Sincronização de Sistemas Caóticos na Identificação de Sistemas

Ubiratan Santos Freitas
Elbert Einstein Nehrer Macau
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC)
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)
ubiratan@lit.inpe.br elbert@lac.inpe.br

Abstract

This work describes the use of synchronization of chaotic systems as a tool for system identification. Initially, we outline the traditional techniques of system identification and some of their main drawbacks. Then, we show how chaotic system synchronization can be used to validate identified models.

Resumo

Este trabalho trata do uso de sincronização de sistemas caóticos como uma ferramenta de identificação de sistemas. Uma breve revisão das técnicas tradicionais de identificação é apresentada juntamente com algumas suas principais dificuldades. A seguir, mostra-se como a sincronização de sistemas caóticos pode ser usada para validar modelos identificados.

1. Introdução

O assunto principal deste trabalho é a identificação de sistemas. Esta última pode ser definida como o procedimento de busca por *modelos empíricos*, baseado em dados de entrada e saída de um sistema qualquer (Ljung, 1987; Aguirre, 2000; Freitas, 2001).

As técnicas de identificação se colocam como uma alternativa à obtenção de modelos pela física do processo, ou modelagem fenomenológica. Às vezes, a modelagem fenomenológica não é possível ou viável, mas os sinais de entrada e saída do sistema em estudo são conhecidos. Nesses casos, os modelos empíricos são os únicos que podem ser obtidos e a identificação de sistemas é a abordagem de escolha para a modelagem.

Muitas vezes, quando se opta pela identificação para modelar um sistema, o problema em questão é não linear. A identificação de sistemas não lineares é um tema longe de estar fechado, embora esteja já bastante avançado. Particularmente, quando se trata de identificação de sistemas caóticos, a identificação não é simples (Aguirre et al., 2001).

O outro tema abordado nesse trabalho é a sincronização de sistemas caóticos. Devido a sua eventual aplicação em comunicação segura (Baptista et al., 2003), esse assunto vem gerando uma grande quantidade de publicações, apesar de ser um campo relativamente recente.

A possibilidade de sincronismo de sistemas caóticos é um tanto inesperada, dada a natureza do caos determinístico. Dois sistemas caóticos idênticos apresentam, após determinado intervalo de tempo, comportamento temporal descorrelacionado, mesmo que tenham sido iniciados arbitrariamente próximos. Porém, adequadamente acoplados, podem se sincronizar e permanecer nesse estado enquanto evoluem segundo uma dinâmica caótica (Pecora et al., 1997).

O objetivo desse trabalho é o de explorar as possibilidades de se usar o sincronismo de sistemas caóticos como ferramenta na identificação de sistemas em regimes caóticos. Essas possibilidades vão desde novas ferramentas para a validação de modelos até novos e melhores métodos de identificação.

Existem diversas técnicas de identificação de sistemas. Na Seção 2 a abordagem tradicional para o problema é revisada. A sincronização de sistemas caóticos é abordada na Seção 3, enquanto que a aplicação da sincronização na identificação é apresentada na Seção 4. A Seção 5 conclui o presente texto.

2. Identificação de sistemas

Esta seção descreve resumidamente o método tradicional de identificação. O objetivo é introduzir a notação sobre o problema, familiarizar o leitor com o tema e apontar algumas deficiências do método.

A *identificação de sistemas* é o procedimento que permite obter, a partir de dados experimentais, modelos matemáticos para sistemas quaisquer. O produto da identificação é, pois, um modelo matemático que representa (bem ou mal) um determinado sistema. A essa forma de obtenção de modelos se opõe a modelagem conceitual, que procura obter modelos a partir da descrição matemá-

tica dos fenômenos inerentes ao sistema (Ogata, 1993). A identificação se baseia nas relações de causa e efeito presentes nos dados coletados no sistema e não na descrição de fenômenos.

Porém, além dos dados, a identificação necessita que se escolha uma forma de representação para os modelos que se desejam obter.

No caso de identificação de sistemas caóticos, os modelos devem necessariamente ser dinâmicos e não lineares. Entre as representações para modelos dinâmicos não lineares e de tempo discreto pode-se citar as redes MLP (*Multilayer Perceptron*) (Elsner, 1992), redes RBF's (*Radial Basis Function*) (Broomhead e Lowe, 1988), lógica nebulosa (Takagi e Sugeno, 1985), redes híbridas como a *Neo Fuzzy Neuron* (Yamakwa et al., 1992), modelos NARMAX polinomiais (Leontaritis e Billings, 1985a,b), entre muitas outras. Cada uma dessas representações têm características distintas em relação à complexidade, flexibilidade, facilidade de treinamento, capacidade de generalização, custo computacional e outros quesitos.

Essas representações, no entanto, apresentam um ponto em comum: elas são todas paramétricas. Ou seja, essas representações possuem parâmetros numéricos que precisam ser ajustados. São justamente esses parâmetros que conferem a essas estruturas a sua flexibilidade, tão fundamental na identificação de sistemas.

A principal etapa da identificação consiste no ajuste dos parâmetros da representação escolhida de forma a obter um modelo para o sistema em estudo que o represente da melhor maneira possível. Esse ajuste é feito com base nos dados disponíveis sobre o sistema.

Para isso, o primeiro passo é ter os dados disponíveis. Assim, um ensaio no sistema de interesse é projetado e executado. Os dados são, então, coletados tomando-se cuidado para que eles estejam amostrados corretamente e contenham informação suficiente. Maiores detalhes podem ser obtidos em Freitas (2001) e em Aguirre (2000).

O passo seguinte é a estimação dos parâmetros do modelo. Essa etapa é normalmente vista como a solução de um problema de otimização cujas variáveis são os parâmetros do modelo e a função custo a otimizar é alguma função dos dados de identificação e do modelo identificado. Porém, essa não é a única alternativa. O problema de estimação dos parâmetros pode ser visto como um problema de sincronização entre dois sistemas, no qual se deseja sincronizar o sistema original com o modelo a ser identificado. Nesse ponto se situa a principal contribuição deste trabalho. A estimação dos parâmetros é o coração da identificação de sistemas e, como será visto adiante, a maneira tradicional de estimação quando aplicada a sistemas dinâmicos complexos apresenta algumas dificuldades.

Seja, por exemplo, o caso de se identificar um modelo dinâmico discreto não linear com uma entrada e uma saída. Após a amostragem, o conjunto de dados de identificação será composto de duas séries temporais: a entrada $u(k)$ e a saída $y(k)$, para $k = 1, 2, \ldots, N$. Uma maneira geral de representar o sistema a ser identificado é

$$\begin{aligned} y(k) = f[&y(k-1), y(k-2), \ldots, \\ &y(k-n_y), u(k-1), u(k-2), \ldots, u(k-n_u)] \,, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo n_y o número de atrasos em y ou ordem dinâmica do modelo, n_u o número de atrasos em u e $f(\cdot)$ uma função não linear com $q = n_y + n_u$entradas. A essência do processo de identificação nesse caso é aproximar $f(\cdot)$ por uma outra função $\hat{f}(\cdot)$, usando uma representação qualquer como redes neurais MLP ou redes RBF's, por exemplo (Aguirre, 2000). Essa aproximação é feita baseada nos dados coletados.

Um ponto interessante é que $f(\cdot)$, na equação (1), depende apenas do valor do seu vetor de entrada no instante k

$$\begin{aligned} \phi(k) = [&y(k-1), y(k-2), \ldots, \\ &y(k-n_y), u(k-1), u(k-2), \ldots, \\ &u(k-n_u)]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \quad (2)$$

e não de valores anteriores desse vetor. O comportamento dinâmico é obtido através da forma de construção do vetor $\phi(k)$, que utiliza valores atrasados de y e de u. Assim, $f(\cdot)$ pode ser qualquer função para o algoritmo de estimação de parâmetros. Não há diferença, a partir desse ponto, entre identificação de sistemas e ajuste de curva. Procura-se uma função $\hat{f}(\cdot)$ que melhor represente os dados. Se esses dados vêem de um sistema dinâmico ou de uma tabela de calibração de um instrumento não faz diferença para o método de estimação. Essa é uma possível explicação para o desempenho questionável de métodos de identificação tradicionais quando aplicados em alguns sistemas complexos (Letellier et al., 1998). Talvez um método de identificação que utilize mais explicitamente o fato de que o sistema a ser identificado ser um sistema dinâmico poderia ter melhor desempenho. É nesse sentido que o presente trabalho pretende contribuir.

Usualmente, para se obter a função aproximada $\hat{f}(\cdot)$, é utilizado o erro de predição de um passo à frente ou resíduo

$$\xi(k) = y(k) - \hat{f}[\phi(k)] \quad (3)$$

que é avaliado nos pontos $k = 1 + n_y, 2 + n_y, \ldots, N$ gerando o vetor de resíduos

$$\boldsymbol{\xi} = [\xi(1)\ \xi(2)\ \cdots\ \xi(N)]^{\mathrm{T}} \,.$$

Uma função de custo qualquer $J(\boldsymbol{\xi})$ é então definida sobre esse vetor. A função de custo normalmente utilizada é o somatório dos erros quadráticos

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} \,. \quad (4)$$

Essa função depende de $\hat{f}(\cdot)$. Assim, pode-se usar uma técnica otimização para procurar a função ótima $\hat{f}^*(\cdot)$.

Um ponto importante é que a função ótima depende da função de erro escolhida e essa escolha não é única.

A estratégia mostrada acima apresenta um problema: *a função de erro não é necessariamente a mais adequada*. Dificilmente é desejado de um modelo empírico que ele seja apenas um bom preditor um passo à frente. Normalmente espera-se que ele reproduza de forma mais fiel possível o comportamento dinâmico do sistema identificado. Porém, usando a função de erro acima, o processo de otimização garante apenas uma boa predição um passo à frente. Essa é uma possível razão para as dificuldades encontradas normalmente na identificação de sistemas não lineares mais complexos como os sistemas caóticos.

Por exemplo, boa parte dos modelos identificados para sistemas caóticos não é globalmente estável, ou seja, o resultado de sua simulação tende para infinito para condições iniciais na região dos dados de identificação. Essa situação foi observada em Aguirre et al. (2001) e em Freitas (2001).

Uma alternativa para esse problema é a utilização de outras funções de erro mais adequadas. Por exemplo, em Timmer et al. (2000) é usada como função de erro o erro de simulação livre, levando a resultados bastante interessantes. Porém essa abordagem leva a um problema de otimização não linear, sujeito a restrições, bastante complexo, mesmo que a representação usada seja linear nos parâmetros.

Finalmente, após a estimação de parâmetros, resta ainda uma última etapa. Nada garante que o modelo identificado represente *adequadamente* o sistema. É necessário então que o modelo seja *validado*. Na validação a qualidade do modelo é aferida, *levando-se em conta o uso a que ele se destina*.

3. Sincronização de sistemas caóticos

Os sistemas caóticos (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994) são um tópico de estudo relativamente recente. Um dos primeiros trabalhos na área foi Lorenz (1963). Um sistema caótico, apesar de determinístico, apresenta um comportamento dinâmico muito complexo, aperiódico. Depois que a atenção da comunidade científica foi atraída para o assunto, o caos foi observado em uma grande variedade de sistemas Gleick (1991).

Uma das características principais dos sistemas caóticos é a chamada *sensibilidade às condições iniciais*: a trajetória de um sistema caótico iniciada em um determinado ponto diverge, em média exponencialmente, de uma outra trajetória iniciada em um ponto próximo, porém distinto do anterior.

Sincronização de sistemas caóticos é por sua vez um campo de estudos ainda mais recente, porém bastante dinâmico. Uma referência muito conhecida da área é Pecora e Carroll (1990).

Essa possibilidade de sincronismo é uma das características mais interessantes dos sistemas caóticos. É também, de certa forma, surpreendente, pois, devido à sensibilidade às condições iniciais, dois sistemas caóticos idênticos e independentes, partindo de condições iniciais próximas, apresentam soluções que se distanciam inicialmente a uma taxa exponencial e terminam gerando trajetórias não correlacionadas.

Na literatura, a questão da sincronização foi abordada de várias formas, levando a resultados diferentes. Nesta Seção, essas diferentes abordagens serão revistas.

3.1. Sincronização de osciladores mestre-escravo

Uma das formas de se estudar a sincronização de sistemas caóticos é usando o formalismo mestre-escravo como feito em Pecora e Carroll (1990).

Seja o sistema mestre um oscilador autônomo não linear, possivelmente caótico, representado por

$$\dot{u} = f(u) \; . \tag{5}$$

Esse sistema é então dividido arbitrariamente em dois subsistemas v e w de forma que

$$u = [v, w]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

e

$$\begin{array}{c} \dot{v} = g(v, w) \\ \dot{w} = h(v, w) \end{array} \; , \tag{7}$$

sendo $v = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}$, $g = (f_1(u), \ldots, f_m(u))^{\mathrm{T}}$, $w = (u_{m+1}, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$ e $h = (f_{m+1}(u), \ldots, f_n(u))^{\mathrm{T}}$.

Em seguida, o subsistema w é copiado, identicamente, gerando o subsistema w', chamado sistema escravo. Este último é então acrescentado ao sistema original gerando

$$\begin{array}{c} \dot{v} = g(v, w) \\ \dot{w} = h(v, w) \\ \dot{w'} = h(v, w') \end{array} \; . \tag{8}$$

Ao final, tem-se um sistema *mestre* composto por um oscilador não linear autônomo e uma cópia idêntica de um subsistema do sistema mestre, o sistema *escravo*. Nessa estrutura, o subsistema escravo se comporta como se fosse um outro oscilador, idêntico ao mestre, do qual algumas variáveis de estado foram substituídas pelas correspondentes do sistema mestre. Essas variáveis são a informação que é transmitida do mestre para o escravo. Essa forma de acoplamento mestre-escravo é chamada *substituição completa* (Pecora et al., 1997).

Dependendo do sistema em questão e da escolha do subsistema, a substituição completa leva à sincronização do subsistema escravo com o subsistema correspondente do mestre. Por *sincronização* entende-se a diferença entre os estados correspondentes tender a zero quando o tempo tende ao infinito, ou seja

$$\lim_{t \to \infty} \Delta w = \lim_{t \to \infty} w - w' = 0 \; . \tag{9}$$

A ocorrência ou não de sincronização entre sistemas idênticos, dado um certo par mestre escravo, depende de alguns fatores. Primeiramente, deve existir um hiperplano de sincronização que seja invariante segundo a dinâmica.

Uma outra condição necessária para para a sincronização é que esse hiperplano seja localmente estável, ou seja, pequenas pertubações para fora do hiperplano devem ser amortecidas. É importante ressaltar que essa condição é apenas de necessidade, e não de suficiência.

O acoplamento via substituição completa é apenas uma das muitas formas possíveis para se obter a sincronização. Mesmo dentro da abordagem mestre-escravo existem outras formas de acoplamento que levam a melhores resultados.

Outro ponto importante é que a abordagem mestre-escravo é concentrada no sistema completo formado pelo mestre e pelo escravo, ao invés de vê-los separadamente. A possibilidade de sincronismo é vista então como uma característica desse sistema completo. Assim, essa abordagem não é muito adequada para a síntese de sistemas sincronizantes.

3.2. Sincronização como um problema de controle

Uma outra forma de se abordar o problema de sincronização é sob a óptica de sistemas de controle (Nijmeijer, 2001). Enquanto a abordagem mestre-escravo é mais focada no sistema mestre, o objetivo da abordagem via controle é projetar o acoplamento entre os sistemas mestre e escravo de forma que ocorra o sincronismo. Neste caso, tanto o oscilador mestre quanto o escravo são dados *a priori*.

Seja o oscilador mestre dado por[1]

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} . \tag{10}$$

e o oscilador escravo dado por

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, u) \ , \tag{11}$$

sendo u o vetor de controle. O problema de sincronismo se torna agora projetar a lei de controle de forma que o erro de sincronização $e = x - \hat{x}$ tenha o ponto fixo trivial globalmente estável. Uma possibilidade é a lei de controle ser função da observação y e do estado do estimador $\hat{x}$

$$u = \alpha(\hat{x}, y) \ . \tag{12}$$

Resolver o problema de projetar a lei de controle $\alpha(\cdot)$ pode ser difícil ou mesmo impossível em alguns casos. Deve-se notar, entretanto, que a teoria de controle é naturalmente mais adequada para tratar de casos em que o sistema escravo já foi dado e não há liberdade para alterá-lo.

Além de fornecer um outro ponto de vista para o problema de sincronização, a teoria de controle linear e, principalmente, a não linear (Nijmeijer e van der Schaft, 1990) fornece ferramentas para a análise do problema.

Porém, como desvantagem, a abordagem via teoria de controle não linear (teoria de controle geométrica (Nijmeijer e van der Schaft, 1990)) utiliza uma matemática um tanto complexa.

4. Sincronização como ferramenta de identificação

A sincronização de sistemas dinâmicos pode ser usada como ferramenta na identificação de sistemas. A motivação para isso é simples. Normalmente o que se deseja de um modelo identificado é que ele tenha um comportamento dinâmico o mais próximo possível do sistema real. Idealmente, o modelo em simulação livre deveria reproduzir exatamente o comportamento observado no mundo real. Isso não é possível para sistemas caóticos devido justamente a eles serem caóticos e apresentarem sensibilidade às condições iniciais. Porém, os sistemas caóticos podem sincronizar se adequadamente acoplados. Dessa forma é possível, via sincronização do modelo com o sistema original, obter informações que auxiliem o processo de identificação.

Uma das possibilidades nesse sentido é utilizar a sincronização como uma *ferramenta de validação*. A idéia básica é que se um modelo é bom e o sistema original admite sincronização por substituição completa, então o modelo deveria poder sincronizar com o sistema real. Se o modelo não sincronizar espera-se que seja devido a sua baixa qualidade e se descarta o modelo. Em Pecora e Carroll (1990), uma aproximação um tanto grosseira é utilizada para argumentar que se houver uma diferença de parâmetros o erro de sincronização, em vez de decair exponencialmente, estabilizaria em algum valor não nulo. Os autores ainda acrescentam que, apesar da rudimentaridade da análise empregada, os sistemas por eles testados se comportavam da forma prevista. Logo, uma medida de qualidade dos modelos seria o erro de sincronização destes com o sistema real.

Um método de validação baseado em sincronização foi então implementado para validar modelos identificados para o sistema de Lorenz. O primeiro passo foi identificar o sistema. O tipo de modelo escolhido foi o contínuo polinomial. Os dados usados foram gerados a partir de simulação. A identificação foi feita usando o processo descrito em Freitas (2001). Foram gerados 14 modelos. A principal diferença entre eles é o número de termos usados na identificação. Foram identificados modelos de 2 a 15 termos por função[2].

[1] Neste ponto, a notação foi trocada pela usada normalmente na literatura de controle.

[2] Foram empregados modelos multivariáveis. Para maiores

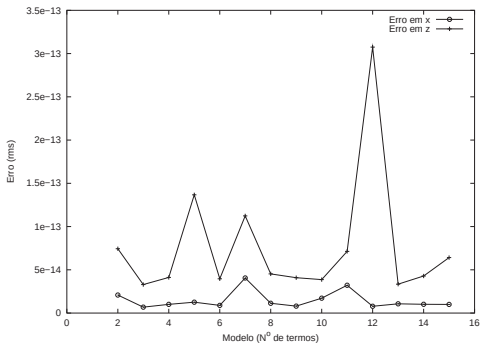

Figura 1: Erro de sincronização nas variáveis x e z para os modelos identificados.

Tabela 1: Comparação entre o erro de sincronização do melhor modelo não perturbado e perturbado com um fator aditivo de 10^{-8} em um de seus parâmetros. Valores RMS.

Modelo	Erro em x	Erro em z
Não perturbado	$6,87 \times 10^{-15}$	$3,30 \times 10^{-14}$
Perturbado	$1,21 \times 10^{-08}$	$5,64 \times 10^{-08}$

Para avaliar o desempenho dos modelos, os mesmos foram sincronizados com o sistema original usando a variável y como sinal transmitido no método da substituição completa. A seguir, o erro de sincronização nas variáveis restantes foi computado em valores RMS (*root mean square*) separadamente para cada variável. O resultado pode ser visto na figura 1.

O modelo que apresentou menor erro nas duas variáveis foi o de três termos por função. Assim ele seria o escolhido por esse critério de validação. Esse não é um bom exemplo pois não há grande diferença no desempenho dos modelos. Na verdade os modelos são bastante parecidos. O maior desvio padrão entre os parâmetros estimados correspondentes é da ordem de 10^{-13}. Isso é uma conseqüência do método usado na identificação. Para esse sistema, o método empregado leva a modelos cujos parâmetros estão certos a menos de diferenças ínfimas, menores que 10^{-12} em parâmetros da ordem de 10^{0}.

No entanto, a sincronização fornece um critério objetivo para a escolha de um modelo mais adequado.

Um outro ponto interessante é que o *erro de sincronização é muito sensível a variações de parâmetros*. Para ilustrar esse ponto, o erro de sincronização para o melhor modelo foi comparado com o o erro desse mesmo modelo com um parâmetro perturbado por um fator aditivo de 10^{-8}. O resultado é mostrado na Tabela 1.

Nota-se claramente que uma perturbação muito pequena leva a uma grande perturbação relativa no erro de sincronização. Dessa forma, a sincronização por substituição completa pode ser usada na validação de modelos identificados para sistemas caóticos.

detalhes ver Freitas (2001). O texto pode ser obtido em www.cpdee.ufmg.br/¯MACSIN

5. Conclusão

Neste trabalho o assunto do uso da sincronização de sistemas caóticos na identificação de sistemas foi abordado. Mostrou-se que a sincronização pode oferecer uma ferramenta útil para a identificação: um método de validação baseado em sincronização.

Porém, faz-se necessário ainda um estudo aprofundado do método de validação aqui apresentado, bem como de outras formas nas quais a sincronização de sistemas pudesse auxiliar a identificação.

Agradecimentos

Trabalho financiado com recursos da FAPESP. Os autores agradecem ao apoio do Laboratório de Integração e Testes (LIT).

Referências

Aguirre, L. A. (2000). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG.

Aguirre, L. A., Freitas, U. S., Letellier, C., e Maquet, J. (2001). Structure selection techniques applied to continuous-time nonlinear models. *Physica D*, 158(2):1–18.

Baptista, M. S., Macau, E. E., e Grebogi, C. (2003). Conditions for efficient chaos-based communication. *Chaos*, 13(1):145–150.

Broomhead, D. S. e Lowe, D. (1988). Multivariable functional interpolation and adaptive networks. *Complex Systems*, 2:321–355.

Elsner, J. B. (1992). Predicting time series using a neural network as a method of distinguishing chaos from noise. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:843–850.

Fiedler-Ferrara, N. e Prado, C. P. C. (1994). *Caos: uma introdução*. Editora Edgard Blücher LTDA.

Freitas, U. S. (2001). Uso de técnicas de detecção de estrutura na identificação de modelos dinâmicos não lineares contínuos polinomiais. Master's thesis, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.

Gleick, J. (1991). *Caos: a criação de uma nova ciência*. Editora Campus, quarta edition.

Leontaritis, I. J. e Billings, S. A. (1985a). Input-output parametric models for nonlinear systems part I: deterministic nonlinear systems. *Int. J. Control*, 41(2):303–328.

Leontaritis, I. J. e Billings, S. A. (1985b). Input-output parametric models for nonlinear systems part II: stochastic nonlinear systems. *Int. J. Control*, 41(2):329–344.

Letellier, C., Maquet, J., Le Sceller, L., Gouesbet, G., e Aguirre, L. A. (1998). On the non-equivalence of observables in phase-space reconstructions from recorded time series. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 31:7913–7927.

Ljung, L. (1987). *System Identification, Theory for the User*. Prentice Hall, New Jersey.

Lorenz, E. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:282–293.

Nijmeijer, H. (2001). A dynamical control view on synchronization. *Physica D*, 154:219–228.

Nijmeijer, H. e van der Schaft, A. J. (1990). *Nonlinear Dynamical Control systems*. Springer-Verlag.

Ogata, K. (1993). *Engenharia de Controle Moderno*. Segunda Edição, Prentice Hall do Brasil, São Paulo.

Pecora, L. M. e Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Letters*, 64(8):821–824.

Pecora, L. M., Carroll, T. L., Johnson, G. A., Mar, D. J., e Heagy, J. F. (1997). Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, 7(4):520–542.

Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, 15(1):116–132.

Timmer, J., Rust, H., Horbelt, W., e Voss, H. U. (2000). Parametric, nonparametric and parametric modelling of a chaotic circuit time series. *Physics Letters* A, 274:123–134.

Yamakwa, T., Uchino, E., Miki, T., e Kusanagi, T. (1992). A neo fuzzy neuron and its aplications to system identification and preditions to system behavior. In *Proceedings of the II IIZUKA*, pages 477–483, Japan.