Anais do I WORCAP, INPE, São José dos Campos, 25 de Outubro de 2001, p. 109-111

O Problema de Corte e Sequenciamento de Padrões: uma Abordagem Integrada

Maria José Pinto[*, 1], Horacio Hideki Yanasse[**, 1]

(1) Área de Pesquisa Operacional
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

(*) Doutorado, Bolsa CAPES, e-mail: maju@lac.inpe.br; (**) Orientador

Resumo

Os problemas de corte de estoque e sequenciamento de padrões são oriundos de importantes aplicações práticas. Na literatura existente geralmente estes problemas são abordados de forma independente. Neste trabalho, pretendemos estudá-los de forma integrada. Formulamos matematicamente o problema integrado e pretendemos explorar a estrutura desta formulação para o desenvolvimento de um método para sua resolução. Com este estudo pretende-se contribuir para o avanço no estado da arte com respeito à resolução de problemas de corte e sequenciamento de forma integrada.

Palavras-Chave: Corte de Estoque Inteiro, Sequenciamento de Padrões, MOSP, MTSP.

Introdução

De um ponto de vista geral, o problema de corte de estoque consiste em cortar peças maiores (*objetos*), que estão disponíveis em estoque ou adquiridas de terceiros, para obtenção de peças menores (*itens*) em dimensões e quantidades pedidas (demanda). O objetivo do problema consiste em otimizar uma determinada função objetivo, por exemplo, custos da produção, desperdícios, etc. Na solução deste problema são obtidos, geralmente, os *padrões de corte* (como os objetos serão cortados) e a quantidade de vezes que cada padrão será cortado para atender toda a demanda.

Em algumas situações, associado ao problema de corte, podemos encontrar o chamado problema de sequenciamento de padrões, que consiste em determinar uma seqüência em que os padrões deverão ser cortados a fim de alcançar um objetivo específico como, por exemplo, minimizar o tempo máximo em que uma pilha se mantém aberta (MORP, do inglês *Minimization of Order Spread Problem*), minimizar o número de vezes em que o processamento de um determinado item é reiniciado, ou seja, o número de descontinuidades (MDP do inglês *Minimization of Discontinuities Problem*), determinar uma seqüência de padrões que minimize o número máximo de pilhas abertas durante o processo de corte (MOSP do inglês *Minimization of Open Stack Problem*), etc. No caso do MOSP, cada tamanho diferente de item a ser cortado, abre uma pilha nova que permanece aberta até que o último item daquele tamanho seja cortado. Algumas razões que justificam o interesse neste problema de sequenciamento são, por exemplo: problemas em manejar os itens produzidos, custos de estoque, restrições de espaço de armazenagem, etc.

Neste trabalho, estamos interessados em integrar dois problemas, o problema de corte e o problema de sequenciamento com limitação de pilhas abertas, que têm sido tratados, geralmente, de forma independente na literatura. Apresentamos uma formulação matemática global para o problema e nos propomos a realizar um estudo de métodos visando desenvolver um método adequado para sua resolução. De nosso conhecimento, não existem trabalhos na literatura propondo uma formulação matemática para o problema de corte integrado ao problema de sequenciamento e são poucos os trabalhos que consideram os dois problemas conjuntamente, o que motivou nossa pesquisa.

A Abordagem Integrada

No modelo matemático global de programação inteira sendo considerado no momento, o objetivo consiste em minimizar a quantidade de objetos a serem cortados, de forma a atender a demanda e satisfazer a restrição de limitação do número máximo de pilhas abertas durante a sua produção.

Formulação para o Problema Integrado

Considere:

N Número de padrões a serem processados;
M Número total de itens;
$\boldsymbol{c}_j$ Corresponde ao vetor de custos dos objetos;
$\boldsymbol{d}_i$ Corresponde ao vetor de demanda dos itens a serem produzidos;

α_{ij} Quantidade de itens do tipo *i* pertencentes ao padrão de corte *j*;
v_j Utilizado para relacionar as soluções do problema de corte e do problema de sequenciamento;
K Constante grande;
$\boldsymbol{A}_j$ Vetor $M \times 1$ de 1's e 0's que informa quais itens estão presentes no padrão de corte ou não, ou seja: $\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } \alpha_{ij} > 0 \text{ no padrão } \alpha_j; \\ 0, \text{ se } \alpha_{ij} = 0 \text{ no padrão } \alpha_j. \end{cases}$
n Instante imediatamente após o processamento do *n*-ésimo padrão;
C Representa a limitação no número máximo de pilhas abertas permitidas;
$\boldsymbol{e}$ Vetor auxiliar $1 \times M$ de 1's;
$\boldsymbol{x}_{jn}$ $\begin{cases} 1, \text{se o padrão } j \text{ é o } n\text{-ésimo padrão na seqüência;} \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$

$\boldsymbol{y}_j$ Representa o número de vezes que o objeto é cortado usando o padrão *j* (problema de corte);
$\boldsymbol{W}_n$ Vetor $M \times 1$ de 1's e 0's que fornece os itens sendo cortados na máquina em *n*, $n = 1, \ldots, N$;
$\boldsymbol{P}_n$ Vetor $M \times 1$ que contabiliza as trocas dos itens que estão sendo cortados na máquina de corte, ocorridas do instante *n* para o *n+1*;

Função objetivo

$$\min \ f(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{y}_j \qquad (1)$$

Restrições

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \boldsymbol{y}_j \geq \boldsymbol{d}_i \qquad i = 1, \ldots, M \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{P}_n \geq \boldsymbol{W}_{n+1} - \boldsymbol{W}_n \qquad n = 1, \ldots, N-1 \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{P}_n \geq \boldsymbol{0} \qquad n = 1, \ldots, N-1 \qquad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} \boldsymbol{e}\boldsymbol{P}_n \leq M - C \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{x}_{jn}\boldsymbol{A}_j + (v_j - 1)\boldsymbol{A}_j \leq \boldsymbol{W}_n \qquad j = 1, \ldots, N; \ n = 1, \ldots, N \qquad (6)$$

$$v_j \leq \boldsymbol{y}_j \qquad j = 1, \ldots, N \qquad (7)$$

$$\mathrm{K} v_j \geq \boldsymbol{y}_j \qquad j = 1, \ldots, N \qquad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}_{jn} = 1 \qquad j = 1, \ldots, N \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{x}_{jn} = 1 \qquad n = 1, \ldots, N \qquad (10)$$

$$v_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, \ldots, N \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{x}_{jn} \in \{0,1\} \qquad j = 1, \ldots, N; \ n = 1, \ldots, N \qquad (12)$$

$$\boldsymbol{y}_j \geq 0 \text{ e inteiro} \qquad j = 1, \ldots, N \qquad (13)$$

A função objetivo (1) minimiza a quantidade de objetos cortados, enquanto que as restrições (2) procuram atender a demanda de todos os itens. As restrições (3), juntamente com as restrições (4), indicam os itens novos introduzidos no processamento do *n*-ésimo padrão sequenciado. Observe que se *M*>*C*, um limitante inferior para o número de trocas de itens é *M-C*, pois cada um dos itens tem que ser cortado pelo menos uma vez. Desta forma, para que o sequenciamento dos padrões não abra mais do que *C* pilhas, acrescentamos as restrições (5). As restrições (6), (7), (8) e (11) relacionam a solução do problema de corte com a solução do problema de sequenciamento. Elas impõem a existência de uma pilha para cada item cortado no *n*-ésimo instante, caso o padrão *j* seja cortado.

As restrições (9), (10) e (12) impõem que todos os padrões sejam processados uma única vez em alguma ordem. As restrições (9) impõem que o padrão *j* deve ser processado em alguma ordem na seqüência, enquanto que as restrições (10) impõem que apenas um deles seja processado na n-ésima ordem na seqüência.

Proposta de resolução para o problema integrado

Observando-se o modelo proposto pode-se já identificar um primeiro problema que consiste do número grande de variáveis inteiras. Observa-se também que o uso desta abordagem é inviável para problemas práticos de dimensão mediana, uma vez que é necessário o conhecimento e a enumeração dos padrões de corte para o problema. Devido à complexidade do problema integrado (1)-(13), uma primeira idéia para sua resolução consiste em decompô-lo de modo que as restrições que ligam os dois problemas, (restrições (6), (7), (8) e (11)) sejam relaxadas. No caso, a restrição (8) passa a ser descrita como:

$$\boldsymbol{x}_{jn}\boldsymbol{A}_j \leq \boldsymbol{W}_n \qquad j = 1,\ldots, N;\ \ n = 1,\ldots, N$$

Feito o relaxamento, o problema de corte ficará constituído das restrições (2) e (13) juntamente com a função objetivo (1) e o problema de sequenciamento considerando o objetivo do MOSP e o restante das restrições, consiste exatamente da formulação proposta por Tang e Denardo [5] para o problema de minimização de troca de ferramentas (MTSP, do inglês *Minimization of the Number of Tool Switches Problem*) na qual nos baseamos.

O próximo passo consiste em resolver o problema de corte, onde os padrões e suas respectivas freqüências para atendimento da demanda dos itens, serão obtidos. Estes dados são então mandados para o problema de sequenciamento, cuja solução é sempre maior ou igual à M-C. Caso ocorra a igualdade, podemos garantir que a solução é ótima, pois será possível sequenciar os padrões onde no máximo C pilhas serão abertas, sendo atendidos tanto o objetivo do problema de corte quanto o de sequenciamento. Caso a solução do problema de sequenciamento seja maior que M-C, o objetivo do sequenciamento não poderá ser atendido e teremos que gerar outros padrões de corte. Assim, voltamos ao problema de corte e novos padrões são gerados sendo o processo reiniciado até se obter a solução ótima. O que dificulta esta proposta de resolução é o fato dos problemas isoladamente já serem complexos e de difícil resolução.

Para resolução do problema de corte, uma opção seria novamente relaxar a condição de integralidade das variáveis e utilizar o método de geração de colunas ([1], [2]) para obtenção dos padrões de corte, na medida do necessário, onde o objetivo de cortar o mínimo de objetos estará sendo atendido. Assim, não será necessário que os padrões de corte sejam conhecidos explicitamente desde o início do procedimento.

No caso do sequenciamento, não foram encontrados na literatura, trabalhos propondo a resolução deste problema de acordo com a formulação proposta, o que motiva também esta pesquisa. Tang e Denardo [5] utilizaram um código comercial para a resolução deste problema, não obtendo bons resultados. Com isto, eles propuseram a utilização de métodos heurísticos. Um primeiro passo em nossa pesquisa consistiu em utilizar o pacote Cplex 6.5 para avaliar as afirmações destes autores ao resolver o problema de sequenciamento de forma exata. Em nossos testes computacionais, o pacote Cplex conseguiu obter bons resultados para alguns exemplos, entretanto, à medida que consideramos problemas maiores (com relação à quantidade de itens e de padrões) ou mesmo outros exemplos, o tempo de resolução aumentou consideravelmente. Devido a este fato, procuramos uma outra forma de resolver o problema e dois métodos de resolução foram implementados. Um dos métodos que utiliza relaxação lagrangiana [3] não apresentou resultados satisfatórios e o método de Benders [4] apresentou-se inviável devido ao alto tempo computacional para obtenção da solução. Com o objetivo de acelerar o processo de resolução, introduziu-se uma modificação no método de Benders que, até o momento, tem mostrado ser uma boa opção de resolução para o problema de sequenciamento. Entretanto, os resultados analisados até agora não podem ser considerados conclusivos, sendo necessário ainda testes computacionais mais extensivos.

Referências

[1] Gilmore, P. C.; Gomory, R. *Operations Research*, 9: 848-859 (1961).
[2] Gilmore, P. C.; Gomory, R. *Operations Research*, 11: 863-888 (1963).
[3] Nemhauser, G. L.; Wolsey, L. A. *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, 1988.
[4] Shapiro, J.F. *Mathematical Programming Structures and Algorithms*, John Wiley & Sons, 1979.
[5] Tang, C. S.; Denardo, E. V. *Operations Research*, 36: 767-777 (1988).