

## Redes Neurais Artificiais em Problema Inverso de Condução de Calor: Recuperação da Condição de Contorno

Shiguemori, Elcio Hideiti <sup>\*1</sup>; Velho, Haroldo Fraga de Campos <sup>\*\*2</sup>; Silva, José Demísio Simões <sup>\*\*1</sup>

(1) Área de Inteligência Artificial

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

(2) Área de Computação Científica

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

(\*) Mestrado, Bolsa FAPESP, e-mail: [elcio@nucleo.inpe.br](mailto:elcio@nucleo.inpe.br)

(\*\*) Orientadores, e-mail: [<demisio>](mailto:demisio@lac.inpe.br) [<haroldo>](mailto:haroldo@lac.inpe.br)

### Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo da utilização das Redes Neurais Artificiais Perceptron de Camadas Múltiplas com Aprendizagem por Retropropagação do Erro e Funções de Base Radial, na solução do Problema Inverso de Condução de Calor na recuperação da condição de contorno. Dois conjuntos de treinamento são utilizados na fase de aprendizagem das redes, um contendo funções similares e outro contendo funções não similares. A capacidade de generalização das redes treinadas com os diferentes conjuntos é comparada. Outro experimento testa a capacidade de generalização com a adição de ruído.

Palavras-Chave: *neural networks, inverse problems, heat conduction*

### Introdução

Um problema direto consiste em determinar efeitos a partir de causas conhecidas, enquanto que um problema inverso consiste em determinar causas a partir de efeitos desejados ou imprecisamente observados. O Problema Inverso de Condução de Calor (PICC) na recuperação da condição de contorno é um problema mal-posto, onde sua solução é instável com a presença de ruído nos dados observados. A utilização de Redes Neurais Artificiais na solução do PICC vem sendo feita tanto na recuperação da condição inicial [3][5], quanto na recuperação da condição de contorno [4][6]. Neste trabalho foram implementadas as Redes Perceptron de Camadas Múltiplas (RPCM) com aprendizagem por retropropagação do erro e Funções de Base Radial (RFBR). Os dados para o treinamento são importantes para o desempenho das RNA's na inversão do problema. Quanto maior e mais diversificados forem os dados, maior será a capacidade de generalização da rede. Para essa análise foram gerados 2 conjuntos de treinamento, um contendo funções similares e outro contendo funções não similares. Foi adicionado 5% de ruído em dados sintéticos para estudar o desempenho da inversão por Redes Neurais Artificiais.

### O Problema Direto

O problema direto consiste na condução de calor numa placa unidimensional, governado pela seguinte equação de difusão:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

com as condições de contorno em  $x=L$ ,  $x=0$  e condição inicial, dadas respectivamente pelas seguintes equações:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t),$$
$$T(x,0) = f(x).$$

A variável  $x$  representa o espaço,  $t$  o tempo,  $q(t)$  o fluxo de calor,  $f(x)$  a condição inicial e  $T(x,t)$  a evolução temporal da temperatura.

### Problema Inverso

O uso de abordagens por RNA's envolve duas fases, a de aprendizagem e a de ativação. Na primeira, os pesos e limiares existentes entre as conexões sinápticas são ajustados de forma a mapear o vetor de entrada para o vetor de saída, enquanto que na segunda fase, uma saída é obtida em resposta à entrada, com base nesses pesos e limiares [1]. As redes utilizadas neste trabalho têm aprendizado supervisionado, ou seja, os conjuntos de treinamento da rede são formados por pares de entrada-saída, sendo que para cada entrada é apresentada uma saída desejada correspondente.

A RPCM é composta por uma camada de entrada, uma ou mais camadas escondidas e uma camada de saída. É uma rede do tipo feed-forward e utiliza um algoritmo de retropropagação do erro na fase de aprendizado. A RFBR é composta somente por uma camada escondida e diferentemente da maioria das redes

de múltiplas camadas, utiliza funções de base radial como função de ativação. Em ambas as redes variam-se alguns parâmetros referentes à arquitetura e ao treinamento, como a quantidade de neurônios nas camadas escondidas, a taxa de aprendizagem e a função de ativação dos neurônios.

### Implementação e Resultados

Na fase de treinamento foram testados dois conjuntos de treinamento. Cada um contendo 500 funções diferentes, um contendo funções não-similares (figura-1a) e outro contendo funções similares (figura-1b). Os conjuntos de treinamento são compostos pelas entradas geradas pela solução do problema direto e pela saídas desejadas correspondentes. O problema direto é resolvido numericamente pelo método Avançado no Tempo e Centrado no Espaço [2] e a saída é a própria condição de contorno.

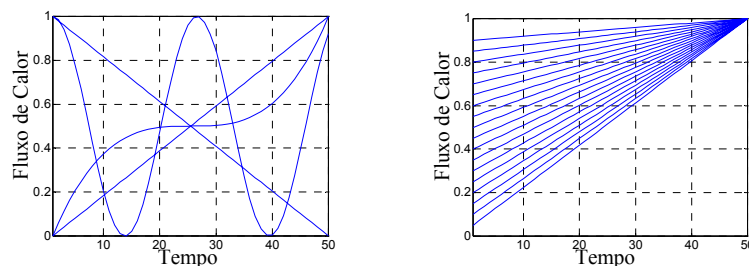


Figura 1 – (a) Funções Não Similares, (b) Funções Similares

Para ambos os conjuntos de treinamento a rede RPMC foi treinada com uma camada escondida contendo 20 neurônios e função de ativação sigmóide. No treinamento da RFBR, também para o treinamento de ambos os conjuntos, foram utilizados 30 neurônios e função de ativação gaussiana. Utilizou-se a mesma taxa de aprendizagem de 0,1 e o número máximo de épocas de treinamento, 10.000, para as duas redes. Uma época de treinamento corresponde a uma apresentação de todo o conjunto de treinamento à rede. E a Média do Erro Médio Quadrático (MEMQ) é observada no final de cada época de treinamento. A fase de treinamento termina quando for atingida a MEMQ objetiva ou um número máximo de épocas de treinamento. Na Tabela são apresentados alguns resultados obtidos durante essa fase.

| Rede | Tipo das Funções | No. de Épocas | MEMQ   |
|------|------------------|---------------|--------|
| RPMC | Não-Similares    | 10.000        | 0,0371 |
| RPMC | Similares        | 10.000        | 0,0147 |
| RFBR | Não-Similares    | 10.000        | 0,0278 |
| RFBR | Similares        | 5.348         | 0,0115 |

Tabela 1- Resultado do Treinamento

Pode-se observar que tanto para as funções não-similares e similares, o treinamento da RFBR foi um pouco melhor que a RPMC. E em ambas as redes houve um treinamento melhor com os dados similares.

Na figura 2 são apresentadas inversões obtidas pela ativação da rede neural, na figura-2a são obtidas pela RPMC e na figura-2b pela RFBR (dados sem ruído). Deve-se observar que o perfil de temperatura não está presente no conjunto de treinamento, teste da capacidade de generalização. A RPMC apresentou erro de 0,00932 e de 0,01333, respectivamente para o conjunto contendo funções não-similares e similares. Enquanto que a RFBR apresentou erros de 0,00798 e de 0,00842.

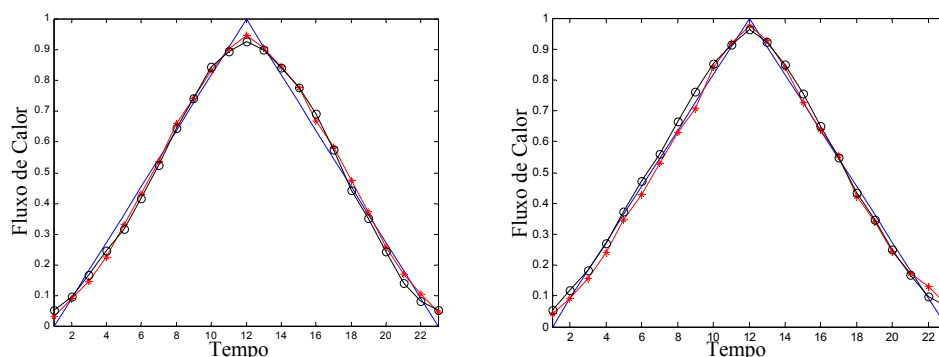


Figura 1 – (a) Inversão com a RPMC, (b) Inversão com a RFBR.

(—○—) Saída Desejada, (—○—) funções similares e (—\*—) funções não-similares

A recuperação da condição de contorno através das redes neurais, também apresentou bons resultados quando adicionado 5% de ruído. O ruído foi adicionado ao conjunto de treinamento e as redes novamente

treinadas. Utilizou-se os mesmos parâmetros de treinamento e as mesmas arquiteturas das redes. Os resultados obtidos com o treinamento são apresentados na tabela 2.

| Rede | Tipo das Funções | No. de Épocas | MEMQ   |
|------|------------------|---------------|--------|
| RPMC | Não-Similares    | 10.000        | 0,0538 |
| RPMC | Similares        | 10.000        | 0,0205 |
| RFBR | Não-Similares    | 10.000        | 0,0386 |
| RFBR | Similares        | 10.000        | 0,0139 |

Tabela 2 - Resultado do Treinamento com Dados Ruidosos

Novamente a MEMQ obtida com a RFBR foi menor que a obtida com a RPMC. E o treinamento do conjunto contendo funções similares apresentou um erro menor que o das não similares em ambas as redes. Para os mesmos perfis de temperatura apresentados na figura 1 a recuperação da condição de contorno é apresentada na figura 2.

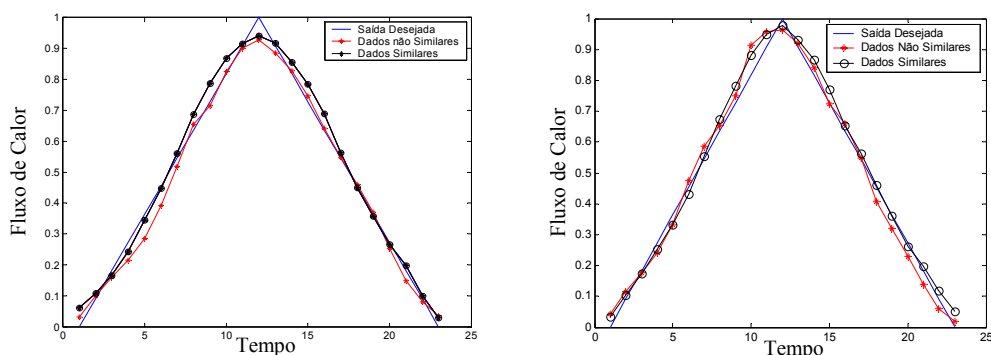


Figura 2 – Inversão com 5% de ruído (a) com a RPMC, (b) com a RFBR.

(—○—) Saída Desejada, (—○—) funções similares e (—\*—) funções não-similares

É observado que mesmo com 5% de perturbação nos dados observados, a rede tende a recuperar a condição de contorno. Foi obtido um erro de 0.01273 e 0.01331, respectivamente, com o conjunto contendo funções não-similares e similares, utilizando a RPMC. E de 0.01013 e 0.01166 utilizando a RFBR. **Conclusões**

Esse artigo apresenta a solução do problema inverso de condução de calor por redes neurais artificiais. A condição de contorno recuperada pelas duas redes neurais aproxima-se à desejada, mesmo com a presença de ruído nos dados observados. Foram estudados os desempenhos das redes treinadas com dois diferentes conjuntos de treinamento, um contendo funções similares e outro contendo funções não similares. A generalização foi melhor com a rede treinada com os conjuntos contendo funções não-similares, mesmo sendo obtido um erro maior na fase de aprendizagem.

### Referências

- [1] Haykin, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Mcmillan, New York, 1994.
- [2] Hoffman, J. D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill International Editions, 1993.
- [3] Issamoto, E.; Miki, F.T.; Luz J.I.; Silva J.D.; Oliveira P.B.; Velho H. F. C. An Inverse Initial Condition Problem in Heat Conductions: A Neural Network Approach. **In:** Brazilian Congress on Mechanical Engineering (COBEM), 22-26 November, 1999, Unicamp, Campinas (SP), Brasil, 238
- [4] Krejsa, J., Woodbury, K. A., Ratliff, J. D., Raudensky, M. *Inverse Problem in Engineering*, 7:197, 1999.
- [5] Mikki, F. T., Issamoto, E., Luz, J. I., Oliveira, P. P. B., Velho, H. F. C., Silva, J. D. S. A Neural Network Approach in a Backward Heat Conduction Problem. **In:** Congresso Brasileiro de Redes Neurais, 2-22 de Julho, ITA-CTA, São José dos Campos, Brasil, 019-024
- [6] Woodbury, K. A., "Neural Networks and Genetic Algorithms in the Solution of Inverse Problems". *Workshop on Novel Approaches for Inverse Problems*, November, 1998, São José dos Campos.