Uma Heurística para a Resolução do Problema Integrado de Corte e Seqüenciamento baseada em uma Partição do Problema

Maria José Pinto
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
INPE/LAC
e-mail: maju@lac.inpe.br

Horacio Hideki Yanasse
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
INPE/LAC
e-mail: horacio@lac.inpe.br

Resumo

Neste trabalho, propõe-se uma heurística para a resolução do problema de corte de estoque integrado ao problema de seqüenciamento de padrões baseada em uma partição do problema. O problema de corte de estoque é resolvido e, se o seqüenciamento dos padrões é inviável, um particionamento do problema é realizado. Cada uma das partições é, por si só, tratada como um problema de corte e seqüenciamento de padrões. Se o seqüenciamento dos padrões obtidos da solução destes problemas de corte de estoque for novamente inviável, o mesmo procedimento de particionamento é aplicado. Isto é feito de forma recursiva até que uma solução viável para o problema integrado original seja obtida.

Abstract

In this work, we propose a heuristic to solve the cutting stock problem integrated to the pattern sequencing problem based in a partition of the problem. The cutting stock problem is solved and, if the sequencing of the patterns is unfeasible, a partition of the problem is done. Each one of the partitions is treated on its own as a integrated cutting and sequencing problem. If the sequencing of the patterns obtained from the solution of these cutting stock problems is infeasible again, the same partition procedure is applied. This is done in a recursive way until a feasible solution to the original integrated problem is obtained.

1. Introdução

O problema de corte de estoque consiste em atender a demanda de peças menores (*itens*), com dimensões e quantidades específicas, a partir do corte de peças maiores (*objetos*). Objetiva-se otimizar um determinado critério como, por exemplo, minimizar os custos da produção ou os desperdícios, maximizar o lucro, etc. Na solução deste problema são obtidos os *padrões de corte* (como os objetos serão cortados) e suas respectivas freqüências (quantidade de vezes que cada padrão deverá ser cortado para atender toda a demanda). Problemas de corte de estoque são formulados, em geral, como problemas de Otimização Linear Inteira.

O problema de seqüenciamento busca otimizar a seqüência em que os padrões, definidos na resolução do problema de corte, deverão ser processados de modo a alcançar um objetivo específico como, por exemplo, minimizar o número máximo de pilhas abertas durante o processo de corte (MOSP, do inglês *Minimization of Open Stack Problem*). Neste caso, cada tamanho diferente de item cortado, abre uma pilha nova que permanece aberta até que o último item daquele tamanho seja cortado, ou seja, até que todos os padrões que possuem o item analisado sejam processados. O interesse na resolução deste problema surge em situações práticas principalmente onde existe limitação de espaço ao redor da máquina de corte pois, dependendo da seqüência obtida, pode ser necessário remanejar pilhas incompletas para outro local e retornar com elas para perto da máquina quando o item correspondente àquela pilha for novamente cortado. Este remanejamento não é desejável pois pode comprometer o processo de produção. Custos de estoque elevados, ou ainda, restrições de espaço de armazenagem são outras razões que justificam o interesse na resolução do problema de seqüenciamento.

Em geral, estes problemas têm sido tratados na literatura de forma independente, visto serem ambos, isoladamente, de difícil resolução. Entretanto, resolvê-los de forma integrada torna-se bastante desejável quando a limitação no número máximo de pilhas (que definiremos como C) já está pré-definida. Nestes casos, ao resolver os problemas de forma seqüencial (como nos trabalhos de Dyson e Gregory (1974) e Madsen (1988)), a solução do problema de corte pode resultar num elevado número de pilhas abertas, podendo dificultar a utilização desta solução na prática. De nosso conhecimento, somente os trabalhos de Pinto e Yanasse (2001) e Pileggi (2002) buscam resolver os problemas de geração e seqüenciamento dos padrões de forma realmente integrada.

No trabalho de Pinto e Yanasse (2001) é proposta uma formulação matemática para o problema integrado e no trabalho de Pileggi (2002) são propostas três abordagens heurísticas para resolução do problema, que consistem de um procedimento iterativo, de uma heurística construtiva gulosa e de uma variação do algoritmo simplex com geração de colunas.

Devido à dificuldade de se resolver o problema de forma exata, propomos neste trabalho mais uma heurística para a sua resolução, que está apresentada na seção 2. Na seção 3, apresentamos uma variação desta heurística proposta. Algumas considerações finais são feitas na seção 4.

2. Heurística para a resolução do problema integrado

Da literatura, sabe-se que o MOSP pode ser modelado como um problema de percorrimento de arcos em grafos (Yanasse, 1996a), onde os vértices do grafo representam os itens e, arcos entre vértices existem, se os itens correspondentes pertencem a um mesmo padrão. Os arcos múltiplos são representados uma única vez.

Para efeito de ilustração, considere o exemplo apresentado da Tabela 1 com $M = 5$ e $N = 3$, com M representando o número total de itens e N o número total de padrões. Nesta tabela, o valor *1* indica que o item pertence ao padrão correspondente e o valor *0* indica que o item não pertence.

Tabela 1. Matriz de padrões × itens.

Itens	**Padrões**		
	1	**2**	**3**
1	1	0	1
2	1	1	0
3	1	1	0
4	0	0	1
5	0	1	0

Neste exemplo simples, como o padrão 1 possui os itens 1, 2 e 3, teremos estes 3 vértices ligados entre si, formando um clique, como o padrão 2 possui os itens 2, 3 e 5 e a ligação entre 2 e 3 já existe, basta ligar os vértices 2 e 3 ao vértice 5 e, finalmente, como o padrão 3 possui os itens 1 e 4, estes vértices serão conectados. O grafo final correspondente está representado na Figura 1. No caso, a pilha correspondente a um determinado item (vértice) é considerada fechada, quando todos os arcos incidentes a este vértice forem percorridos.

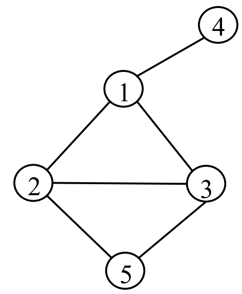

Figura 1. Grafo correspondente ao exemplo da Tabela 1.

A heurística proposta neste trabalho, utiliza o grafo MOSP para auxiliar no particionamento do problema sempre que uma solução inviável é obtida. Inicia-se resolvendo o problema de corte para gerar um primeiro conjunto de padrões. Caso o seqüenciamento destes padrões resulte num número máximo de pilhas abertas maior do que o permitido, montamos o grafo MOSP correspondente ao conjunto de padrões, conforme descrito anteriormente. Nossa sugestão é particionar este grafo de forma a obter dois problemas menores.

A partição do problema é definida identificando-se o clique maximal (maior subgrafo completo do grafo) visto que a quantidade de vértices do clique maximal (que denominaremos de *S*) influencia o número mínimo de pilhas que serão abertas pelos padrões.

O particionamento sugerido elimina cliques maximais, proibindo que estes sejam novamente formados. Isto é realizado particionando-se os vértices deste clique maximal em dois subconjuntos evitando, desta forma, que o mesmo clique seja novamente formado.

A partição dos vértices do clique maximal é definida dependendo dos valores de C e de S e a partição dos demais vértices do grafo é feita procurando favorecer a preservação da estrutura do grafo MOSP original, ou seja, vértices adjacentes, na medida do possível, permanecerão em um mesmo subconjunto.

Itens de menor tamanho são mais fáceis de combinar para se formar padrões, assim, dentre os vértices do clique maximal, iniciamos colocando os dois de menor tamanho (ou seja, os dois itens menores), um em cada partição. Em seguida, alocamos os demais vértices (itens) à partição que ele possui mais arcos associados, ou seja, aos itens com os quais, provavelmente, ele possui mais “afinidade” de combinação. Caso ocorra empate, o item é atribuído a qualquer uma das partições.

Em casos onde $S > C$, se somente seguirmos o procedimento descrito anteriormente, corremos o risco de gerar novamente um clique maximal de tamanho maior do que C na próxima iteração. Nestes casos, dividimos mais vértices do clique maximal de forma balanceada, de forma que tenhamos em um dos subconjuntos, no máximo, C itens e, no outro, os demais $S - C$ itens.

Para alocarmos os itens maiores que fazem parte do clique maximal às partições, fazemos uma análise dos arcos ligados a estes itens e, a partir deles, verificamos a quantidade de arcos que estariam associados às partições para definir a atribuição. O item é atribuído à partição ao qual ele se conecta com um número maior de arcos. Aqui, novamente, estamos buscando favorecer a manutenção da estrutura original do grafo. Para se fazer a atribuição dos demais itens, utiliza-se o mesmo critério, ou seja, examina-se a quantidade de arcos que estariam associados às partições para se definir a atribuição. Procede-se a atribuição a partir dos itens adjacentes àqueles já atribuídos.

Caso existam outros cliques maximais, seguimos a seqüência dos padrões obtida na resolução do problema de seqüenciamento e selecionamos o primeiro onde o número máximo de pilhas abertas é violado.

Para ilustrar o particionamento, considere que o gráfico da Figura 2 seja o grafo MOSP da solução do problema de corte de estoque original e que o seqüenciamento dos padrões abriu um número de pilhas maior do que o permitido. Portanto, procedemos à partição do problema. No caso, podemos observar que o clique maximal do grafo MOSP é composto pelos vértices *1*, *2*, *7* e *8*.

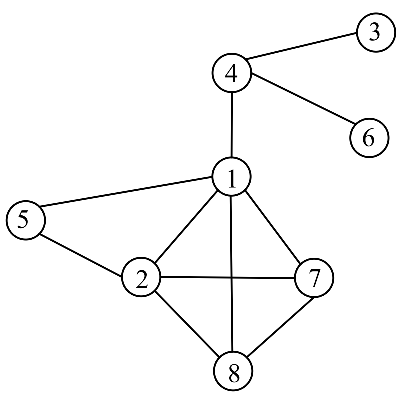

Figura 2. Grafo para ilustrar particionamento.

Admitindo, por exemplo, que os itens *1* e *8* são os de menor tamanho, cada um deles seria colocado em uma das partições. Como o item 7 não está ligado a nenhum outro item fora do clique maximal, sua atribuição é arbitrária. Vamos alocá-lo, por exemplo, à partição 1. Já o item 2 está ligado ao item 5, que possui uma ligação com o item 1. Logo, tanto o item 2 quanto o item 5 deverão ser alocados à partição que contém o item 1. Como o item 4, que possui ligação com os itens 3 e 6, está ligado ao item 1, estes 3 itens também pertencerão à partição 1. Os dois subconjuntos resultantes estão representados na Figura 3a.

Observe que a segunda partição possui somente o item 8, ou seja, a solução para esta partição seria o padrão homogêneo do item. Em exemplos simples como este, é viável examinar atribuições arbitrárias alternativas, por exemplo, verificar se a atribuição do item 7 à segunda partição (vide Figura 3b) não seria mais interessante caso possibilite combinar os itens 7 e 8 em um bom padrão.

O particionamento ilustrado na Figura 3b é o que seria obtido também no caso onde $C = 2$. O item 7 seria atribuído à segunda partição, para evitar que os itens 1, 7 e 2 formem um novo ciclo (clique) com tamanho maior do que *C*.

Se existisse, por exemplo, um arco entre os vértices 8 e 4, os itens 4, 3 e 6 poderiam fazer parte de qualquer uma das partições. Na Figura 3c ilustra-se o caso onde os itens foram alocados à segunda partição.

Se, por exemplo, o item 6 estivesse ligado tanto ao item 7 quanto ao item 8, o item 7 tivesse sido atribuído à segunda partição e o item 4 tivesse sido atribuído à primeira partição, então, o item 6 seria atribuído à segunda partição, visto que o mesmo tem um arco ligado à primeira partição (através do item 4) e dois arcos ligados à segunda partição (através dos arcos 7 e 8), o que resultaria no particionamento ilustrado pela Figura 3d.

Como podemos observar, a determinação das partições depende da estrutura do grafo.

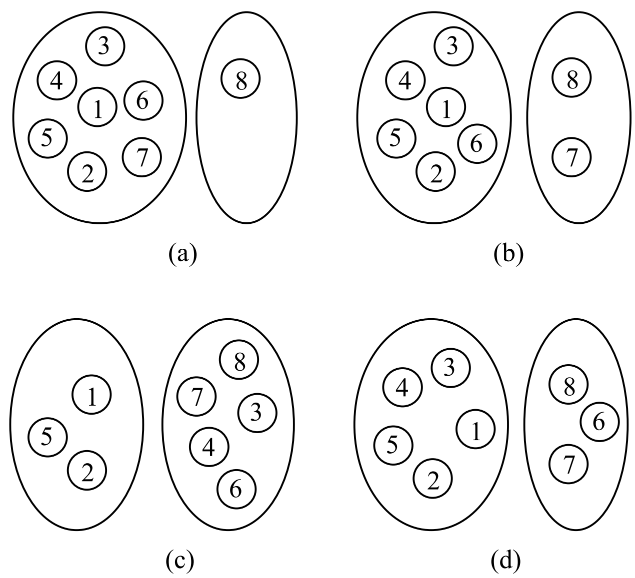

Figura 3. Possibilidades de particionamento.

Definidas as partições, resolve-se os problemas de corte novamente considerando cada um dos subproblemas de forma independente. Se o seqüenciamento não for viável em alguma das partições, o processo de particionamento é repetido nesta partição. Este procedimento é empregado de forma recursiva até que se obtenha uma solução viável.

Na heurística proposta, para se resolver o problema de corte, sugere-se o uso do método simplex com geração de colunas proposto por Gilmore e Gomory (1961, 1963), onde os padrões gerados serão limitados quanto à demanda e à quantidade de, no máximo, C itens distintos presentes no padrão. A restrição quanto à demanda é necessária na geração de colunas pois com demanda pequena, o padrão gerado tenderia a repetir itens mais lucrativos excedendo a sua demanda. A limitação com relação à quantidade máxima de itens distintos decorre da limitação do número máximo permissível de pilhas abertas.

Segundo Ashikaga (2001), determinar o clique maximal é um problema NP-hard. Assim, sugere-se a utilização de uma heurística para determiná-lo, por exemplo, a chamada *busca gulosa por vértice de grau mínimo no grafo complementar*, também utilizada por Ashikaga (2001).

O seqüenciamento dos padrões é também um problema NP-hard (vide Linhares e Yanasse, 2002) e, desta forma, sugere-se o uso da *Heurística dos Nós de Menor Custo* proposta em Becceneri, Yanasse e Soma (2003) que, aparentemente, apresenta um bom desempenho.

3. Variação da Heurística

Como descrito anteriormente, a heurística separa os itens do problema em subconjuntos disjuntos. Uma alternativa que poderia ser considerada seria permitir que um ou mais itens pertencentes ao clique maximal possam fazer parte de ambas as partições. Com isso, apenas as demandas destes itens seriam divididas de forma conveniente para cada uma das partições. A vantagem de se considerar esta alternativa estaria no aumento do número de itens de cada um dos subproblemas e, em conseqüência, aumenta-se a possibilidade de se gerar melhores soluções para o problema de corte de estoque para cada um deles.

A quantidade R de itens que farão parte de ambas as partições dependerá dos valores de S e C. No problema de corte relacionado à primeira partição, a demanda $\tilde{d}$ associada aos R itens não seria fixada a um determinado valor, estaria apenas limitada ao intervalo $0 \leq \tilde{d} \leq d_{real}$, onde d_{real} é a demanda real dos R itens. Após a resolução do problema de corte da primeira partição, o problema de corte da segunda partição é resolvido considerando a demanda ainda não satisfeita dos R itens.

Com esta variação, pilhas correspondentes aos itens cujas demandas foram divididas, permanecerão abertas ao final do seqüenciamento dos padrões da primeira partição. Assim, ao se realizar o seqüenciamento na segunda partição, estas pilhas abertas deverão ser levadas em consideração.

Consideraremos os itens de maior tamanho no clique maximal para fazer parte de ambas as partições, respeitando a quantidade máxima de itens de acordo com os valores de S e C. Esta escolha se deve ao fato de que os itens de maiores tamanhos são os que, geralmente, tem-se uma maior dificuldade na geração de bons padrões que os contenham. Fazendo com que estes itens pertençam a ambas as partições, estamos tentando aumentar as chances de se gerar bons padrões que contenham estes itens.

4. Considerações finais

As implementações do método heurístico proposto ainda estão em fase inicial. Nossa expectativa é que a solução obtida tenha uma boa qualidade, ou seja, o aumento na quantidade de objetos cortados seja pouco significativo e o tempo computacional seja aceitável.

Para avaliar a qualidade da solução pretende-se comparar os resultados obtidos com os apresentados no trabalho de Pileggi (2002), caso a autora forneça os casos de testes utilizados em seu trabalho.

Reconhecimento: Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP, CNPq e CAPES.

Referências

Ashikaga, F. M., "Um Método Frugal para o Problema de Minimização de Pilhas Abertas", Dissertação de Mestrado em Ciência no Curso de Engenharia Eletrônica e Computação do ITA/CTA, 2001, São José dos Campos, SP.

Becceneri, J. C., Yanasse, H. H., & Soma, N. Y., "A Method for Solving the Minimization of the Maximum Number of Open Stacks Problem Within a Cutting Process", *Forthcoming in Computers & Operations Research,* 2003.

Dyson, R. G. & Gregory, A. S, "The Cutting Stock Problem in the Flat Glass Industry", *Operations Research Quarterly*, 1974, 25(1), 41-53.

Gilmore, P. C. & Gomory, R., "A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem", *Operations Research*, 1961, 9, 848-859 .

Gilmore, P. C. & Gomory, R., "A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem- Part II", *Operations Research*, 1963, 11, 863-888.

Linhares, A. & Yanasse, H. H., "Connections between Cutting_Pattern Sequencing, VLSI Design, and Flexible Machines" *Computers & Operations Research*, 2002, 29(12), 1759-1777.

Madsen, O.B.G., "An Application of Traveling-salesman Routines to Solve Pattern Allocation Problems in the Glass Industry", *Journal of the Operational Research Society*, 1988, 39(3), 249-256.

Pileggi, G. C. F., "Abordagens para Otimização Integrada dos Problemas de Geração e Seqüenciamento de Padrões de

Corte", Tese de Doutorado em Ciências no Curso de Ciências de Computação e Matemática Computacional da USP, São Carlos, SP, 2002.

Pinto, M. J & Yanasse, H. H., *"*O Problema de Corte e Seqüenciamento de Padrões: uma Abordagem Integrada*"*, apresentado no I Workshop dos Cursos de Computação Aplicada do INPE (WORCAP), São José dos Campos, SP, 2001, 109-111.

Yanasse, H.H., "A Transformation for Solving a Pattern Sequencing Problem in the Wood Cut Industry", *INPE/LAC Technical Report 6*, 1996a, 15p.