Estimação de Parâmetros em Sistemas Não Lineares Usando Controle Geométrico

Ubiratan Santos Freitas
Elbert Einstein Nehrer Macau
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada (LAC)
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)
ubiratan@lac.inpe.br elbert@lac.inpe.br

Abstract

We present a new parameter estimation procedure for nonlinear systems. Such technique is based on synchronization between the model and the system whose the unknown parameter is wanted. Synchronization is accomplished by controlling the model to make it follow the system. We use geometric nonlinear control techniques to design the control system. As an example, the proposed procedure is applied to estimate a parameter of the Lorenz's system.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um novo procedimento de estimação de parâmetros para sistemas não lineares. Tal procedimento é baseado na sincronização entre o modelo e o sistema cujo parâmetro se deseja estimar. O sincronismo é obtido controlando o modelo de forma a fazê-lo seguir uma referência gerada pelo sistema em questão e o controlador é desenvolvido usando técnicas de controle não linear geométrico. A técnica é aplicada, como exemplo, na estimação de um parâmetro do sistema de Lorenz.

1. Introdução

Os modelos matemáticos são uma ferramenta de capital importância em ciência e tecnologia. Muitas vezes, os modelos para alguns sistemas não podem ser derivados a partir de primeiros princípios. Nesses casos, pode-se usar ferramentas de identificação de sistemas (Aguirre, 2000). As técnicas de identificação de sistemas permitem obter modelos matemáticos a partir de dados coletados no sistema de interesse.

A estimação de parâmetros é uma parte essencial da identificação de sistemas. Existem diversas formas de se estimar parâmetros para sistemas dinâmicos, dependendo da representação escolhida para o modelo (Aguirre, 2000). Por exemplo, no caso de modelos lineares discretos, pode-se utilizar o método dos mínimos quadrados. Já no caso das redes neurais artificiais do tipo *perceptron* multicamadas utilizam-se algoritmos como o *backpropagation* ou o *Levemberg-Marquardt*, entre outros.

No entanto, apesar das suas diferenças, boa parte desses métodos de estimação de parâmetros pode ser vista como um processo de otimização no qual os parâmetros são ajustados de forma a minimizar uma função de erro, que depende dos dados e dos parâmetros.

Neste trabalho, uma estratégia diferente é apresentada. A estimação de parâmetros é feita através da *sincronização* entre o modelo e o sistema a ser identificado. Sincronização de sistemas caóticos é um tópico de pesquisa bastante ativo, com um grande volume de publicações. Dentre as diversas formas possíveis de se abordar o problema da sincronização, a maneira adotada neste trabalho é via controle (Nijmeijer, 2001; Tôrres, 2001). Ou seja, a sincronização de sistemas caóticos é vista como um problema de controle no qual um oscilador caótico mestre gera a referência para um outro oscilador, o escravo. O acoplamento dos dois osciladores é feito via uma lei de controle que atua no parâmetro a ser estimado. Dessa forma, a estimação do parâmetro é um subproduto da sincronização. O projeto do controlador é feito usando técnicas de controle não linear geométrico (Nijmeijer e van der Schaft, 1990; Isidori, 1995; Slotine e Li, 1991).

Uma das vantagens da técnica aqui mostrada é que ela garante que o modelo obtido exibe o mesmo comportamento temporal do sistema original, pois a estimação é obtida fazendo com que o modelo siga uma trajetória do sistema. Existem outros métodos que também garantem isso, como por exemplo (Timmer et al., 2000) e (Jaeger e Kantz, 1996). Tais métodos usam técnicas de otimização não linear para minimizar o erro entre a trajetória produzida pelo modelo e aquela gerada pelo sistema original. No entanto, esses problemas de otimização podem se tornar bastante complexos sendo inclusive sujeitos a problemas com mínimos locais.

A técnica aqui apresentada, no entanto, ainda se encontra em desenvolvimento. No momento, ela necessita do conhecimento de *todo* o vetor de estados do sistema a modelar e a influência de ruído não foi avaliada.

Este texto está organizado da seguinte forma. A seção 2 introduz o procedimento de estimação. Na seção 3, são apresentadas, de forma sucinta, algumas definições da teoria de controle geométrico necessárias para o projeto do controlador usado na a estimação. O processo de estimação é descrito em forma de exemplo na seção 4. Finalmente, a seção 5 apresenta as conclusões do trabalho.

2. Procedimento de estimação

O procedimento de estimação aqui apresentado permite a estimação de um parâmetro desconhecido do sistema original. A extensão para problemas de mais de um parâmetro se encontra em elaboração.

Suponha que o sistema a ser identificado seja representado por

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = f(\boldsymbol{x}_1) + g(\boldsymbol{x}_1)p \ , \tag{1}$$

sendo $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, f e g campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}$ o parâmetro que deseja estimar.

O modelo é idêntico a (1), com a diferença que o parâmetro, no modelo, é tratado como uma entrada de controle

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = f(\boldsymbol{x}_2) + g(\boldsymbol{x}_2)u \ . \tag{2}$$

O procedimento de estimação consiste em projetar e implementar um controlador que, atuando em u, sincronize o modelo com o sistema original (1). Para tanto, empregam-se os conceitos da teoria de controle geométrico não linear. A seguir, o sistema a ser identificado é usado como referência para o modelo.

3. Algumas definições da teoria de controle geométrico

Nesta Seção introduz-se de maneira simplificada alguns dos conceitos de geometria diferencial necessários ao projeto um sistema de controle não linear com entrada escalar. Esse assunto é apresentado de forma rigorosa em (Nijmeijer e van der Schaft, 1990) e em (Isidori, 1995). Em (Slotine e Li, 1991) pode-se encontrar uma abordagem mais introdutória.

A principal idéia do controle geométrico é a *linearização via realimentação*. Nela, um sistema de controle não linear dado por

$$\dot{\boldsymbol{x}} = h(\boldsymbol{x}, u) \tag{3}$$

é transformado, via a mudança de coordenadas

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\boldsymbol{x}} & = & \Phi(\boldsymbol{x}) \\ \tilde{u} & = & \Psi(\boldsymbol{x}, u) \end{array} \tag{4}$$

no sistema

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = A\tilde{\boldsymbol{x}} + B\tilde{u} \ . \tag{5}$$

Essa abordagem é diferente da linearização do sistema em torno de um ponto de operação, procedimento normalmente empregado em problemas não lineares. O sistema transformado (5) é o próprio sistema original, mas em um outro sistema de coordenadas. Por outro lado, a linearização em torno de um ponto de operação é uma aproximação do sistema real no mesmo espaço de coordenadas.

As transformações (4) são inversíveis e diferenciáveis por definição. Mais precisamente são *difeomorfismos*. Uma função $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo se e somente se ela é suave e sua inversa Φ^{-1} existe e é suave. O difeomorfismo funciona como uma mudança de coordenadas para um sistema dinâmico não linear. Um difeomorfismo não precisa estar definido em todo o $\mathbb{R}^n$. É comum ter difeomorfismos válidos somente em uma região aberta Ω de $\mathbb{R}^n$. Tais difeomorfismos são chamados *locais* e os válidos em todo o espaço, *globais*.

A mudança de coordenadas 4 transforma trajetórias do sistema original biunivocamente em trajetórias de (5). Isso permite resolver o problema de controle no espaço de (5) usando a teoria de sistemas lineares e depois usar as transformações inversas para voltar ao espaço inicial.

A teoria de controle geométrico lida com as questões de quando essas transformações existem e como encontrá-las. Para isso lança mão de ferramentas da geometria diferencial.

No texto que se segue, em geral, existe a restrição de suavidade sobre as funções. Diz-se que uma função é suave quando ela é infinitamente derivável (C^∞). No entanto, em muitos casos, essa restrição pode ser relaxada para apenas um certo número se derivadas contínuas, ou seja, C^q, com q suficientemente grande.

Um conceito importante é a *derivada de Lie* de uma função escalar suave h com respeito a um campo vetorial suave f, denotada por $\mathrm{L}_f h$. Ela é uma função escalar definida como o produto interno do gradiente de h pelo campo vetorial f. Ou seja, é a derivada direcional de h na direção de f.

A ferramenta de capital importância para a análise e síntese dos sistemas de controle é o *colchete de Lie*. É uma operação em dois campos vetoriais que produz um terceiro campo vetorial. O colchete de Lie dos campos vetoriais suaves f e g é denotado por $[f, g]$ e pode ser calculado segundo

$$[f, g] = \nabla g \, f - \nabla f \, g \ . \tag{6}$$

Uma forma alternativa de representar o colchete de Lie de f e g é $\mathrm{ad}_f g$.

Conforme já mencionado, o objetivo da linearização por realimentação é transformar um sistema não linear genérico (3) em um sistema linear controlável através de mudanças de coordenadas da forma (4). Nesta seção, aborda-se o problema restrito a sistemas com uma entrada apenas e do tipo *afim*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})u \ , \tag{7}$$

sendo $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ campos vetoriais suaves em $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}$ o vetor de estados e u o sinal de entrada.

A forma (7) é na verdade bastante genérica e descreve uma ampla classe de sistemas. A maior restrição é o fato de ter somente uma entrada.

Diz-se que um sistema da forma (7) é *linearizável por realimentação*, ou controlável, se existir em uma região aberta Ω em $\mathbb{R}^n$ um difeomorfismo $\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi(\boldsymbol{x})$ e uma realimentação não linear $\tilde{u} = \Psi(\boldsymbol{x}, u)$ que transforme o sistema (7) em um sistema linear

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = A\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}\tilde{u} \,, \tag{8}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Essa forma do sistema (8), chamada forma de *Brunowski*, é especialmente interessante neste caso, pois facilita o projeto de um controlador linear capaz de seguir uma referência conhecida.

Um sistema da forma (7) é controlável se existe uma região aberta Ω em $\mathbb{R}^n$ onde:

- os campos vetoriais $\{g, \mathrm{ad}_f g, \ldots, \mathrm{ad}_f^{n-1} g\}$ sejam linearmente independentes e
- o conjunto $\{g, \mathrm{ad}_f g, \ldots, \mathrm{ad}_f^{n-2} g\}$ seja *involutivo*.

A primeira condição é um análogo da condição de controlabilidade para sistemas lineares. A segunda condição está ligada à existência do difeomorfismo $\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi(\boldsymbol{x})$.

A independência linear de campos vetoriais é semelhante àquela dos vetores. Um conjunto de m campos vetoriais é independente se a única solução para

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\boldsymbol{x}) f_i = 0$$

em termos das funções escalares α_i é $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Um conjunto de campos vetoriais é involutivo se o colchete de Lie de quaisquer dois elementos seus forma um conjunto linearmente dependente com os demais campos vetoriais.

Nem sempre essas condições são satisfeitas em todo o espaço. Neste caso, o controlador é válido somente em uma região aberta do espaço de estados. Uma vez verificado se as condições de controlabilidade foram satisfeitas, procede-se à síntese do controlador.

O primeiro passo é obter a transformação $\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi(\boldsymbol{x})$. Ela é dada por

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \phi(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{L}_f \phi(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \mathrm{L}_f^{n-1} \phi(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{9}$$

e a função $\phi(\cdot)$ é uma solução para o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \mathrm{L}_g \phi(\boldsymbol{x}) & = & 0 \\ \mathrm{L}_g \mathrm{L}_f \phi(\boldsymbol{x}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^{n-2} \phi(\boldsymbol{x}) & = & 0 \\ \mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^{n-1} \phi(\boldsymbol{x}) & \neq & 0 \,. \end{cases} \tag{10}$$

A outra etapa é a função de realimentação $u = \Psi^{-1}(\boldsymbol{x}, \tilde{u})$. Ela é dada por

$$\Psi^{-1}(\boldsymbol{x}, \tilde{u}) = \frac{\tilde{u} - \alpha(\boldsymbol{x})}{\beta(\boldsymbol{x})} \,, \tag{11}$$

sendo

$$\alpha(\boldsymbol{x}) = \mathrm{L}_f^n \phi(\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

e

$$\beta(\boldsymbol{x}) = \mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^{n-1} \phi(\boldsymbol{x}) \,. \tag{13}$$

4. Exemplo de aplicação — o sistema de Lorenz

Nesta seção apresenta-se um exemplo de aplicação que ilustra como a estratégia de identificação baseada em controle e sincronismo de caos funciona.

Suponha que o sistema a ser identificado seja o sistema de Lorenz (Lorenz, 1963)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \,, \\ \dot{y}_1 = r x_1 - y_1 - x_1 z_1 \,, \\ \dot{z}_1 = -b z_1 + x_1 y_1 \,. \end{cases} \tag{14}$$

Suponha ainda que os parâmetros σ e r sejam conhecidos, bem como as equações (14) e que o único parâmetro desconhecido seja b. Mais ainda, que todas as variáveis de estado estão disponíveis para coleta e não há ruído. Isto é uma situação bastante idealizada, que provavelmente nunca ocorrerá na prática, mas serve como prova de conceito.

O modelo a ser identificado é idêntico a (14), exceto pelo parâmetro b que no modelo é substituído pela entrada de controle u

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) \,, \\ \dot{y}_2 = r x_2 - y_2 - x_2 z_2 \,, \\ \dot{z}_2 = -u z_2 + x_2 y_2 \,. \end{cases} \tag{15}$$

O objetivo é estimar o parâmetro b via controle e sincronismo. Para isso, é necessário um controlador que seja capaz de, computando a entrada u, sincronizar o modelo (15) ao sistema original (14). Por sincronização entende-se que a diferença entre os estados do modelo (15) e do sistema (14) seja zero no limite $t \to \infty$

O primeiro passo é projetar o controlador, o que foi feito usando a teoria de controle geométrico. Inicialmente, o sistema a ser controlado deve ser colocado na forma (7)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) u \,. \tag{16}$$

Para o sistema (15), tem-se[1]

$$f(\boldsymbol{x}) = [\sigma(y-x),\ \ rx - y - xz,\ \ xy]^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

e

$$g(\boldsymbol{x}) = [0,\ \ 0,\ \ -z]^{\mathrm{T}}\ . \tag{18}$$

A seguir, a controlabilidade do sistema deve ser avaliada. Para isso, é necessário testar duas condições. Primeiro, os campos vetoriais $\{g, \mathrm{ad}_f g, \mathrm{ad}_f^2 g\}$ devem ser linearmente independentes e, segundo, o conjunto $\{g, \mathrm{ad}_f g\}$ deve ser involutivo. Essas condições devem ser verificadas em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, onde o controlador é válido.

O colchete de Lie $[f, g]$ é dado pela equação (6) que, aplicada a (17) e a (18), leva a

$$\begin{aligned}
[f,g] &= \nabla g\, f - \nabla f\, g \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma(y-x) \\ rx - y - xz \\ xy \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ -xy \end{bmatrix}\ .
\end{aligned} \tag{19}$$

Usando-a novamente obtém-se $\mathrm{ad}_f^2 g$

$$\begin{aligned}
[f,[f,g]] &= \nabla \mathrm{ad}_f g\, f - \nabla f\, \mathrm{ad}_f g \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & -x \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma(y-x) \\ rx - y - xz \\ xy \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ -xy \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma xz \\ (\sigma-1)xz - \sigma yz - 2x^2 y \\ (\sigma+1)xy + 2x^2 z - \sigma y^2 - rx^2 \end{bmatrix}\ .
\end{aligned} \tag{20}$$

Os campos vetoriais g, $\mathrm{ad}_f g$ e $\mathrm{ad}_f^2 g$ são linearmente independentes se $\sigma xz \neq 0$. Isso pode ser verificado notando que g tem os dois primeiros componentes nulos, $[f, g]$ tem o primeiro componente nulo e $\mathrm{ad}_f^2 g$ não tem componentes nulos, se $\sigma xz \neq 0$. Ao contrário, se $\sigma xz = 0$, os campos g, $\mathrm{ad}_f g$ e $\mathrm{ad}_f^2 g$ formam um conjunto linearmente dependente.

Para testar se o conjunto $\{g, \mathrm{ad}_f g\}$ é involutivo é suficiente verificar se $\big[g, \mathrm{ad}_f g\big]$ pode ser escrito como uma combinação linear de g e $\mathrm{ad}_f g$. Usando as equações (18) e (19) tem-se

$$\begin{aligned}
\big[g, \mathrm{ad}_f g\big] &= \\
&\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & -x \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -z \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ -xy \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ xz \\ -xy \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{21}$$

que, por sua vez, é igual a

$$\big[g, \mathrm{ad}_f g\big] = c_1(\boldsymbol{x}) g + c_2(\boldsymbol{x}) \mathrm{ad}_f g\ , \tag{22}$$

sendo $c_2(\boldsymbol{x}) = -1$ e

$$c_1(\boldsymbol{x}) = \frac{2xy}{z}\ .$$

Dessa forma, o conjunto $\{g, \mathrm{ad}_f g\}$ é involutivo para todo o $\mathbb{R}^3$. Assim, conclui-se que o sistema da equação (15) é *controlável* e que o subconjunto do espaço de estados no qual isso ocorre é o próprio $\mathbb{R}^3$ menos os planos $x = 0$ e $z = 0$. Essa é uma conclusão importante. O sistema de Lorenz, com o parâmetro b visto como uma entrada, pode ser controlado de forma a seguir, com algumas restrições, qualquer trajetória. Particularmente, é possível controlá-lo de forma a seguir *outro* sistema de Lorenz, ou seja, o sistema a ser identificado.

Outro ponto interessante é que a condição $\sigma xz \neq 0$ pode ser derivada a partir de uma análise do próprio sistema de Lorenz. Se $\sigma = 0$ a primeira equação do sistema se torna $\dot{x} = 0$, o que quer dizer que a variável de estado x é constante e, portanto, desacoplada do resto do sistema, tornando-o não controlável. Se $z = 0$ a última equação do sistema, e o sistema como um todo, fica independente da ação de controle. Por fim, se $x = 0$, a segunda equação fica independente da última. Isso faz com que não seja possível levar informações da última equação para as outras duas, tornando o sistema não controlável.

A seguir, deve-se projetar o controlador. O difeomorfismo que transforma o espaço de estados é dado por

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi(\boldsymbol{x}) = [\phi(\boldsymbol{x}),\ \ \mathrm{L}_f \phi(\boldsymbol{x}),\ \ \mathrm{L}_f^2 \phi(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\ . \tag{23}$$

A função ϕ é obtida pela solução do seguinte sistema equações diferenciais parciais

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \phi}{\partial z} z = 0 \\
\dfrac{\partial \phi}{\partial y} xz + \dfrac{\partial \phi}{\partial z} xy = 0 \\
-\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \sigma xz + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \big[(\sigma-1)xz - \sigma yz - 2x^2 y\big] \\
\quad + \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \big[(\sigma+1)xy + 2x^2 z - \sigma y^2 - rx^2\big] \neq 0\ .
\end{cases} \tag{24}$$

[1] Os subscritos foram retirados por motivo de clareza.

Uma solução simples é

$$\phi(\boldsymbol{x}) = [x, \;\; 0, \;\; 0]^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

que leva ao difeomorfismo (global)

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x \\ \sigma(y-x) \\ (\sigma r + \sigma^2)x - (\sigma + \sigma^2)y - \sigma x z \end{bmatrix} . \tag{26}$$

A lei de controle linear usada foi

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}}_{d3} - k_0 e - k_1 \dot{e} - k_2 \ddot{e} \; , \tag{27}$$

sendo os k_i os ganhos do controlador. O sinal de erro e é definido como $\tilde{x}_1 - \tilde{z}_{d1}$. $\tilde{x}_1$ é a primeira coordenada de[2] $\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi(\boldsymbol{x}_2)$, enquanto que $\tilde{x}_{d1}$ é a primeira coordenada de $\tilde{\boldsymbol{x}}_d = \Phi(\boldsymbol{x}_1)$ que é o estado do oscilador mestre (14) transformado para o espaço linear. Dessa forma, as subseqüentes derivadas de e são obtidas tomando $\dot{e} = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_{d2}$ e $\ddot{e} = \tilde{x}_3 - \tilde{x}_{d3}$. O sinal $\dot{\tilde{x}}_{d3}$ é obtido derivando-se a última linha da equação (26) o que leva a

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{d3} = {} & (\sigma r + \sigma^2)\sigma(y_1 - x_1) \\ & - (\sigma + \sigma^2)(r x_1 - y_1 - x_1 z_1) \\ & - \sigma \left[\sigma(y_1 - x_1) z_z + x_1(-b z_1 + x_1 y_1) \right] \; . \end{aligned} \tag{28}$$

Os ganhos k_i foram escolhidos de modo a obter uma resposta estável, rápida e não oscilatória para o erro de sincronização. Os três pólos do sistema foram escolhidos reais e iguais a -20 o que leva aos valores $k_0 = 8000$, $k_1 = 1200$ e $k_2 = 60$.

O difeomorfismo $\Phi(\cdot)$, juntamente com a transformação da entrada a ser mostrada a seguir, é responsável por linearizar a dinâmica do erro de sincronismo. Na verdade, essa transformação coloca o sistema (15) em um sistema de coordenadas no qual ele *é linear*. Nesse espaço, pode-se usar a teoria de controle linear para projetar um controlador, como foi feito. No entanto, há ressalvas. Uma delas é que quaisquer referências que o sistema controlado deva seguir devem ser expressas no novo espaço de coordenadas. Por isso foi necessário transformar também os sinais do sistema mestre.

A última etapa do projeto do sistema de controle é o cálculo da função de transformação da entrada. Ela é dada por (vide equação (11))

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\tilde{u} - \alpha(\boldsymbol{x})}{\beta(\boldsymbol{x})} \; , \tag{29}$$

sendo

$$\alpha(\boldsymbol{x}) = \mathrm{L}_f^3 \phi(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

[2]Neste ponto, para evitar confusão, os sub-índices de (15) são usados novamente.

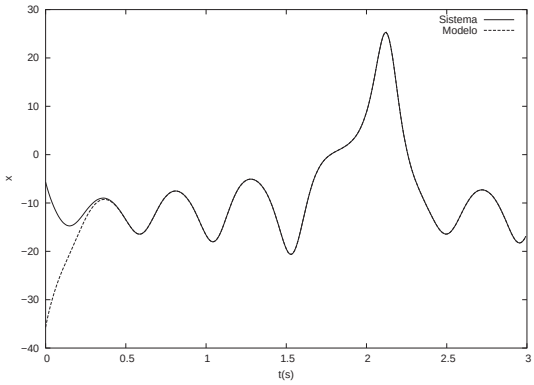

Figura 1: Variável x em função do tempo para o sistema original e para o modelo.

e

$$\beta(\boldsymbol{x}) = \mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^2 \phi(\boldsymbol{x}) \; . \tag{31}$$

Usando as equações (26) e (30) tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_f^3 \phi = {} & \left[(\sigma r + \sigma^2) - \sigma z \right] \sigma(y - x) \\ & - (\sigma + \sigma^2)(r x - y - x z) - \sigma x^2 y \end{aligned} \tag{32}$$

e a partir das equações (26) e (31) chega-se a

$$\mathrm{L}_g \mathrm{L}_f^2 \phi = \sigma x z \; . \tag{33}$$

É interessante notar que (29) é singular para $\sigma x z = 0$, o que é coerente com a condição de controlabilidade.

Uma vez de posse do projeto do controlador, partiu-se para a implementação. O sistema mestre (14), o sistema escravo (15) e o controlador foram simulados conjuntamente usando o Octave. Os parâmetros usados foram $(r, \sigma, b) = (60, 10, \frac{8}{3})$. Usou-se como condição inicial para o sistema um ponto do atrator, enquanto para o modelo foi usado um ponto a uma distância de 10 unidades do mesmo. Não foi incluído nenhum tipo de ruído.

Na figura 1 aparece a variável x do sistema e do modelo. Nota-se que o controlador é capaz de sincronizar perfeitamente o modelo ao sistema original. Não é possível, na figura, discernir o sistema do modelo após o transitório.

Esse, por si só, já é um resultado interessante. O controle geométrico fornece meios para se projetar um acoplamento que leva ao sincronismo.

No entanto, o resultado mais interessante é o comportamento da ação de controle u. Ele é mostrado na figura 2.

À medida que ocorre o sincronismo, *a ação de controle converge para o valor do parâmetro b do sistema original*. Em outras palavras, a ação de controle é um estimador para o parâmetro b do sistema. Isso mostra que é possível, neste caso, usar sincronismo e controle para estimar um parâmetro desconhecido de um sistema caótico.

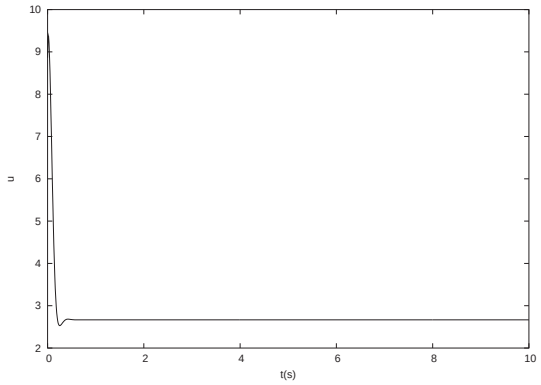

Figura 2: Ação de controle.

5. Conclusão

Um novo procedimento de estimação de parâmetros para sistemas não lineares foi apresentado neste trabalho. A estimação é feita via sincronismo do modelo com o sistema original. Para se obter o sincronismo é utilizado um controlador que atua no parâmetro do modelo a ser identificado. A ação de controle converge para o valor do parâmetro desconhecido.

O método proposto tem a vantagem de garantir que o modelo obtido reproduza o comportamento temporal do sistema original, sem a necessidade da solução de problemas de otimização complexos.

No entanto, o método ainda se encontra em desenvolvimento. Por exemplo, o método necessita de todo o vetor de estados do sistema a ser modelado. Além do mais, o efeito do ruído na estimação não foi avaliado.

Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio da FAPESP e do CNPq

Referências

Aguirre, L. A. (2000). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG.

Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer, 3rd edition.

Jaeger, L. e Kantz, H. (1996). Unbiased reconstruction of the dynamics underlying a noisy chaotic time series. *Chaos*, 6(3):440–450.

Lorenz, E. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:282–293.

Nijmeijer, H. (2001). A dynamical control view on synchronization. *Physica D*, 154:219–228.

Nijmeijer, H. e van der Schaft, A. J. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag.

Slotine, J.-J. E. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.

Timmer, J., Rust, H., Horbelt, W., e Voss, H. U. (2000). Parametric, nonparametric and parametric modelling of a chaotic circuit time series. *Physics Letters* A, 274:123–134.

Tôrres, L. A. B. (2001). *Controle e Sincronismo de Osciladores Caóticos*. PhD thesis, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.