

## Transição para Turbulência na Equação Kuramoto-Sivashinsky

Rempel, Erico Luiz<sup>\*1</sup>, Rosa, Reinaldo Roberto<sup>\*\*1</sup>,  
Chian, Abraham Chian-Long<sup>\*\*2</sup>, e Macau, Elbert Einstein Nerher<sup>\*\*3</sup>

- (1) Área de Computação Científica e PAD  
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC)  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)  
(2) Divisão de Geofísica Espacial (DGE)  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)  
(3) Laboratório de Integração e Testes (LIT)  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

(\*)Doutorado, Bolsa FAPESP, e-mail: erico@nucleo.inpe.br; (\*\*)Orientadores

### Resumo

Neste trabalho investigamos a transição para turbulência em plasmas usando um sistema espacialmente estendido modelado pela equação Kuramoto-Sivashinsky, com representação de alta dimensão no espaço de fase. A análise do modelo é feita com base em técnicas de sistemas dinâmicos.

*Palavras-Chave:* Caos em Sistemas Extensos, Equação Kuramoto-Sivashinsky, Turbulência em Plasmas, Métodos Numéricos

Sistemas dinâmicos de alta dimensão podem fornecer uma ferramenta importante para o estudo da transição entre caos de baixa dimensão e turbulência plenamente desenvolvida. A evolução de sistemas que apresentam turbulência é geralmente descrita por equações diferenciais parciais (EDPs). Tais equações podem ser reduzidas a um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) por meio de métodos de expansão da solução em séries finitas (e. g. método Galerkin (Gottlieb e Orszag, 1977)). Com base nesta aproximação, é possível construir uma ponte entre a descrição tradicional em termos estatísticos (espectros de potência, funções de distribuição de probabilidade, e quantificadores de quebra de simetria (Rosa et al., 1999)) e o comportamento dinâmico no espaço de fase (órbitas periódicas instáveis, variedades, bacias de atração). Neste trabalho estudamos a transição de regimes periódicos para turbulentos na equação Kuramoto-Sivashinsky, levando em consideração que pode-se definir caos em sistemas estensos como sendo uma forma de turbulência fraca (Bohr et al., 1998).

A equação Kuramoto-Sivashinsky (KS) foi derivada inicialmente por LaQuey et al. (1975) como um modelo para descrever a saturação não-linear de uma onda de deriva associada com as oscilações de partículas de plasma aprisionadas em potenciais criados pelo campo magnético não-homogêneo de um tokamak. A equação KS foi obtida também em outros contextos, como uma aproximação para a evolução da fase da amplitude complexa da equação Ginzburg-Landau (Kuramoto e Tsuzuki, 1976), e como um modelo de instabilidade hidrodinâmica em frentes de chamas (Sivashinsky, 1977).

A equação Kuramoto-Sivashinsky unidimensional pode ser escrita como (LaQuey, 1975)

$$\partial_t u = -\partial_x^2 u - \nu \partial_x^4 u - \partial_x u^2, \quad (1)$$

onde  $\nu$  é o parâmetro responsável pelo amortecimento dos modos de curto comprimento de onda. Em termos de plasma confinado, este parâmetro está relacionado ao amortecimento Landau. Os modos de comprimento de onda longo são linearmente instáveis, devido ao termo  $-\partial_x^2 u$ . O acoplamento entre os modos linearmente estáveis e instáveis, por meio do termo não-linear, garante a saturação da instabilidade.

Primeiramente resolvemos a eq. 1 pelo método Galerkin. Expandindo a solução  $u(x, t)$  em uma série de Fourier e substituindo na eq. 1 obtém-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias para os coeficientes de Fourier

$$\dot{b}_k(t) = (k^2 - \nu k^4)b_k(t) - ik \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m(t)b_{k-m}(t), \quad (2)$$

Note que  $u(x, t)$  está sujeito a condições de contorno periódicas  $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$ . Como  $u(x, t)$  é real, não é necessário integrar os coeficientes  $b_k$  para  $k < 0$ , uma vez que  $b_k = b_{-k}^*$ . É possível simplificar o problema considerando apenas funções ímpares, fazendo  $b = -1/2ia_k$ , onde os valores  $a_k$  são reais. Isto elimina os termos cosseno da série de Fourier.

Por uma análise de estabilidade linear da equação 2 verifica-se que modos com comprimento de onda  $|k| < 1/\sqrt{\nu}$  são linearmente instáveis, e os demais modos são estáveis. Para verificar numericamente a estabilidade dos modos, pode-se usar a média espectral  $\sqrt{\langle N^2 \rangle}$ , introduzida por Thyagaraja (1979). A quantidade  $\sqrt{\langle N^2 \rangle}$  é uma medida da energia propagada, sendo proporcional ao número de modos ativos. A Tabela 1 mostra os valores para o número de modos linearmente instáveis, obtidos analítica e numericamente para diferentes regimes. Para  $\nu = 0.0304$ , o sistema exibe um comportamento espaço-temporalmente periódico. Para  $\nu = 0.0292$ , o sistema é caótico no tempo, mas ordenado no espaço. Para  $\nu = 0.0105$ , o sistema é fortemente caótico e possui maior irregularidade espacial. Foram utilizados 64 modos de Fourier na simulação. Para valores menores do parâmetro de dissipação, a tendência é que haja transferência de energia para mais modos.

$\nu$	$\nu^{-1/2}$	$\max(\sqrt{\langle N^2 \rangle})$
0.0304	5.7	5.3
0.0292	5.8	5.6
0.0105	9.8	9.1

Tabela 1: Comparação entre o número máximo de modos linearmente instáveis obtidos analiticamente e numericamente.

Com o intuito de validar as soluções numéricas obtidas, a eq. KS foi resolvida por um método de diferenças finitas. As derivadas espaciais foram aproximadas por diferenças finitas centradas de segunda ordem. Para a integração no tempo, foi utilizado um método de Runge-Kutta de quarta ordem e passo variado. O mesmo integrador foi utilizado no método Galerkin. Os resultados obtidos mostram que ambos os métodos foram eficazes na integração da eq. KS para vários valores de  $\nu$ . No entanto, apesar de ser mais rápido, o método de diferenças finitas não foi capaz de obter soluções corretas para funções ímpares como condição inicial, com a grade espacial utilizada ( $\Delta x = 0.05$ ). A evolução espaço-temporal de uma função ímpar deve obedecer a relação  $u(x, t) = -u(-x, t)$ , o que não ocorreu no método de diferenças finitas. O método espectral não apresentou este problema porque a derivada espacial é resolvida analiticamente, sendo fácil cancelar os termos cosseno da série de Fourier. Para os resultados seguintes foi utilizado o método Galerkin com um truncamento de  $N = 16$  modos, que se mostrou suficiente para representar a dinâmica não-linear do sistema para os valores de  $\nu$  dados.

A visualização da dinâmica do sistema pode ser simplificada por meio de um mapa de Poincaré (Alligood et al., 1996). O plano de Poincaré (N-1)dimensional escolhido foi definido por  $a_1 = 0$ . Os pontos de Poincaré são obtidos sempre que o fluxo corta o plano no sentido  $\dot{a}_1 > 0$ . O diagrama de bifurcação mostrado na Figura 1 foi construído variando o parâmetro de dissipação e exibindo os valores do modo  $a_6$  para 250 pontos de Poincaré da órbita, após ser descartado um tempo transiente.

A Fig. 1 mostra a evolução de um atrator de período 3, criado em  $\nu \sim 0.029925$ . A órbita sofre uma série de duplicações de período, até ser gerado um atrator caótico. No ponto indicado por BC na Fig. 1, o atrator caótico se expande abruptamente. Este fenômeno denominado de crise interior (Alligood et al., 1996) resulta em um aumento descontínuo no grau de caoticidade do sistema. A ferramenta padrão para a medida de caos na evolução temporal são os expoentes de Lyapunov. Os valores dos expoentes de Lyapunov foram obtidos pelos algoritmos de Benettin et al. (1976) e Wolf et al. (1985), e concordam até a segunda casa decimal. No momento logo anterior à crise ( $\nu = 0.02992021$ ), o valor do expoente de Lyapunov máximo é  $\lambda \sim 0.35$ . Após a crise, em ( $\nu = 0.02992006$ ),  $\lambda \sim 0.63$ . Para  $\nu = 0.0105$ , o valor encontrado foi  $\lambda \sim 9.95$ , representando uma caoticidade muito maior neste regime

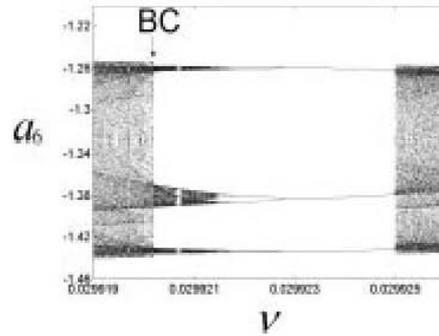


Fig. 1: Diagrama de Bifurcação.

em que mais modos possuem participação importante na dinâmica do sistema (ver Tabela 1). Para obter uma medida de desordem espacial foi calculado o comprimento de correlação  $\xi$ , obtido a partir da largura média do espectro de potência (Morris et al., 1996). Para  $\nu = 0.02992021$  e  $\nu = 0.02992006$ , obtivemos o valor aproximado  $\xi \sim 0.67$ . Isto indica que não houve aumento considerável de desordem espacial após a crise interior. Já para  $\nu = 0.0105$ , foi obtido o valor  $\xi \sim 0.37$ . Uma menor correlação espacial sugere maior irregularidade, uma vez que  $\xi$  indica o comprimento além do qual os valores são basicamente não-correlacionados.

Neste trabalho analisamos a turbulência na equação Kuramoto-Sivashinsky por meio de uma abordagem baseada em sistemas dinâmicos. Uma vez que estamos trabalhando no espaço de Fourier, é possível retornar ao espaço real por meio da transformada inversa de Fourier. A análise no espaço real deverá ser efetuada em trabalhos futuros.

**Agradecimentos:** Este trabalho contou com o apoio da FAPESP.

### Referências

- Alligood, K.T.; Sauer, T.D.; Yorke, J.A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1996.
- Benettin, G.; Galgani, L.; Strelcyn, J.-M. *Phys. Rev. A*, 14, 2338:2345 (1976).
- Bohr, T.; Jensen, M. H.; Paladin, G.; Vulpiani, A. *Dynamical Systems Approach to Turbulence*, Cambridge University Press, 1998.
- Gottlieb, D.; Orszag, S.A. *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- Kuramoto, Y.; Tsuzuki, T. *Prog. Theor. Phys.*, 55, 356:369 (1976).
- LaQuey, R.E.; Mahajan, S.M.; Rutherford, P.H.; Tang, W.M. *Phys. Rev. Lett.*, 34, 391:394 (1975).
- Morris, S.W. et al., *Physica D*, 97, 164:179 (1996).
- Rosa, R.R.; Sharma, S.; Valdivia, J.A. *Int. J. Mod. Phys. C*, 10, 147:163 (1999).
- Sivashinsky, G.I. *Acta Astron.*, 4, 1177:1206 (1977).
- Thyagaraja, A. *Phys. Fluids*, 22, 2093:2096, 1979.
- Wolf, A.; Swift, J.B.; Swinney, H.L.; Vastano, J.A. *Physica D*, 16, 285:317 (1985).