

UM MÉTODO ANALÍTICO PARA A DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE DE QUEIMA DE COMBUSTÍVEL SÓLIDO EM ESTADO-REATOR

ERNESTO RIBEIRO RONZANI (+)

DARCY DAS NEVES NOBRE (*,+)

FRANCESCO SCOFANO NETO (+)

(+) Instituto Militar de Engenharia, Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha - Rio de Janeiro - RJ, CEP 22290.

(*) Instituto de Pesquisas Espaciais, Rodovia Presidente Dutra, km 40 - Cachoeira Paulista - SP, CEP 126 30.

RESUMO

Um desenvolvimento analítico da câmara de combustão dos Estado-Reatores a combustível sólido ("Solid-Fuel Ram-jets") é proposto neste trabalho com o objetivo de se estabelecer a velocidade de queima do combustível ("Fuel Regression"). Aplicam-se as equações de camada limite com reação química, que com algumas simplificações e transformações de variáveis, reduzem as equações de escoamento compressível em uma região tubular para as de escoamento incompressível em placa plana. Resolveu-se a equação do tipo "Falkner-Skan" associada para a determinação da velocidade de queima.

INTRODUÇÃO

Para vôos de velocidades supersônicas acima de Mach 2 ao nível do mar, o sistema de propulsão Estado-Reator a combustível sólido ("Solid Fuel Ramjet") torna-se um tipo propulsivo de veículos ou de artefatos bélicos bastante impor-

tante para deslocamentos na atmosfera terrestre. A Figura 1 mostra os componentes básicos do Estado-Reator a combustível sólido.

A câmara de combustão tem a função de queimar certa quantidade de combustível sólido, o qual é gaseificado pelo calor existente no interior da câmara e misturado com grande quantidade de ar, suprido pelo difusor de corpo central, e através da combustão da mistura ar-combustível libera-se calor de maneira que o ar seja expandido e acelerado para fornecer um fluxo regular e uniforme de gases quentes para o expensor.

Pode-se dividir a câmara de combustão em duas regiões distintas: região de suporte de chama e região da câmara de reação. A região do suporte de chama é necessária para diminuir a velocidade do ar que sai do difusor e para realizar a difusão da combustão ao longo da câmara, de forma que a chama possa ser mantida. A região da câmara de reação, que é analisada neste trabalho, é aquela onde o processo da combustão é realizado e completado. A figura 2 mostra estas regiões e suas características.

Na região da câmara de reação ocorre após o reatamento do escoamento um perfil de velocidades em desenvolvimento, ocasionando o aparecimento de uma camada limite turbulenta com reação química. O modelo analítico da combustão assume que a reação química entre a maioria do combustível gaseificado e o ar ocorre no interior da camada limite próxima a superfície do grão monoperfurado. O modelo admite algumas hipóteses que serão mencionadas oportunamente no desenvolvimento analítico, mas algumas de caráter geral podem ser estabelecidas como: (A) o escoamento interno é axialmente simétrico em relação ao eixo central da câmara de combustão; (B) o escoamento está no regime permanente; (C) as velocidades das reações químicas são altas o suficiente para manter o equilíbrio no interior da camada limite.

Vários autores tem investigado a velocidade de queima do combustível sólido. Schulte¹, Pein e Hogg² estudaram experimentalmente e obtiveram valores da velocidade de queima em

diferentes condições. Basicamente eles determinaram estes valores em função da temperatura do ar admitido, fluxo de massa e pressão na câmara de combustão e estabeleceram uma equação empírica que calcula a velocidade de queima, porém este valor está submetido as várias condições do experimento como tipo de combustível, tamanho do motor, etc. Outros autores^{3,4} desenvolveram analiticamente o problema através da quantidade de calor transferido por convecção e radiação, da zona de chama para a superfície do combustível, porém utilizam-se de parâmetros experimentais muitas vezes de difícil obtenção. Alguns dados foram publicados sobre a velocidade de queima^{5,6}, mas estes são pouco adequados para a análise em certas condições de operação.

Este trabalho procura obter analiticamente a velocidade de queima utilizando-se da análise teórica da camada limite com reação química compressível desenvolvida na superfície interna da câmara de reação. Este procedimento proporciona uma ferramenta bastante valiosa na análise teórica da câmara de combustão mesmo antes de construí-la e também na análise de valores experimentais, otimizando este procedimento. Os parâmetros necessários a essa análise são facilmente obtidos experimentalmente e pelo emprego do código computacional NASA SP-273⁷.

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Um desenvolvimento análogo ao realizado por Emmons⁸ em camada limite sobre uma placa plana semi-infinita estacionária com combustível é proposto neste trabalho. Um tubo cilíndrico estacionário, com combustível sólido fixado na parede interna, figura 3, orienta-se com seu eixo longitudinal paralelo a um escoamento de ar com um perfil de velocidade em desenvolvimento no escoamento central. Esse escoamento axialmente simétrico envolve gradientes de pressão na parte externa a camada limite.

Todas as análises em camadas limites turbulentas são feitas, basicamente com a mudança dos coeficientes de transporte laminar para coeficientes turbulentos. Lees⁹ mostrou

que para $Le \approx Pr \approx Sc \approx 1$, as equações da camada limite turbulenta tornam-se idênticas as da camada limite laminar. O presente trabalho segue a teoria de Shvab-Zeldovich¹⁰⁻¹¹ onde os números de Lewis e de Prandtl são supostos serem aproximadamente unitários. O número de Schmidt pode ser obtido em relação aos outros grupamentos como:

$$Sc \approx Le \approx Pr \quad (1)$$

Como já foi mencionado este trabalho assume a seguinte hipótese:

$$Le \approx Pr \approx Sc \approx 1 \quad (2)$$

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações de equilíbrio simplificadas utilizadas neste trabalho são similares as empregadas por William Forman¹² para um escoamento bidimensional compressível, com as seguintes modificações: o sistema de coordenadas é o cilíndrico e a pressão é considerada variável na direção longitudinal da câmara.

(1) Equação da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho r \bar{V}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r \bar{V}_z) = 0 \quad (3)$$

Observa-se que a equação (3) tem a forma similar a equação da continuidade para um sistema de um componente, apesar de ter sido obtida pela análise do princípio da conservação de massa para um sistema multicomponentes.

A velocidade média ponderada - massa da mistura de fluidos é definida através de suas componentes como:

$$\bar{V}^i = \sum_k Y^k V^{ik} \quad (4)$$

onde o índice i corresponde ao da notação indicial e k representa o k -ésimo componente.

(2) Equação da conservação da quantidade de movimento linear

$$\bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{1}{\rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\mu r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r}) \right] \quad (5)$$

(3) Equação da conservação de energia

$$\bar{v}_r \frac{\partial \beta_T}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \beta_T}{\partial z} = \frac{\bar{v}_z}{\rho q_c} \frac{dp}{dz} + \frac{1}{\rho r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\mu r \frac{\partial \beta_T}{\partial r}) \right] \quad (6)$$

onde

$$\beta_T = \alpha_T - \alpha^1 \text{ para } \alpha_T = \frac{\int_{T_0}^T C_p dT}{q_c} \text{ e } \alpha^1 = \frac{y^1}{w^1 (v^{*1} - v'^1)}$$

A equação da conservação de energia foi obtida de forma similar a William Forman^{1,2} utilizando-se da formulação de Shvab-Zeldovich considerando entretanto, a pressão na direção longitudinal a camada limite.

TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Como as equações da camada limite incompressível são mais simples do que a compressível é desejável escrever as equações (3), (5) e (6) em termos de uma camada limite incompressível hipotética.

Logo define-se uma nova coordenada radial ζ' por:

$$\zeta' \equiv \int_{R_i}^r \left(- \frac{\rho}{r} \right) dr \quad (\text{para } r \neq 0) \quad (7)$$

Uma nova velocidade radial v' pode ser definida como:

$$v' \equiv - \frac{1}{\rho \mu} \left[\rho r \bar{v}_r + \bar{v}_z \int_{R_i}^r \left(\frac{\partial(\rho r)}{\partial z} \right)_r dr \right] \quad (8)$$

e finalmente define-se uma nova coordenada longitudinal por:

$$\epsilon \equiv \int_0^z \frac{\rho \mu}{r^2} dz \quad (\text{para } r \neq 0) \quad (9)$$

Utilizando-se das equações (7), (8) e (9) e considerando o produto ρ uma função de z somente^{1,2}, chega-se a:

$$\frac{\partial v'}{\partial \zeta'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \epsilon} z = 0 \quad (10)$$

$$v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta'} z + \bar{v} z \frac{\partial \bar{v}}{\partial \epsilon} - \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \zeta'^2} z = - \frac{dP}{d\epsilon} \quad (11)$$

$$v' \frac{\partial \beta_T}{\partial \zeta'} + \bar{v} z \frac{\partial \beta_T}{\partial \epsilon} - \frac{\partial^2 \beta_T}{\partial \zeta'^2} = \frac{\bar{v} z}{q_c} \frac{dP}{d\epsilon} \quad (12)$$

onde:

$$\frac{dP}{d\epsilon} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\epsilon}$$

ESCOAMENTO CENTRAL

As velocidades no escoamento central são bem maiores do que as da camada limite, o perfil de velocidade no interior da câmara de reação possui uma inclinação muito acentuada da próxima da superfície interna do combustível, conforme ilustrado na figura 4. Pode-se supor que a velocidade no escoamento central, é praticamente uniforme e em função da coordenada z apenas.

Analisando o escoamento na vizinhança da linha central da câmara, pode-se estabelecer um volume de controle cilíndrico de raio δ , da mesma ordem de grandeza da espessura da camada limite e de comprimento l igual ao da câmara de reação. Em consequência, as equações de equilíbrio obtidas na camada limite podem ser utilizadas nesse problema. Considerando que o escoamento central tem uma velocidade $\vec{V}^C$ uniforme, mas em desenvolvimento, com a componente $V_z^C(\epsilon)$ na direção do eixo coordenado z , a equação (11) pode ser reescrita na forma:

$$- \frac{dP}{d\epsilon} = V_z^C(\epsilon) \frac{dv_z^C}{d\epsilon} \quad (13)$$

para o escoamento central na região fora da camada limite.

Um conjunto de soluções das equações da camada limite foi obtido por Howarth¹³ e Tani¹⁴. Estas soluções relacionam os escoamentos potenciais dado por:

$$V_z^C(\epsilon) = a_0 + a_1 \epsilon^n; \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

Admite-se $n = 1$ na equação (14) e obtêm-se os coeficientes constantes a_0 e a_1 através das condições de contorno na entrada e na saída da câmara de reação, isto é:

$$\text{Para } \epsilon = 0; \quad V_z^C = V_e \quad \text{logo } a_0 = V_e \quad (15)$$

onde V_e é a velocidade central do fluido na entrada da câmara de reação.

A segunda condição de contorno é obtida através da equação da continuidade aplicada a um volume de controle estabelecido em toda a câmara de reação.

$$\dot{m}_s = \dot{m}_{ar} + \dot{m}_F = \dot{m}_{ar} (1 + F) \quad (16)$$

Da equação acima tem-se:

$$\text{Para } \epsilon = \epsilon_s; \quad a_1 = \frac{V_e}{\epsilon_s} \left[\frac{\rho_{ar}}{\rho_p} (1 + F) - 1 \right] \quad (17)$$

Com as equações (13), (14), (15) e (17) conclui-se que a derivada $dP/d\epsilon$ pode ser calculada pela equação:

$$\frac{dP}{d\epsilon} = - \frac{V_e^2}{\epsilon_s} \left[\frac{C^2}{\epsilon_s} \epsilon + C \right] \quad (18)$$

onde:

$$C = \left[\frac{\rho_{ar}}{\rho_p} (1 + F) - 1 \right] \quad (19)$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES PARA A CÂMARA DE REAÇÃO

Usando as equações de (10) a (14) chega-se ao seguinte sistema para o problema:

$$\frac{\partial v'}{\partial \zeta'} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \epsilon} = 0 \quad (10)$$

$$v' \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \zeta'} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \epsilon} - \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \zeta'^2} = a_1 v_z^c \quad (19)$$

$$v' \frac{\partial \beta_T}{\partial \zeta'} + \bar{v}_z \frac{\partial \beta_T}{\partial \epsilon} - \frac{\partial^2 \beta_T}{\partial \zeta'^2} = - \frac{a_1}{q_c} \bar{v}_z v_z^c \quad (20)$$

Analisando as equações acima conclui-se que em um problema inicialmente de camada limite compressível no interior de um tubo foi transformado em um problema de camada limite incompressível em uma placa plana com fluido de viscosidade e massa específica iguais a unidade.

CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno para $r = c$ (onde as propriedades são identificadas pelo índice "c"), no escoamento central são:

$$\left. \frac{\partial \alpha_{ar}}{\partial r} \right|_c = 0 \quad (\text{onde a taxa de variação da concentração de ar com } r \text{ no centro do escoamento central é suposta nula})$$

$$\left. \frac{\partial \alpha_T}{\partial r} \right|_c = 0 \quad (\text{a taxa de variação da temperatura do fluido com } r \text{ no centro do escoamento central é suposta nula})$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_c = 0 \quad (\text{a taxa de variação da velocidade média no fluxo com } r \text{ no centro do escoamento central é suposta nula})$$

$$\bar{v}_z \Big|_c = v_z^c \quad (\text{a velocidade é igual a velocidade do escoamento central})$$

Em termos da variável ζ' definida na equação (7) estas condições podem ser expressas na forma abaixo:

Para $r \rightarrow 0$ tem-se que $\zeta' \rightarrow \infty$.

$$\left. \frac{\partial \alpha_{ar}}{\partial \zeta'} \right|_{\infty} = \left. \frac{\partial \alpha_T}{\partial \zeta'} \right|_{\infty} = \left. \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \zeta'} \right|_{\infty} = 0 \text{ e } \left. \bar{V}_z \right|_{\infty} = V_z^C \quad (21)$$

As condições de contorno para α_T e α_{ar} desenvolvidas podem ser transformadas em condições de contorno na função de acoplamento $\beta_T = \alpha_T - \alpha_{ar}$, isto é:

$$\left. \frac{\partial \beta_T}{\partial \zeta'} \right|_{\infty} = \left. \frac{\partial \alpha_T}{\partial \zeta'} \right|_{\infty} - \left. \frac{\partial \alpha_{ar}}{\partial \zeta'} \right|_{\infty} = 0 \quad (22)$$

As condições de contorno para $r = R_i$ (onde as propriedades são identificadas pelo índice " R_i ") na superfície interna do grão de combustível são:

$$\left. \alpha_{ar} \right|_{R_i} = 0 \text{ (é uma aproximação bastante razoável em muitos sistemas reais}^{1,2})$$

$$\left. \alpha_T \right|_{R_i} = \text{constante (uma medida da temperatura de sublimação ou de fusão do combustível sólido)}$$

$$\left. \bar{V}_z \right|_{R_i} = 0$$

Em termos da variável adimensional ζ' definida pela equação (7) estas condições podem ser expressas na forma:

$$\left. \beta_T \right|_{\zeta'=0} = \left. \alpha_T \right|_{\zeta'=0} - \left. \alpha_{ar} \right|_{\zeta'=0} = \text{cte} \quad (23)$$

$$\left. \bar{V}_z \right|_{\zeta'=0} = 0 \quad (24)$$

Aplicando a Primeira Lei da Termodinâmica na interface entre as fases condensada e gasosa tem-se:

$$- \left(K_g \frac{\partial T}{\partial r} \right) \bigg|_{r=R_i} = (\rho_g \bar{V}_r) \bigg|_{r=R_i} (\ell_g + q_p) \quad (25)$$

A equação (25) em termos de ζ' pode ser escrita na forma:

$$\left(K_g \frac{\partial T}{\partial \zeta'} \right) \Big|_{\zeta'=0} = \mu_o v_o' (\ell_g + q_p) \quad (26)$$

onde,

$$v_o' = \left(- \frac{r \bar{V}_r}{\mu} \right)_{r=R_i}$$

Derivando α_T e considerando a hipótese de $P_r = 1$, e substituindo na equação (26) tem-se que:

$$\left(\frac{\partial \alpha_T}{\partial \zeta'} \right) \Big|_{\zeta'=0} = v_o' r_{cal} \quad (27)$$

onde,

$$r_{cal} = \frac{\ell_g + q_p}{q_c}$$

Em termos da função de acoplamento β_T a equação (27) toma a forma abaixo:

$$\left(\frac{\partial \beta_T}{\partial \zeta'} \right) \Big|_{\zeta'=0} = v_o' r_{cal} \quad (28)$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CÂMARA DE REAÇÃO

A solução do problema consiste inicialmente em resolver o sistema de equações constituído pelas equações diferenciais (10) e (19) com as condições de contorno (21) e (24), em seguida pode-se obter β_T pela equação (20) e pelas condições de contorno (22) e (23). Substituindo a solução β_T na equação (28) obtém-se finalmente a velocidade de queima modificada (v_o').

Para solucionar este sistema de equações utiliza-se os procedimentos convencionais das soluções de Falkner-Skan.

Procurando soluções de similaridade genérica da forma:

$$\bar{V}_z(\zeta', \epsilon) = V_z^C(\epsilon) f'(\eta) \quad (29)$$

onde: $\eta = \frac{\zeta'}{g(\epsilon)}$; $f' = \frac{df}{d\eta}$ e

$$g(\epsilon) = \left[\frac{2\epsilon}{(V_z^C)^2} \left(a_0 + \frac{a_1}{2} \epsilon \right) \right]^{1/2}$$

A equação diferencial ordinária para a função f em termos de η é:

$$f''' + f f'' + \beta(\epsilon) [1 - (f')^2] = 0 \quad (30)$$

onde

$$\beta(\epsilon) = \frac{2a_1\epsilon}{(V_z^C)^2} \left(a_0 + \frac{a_1}{2} \epsilon \right)$$

A condições de contorno (21) e (24) podem ser escritas na forma:

$$\text{Para } \eta = 0; f'(0) = 0 \quad (31)$$

$$\text{Para } \eta \rightarrow \infty; f'(\eta_\infty) = 1 \quad (32)$$

Não foi obtido na equação (30) um valor de β constante, impossibilitando, portanto, a solução de similaridade total para este tipo de problema, porém uma quantidade de β pode ser considerada como um parâmetro constante para qualquer valor de ϵ especificado, obtendo-se assim similaridade local.

Para a forma de velocidade do tipo da equação (29) a função corrente (ψ) utilizada é:

$$\psi(\zeta; \epsilon) = V_z^C(\epsilon) g(\epsilon) f(\eta), \quad (33)$$

sendo $v' = - \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}$ e $\bar{V}_z = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta'}$

Com a equação de v' e a condição de contorno (31) pode-se mostrar que a velocidade de queima modificada (v'_0) é igual a

$$v'_0 = \frac{f(0)}{g(\epsilon)} \quad (34)$$

Como o objetivo é calcular a velocidade de queima modificada, equação (34), torna-se necessário solucionar a equação diferencial (30) a fim de se obter o valor de $f(0)$. Necessita-se, entretanto, de uma terceira condição de contorno para solucionar esta equação, e essa será obtida utilizando-se das equações (20) e (28).

Usando a equação (19) e colocando β_T em função da velocidade $\bar{V}_z$, pode-se modificar a equação (20) para:

$$\left(\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \zeta'}\right)^2 \frac{\partial^2 \beta_T}{\partial \bar{V}_z^2} - a_1 V_z^C \left(\frac{\partial \beta_T}{\partial \bar{V}_z} + \frac{\bar{V}_z}{q_c}\right) = 0 \quad (35)$$

Usando as condições de contorno (21) e (24) na solução da equação (35) verifica-se que:

$$\text{Para } \zeta' \rightarrow \infty; \quad \left. \frac{\partial \beta_T}{\partial \bar{V}_z} \right|_{\bar{V}_z = V_z^C} = - \frac{V_z^C}{q_c} \quad (36)$$

e

$$\text{Para } \zeta' = 0; \quad \left. \frac{\partial \beta_T}{\partial \bar{V}_z} \right|_{\bar{V}_z = 0} = K e^{-K} \quad (37)$$

onde

$$K = a_1 V_z^C \int \left(\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \zeta'}\right)^{-2} d\bar{V}_z$$

Ao analisar o perfil de velocidade do escoamento interno da câmara de reação através do modelo admitido neste trabalho, figura 4, conclui-se que o gradiente de velocidade na direção ζ' é nulo no centro da câmara de reação e a medida que se aproxima do contorno da camada limite, este modifica-se muito pouco, mas no interior o gradiente da velocidade tem um crescimento bem acentuado e finaliza com um valor muito grande no contorno $\zeta' = 0$. Logo, o valor da integral na equação (37) tende para um valor muito pequeno. Desde que $a_1 V_z^C$ não tenha um valor muito grande, pode-se concluir que K tende para zero. Então a relação (37) fica igual a:

$$\left. \frac{\partial \beta_T}{\partial \bar{V}_z} \right|_{\bar{V}_z=0} = k(\epsilon) \quad (38)$$

Com os valores (36) e (38) pode-se obter intuitivamente uma função $\beta_T(\bar{V}_z)$ auxiliar, que apesar de não satisfazer a equação (35) nos pontos intermediários do intervalo $\bar{V}_z = 0$ a $\bar{V}_z = V_z^C$, satisfaz os valores e suas derivadas nos contornos, e pode ser escrita na forma de:

$$\beta_T(\bar{V}_z) \sim \frac{-\bar{V}_z^2}{2q_c} + \frac{k}{V_z^C} \left(V_z^C \bar{V}_z - \frac{\bar{V}_z^2}{2} \right) + C_1 \quad (39)$$

Pela condição de contorno (24) verifica-se que C_1 na equação (39) é igual a $\beta_T|_0$.

Desde que β_T^C seja avaliado no centro do escoamento central, $\zeta' \rightarrow \infty$, tem-se:

$$k(\epsilon) = \frac{2}{V_z^C(\epsilon)} \left[\beta_T^C(\bar{V}_z) - \beta_T(\bar{V}_z) \right]_{\bar{V}_z=0} + \frac{V_z^C(\epsilon)}{Jq_c} \quad (40)$$

O valor de $\beta_T^C(\bar{V}_z)$ pode ser avaliado através da equação (35) no contorno $\zeta' \rightarrow \infty$, isto é, na região central da câmara de reação, então:

$$\beta_T^C(\bar{V}_z) = - \frac{(V_z^C)^2}{Jq_c} + \beta_T^C(V_z^C) \Big|_{\bar{V}_z=V_e} \quad (41)$$

Substituindo

$$\frac{\partial \beta_T}{\partial \zeta'} = \frac{\partial \beta_T}{\partial \bar{V}_z} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \zeta'}$$

na condição de contorno (28) e com a relação (38) tem-se:

$$\left. \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \zeta'} \right|_0 = k^{-1}(\epsilon) r_{cal} v'_0 \quad (42)$$

Comparando a derivada da relação (29) e as equações (34) e (40) com a equação (42) tem-se finalmente a terceira

condição de contorno para a solução da equação diferencial (30).

$$\frac{f''(0)}{f(0)} = -r_{cal} \left\{ 2 \left[\beta_T^C(\bar{V}_z) - \beta_T(\bar{V}_z) \right]_{\bar{V}_z=0} + \frac{[\bar{V}_z^C(\epsilon)]^2}{Jq_c} \right\}^{-1} \quad (43)$$

Então o problema matemático fica reduzido a solucionar a equação (30), uma equação diferencial ordinária de terceira ordem, não linear, com as condições de contorno dadas pelas equações (31), (32) e (43). Devido a sua não-linearidade, necessita-se de métodos numéricos para solucioná-la. Cebeci¹⁵ fornece um método de solução usando os procedimentos de Runge-Kutta.

CÁLCULO DA VELOCIDADE DE QUEIMA

A velocidade de queima (r_q) pode ser expressa mais diretamente em termos da velocidade de queima modificada (v'_0) usando o procedimento abaixo:

A vazão mássica de combustível sólido que gaseifica de uma pequena área na superfície interna do grão de combustível pode ser dado por:

$$\Delta \dot{m}_F = \rho_F r_q \Delta A \quad (44)$$

Considerando a velocidade média do combustível gaseificado liberado na superfície do grão ($\bar{V}_r \big|_{R_i}$), a mesma vazão mássica pode ser reescrita como:

$$\Delta \dot{m}_F = \rho_G \bar{V}_r \big|_{R_i} \cdot \Delta A \quad (45)$$

Igualando as equações (44) e (45), considerando a relação entre v'_0 e $\bar{V}_r \big|_{R_i}$ definida na equação (26) e a equação (34), a velocidade de queima do combustível sólido é igual a:

$$r_q(\epsilon) = \left(\frac{\rho_g \mu_{R_1}}{\rho_F R_1} \right) \frac{f(0)}{g(\epsilon)} \quad (46)$$

AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Considerando um estado-reator a combustível sólido com as seguintes características:

- Condições de vôo : Mach 2,2 ao nível do mar
- Combustível sólido : Poliéster (75% em peso) mais perclorato de amônio (25%)
- Câmara de combustão: Comprimento: 200 mm
diâmetro interno inicial: 35 mm
Pressão média: 10 atm.

Obteve-se a velocidade de queima do combustível em vários pontos da câmara de reação. Os resultados obtidos através da equação (46) são transcritos na tabela 1 abaixo:

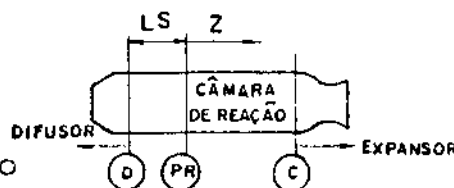
TABELA 1: Velocidade de queima do combustível na câmara de combustão ($D_c = 35$ mm)

Posição Z (mm)	Velocidade de queima (mm/seg)	
	Local	Média
20	0,609	0,365
40	0,364	
60	0,268	
80	0,217	
100	0,183	

OBS.:

D - Seção saída difusor
PR - Seção de reatamento
C - Saída câmara de combustão
LS - 100 mm

O diagrama ilustra a configuração física da câmara de reação. É representado um tubo horizontal com uma seção central retangular rotulada 'CÂMARA DE REAÇÃO'. À esquerda desta câmara, há uma seção arredondada rotulada 'DIFUSOR'. À direita, há uma seção arredondada rotulada 'EXPANSOR'. Abaixo do tubo, há três círculos alinhados horizontalmente, rotulados 'D', 'PR' e 'C' de esquerda para direita. Uma linha horizontal com setas indica a distância 'LS' entre o difusor e a câmara de reação, e a distância 'Z' entre a câmara de reação e o expansor.



No cálculo da velocidade de queima do combustível sólido (tabela 1) foi desprezado o valor relativo ao da extremidade final da câmara ($z = 100$ mm), pois supõe-se que esta região é bastante turbulenta e afasta-se do modelo proposto neste trabalho.

Para avaliar os resultados aqui obtidos, utiliza-se uma equação empírica por Schulte¹.

$$(r_q)_{\text{média}} = 0,008 P_{ca}^{0,28} T_{D,\text{total}}^{0,50} \quad (\text{mm/seg}) \quad (47)$$

onde:

P_{ca} é a pressão média na câmara em bar,

$T_{D,\text{total}}$ é a temperatura total do ar admitido em Kelvin na entrada da câmara.

Substituindo os valores assumidos neste trabalho, $P_{ca} = 10,15$ bar e $T_{D,\text{total}} = 586,76$ K, na equação (47), tem-se uma velocidade de queima média de 0,371 mm/s. Comparando este resultado com o valor médio da tabela 1, verifica-se que o valor teórico obtido neste trabalho é compatível com o obtido experimentalmente.

Nos estado-reatores a combustível sólido a queima provoca uma crescente variação no diâmetro interno da câmara de combustão em consequência a velocidade dos fluidos na entrada da câmara de reação diminui. Variando os diâmetros e as velocidades correspondentes calculou-se as velocidades de queima média para várias condições, os resultados podem ser vistos no gráfico da figura 5. Desses resultados conclui-se que no estado-reator, apesar da superfície de queima aumentar durante a operação do sistema, a velocidade de queima diminui, mantendo aproximadamente constante a quantidade de gases produzidos, denominada queima neutra.

CONCLUSÃO

As conclusões deste trabalho pode ser resumida no exposto abaixo:

- O modelo proposto neste trabalho parece razoável na medida em que os resultados obtidos apresentam boa concordância com dados experimentais.

- A queima do combustível sólido na câmara de combustão não é homogênea, sendo maior no início da câmara de reação e decrescente na medida em que se aproxima do expensor. Isto acontece devido ao aumento de velocidade dos gases nesta região, e em consequência diminui a transferência de calor para a superfície do grão.

- A velocidade de queima do combustível diminui com o aumento do diâmetro interno do grão, devido a uma diminuição da transferência de calor para a superfície.