*Anais do I WORCAP, INPE, São José dos Campos, 25 de Outubro de 2001, p. 51 - 53*

# Determinação de Órbitas Fixas e Periódicas em Sistemas de Equações Diferenciais

Bruno A. F. Roth*,1, Elbert E. N. Macau**,2 e Maisa O. Terra**,2

(1) Área de Computação Científica e P.A.D
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC)
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)
(2) Laboratório de Integração e Testes (LIT)
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)
(*)Mestrado, e-mail:roth@lit.inpe.br ; (**)Orientadores

Resumo

Este trabalho explora o método proposto por *Schmelcher e Diakonos* de determinação de órbitas fixas e periódicas instáveis em mapas. Uma adaptação foi aplicada ao método determinar pontos fixos e periódicos em equações diferenciais. Resultados foram gerados com o sistema de equações diferenciais de *Lorenz*. Por fim um análise da aplicabilidade e funcionalidade método adaptado de *Schmelcher e Diakonos* no sistema de equações diferenciais de *Lorenz* conclui este trabalho.

*Palavras-Chave:* caos, órbitas periódicas instáveis, sistema dinâmico não-linear.

## Introdução

Em sistemas dinâmicos em regime de evolução caótica, o movimento é organizado em torno de órbitas periódicas instáveis. Estas órbitas, que estão densamente presentes no invariante caótico, capturam o esqueleto topológico do movimento, no sentido de que toda órbita pode ser aproximadamente reconstituída através das órbitas periódicas instáveis de curto período. Podemos calcular quantidades que caracterizam o movimento caótico, tais como dimensões, expoentes de Lyapunov, entropia topológica, seguindo as órbitas periódicas instáveis do sistema [1] [4]. Em [4] uma expansão em série em torno das órbitas periódicas instáveis de curto período foi introduzida e aplicada para avaliação de grandezas representativas da evolução caótica. As expansões de curvatura [4] do somatório das órbita periódicas [6] [2] [9] são uma ferramenta igualmente poderosa para a avaliação das ressonâncias nos sistemas caóticos Hamiltonianos [5].

O presente trabalho tem por objetivo explorar o método proposto por *Schmelcher e Diakonos* quanto a sua eficiência e aplicabilidade na determinação de órbitas fixas e periódicas da *Seção de Poincaré* de sistemas dinâmicos definidos por um fluxo.

No estudo de sistemas, freqüentemente há interesse em se levantar grandezas estatísticas de longo prazo, tais como, médias, expoentes de Lyapunov, dimensões e outros invariantes, como a *medida natural* e densidade de *probabilidade*. Estas quantidades estatísticas são fisicamente significativas somente quando a medida que está sendo considerada é gerada por uma trajetória típica no espaço da fase. Esta *medida* é chamada *medida natural* [3] se é invariante em relação a evolução da dinâmica. Conseqüentemente, é de importância fundamental compreender e caracterizar a medida natural em termos de quantidades dinamicamente fundamentais. Não há nada mais fundamental do que expressar a medida natural em termos das órbitas periódicas embutidas no conjunto caótico invariante [7].

O trabalho esta dividido em mais quatro seções: definição do método de *Schmelcher e Diakonos* para mapas; adaptação do método de *Schmelcher e Diakonos* para equações diferenciais; resultados com sistema de equações diferenciais de *Lorenz* e finalmente as conclusões finais.

## Método apresentado por Schmelcher e Diakonos para mapas

A idéia básica deste método [8] consiste em partir do sistema dinâmico discreto N-dimensional em regime caótico e através de transformações lineares apropriadas, obter um sistema dinâmico transformado, tal que todos pontos fixos deste novo sistema sejam os mesmos do sistema original e com as mesmas localizações no espaço de fase. Entretanto as transformações lineares, apropriadamente escolhidas, mudam a estabilidade dos pontos fixos e órbitas periódicas, de tal forma que ao invés de instáveis, como no sistema original, passam a ser estáveis na nova dinâmica, sendo diferentes transformações lineares responsáveis pela estabilização de diferentes conjuntos de pontos.

Vamos considerar um sistema dinâmico discreto completamente caótico N-dimensional dado por $U : \vec{r}_i + 1 = \vec{f}(\vec{r}_i)$.

| ***Dimensão*** | ***Matrizes** $C_k$* |
|---|---|
| ***1D*** | $C_1 = 1$ $C_2 = -1$ |
| ***2D*** | $C_1 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ $C_2 = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ $C_3 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$ $C_4 = \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$ $C_5 = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ $C_6 = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$ $C_7 = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$ $C_8 = \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ |

Tabela 1: Matrizes $C_k$ para uma e duas dimensões.

Por $U$ ser completamente caótico, ele apresenta apenas pontos fixos instáveis. Note que órbitas periódicas de período $p$ correspondem a termos $f^p(\vec{r}_i)$ em lugar de $f(\vec{r}_i)$.

O objetivo proposto é o de construir a partir de $U : \vec{r}_i + 1 = \vec{f}(\vec{r}_i)$, um sistema dinâmico $S_k$ diferente contendo os mesmos pontos fixos (PF) de $U$. Utilizando a transformação $L_k : U \rightarrow S_k$,, os PF que eram instáveis passam a estáveis.

Devido a estabilidade dos pontos fixos no sistema dissipativo $S_k$, toda trajetória de $S_k$ depois de algumas iterações dirige-se para um ponto fixo $\vec{r}_F$, ou sai dos limites do invariante caótico do sistema original $U$. Por construção $\vec{r}_F$ também é um ponto fixo do sistema $U$. Para cumprir a correspondência um a um entre os pontos fixos de $U$ e $S_k$, a transformação $L_k$ deve em geral ser linear. Portanto:

$$S_k : \vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \Lambda_k(\vec{f}(\vec{r}_i) - \vec{r}_i), \tag{1}$$

onde $\Lambda_k$ é uma matriz $N$x$N$ constante inversível. Reescrevemos $\Lambda_k = \lambda C_k$, tal que $\lambda$ seja um parâmetro real, $1 \gg \lambda > 0$, e $C_k$ matrizes ortogonais cujos elementos são apenas $\{-1, 0, 1\}$. O número destas matrizes é dado por $2^n n!$ e são listadas para $n = 1$ e $n = 2$ na Tab. (). A definição na Eq. (1) satisfaz a correspondência um para um entre os pontos fixos de $U$ e $S_k$: Se $\vec{r}_i = \vec{r}_F$ é um ponto fixo de $U$, o termo a direita da Eq. (1) desaparece e portanto $\vec{r}_F$ também é ponto fixo de $S_k$; por sua vez, se $\vec{r}_F$ é ponto fixo de $S_k$, e $\Lambda_k$ não é singular, o termo a direita da Eq. (1) deve ser igual a 0 para $\vec{r}_i = \vec{r}_F$, então $\vec{r}_F$ é também ponto fixo de $U$. Assim, as leis dinâmicas $U$ e $S_k$ possuem pontos fixos em posições idênticas no espaço.

O método acima de detecção de pontos periódicos instáveis para um sistema dinâmico caótico envolve o parâmetro $\lambda$ que deve ser suficientemente pequeno a fim transformar pontos fixos instáveis, do sistema caótico original, para estáveis através da transformações $L_k$. Quanto maior for o período a ser encontrado menor deverá ser o parâmetro $\lambda$. Entretanto, o parâmetro não pode ser muito pequeno, pois a convergência na iteração das leis dinâmicas transformadas será muito lenta.

Há uma maneira simples de evitar o ajuste do parâmetro $\lambda$, tomando-se o limite $\lambda \rightarrow 0$ o que nos leva a $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)}{\lambda} = \dot{\vec{r}} = C_k(\vec{f}(\vec{r}_i) - \vec{r}_i)$. Esta equação representa a formulação contínua da transformação do sistema dinâmico discreto Eq. (1) e sua solução não dependem do parâmetro $\lambda$, podendo ser facilmente resolvido usando um integrador de equações diferenciais ordinárias (ex: Runge-Kutta [10]).

Na seção seguinte as adaptações para determinar as pontos fixos e periódicos em equações diferenciais são demonstradas.

**Adaptação do método apresentado por Schmelcher e Diakonos para equações diferenciais**

Para a determinação de pontos fixos e periódicos em equações diferenciais utilizamos o método proposto por *Schmelcher e Diakonos*. Foi necessário adaptar o método afim de determinar os pontos fixos e periódicos na *Seção de Poincaré*.

A principal adaptação no algoritmo foi a definição de $\vec{f}(\vec{r}_i)$ Eq.(1)como sendo a próxima iteração quando o fluxo cruza a *Seção de Poincaré* no mesmo sentido.

**Resultados com o sistema de equações diferencias de *Lorenz***

Para determinar os pontos fixos e periódicos na *Seção de Poincaré* devemos determinar localização do seção visualizando o gráfico do invariante caótico obtido pelas equações diferenciais de *Lorenz*.

Os pontos fixos e periódicos do sistema de equações de Lorenz foram determinados utilizando a *Seção de Poincaré* em $X - -15$ como podemos observar na Fig. (1).

Iniciamos a procura por pontos periódicos na *Seção de Poincaré* determinando uma grade de condições iniciais definida pelos limites $(-15, -30, 0.0)$ e $(-15, 30, 50)$. Integramos cada condição inicial até que cruze a seção definida por $X = -15$ na mesma direção. Afim de mover as condições inicias para posições válidas na seção, isto é, posições onde a seção será visitada.

Definimos os parâmetros do método de *Schmelcher e Diakonos* como segue: Número de condições iniciais: $500$; número máximo de iterações do método para cada condição inicial: $500$; valor do parâmetro $\lambda$: $1\text{x}10^{-3}$; número de Matrizes: 8 e parâmetro de parada de iteração do método *Schmelcher e Diakonos*: $1\text{x}10^{-3}$.

Com as configurações acima foram detectadas alguns pontos de periodo 1, isto é, cruza uma vez no mesmo sentido a Seção de Poincaré, como podemos observar nos gráficos da Fig. (2).

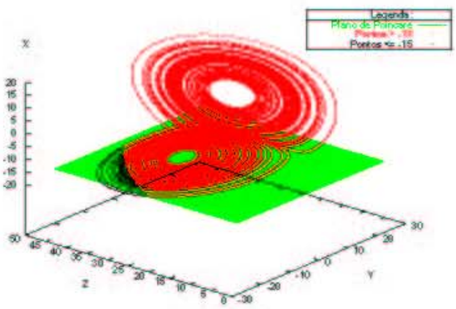

Figura 1: *Seção de Poincaré* $X = -15$ no sistema de equações diferenciais de *Lorenz*.

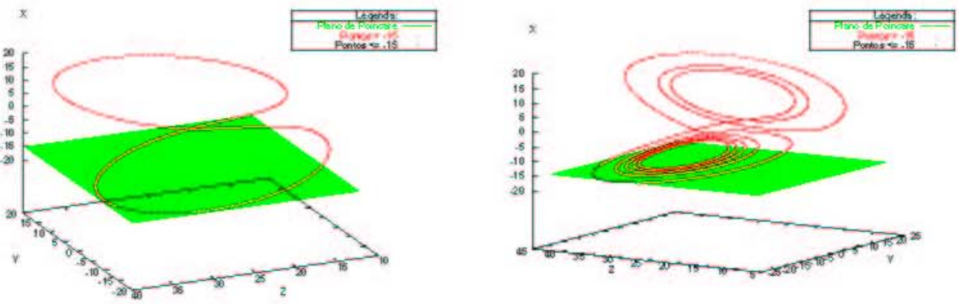

Figura 2: Ponto de período 1 da *Seção de Poincaré* $X = -15$ aplicado no sistema de equações diferenciais de *Lorenz*. $PF_A \approx (-15.0, -18.468, 32.150)$- (Esquerda). $PF_B \approx (-15.0, -21.277, 28.727)$-(Direita)

**Conclusão**

Podemos verificar que para este sistema de equações diferenciais de *Lorenz*, o método adaptado determinou com precisão os pontos de período 1, como podemos observar no gráficos da Fig.(2).

A escolha da posição da *Seção de Poincaré* exerce influência no período da órbita detectada. Por exemplo na Fig(2-(Direita)) se a *Seção de Poincaré* estivesse na coordenada $X = -5$ a resposta seria de período 5 e não de 1.

Órbitas de períodos um pouco maiores, período 2 e 3 também foram testados para este sistema de equações diferenciais (*Lorenz)*, validando funcionalidade deste método.

**Referências**


[1] Auerbach, D., Cvitanovic, P., Eckmann, J., Gunaratne G., Procaccia I., Physical Review Letters, 58:( 2387-2389), 1987.

[2] Balian, R., Bloch, C, Ann. Physical (NY), 85:(514), 1974.

[3] Bowen, R., Ruelle, D. Invent. Math, v. 79 p. 181, 1975.

[4] Cvitanovic, P, Physical Review Letters, 61:(2729), 1988.

[5] Cvitanovic-II, P., Eckhardt B., Physical Review Letters, 63:(823-826), 1988.

[6] Gutzwiller, M. C., Jornal Math Physical, 12:( 343), 1971.

[7] Lai, Y.; Nagai, Y., Grebogi C. Physical Review Letters, 79:( 649-652), 1997.

[8] Schmelcher, P., Diakonos, F. K, Physical Review E, 57:(2739-2746), 1998.

[9] Miller, W. M.; Bloch, C., Ann. Physical (NY), 30:( 77), 1975.

[10] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. 2.ed. Cambridge, Press Syndicate, 1992.