces a , b ou c do volume de controle triangular, lembrando que as variáveis são definidas e calculadas no circuncentro de cada volume de controle, segue o esquema *UpWind* descrito na seção 3.3.

Inicialmente deve-se considerar que o valor $(h_i \cdot \bar{V}_i)$ presente em (A.4) será tomado no instante anterior. Assim, analisando-se o mesmo termo, caso o escoamento aponte para fora do volume de controle, deve-se levar em consideração a média ponderada entre P e sua célula vizinha I , sendo o valor de ϕ na célula I tomada no instante anterior, denotado por ϕ^* . Assim temos:

$$\text{Caso } (h_i \cdot \bar{V}_i)^* > 0 \text{ tem-se } \phi_i = \left[\beta_i (h_i \cdot \bar{V}_i)^* \phi_P + \alpha_i (h_i \cdot \bar{V}_i)^* \phi_I^* \right], \quad (\text{A.5a})$$

$$\text{Caso } (h_i \cdot \bar{V}_i)^* < 0 \text{ tem-se } \phi_i = \left[\beta_i (h_i \cdot \bar{V}_i)^* \phi_P^* + \alpha_i (h_i \cdot \bar{V}_i)^* \phi_I \right], \quad (\text{A.5b})$$

onde α_i e β_i são os termos referentes à interpolação linear entre a célula P e seu vizinho I para a posição do meio da face i conforme pode-se verificar nas Equações a seguir:

$$\alpha_i = \frac{Dist_{pi}}{Dist_{PI}} \quad (\text{A.6a})$$

$$\beta_i = 1 - \alpha_i = \frac{Dist_{il}}{Dist_{PI}}, \quad (\text{A.6b})$$

sendo $\alpha_i + \beta_i = 1$ e $Dist_{pi} + Dist_{il} = Dist_{PI}$, ou seja, a soma da distância entre o ponto no circuncentro de P e o meio da face denominada i com a distância do meio da face i até o circuncentro da célula vizinha denominada por I , é igual a distância entre os circuncentros das células vizinhas P e I .

De volta a discretização do termo referente ao transporte convectivo, reescrevendo (A.4) de forma compacta, tem-se:

$$\rho \sum_{i=a,b,c} \left\{ \max \left[\left(h_i \cdot \vec{V}_i \right)^*, 0 \right] [\beta_i \phi_P + \alpha_i \phi_i^*] - \max \left[- \left(h_i \cdot \vec{V}_i \right)^*, 0 \right] [\beta_i \phi_P^* + \alpha_i \phi_i] \right\} S_i \quad (\text{A.7})$$

Expandindo a somatória em função das células vizinhas ao triângulo P tem-se:

$$\begin{aligned} & \rho S_a \left\{ \max \left[\left(h_a \cdot \vec{V}_a \right)^*, 0 \right] [\beta_a \phi_P + \alpha_a \phi_A^*] - \max \left[- \left(h_a \cdot \vec{V}_a \right)^*, 0 \right] [\beta_a \phi_P^* + \alpha_a \phi_A] \right\} + \\ & \rho S_b \left\{ \max \left[\left(h_b \cdot \vec{V}_b \right)^*, 0 \right] [\beta_b \phi_P + \alpha_b \phi_B^*] - \max \left[- \left(h_b \cdot \vec{V}_b \right)^*, 0 \right] [\beta_b \phi_P^* + \alpha_b \phi_B] \right\} + \\ & \rho S_c \left\{ \max \left[\left(h_c \cdot \vec{V}_c \right)^*, 0 \right] [\beta_c \phi_P + \alpha_c \phi_C^*] - \max \left[- \left(h_c \cdot \vec{V}_c \right)^*, 0 \right] [\beta_c \phi_P^* + \alpha_c \phi_C] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Para o termo referente ao transporte difusivo, designado por II , deve-se integra-lo no volume:

$$\mu \iint_V (\nabla^2 \psi) dV = \mu \iint_V (\nabla \cdot \nabla \psi) dV \quad (\text{A.9})$$

Pelo teorema de Gauss:

$$\mu \iint_V (\nabla \cdot \nabla \psi) dV = \mu \oint_S \vec{n} \cdot (\nabla \psi) dS \quad (\text{A.10})$$

Pode-se aproximar a integral de superfície (A.10) por:

$$\mu \oint_S \vec{n} \cdot (\nabla \psi) dS = \mu \sum_{i=a,b,c} \frac{\partial \psi}{\partial n_i} S_i \quad (\text{A.11})$$

Expandindo a somatória tem-se:

$$\mu \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial n_a} S_a + \frac{\partial \bar{V}}{\partial n_b} S_b + \frac{\partial \bar{V}}{\partial n_c} S_c \right) \quad (\text{A.12})$$

Pode-se aproximar as derivadas de \bar{V} nas direções normais a cada face do triângulo por uma diferença centrada:

$$\mu \left[\left(\frac{\bar{V}_A - \bar{V}_P}{Dist_{PA}} S_a \right) + \left(\frac{\bar{V}_B - \bar{V}_P}{Dist_{PB}} S_b \right) + \left(\frac{\bar{V}_C - \bar{V}_P}{Dist_{PC}} S_c \right) \right] \quad (\text{A.13})$$

Para a integração do terceiro termo do lado direito da Equação (A.1), referente à contribuição do gradiente de pressão no escoamento, pode-se, inicialmente, reescreve-lo como:

$$\iiint_V (\nabla P) dV = \iiint_V \nabla \cdot (PI) dV, \quad (\text{A.14})$$

onde I é um tensor representado pela matriz identidade, de maneira que:

$$PI = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

que implica:

$$\nabla \cdot (PI) = \frac{\partial}{\partial x} P\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} P\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} P\hat{k} = \nabla P \quad (\text{A.16})$$

Assim, aplicando o Teorema de Gauss a integral (A.14) tem-se:

$$\iiint_V \nabla \cdot (PI) dV = \oint_S (\hat{n} \cdot I) P dS = \oint_S (\hat{n} P) dS \quad (\text{A.17})$$

A integral de superfície (A.17) pode ser aproximada por:

$$\oint_S (\hat{n}P) dS = \sum_{i=a,b,c} \hat{n}_i P_i S_i \quad (\text{A.18})$$

Expandido a somatória de (A.18) tem-se:

$$\hat{h}_a P_a S_a + \hat{h}_b P_b S_b + \hat{h}_c P_c S_c \quad (\text{A.19})$$

Para o último termo de (A.1) deve-se considerar que a temperatura mantém-se constante dentro do volume de controle, assim, chega-se à Equação:

$$\iiint_V \rho \beta (T_P - T_0) \underline{g} dV = \rho \beta (T_P - T_0) \underline{g} V, \quad (\text{A.20})$$

Com as discretizações para todos os termos da equação de conservação de quantidade de movimento pode-se substituir (A.8), (A.13), (A.19) e (A.20) em (A.1):

$$\begin{aligned} & \left\{ S_a \left\{ \max \left[(\hat{h}_a \cdot \underline{V}_a)^*, 0 \right] [\beta_a \phi_P + \alpha_a \phi_A] - \max \left[-(\hat{h}_a \cdot \underline{V}_a)^*, 0 \right] [\beta_a \phi_P^* + \alpha_a \phi_A] \right\} + \right. \\ & \rho \left\{ S_b \left\{ \max \left[(\hat{h}_b \cdot \underline{V}_b)^*, 0 \right] [\beta_b \phi_P + \alpha_b \phi_B] - \max \left[-(\hat{h}_b \cdot \underline{V}_b)^*, 0 \right] [\beta_b \phi_P^* + \alpha_b \phi_B] \right\} + \right. \\ & \left. \left. \left. S_c \left\{ \max \left[(\hat{h}_c \cdot \underline{V}_c)^*, 0 \right] [\beta_c \phi_P + \alpha_c \phi_C] - \max \left[-(\hat{h}_c \cdot \underline{V}_c)^*, 0 \right] [\beta_c \phi_P^* + \alpha_c \phi_C] \right\} \right\} \right\} = \\ & \mu \left[\left(\frac{\underline{V}_A^p - \underline{V}_P^p}{Dist_{PA}} S_a \right) + \left(\frac{\underline{V}_B^p - \underline{V}_P^p}{Dist_{PB}} S_b \right) + \left(\frac{\underline{V}_C^p - \underline{V}_P^p}{Dist_{PC}} S_c \right) \right] - (\hat{h}_a P_a S_a + \hat{h}_b P_b S_b + \hat{h}_c P_c S_c) + (\text{A.21}) \\ & [\rho \beta (T_P - T_0) \underline{g} V] \end{aligned}$$

Agrupando os termos referentes aos valores no ponto P conforme o *stencil* de cálculo (Figura 3.9), tem-se:

$$\left\{ \mu \left(\frac{S_a}{Dist_{PA}} + \frac{S_b}{Dist_{PB}} + \frac{S_c}{Dist_{PC}} \right) + \rho \begin{bmatrix} S_a \beta_a \max[(h_a \cdot V_a^*), 0] + \\ S_a \beta_b \max[(h_b \cdot V_b^*), 0] + \\ S_c \beta_c \max[(h_c \cdot V_c^*), 0] \end{bmatrix} \right\} V_P^\rho \quad (A.22)$$

Para os valores referentes aos vizinhos triângulos A , B e C tem-se:

$$\left\{ -\mu \frac{S_a}{Dist_{PA}} - \rho \alpha_a \max[-(h_a \cdot V_a^*), 0] \right\} V_A^\rho \quad (A.23)$$

$$\left\{ -\mu \frac{S_b}{Dist_{PB}} - \rho \alpha_b \max[-(h_b \cdot V_b^*), 0] \right\} V_B^\rho \quad (A.24)$$

$$\left\{ -\mu \frac{S_c}{Dist_{PC}} - \rho \alpha_c \max[-(h_c \cdot V_c^*), 0] \right\} V_C^\rho \quad (A.25)$$

O termos restantes podem ser agrupados em:

$$\rho \beta (T_p - T_0) V - (h_a P_a S_a + h_b P_b S_b + h_c P_c S_c) + \left\{ \begin{array}{l} S_a [\beta_a \max[-(h_a \cdot V_a^*), 0] V_P^\rho - \alpha_a \max[(h_a \cdot V_a^*), 0] V_A^\rho] + \\ S_b [\beta_b \max[-(h_b \cdot V_b^*), 0] V_P^\rho - \alpha_b \max[(h_b \cdot V_b^*), 0] V_B^\rho] + \\ S_c [\beta_c \max[-(h_c \cdot V_c^*), 0] V_P^\rho - \alpha_c \max[(h_c \cdot V_c^*), 0] V_C^\rho] \end{array} \right\} \quad (A.26)$$

Assim, pode-se agrupar estes termos na Equação:

$$a_P V_P^\rho + a_A V_A^\rho + a_B V_B^\rho + a_C V_C^\rho = b^\rho, \quad (A.27)$$

sendo os coeficientes a_P , a_A , a_B , a_C e b^ρ definidos pelas Equações de (A.22) até (A.26) respectivamente.

APÊNDICE B

APROXIMAÇÃO PARA O VALOR DA PRESSÃO SOBRE O CONTORNO

REFERENTE A UMA PAREDE SÓLIDA

Para se analisar o gradiente de pressão agindo na direção tangencial e normal a um contorno referente a uma parede sólida, será considerada as equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível, em estado estacionário, bidimensional nos seus dois componentes referentes x e y , abandonando, no momento, a notação vetorial. Lembrando que a parede sólida aqui tratada será considerada paralela ao eixo x .

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.1a})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.1b})$$

Sendo a Equação (B.1a) relativa ao componente x e (B.1b) relativa ao componente y . Ambas representarão o escoamento do fluido incompressível viscoso em uma pequena região δ próxima a parede sólida.

Exatamente sobre a parede sólida os componentes do vetor velocidade assumem:

$$u = 0, \quad v = 0 \quad (\text{B.2})$$

Como os valores dos componentes u e v não sofrem variação ao longo da parede sólida paralela a x , tem-se, sobre a parede, que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Lembrando da equação de conservação de massa para um escoamento incompressível é escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.4})$$

E como $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (Equação (B.3)), o valor do segundo termo de (B.4) também deve ser igual a zero na parede, assim:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.5})$$

A uma pequena distância δ da parede sólida e se $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ temos que:

$$u \sim \delta \quad (\text{B.6})$$

Desenvolvendo v em série de Taylor na região próxima a parede sólida e usando (B.5) verifica-se que v é da ordem de δ^2 . Assim:

$$v \sim \delta^2 \quad (\text{B.7})$$

Com as Equações (B.6) e (B.7) pode-se fazer uma análise de grandeza nas equações de Navier-Stokes para os componentes x e y , dadas por (B.1a) e (B.1b) respectivamente:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.8a})$$

$$\frac{\ddot{a}}{\ddot{a}} \delta^2 \frac{\delta}{\delta} \quad \frac{\delta}{\delta^2} \quad \frac{\delta}{\delta^2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.8b})$$

$$\frac{\ddot{a}}{\ddot{a}} \delta^2 \frac{\delta^2}{\delta} \quad \frac{\delta^2}{\delta^2} \quad \frac{\delta^2}{\delta^2}$$

Lembrando que o tamanho característico respectivos a x e y serão também da ordem de δ .

Comparando (B.8a) com (B.8b) termo a termo pode-se verificar as ordens dos gradientes de pressão:

$$\circ \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) = \delta \circ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (\text{B.9})$$

Como o valor de δ é pequeno, a variação da pressão em uma região próxima a parede sólida na sua direção normal será considerada nula.