



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-4752-TDL/346

**EVOLUÇÃO PARA APLITUDE FINITA DAS ONDAS BAROCLINICAS NA
ATMOSFERA E NO OCEANO.**

José Paulo Bonatti

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Meteorologia, orientada por Vadlamudi B. Rao,
aprovada em 19 de agosto de 1988.

INPE
São José dos Campos
1988



PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

AUTORES/AUTHORS: INSTABILIDADE BAROCLÍNICA FRENTE ANÉIS OCEÂNICOS
NUVENS VÍRGULA

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

Dr. Carlos de Jesus Ferreira
Marco Antonio Raupp
Diretor Geral

AUTOR RESPONSÁVEL
RESPONSIBLE AUTHOR

Jose Paulo Bonatti

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

INTERNA / INTERNAL
 EXTERNA / EXTERNAL
 RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

V. B. Rao
Vadlamudi B. Rao

CDU/UDC

551.51

DATA / DATE

Dezembro 1988

PUBLICAÇÃO Nº
PUBLICATION NO
INPE-4752-TDL/346.

TÍTULO/TITLE

EVOLUÇÃO PARA AMPLITUDE FINITA DAS ONDAS BAROCLÍNICAS NA ATMOSFERA E NO OCEANO

AUTORES/AUTHORSHIP

Jose Paulo Bonatti

ORIGEM
ORIGIN

PG/CPT

PROJETO
PROJECT

FRH/MET

Nº DE PAG.
NO OF PAGES

311

ULTIMA PAG.
LAST PAGE

D. 50

VERSÃO
VERSION

Nº DE MAPAS
NO OF MAPS

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

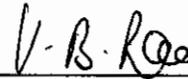
Desenvolveu-se dois modelos multi-níveis: um modelo linear que se-geostrofico e outro não-linear de balanço com atrito do tipo Rayleigh e resfriamento newtoniano. Ambos os modelos consideram a liberação de calor latente, parametrizada com o esquema "wavé-CISK" de Mak e são usadas para estudar as propriedades dos distúrbios baroclínicos na atmosfera. Os modelos com algumas modificações são aplicados para ondas baroclínicas no oceano. Do ponto de vista linear, as perturbações atmosféricas de escala intermediária, com nuvens vírgula associadas (1000 - 2000 km), observadas sobre o Pacífico Norte e América do Sul sul-central, e os distúrbios oceânicos de mesoescala (200 - 400 km), encontrados nas proximidades da zona de confluência das correntes do Brasil e das Malvinas, parecem ser gerados por instabilidade baroclínica. No caso atmosférico, a instabilidade baroclínica é modificada pelos efeitos da umidade. Efeitos não-geostroficos e não-lineares devidos à uma única onda original são superimpostos sobre os campos lineares dados pela onda mais instável, tanto para o caso atmosférico como para o oceânico. Características muito semelhantes às observadas são obtidas na evolução para amplitude finita. No caso atmosférico, a liberação de calor latente mostrou-se um fator fundamental na obtenção de estruturas horizontal e vertical realistas das nuvens. A evolução de anéis térmicos no caso oceânico é muito bem reproduzida pelo modelo não-linear. Em ambos os casos atmosférico e oceânico, o estágio de saturação não é alcançado, uma vez que a realimentação do estado básico térmico não é incluída. São também bem reproduzidas as características das frentes atmosféricas pelo modelo não-linear completo.

OBSERVAÇÕES/REMARKS

Tese de Doutorado em Meteorologia, aprovada em 19 de agosto de 1988.

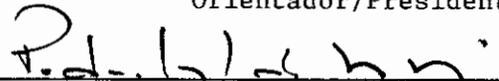
Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Doutor
em Meteorologia

Dr. V. B. Rao



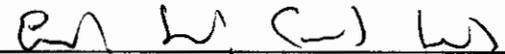
Orientador/Presidente

Dr. Pedro Leite da Silva Dias



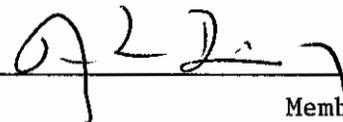
Membro da Banca
-Convidado-

Dr. Ernesto dos Santos Caetano Neto



Membro da Banca
-Convidado-

Dr. Antonio Divino Moura



Membro da Banca

Dr. Prakki Satyamurty



Membro da Banca

Candidato: José Paulo Bonatti

São José dos Campos, 19 de agosto de 1988

TESE DE DOUTORADO

EVOLUÇÃO PARA AMPLITUDE FINITA
DAS ONDAS BAROCLÍNICAS NA ATMOSFERA E NO OCEANO

POR

José Paulo Bonatti

Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos
Instituto de Pesquisas Espaciais - São José dos Campos - SP

ORIENTADOR: Dr. Vadlamudi B. Rao

Agosto de 1988

RESUMO

Desenvolveu-se dois modelos multi-níveis: um modelo linear quase-geostrófico e outro não-linear de balanço com atrito do tipo Rayleigh e resfriamento newtoniano. Ambos os modelos consideram a liberação de calor latente, parametrizada com o esquema "wave-CISK" de Mak e são usados para estudar as propriedades dos distúrbios baroclínicos na atmosfera. Os modelos com algumas modificações são aplicados para ondas baroclínicas no oceano. Do ponto de vista linear, as perturbações atmosféricas de escala intermediária, com nuvens virgulas associadas (1000-2000 km), observadas sobre o Pacífico Norte e América do Sul sul-central, e os distúrbios oceânicos de mesoescala (200-400 km), encontrados nas proximidades da zona de confluência das correntes do Brasil e das Malvinas, parecem ser gerados por instabilidade baroclínica. No caso atmosférico, a instabilidade baroclínica é modificada pelos efeitos da umidade. Efeitos não-geostróficos e não-lineares devidos à uma única onda original são superimpostos sobre os campos lineares dados pela onda mais instável, tanto para o caso atmosférico como para o oceânico. Características muito semelhantes às observadas são obtidas na evolução para amplitude finita. No caso atmosférico, a liberação de calor latente mostrou-se um fator fundamental na obtenção de estruturas horizontal e vertical realistas das nuvens. A evolução de anéis térmicos no caso oceânico é muito bem reproduzida pelo modelo não-linear. Em ambos os casos atmosférico e oceânico, o estágio de saturação não é alcançado, uma vez que a realimentação do estado básico térmico não é incluída. São também bem reproduzidas as características das frentes atmosféricas pelo modelo não-linear completo.

•
• •

À minha esposa,
Fatima,
pelo apoio e incentivo
e aos meus pais,
Raimundo e Olga,
com gratidão.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Dr. Vadlamudi Brahmananda Rao pela valiosa orientação e pelas sugestões, sem as quais este trabalho não poderia ser realizado.

Aos membros da banca examinadora os agradecimentos pelas sugestões.

Ao INPE por fornecer as condições necessárias durante a execução deste trabalho.

Os agradecimentos são extensivos a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para que este trabalho chegasse ao seu final, em particular, Nilda C. A. M. Silva pelo auxílio na datilografia do manuscrito.

ABSTRACT

Two multi-level models are developed: a linear quasi-geostrophic and a balance non-linear model with Rayleigh friction and Newtonian cooling. Both the models take into account the latent heat release, parameterized with Mak's wave-CISK scheme and are used to study the proprieties of baroclinic disturbances in the atmosphere. The models are applied with some modifications to the baroclinic waves in the ocean. From a linear point of view, the atmospheric intermediate-scale (1000 - 2000 km) perturbations, with associated comma clouds observed over North Pacific and South Central South America, and the oceanic mesoscale (200 - 400 km) disturbances, found near the Brazilian and Falkland currents confluence zone, seem to be generated by baroclinic instability. In the atmospheric case the baroclinic instability is modified by humidity effects. Non-geostrophic, non-linear effects due to a single original wave are superimposed on the linear fields given by the most unstable wave for both atmospheric and oceanic cases. Characteristics very similar to observations are obtained in the evolution to finite amplitude. In the atmospheric case, the latent heat release is found to be a fundamental factor to obtain realistic horizontal and vertical cloud structures. The evolution of thermal rings in the oceanic case is very well reproduced by the non-linear model. In both the atmospheric and oceanic cases, the stages of saturation are not reached since the feedback to thermal basic states is not included. Another atmospheric case, starting from an initial linear dry frontal configurations, is also studied. Again the inclusion of latent heat of condensation is found to be crucial in determining not only the cloud structures, but also the upper level flow structure. It is also found that dissipation is important for the structure of potential temperature, principally in the lower levels.

•
•

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS.....	<i>xiii</i>
LISTA DE TABELAS.....	<i>xix</i>
LISTA DE SÍMBOLOS.....	<i>xxi</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - ANÁLISE LINEAR DA INSTABILIDADE BAROCLÍNICA COM O EFEITO DA LIBERAÇÃO DE CALOR LATENTE.....</u>	21
2.1 - Modelo linear multinível em diferenças finitas...	23
2.1.1 - Energética.....	30
2.1.2 - Comparação dos resultados em diferenças finitas com a solução analítica de Mak.....	34
2.2 - Aplicação do modelo linear multinível para os casos observados.....	37
2.2.1 - Perturbação associada com nuvem tipo vírgula (invertida) no sul do Brasil.....	40
2.2.2 - Perturbação de escala intermediária no Pacífico Norte.....	48
<u>CAPÍTULO 3 - ELABORAÇÃO DE UM MODELO ANALÍTICO NÃO-LINEAR PARA PERTURBAÇÕES BAROCLÍNICAS EM DESENVOLVIMENTO.....</u>	53
3.1 - Proposição do modelo.....	53
3.2 - Decomposição dos campos em ordens de evolução....	61
3.2.1 - Perturbação de primeira ordem.....	63

	<u>Pág.</u>
3.2.2 - Campo zonal de primeira ordem.....	65
3.2.3 - Perturbação de segunda ordem.....	66
3.2.4 - Campo zonal de segunda ordem.....	67
3.2.5 - Perturbação de terceira ordem.....	69
3.3 - Inclusão de constituintes passivos.....	69
 <u>CAPÍTULO 4 - EFEITOS SECUNDÁRIOS DE LIBERAÇÃO DE CALOR LATENTE E DE ATRITO NO DESENVOLVIMENTO DE FRENTES ATMOSFÉRICAS.....</u>	 75
4.1 - Estruturas horizontais.....	79
4.1.1 - Baixos níveis.....	79
4.1.2 - Altos níveis.....	92
4.2 - Estruturas verticais.....	93
4.2.1 - Seções zonais.....	93
4.2.2 - Seções meridionais.....	110
4.3 - Separação em ordens de evolução.....	116
4.4 - Médias zonais.....	119
 <u>CAPÍTULO 5 - EFEITOS SECUNDÁRIOS E DE LIBERAÇÃO DE CALOR LATENTE NO DESENVOLVIMENTO DE PERTURBAÇÕES DE ESCALA INTERMEDIÁRIA.....</u>	 139
5.1 - Aspectos observados complementares.....	140
5.2 - Evolução para amplitude finita dos sistemas de escala intermediária.....	147
 <u>CAPÍTULO 6 - FORMAÇÃO DE FRENTES TÉRMICAS OCEÂNICAS E DE PERTURBAÇÕES DE MESOESCALA NO ATLÂNTICO SUL.....</u>	 161
6.1 - Mudanças no modelo atmosférico para sua aplicação ao oceano.....	162

6.2 - Estudo linear da formação de perturbações oceânicas de mesoescala na região de confluência do Atlântico Sul	164
6.3 - Efeitos secundários na evolução para amplitude finita das perturbações de mesoescala no Atlântico Sul	170
6.3.1 - Análise em 50 m de profundidade	170
6.3.2 - Análise em 500 m de profundidade	176
6.3.3 - Seções zonais	177
6.3.4 - Seções meridionais	186
<u>CAPÍTULO 7 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES</u>	189
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	197
APÊNDICE A - INSTABILIDADE BAROCLÍNICA NO SISTEMA QUASE-GEOSTRÓFICO	
APÊNDICE B - MODELO LINEAR DE DUAS CAMADAS	
APÊNDICE C - RESULTADOS PUBLICADOS	
APÊNDICE D - DETALHES NUMÉRICOS E COEFICIENTES DAS SOLUÇÕES DE ORDEM SUPERIOR	

•
• •

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Diagrama esquemático do domínio dos modos normais instáveis para perfis de vento zonal lineares com a altura.....	3
1.2 - Descrição esquemática das três sequências básicas de desenvolvimento de vórtices, evidentes através de imagens de satélite.....	15
2.1 - Grade vertical com distribuição das variáveis nas J camadas.....	29
2.2 - Taxa de crescimento como função do comprimento de onda para $\alpha = 0,8$ e $J = 10,14$ e 20 ; estrutura vertical da função de corrente da onda mais instável e sua fase para $\alpha = 1$ e $J = 20$ e 30	36
2.3 - Estrutura vertical da função de corrente da onda mais instável e sua fase para $\alpha = 0$ e $0,4$ e $J = 20$	36
2.4 - Variação da taxa de crescimento com o comprimento de onda para $\alpha = 0; 0,2; 0,4; 0,8$ e $1,5$ e $J = 20$, e a variação com a intensidade de aquecimento da taxa de crescimento, da velocidade de fase e do comprimento da onda mais instável para $J = 20$	37
2.5 - Comparação entre os comprimentos da onda mais instável, sua taxa de crescimento e sua velocidade de fase, usando perfis verticais selecionados de aquecimento.....	39
2.6 - Sequência de imagens no canal infravermelho (Satélite GOES-W) de 14 e 15 de abril de 1979, mostrando a formação de uma nuvem tipo virgula invertida sobre o nordeste da Argentina, Uruguai e extremo sul do Brasil (em torno de 35°S).....	41
2.7 - Carta de superfície para o dia 15 de abril de 1979, 12:00 TMG.....	42
2.8 - Estrutura vertical do vento e da estabilidade estática e precipitação sobre Porto Alegre em abril de 1979.....	43

2.9 - Instabilidade baroclínica para a perturbação com nuvem tipo vírgula invertida na América do Sul Central.....	47
2.10 - Instabilidade baroclínica para as perturbações de escala intermediária estudadas por Mullen (1979).....	51
4.1 - Estado básico usado na simulação de frentes atmosféricas, para condições médias de inverno em 40°N.....	78
4.2 - Seções horizontais de temperatura potencial, em 850 mb após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	82
4.3 - Seções horizontais do módulo do gradiente horizontal de temperatura potencial multiplicado pelo comprimento da onda mais instável, em 850 mb após 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	83
4.4 - Seções horizontais da função de corrente, sem o valor de referência e multiplicada por 10^{-5} , em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	86
4.5 - Seções horizontais da vorticidade relativa, multiplicada por 10^{-5} , em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	87
4.6 - Seções horizontais da velocidade vertical, multiplicada por 10^{-5} , em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	88
4.7 - Seções horizontais da divergência horizontal, multiplicada por 10^6 , em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	89
4.8 - Campos de razão de mistura e de umidade relativa, em 850 mb e após 5,75 dias, para os casos I, II e III.....	96
4.9 - Seções horizontais do movimento relativo ao deslocamento da onda, em 850 mb e após 5,25 e 5,75 dias, para os casos I, II e III.....	97

4.10 - Seções horizontais da temperatura potencial equivalente, em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	98
4.11 - Função de corrente, sem o valor de referência e multiplicada por 10^{-5} , em 350 mb e após 6,75; 7,25 e 7,75 dias, para os casos I, II e III.....	99
4.12 - Seção zonal da temperatura, em $Y = 0,75$ e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	101
4.13 - Seção zonal da temperatura potencial, em $Y = 0,75$ e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	102
4.14 - Seção zonal do módulo do gradiente de temperatura potencial, multiplicada pelo comprimento da onda mais instável, em $Y = 0,75$ e após 6,75 dias para os casos I, II e III.....	103
4.15 - Seções zonais, em $Y = 0,75$ e após 6,75 dias, da velocidade vertical, multiplicada por 10^5 , e da função de corrente, sem o valor de referência e multiplicada por 10^{-5} , para os casos I, II e III.....	104
4.16 - Seções zonais, em $Y = 0,75$ e após 5,75 dias, da temperatura potencial equivalente e da razão de mistura para os casos I, II e III.....	105
4.17 - Seções zonais do movimento relativo ao deslocamento da onda e da umidade relativa para os casos I, II e III.....	108
4.18 - Seções meridionais de temperatura, em $X = 0,75$ e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	111
4.19 - Seções meridionais de temperatura potencial, em $X = 0,75$ e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	112
4.20 - Seção meridional, em $X = 0,75$ e após 6,75 dias, do módulo do gradiente horizontal de temperatura potencial, multiplicado pelo comprimento da onda mais instável, para os casos I, II e III.....	113

4.21 - Seções meridionais, em $X = 0,75$ e após 6,75 dias do movimento vertical, multiplicado por 10^5 , e da função de corrente, sem o valor de referência e multiplicada por 10^{-5} , para os casos I, II e III.....	123
4.22 - Seções meridionais, em $X = 0,75$ e após 5,75 dias da temperatura potencial equivalente e da razão de mistura, para os casos I, II e III.....	124
4.23 - Seções meridionais, em $X = 0,75$ e após 5,75 dias da circulação meridional vertical, da cobertura de nuvens e da umidade relativa, para os casos I, II e III.....	125
4.24 - Seções meridionais das componentes da temperatura potencial média zonal após 6,75 dias.....	126
4.25 - Seções horizontais da perturbação na temperatura potencial, em 850 mb e após 6,75 dias.....	128
4.26 - Seções zonais da perturbação na temperatura potencial, em $Y = 0,75$ e após 6,75 dias.....	130
4.27 - Seções meridionais da perturbação na temperatura potencial, em $X = 0,75$ e após 6,75 dias.....	132
4.28 - Seções horizontais da perturbação na função de corrente, multiplicada por 10^5 , em 350 mb e após 7,75 dias.....	134
4.29 - Temperatura potencial média zonal e vento zonal médio zonal, após 6,75 dias para os casos I, II e III.....	136
4.30 - Velocidade meridional e velocidade vertical, multiplicada por 10^6 , médias zonais após 6,75 dias, para os casos I, II e III.....	137
4.31 - Circulação meridional média zonal (v , 100 w) e liberação de calor latente, para os casos I, II e III.....	138
5.1 - Campos de vento relativo e de temperatura, analisados pelo NMC, para os dias 14 e 15 de abril de 1979, em 1000, 850 e 700 mb às 12:00 TMG.....	144

	<u>Pág.</u>
5.2 - Vorticidade relativa (multiplicada por 10^7) correspondentes aos campos da Figura 5.1.....	145
5.3 - Divergência horizontal (multiplicada por 10^7), correspondentes aos campos da Figura 5.1.....	146
5.4 - Campo básico sobre Porto Alegre em abril de 1979 para simulação de sistemas de escala intermediária.....	148
5.5 - Temperatura e velocidade vertical (multiplicada por 10^4), em 800 mb após 1,5 e 2 dias para o modo de Mak.....	150
5.6 - Seções horizontais, em 800 mb após 2 dias, do módulo do gradiente horizontal de temperatura potencial multiplicada pelo comprimento de onda, da função de corrente multiplicada por 10^{-5} , da vorticidade multiplicada por 10^5 , da divergência multiplicada por 10^6 , da temperatura potencial equivalente e da razão de mistura.....	154
5.7 - Seções horizontais do vento relativo e da cobertura de nuvens e da umidade relativa em 800 mb, após 1,5; 1,75 e 2 dias.....	155
5.8 - Seções verticais da temperatura potencial equivalente e da umidade relativa após 2 dias, na região da cabeça da nuvem, na cauda e ao longo da nuvem.....	156
5.9 - Seções verticais da circulação relativa zonal, da circulação meridional, com a delimitação da cobertura de nuvens, e da umidade relativa, correspondentes à seções da Figura 5.8.....	159
6.1 - Imagem do satélite NOAA-5 do dia 02 de abril de 1978, 10:52 TMG, mostrando a formação de perturbações oceânicas de mesoescala na região I.....	167
6.2 - Estado básico para o oceano em 37°S e 41°W , curva de instabilidade ($k C_T$) e velocidade de fase das ondas instáveis.....	168
6.3 - Estrutura vertical linear teórica das perturbações de mesoescala no oceano: função de corrente, velocidade vertical e temperatura.....	169

	<u>Pág.</u>
6.4 - Campos de temperatura e do escoamento, na profundidade de 50 m e após 20; 22,5 e 25 dias.....	172
6.5 - Campos, em $z = 50$ m, da função de corrente, da vorticidade, multiplicada por 10^6 , da velocidade vertical, multiplicada por 10^5 , após 25 dias e da salinidade prática, após 20 dias.....	175
6.6 - Campos de temperatura e do escoamento, na profundidade de 500 m, após 20; 22,5 e 25 dias.....	180
6.7 - Campos, em $z = 500$ m, da função de corrente; da vorticidade, multiplicada por 10^6 , da velocidade vertical, multiplicada por 10^5 , após 25 dias, e da salinidade prática após 20 dias.....	181
6.8 - Seções verticais zonais da temperatura, após 25 dias, em $Y = -0,25; -0,5; -0,75$	182
6.9 - Seções verticais zonais da vorticidade, multiplicada por 10^6 , após 25 dias em $Y = -0,25; -0,5; -0,75$	183
6.10 - Seções verticais zonais do escoamento, após 25 dias, em $Y = -0,25; -0,5; -0,75$	184
6.11 - Seções verticais zonais da salinidade prática, após 20 dias, em $Y = -0,25; -0,5; -0,75$	185
6.12 - Estruturas verticais meridionais, em $X = 0,583$; da temperatura, da vorticidade, multiplicada por 10^6 , do escoamento, após 25 dias, e da salinidade prática, após 20 dias.....	187
B.1 - Curvas de estabilidade marginal para o modelo de duas camadas, modificadas pela liberação de calor latente.....	B.4

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Onda de corte inferior, comprimento da onda mais instável, sua taxa de crescimento e sua velocidade de fase obtidas analiticamente por Mak (1982) e pelo modelo de diferenças finitas.....	35
2.2 - Escalas e características energéticas teóricas para as perturbações observadas de escala intermediária baroclinicamente instáveis	48
B.1 - Onda de corte inferior, comprimento da onda mais instável e sua taxa de crescimento em função da intensidade de aquecimento, para o modelo de duas camadas no plano-f.....	B.6

LISTA DE SÍMBOLOS

- c - velocidade de fase ($m\ s^{-1}$)
- C_p - calor específico à pressão constante do ar seco ($m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$)
- $C(\bar{E}_p, E_p)$ - conversão de energia potencial disponível do estado básico para energia potencial disponível da perturbação ($m^2\ s^{-3}$)
- $C(E_p, E_C)$ - conversão de energia potencial disponível da perturbação para energia cinética da perturbação ($m^2\ s^{-3}$)
- c_R - velocidade de propagação da onda ($m\ s^{-1}$)
- c_I - parte complexa da velocidade de fase ($m\ s^{-1}$)
- D - metade do comprimento de onda meridional (m)
- e_{sat} - pressão de vapor de saturação (mb)
- E_C - energia cinética da perturbação ($m^2\ s^{-2}$)
- E_p - energia potencial disponível da perturbação ($m^2\ s^{-2}$)
- \bar{E}_p - energia potencial disponível do estado básico ($m^2\ s^{-2}$)
- E_t - energia total da perturbação ($m^2\ s^{-2}$)
- f_o - parâmetro de Coriolis (s^{-1})
- g - aceleração da gravidade ($m\ s^{-2}$)
- G - geração de energia potencial disponível da perturbação por aquecimento diabático ($m^2\ s^{-3}$)
- h, H - estrutura vertical da fonte de calor latente
- $i = \sqrt{-1}$ - número complexo
- \hat{i} - versor horizontal zonal
- \hat{j} - índice para a discretização na vertical
- \hat{j} - versor horizontal meridional
- J - número de camadas do modelo discreto
- k - número de onda zonal (m^{-1})
- \hat{k} - versor vertical
- ℓ - número de onda meridional (m^{-1})
- L - comprimento de onda meridional (m)

L_C	-	comprimento da onda de corte inferior para instabilidade (m)
L_m	-	comprimento da onda mais instável (m)
m	-	índice de soma meridional
n	-	índice de soma zonal
p	-	pressão (mb)
p_b	-	pressão à base da nuvem (mb)
p_s	-	pressão à superfície (mb)
p_t	-	pressão no topo da atmosfera do modelo (mb)
Q	-	vorticidade potencial absoluta (s^{-1})
\dot{Q}	-	taxa de aquecimento diabático ($m^2 s^{-3}$)
r	-	índice de soma no tempo
R	-	constante do gás para o ar seco ($m^2 s^{-2} K^{-1}$)
$Re(\)$	-	parte real da variável
S	-	salinidade prática no oceano ($^{\circ}/_{\infty}$)
t	-	tempo (s)
T	-	temperatura absoluta (K)
T_*	-	valor de referência de T para o oceano (K)
$T^{(*)}$	-	perfil vertical de referência da temperatura (K)
u	-	velocidade zonal ($m s^{-1}$)
U	-	vento zonal do estado básico, função só da vertical ($m s^{-1}$)
u_g	-	vento zonal geostrófico ($m s^{-1}$)
U_m	-	vento zonal médio na vertical no modelo de duas camadas ($m s^{-1}$)
U_R	-	umidade relativa da atmosfera
U_T	-	cisalhamento vertical do vento zonal no modelo de duas camadas ($m s^{-1}$)
v	-	velocidade meridional ($m s^{-1}$)
\vec{V}	-	vento horizontal ($m s^{-1}$)
v_g	-	vento meridional geostrófico ($m s^{-1}$)
\vec{V}_{ψ}	-	parte rotacional do vento horizontal ($m s^{-1}$)
\vec{V}^{χ}	-	parte divergente do vento horizontal ($m s^{-1}$)
x	-	distância zonal (m)
$X = x/L$	-	distância zonal adimensional
$X = x-ct$	-	distância zonal percorrida pela onda (m)

y	-	distância meridional (m)
$Y = y/D$		distância meridional adimensional
w	-	velocidade vertical no sistema z ($m\ s^{-1}$)
$W = \omega / ik$	-	variável auxiliar para a velocidade vertical ($mb\ m\ s^{-1}$)
z	-	profundidade do oceano ou altura geopotencial na atmosfera (m)
Z	-	profundidade máxima do oceano no modelo (m)
α	-	taxa de decaimento exponencial com a pressão da fonte de calor latente
β	-	parâmetro de Rossby ($m^{-1}\ s^{-1}$)
γ	-	coeficiente de expansão térmica do oceano (K^{-1})
δ	-	divergência horizontal (s^{-1})
ϵ	-	parâmetro arbitrário relacionado com a intensidade da fonte de calor latente ($k\ mb^{-1}$)
Λ_T	-	coeficiente de resfriamento newtoniano (s^{-1})
Λ_ξ	-	coeficiente de atrito do tipo Rayleigh (s^{-1})
θ	-	temperatura potencial (K)
θ_e	-	temperatura potencial equivalente (K)
λ	-	inverso do raio de deformação de Rossby (m^{-1})
μ	-	número de onda em duas dimensões (m^{-1})
ν_I	-	taxa de crescimento da amplitude da onda no tempo (s^{-1})
ν_R	-	frequência de oscilação no tempo (s^{-1})
ξ	-	componente vertical da vorticidade relativa (s^{-1})
ξ_g	-	vorticidade geostrófica (s^{-1})
ρ	-	densidade específica ($kg\ m^{-3}$)
ρ_*	-	valor de referência da densidade específica para o oceano ($kg\ m^{-3}$)
σ	-	estabilidade estática ($m^2\ s^{-2}\ mb^{-2}$)
$\phi = gz$	-	geopotencial ($m^2\ s^{-2}$)
χ	-	potencial de velocidade ($m^2\ s^{-1}$)
ψ	-	função de corrente ($m^2\ s^{-1}$)
ω	-	velocidade vertical em coordenadas de pressão ($mb\ s^{-1}$)

ω_a	-	parte adiabática da velocidade vertical (mb s ⁻¹)
ω_d	-	parte diabática da velocidade vertical (mb s ⁻¹)
ω_A	-	parte devido à dissipação da velocidade vertical (mb s ⁻¹)
Δp	-	espaçamento vertical (mb)
$\nabla = \nabla_h =$		$\hat{i} \partial / \partial x + \hat{j} \partial / \partial y$ - gradiente horizontal
$\nabla^2 =$		$\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ - laplaciano horizontal
() _I	-	parte imaginária da variável
() _R	-	parte real da variável
() _s	-	valor na superfície da variável
() _t	-	valor no topo do modelo da variável
< >	-	média no volume da variável
()	-	média zonal da variável
()'	-	desvio em relação à média zonal da variável
	-	amplitude ou módulo da variável
(^)	-	estrutura vertical da perturbação quase-geostrófica
(~)	-	estrutura vertical do campo zonal
() ⁽ⁿ⁾	-	campo zonal de ordem n
() ⁽ⁿ⁾	-	perturbação de ordem n
() [*]	-	complexo conjugado da variável

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A instabilidade de escoamentos zonais horizontalmente uniformes, na presença de contornos inferiores é um dos problemas mais antigos da meteorologia dinâmica. Tal escoamento é dito baroclinicamente instável quando modos normais de pequena amplitude crescem exponencialmente com o tempo. O crescimento dessas perturbações se dá pela conversão de energia potencial do estado básico para energia cinética da perturbação, através da energia potencial da perturbação. As ondas baroclínicas são eficientes em transportar calor e quantidade de movimento na horizontal e na vertical, sendo muito importantes na manutenção da circulação geral da atmosfera (Phillips, 1954).

Charney (1947) e Eady (1949) estabeleceram os fundamentos da teoria de instabilidade baroclínica, tornando-se esta uma vasta área de pesquisa em meteorologia e existindo inúmeros trabalhos abordando os mais variados aspectos do assunto. Serão aqui revisados apenas os de maior relevância para o tema proposto posteriormente. A Figura 1.1 mostra um diagrama esquemático (número de onda versus cisalhamento vertical do vento) do domínio de modos normais instáveis para perfis lineares de vento zonal (Geisler and Garcia, 1977). Charney (1947) foi o primeiro a estudar o problema da instabilidade baroclínica para um escoamento zonal linear com a altura em uma atmosfera semi-infinita e continuamente estratificada. A curva contínua da Figura 1.1 representa a curva neutra ou marginalmente instável por ele obtida. A região do espectro à esquerda dessa curva representa a região onde os modos normais são instáveis. A instabilidade aumenta com o cisalhamento e com a latitude. Charney (1947) usa um modelo quase-geostrófico

num plano-beta de latitudes médias com estratificação próxima à neutra. Nota-se também pela Figura 1.1 que não há corte inferior na curva de instabilidade, ou seja, todas as ondas curtas são instáveis.

Eady (1949) considerando também perfis lineares do escoamento zonal, porém usando um modelo num plano-f compreendido entre duas placas rígidas horizontais e com estabilidade estática suficientemente alta, obteve modos normais instáveis em toda região do espectro do lado das ondas longas, sendo as ondas mais curtas estáveis. As ondas muito longas são instáveis em seu modelo devido a não considerar o efeito de beta, ou seja, da variação do parâmetro de Coriolis com a latitude. Combinando as características dos dois modelos pode-se obter uma curva típica da taxa de crescimento representada pela linha tracejada na Figura 1.1 (Phillips, 1954). Nota-se nessa curva cortes inferior e superior, havendo uma onda com máxima taxa de crescimento relativa. Há também um cisalhamento mínimo para instabilidade, abaixo do qual todas as ondas são estáveis.

Green (1960) encontrou modos instáveis na região do espectro à direita da curva de instabilidade marginal de Charney, como mostra a Figura 1.1. Green (1960) e Burger (1962) notaram que a curva separando os chamados modos de Charney-Eady dos modos de Green é apenas uma da família de curvas neutras. Então, um modelo no plano-beta com cisalhamento contínuo é instável para todos os cisalhamentos e comprimentos de onda, excluindo certas curvas no espaço dos parâmetros sobre as quais as ondas neutras se encontram. Miles (1964) estudou taxas de crescimento nas vizinhanças das curvas neutras e mostrou que os modos do lado das ondas longas crescem mais lentamente que os modos do lado das ondas curtas.

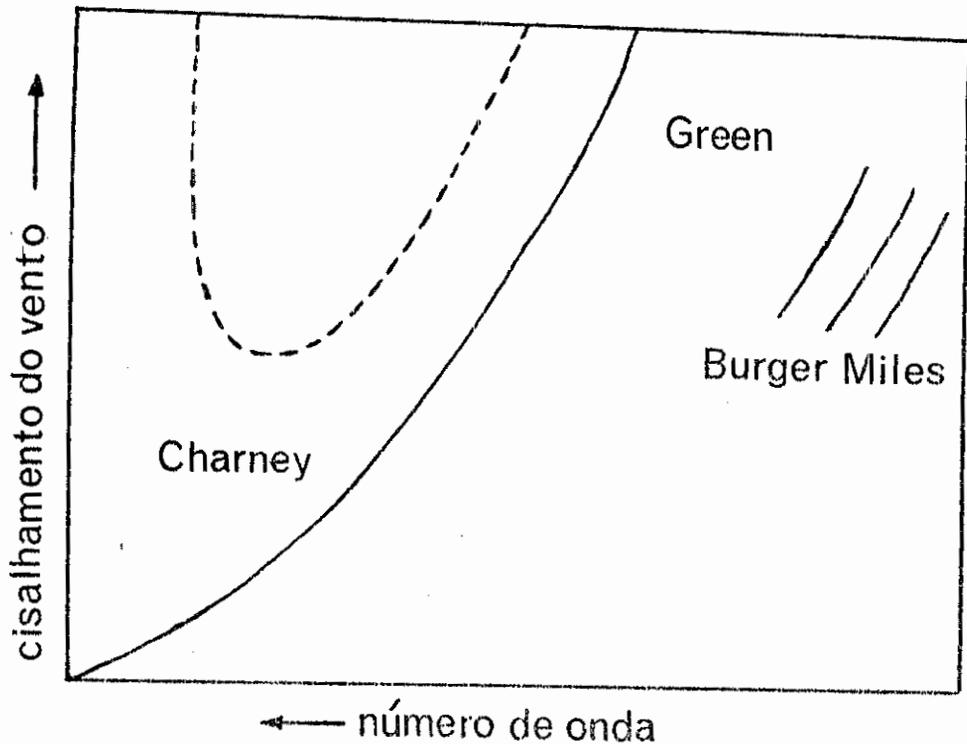


Fig. 1.1 - Diagrama esquemático do domínio dos modos normais instáveis para perfis de vento zonal lineares com a altura.

FONTE: adaptado de Geisler e Garcia (1977).

O desenvolvimento de perturbações de tempo ("weather") de escala sinótica em latitudes médias, processo chamado ciclogênese, quando estudado como uma manifestação da amplificação de perturbações infinitesimais superimpostas à uma corrente zonal instável, mostram taxas de crescimento e escalas semelhantes às observadas. Então, pode-se dizer em geral que as perturbações de latitudes médias nas escalas dos ciclones são a contrapartida na atmosfera dos modos de Charney-Eady (Geisler and Garcia, 1977). Phillips (1954) usando um modelo quase geostrófico de duas camadas em um plano-beta mostrou essas afirmações, que podem também ser encontradas em Holton (1979).

Gall (1976 a, b e c) porém, alerta para o fato de que a não linearidade é muito importante no estudo das perturbações baroclínicas. Para tanto, realizou estudos comparativos usando modelos linear (ML) e de circulação geral (GCM). Gall (1976a) encontrou discrepâncias entre a teoria linear e os GCM, tais como: no ML a taxa de crescimento máxima é para os números de onda de 12 a 15 enquanto que no GCM para 5 a 7; a amplitude máxima na perturbação do geopotencial para números de onda de 5 a 7 é perto da superfície para o ML e na tropopausa para o GCM; a velocidade de fase para números de onda de 7 a 9 é mais lenta, relativamente, no ML e mais rápida no GCM. Tais discrepâncias para as ondas de 7 a 15 se devem a processos não-lineares tais como: efeito do atrito na superfície, interação entre a onda em crescimento e o estado básico, interações entre as próprias ondas, processos convectivos e de liberação de calor latente. Gall (1976a) ainda ressalta que admitindo a teoria linear válida, outros efeitos importantes não incluídos deveriam explicar as diferenças, tais como: variação da estabilidade estática com a altura, distribuições mais realistas do vento médio zonal, efeitos da geometria esférica da Terra e efeitos de movimentos não-geostróficos. Além desses fatores físicos existem outros computacionais: erro de truncamento, incertezas na distribuição espacial exata do vento zonal e condições de contorno do modelo.

Além disso, na teoria linear as perturbações são infinitesimalmente pequenas, enquanto na atmosfera real têm amplitude grande. Supõem-se, então, na aplicação da teoria linear que as perturbações baroclínicas, enquanto crescem de pequena para amplitudes observáveis, não mudam consideravelmente sua estrutura e pode-se estender tal teoria até o estado de amplitude finita. Apesar disso, a teoria linear não explica a distribuição vertical observada de energia cinética turbulenta (Gall, 1976a), que tem um

máximo principal perto da tropopausa e outro secundário perto da superfície. Só a inclusão do atrito não explicaria tais diferenças, pois o mesmo ocorre com o geopotencial que não é diretamente afetado por esse efeito.

Usando um modelo de equações primitivas incluindo o efeito do atrito e permitindo a interação de uma única onda com o estado básico, Gall (1976b) concluiu que enquanto a onda evolue, modifica o estado básico de tal modo que a taxa de crescimento da onda é menor perto da superfície, permitindo que a parte superior cresça para amplitudes maiores que em baixos níveis. A redução próxima à superfície é causada pelo aumento da estabilidade estática nessa região. Este é o mecanismo pelo qual as ondas de 5 a 7 no GCM diferem das mesmas no ML. Gall (1976b) verificou ainda que as ondas curtas não dominam no GCM, apesar de terem taxa de crescimento maior, pois tais ondas são fundamentalmente perturbações próximas à superfície e o aumento da estabilidade estática nessa região e a dissipação por atrito provocam o fim do crescimento das ondas curtas antes do que acontece para as ondas longas, as quais se estendem até a tropopausa. Então, apesar de as ondas curtas atingirem sua máxima quantidade de energia cinética (taxa de crescimento maior) antes das ondas longas, essas últimas dominam o campo final pois as primeiras são dissipadas mais rapidamente.

As ondas são continuamente geradas pela instabilidade baroclínica do escoamento zonal no modelo de Gall (1976b), mas são modificadas em escala e estrutura enquanto crescem para amplitude finita. O resultado desse processo é o que é dado pelo GCM. A estrutura das ondas longas baroclínicas (número de onda em torno de 7) correspondem bem com as do GCM.

Quando a onda interage com o escoamento médio zonal, é transportado calor para os pólos perto da superfície, o que modifica o cisalhamento vertical do vento zonal (abaixo de 500 mb); além disso, há um aumento da estabilidade estática média zonal perto da superfície (abaixo de 700 mb). Quando ocorrem tais mudanças, outros processos como a radiação, a convecção e a liberação de calor latente começam a restaurar o escoamento médio zonal para seus valores iniciais. No modelo de Gall (1976b) foi suposto que a taxa de crescimento da onda excede a taxa na qual o escoamento médio zonal é restaurado pelos processos diabáticos. Gall ressalta que tal restrição é válida para ondas maiores que 9, porém para ondas mais longas (da ordem de 7) "está aberto para debate". Além disso, a interação onda-onda e a liberação de calor latente na convecção úmida também tem um papel importante na reestruturação dos turbilhões ("eddies"), tanto modificando a estrutura da onda, como alterando o escoamento médio zonal enquanto a onda evolue.

Gall (1976c) realizou experimentos para verificar o efeito da liberação de calor latente no desenvolvimento de ondas baroclínicas. Encontrou que a taxa de crescimento de tais ondas aumenta significativamente, porém mantém a escala (onda 15). Com a inclusão da umidade a estrutura vertical é modificada, encontrando-se dois máximos na vertical na energia cinética turbulenta, um perto da superfície e o outro na alta troposfera.

Para verificar o efeito da resolução vertical no espectro das ondas instáveis baroclinicamente Staley e Gall (1977) usaram um modelo quase-geostrófico de 4 camadas. Notaram que um pequeno decréscimo da estabilidade estática ou o aumento do cisalhamento do vento em baixos níveis implicam em uma variação da onda mais instável de 4000 km (onda 7) para 2000 km (onda 15);

enquanto que mudanças similares em altos níveis não causam grandes alterações. As ondas com comprimento menor que 3000 km são confinadas abaixo de 500 mb, enquanto que ondas maiores de 4000 km estendem-se por toda a troposfera. Isso significa que as variações na estabilidade estática em baixos níveis afetam principalmente as ondas curtas.

A mudança da onda mais instável para ondas mais curtas é possível nesse modelo de 4 níveis pois permite uma resolução maior da velocidade vertical, isto é, as ondas curtas têm velocidade vertical máxima na baixa troposfera e as de escala intermediária tem o máximo próximo à 500 mb. Então, o modelo de duas camadas de Phillips (1954) e Holton (1979) dá o máximo crescimento para ondas com comprimento da ordem de 4000 km, enquanto que as ondas curtas nesse modelo ou são neutras, ou têm taxa de crescimento pequena.

Nos modelos contínuos de Charney (1947) e Eady (1949) os perfis verticais de vento e de temperatura são funções simples da altura, não podendo ser consideradas variações com a altura tanto do cisalhamento do vento, como da estabilidade estática. Então, os modelos contínuos mostram máximo crescimento em ondas de escala sinótica.

Staley e Gall (1977) ressaltam então que se existe a possibilidade de que ondas curtas possam ser mais instáveis que as ondas de escala sinótica, as quais dominam a circulação geral em latitudes médias, devem haver mecanismos de seleção de escala (do ponto de vista global) mais poderosos que a taxa de crescimento para explicar a escala dessas perturbações baroclínicas em latitudes médias, tais como: interação não linear entre as ondas em crescimento e o escoamento zonal, forças friccionais, mecanismos de cascata de energia das ondas de escala menor para as de maior.

Nessa mesma linha de modelos de alta resolução vertical, Satyamurty et alii (1982) desenvolveram um modelo de equações primitivas com a aproximação de Boussinesq, com 20 níveis, e usaram um estado básico semelhante àqueles encontrados próximo à frentes frias fracas idealizadas. Verificaram que a inclusão da derivada segunda com a altura do vento zonal básico, ou equivalentemente uma pseudo variação da estabilidade estática com a latitude, modificando-a cerca de 30%, acarreta o aparecimento de uma nova região de instabilidade em ondas curtas (1000 km), com estrutura vertical confinada nos baixos níveis. A inclusão da liberação de calor latente do tipo "wave-CISK" (CISK-Conditional Instability of the Second Kind), aumenta consideravelmente a taxa decrescimento das ondas curtas. Os efeitos friccionais são tais que o arrasto na superfície causa o aparecimento de uma nova região de instabilidade em escalas intermediárias e um atrito uniforme na vertical diminui em geral a instabilidade das ondas já existentes. Como aplicação desse tipo de modelo é sugerido que o mecanismo de desenvolvimento de distúrbios de escala subsinótica é a instabilidades baroclínica mais o efeito de curvatura do perfil do vento zonal, atuando o aquecimento pela liberação de calor latente no sentido de aumentar a taxa de crescimento de tais perturbações.

Como a teoria da instabilidade baroclínica seca não consegue explicar a escala e a taxa de crescimento de perturbações de escala intermediária (1000-2000 km) que se desenvolvem nas vizinhanças de zonas frontais, outros efeitos, tal como a liberação de calor latente, devem ser incluídos. Nitta (1964) e Rasmussen (1979) respectivamente estudaram também o efeito da liberação de calor latente sobre o desenvolvimento de ciclones de escala relativamente

pequena e sobre as baixas polares usando o mecanismo de CISK.

Moorthi e Arakawa (1985) elaboraram um modelo quase-geostrófico em um plano-beta de latitudes médias com 7 níveis na vertical para estudar a instabilidade baroclínica, incluindo aquecimento devido aos cúmulos. Usaram perfís verticais de vento médio zonal linear com a pressão e a taxa de variação vertical da temperatura média zonal constante. Para tal estudo utilizam dois tipos de parametrizações da liberação de calor latente: um com o aquecimento proporcional à velocidade vertical no topo da camada mais inferior do modelo e o outro seguindo a parametrização proposta por Arakawa e Schubert (1974). Em ambos os casos a seleção da onda mais instável é prejudicada por modos cuja taxa de crescimento é maior e máxima nas ondas mais curtas.

Então, a liberação de calor latente incluída da forma citada anteriormente não seleciona a onda mais instável, ou seja, a onda com maior taxa de crescimento é a mais curta. Mak (1982) sugere uma parametrização do aquecimento mais apropriada para latitudes médias, apesar de semelhante em forma à do topo "wave CISK", porém, a velocidade vertical da base da nuvem é dada pela própria equação-omega do caso seco. Mak (1982) usando um modelo quase-geostrófico em um plano-f obteve soluções analíticas considerando o vento zonal básico linear com a pressão e a estabilidade estática constante, incluindo a parametrização do aquecimento por liberação de calor latente da forma acima exposta. A essência física da parametrização é considerar que já existe uma onda baroclinicamente instável do ponto de vista seco, a qual geraria o movimento vertical necessário para permitir a convecção úmida, modificando a onda mais instável pelo efeito da liberação de calor latente. Com esse tipo de parametrização elimina-se as

características indesejáveis das anteriores, ou seja, na parametrização de Mak: há um corte inferior para a instabilidade, a seleção da onda mais instável é bem definida, a onda mais instável é cada vez mais curta à medida que se aumenta o aquecimento (até magnitudes médias) e sua taxa de crescimento torna-se cada vez maior. A estrutura vertical das ondas mais instáveis é tal que possuem um duplo máximo na vertical, como em Gall (1976c). Esse modelo de Mak (1982), portanto, pode ser aplicado para as perturbações de escala intermediária, nas quais a liberação de calor latente é um fator importante.

Muitos estudos observacionais e teóricos discutem o mecanismo de desenvolvimento de perturbações de escala intermediária nas proximidades das correntes de jato polares. Tais distúrbios têm escala horizontal da ordem de 1000 km a 2000 km. Reed (1979) e Mullen (1979, 1982 e 1983) estudaram as características observadas de tais perturbações e o ambiente básico em que se formam. Reed (1979) verificou que os ciclones polares se formam sobre os oceanos no inverno e sua formação é precedida pelo desenvolvimento de uma região de forte convecção. Esses ciclones, às vezes, adquirem a configuração de uma nuvem na forma de vírgula no Hemisfério Norte (vírgula invertida no Hemisfério Sul) quando atinge o estágio maduro. Mullen (1979) usando 22 casos de ocorrência de nuvens vírgula no Pacífico Norte, construiu estruturas compostas do vento zonal e da temperatura no estágio de geração e no estágio maduro. Mullen (1982) notou que ciclones polares muito semelhantes àqueles sobre os oceanos podem se formar sobre os continentes no inverno. Alguns desses ciclones formam-se com aprofundamento explosivo. Mullen (1983) apresenta exemplo desse caso. Usando imagens de satélite, Carleton (1985) confirmou a existência de baixas polares no Atlântico Norte e no Pacífico Norte. No caso do Hemisfério Sul, a falta de dados sinóticos convencionais impedem um

estudo detalhado das perturbações de escala intermediária nas altas latitudes. Entretanto, as imagens de satélite mostram a existência de uma rica variedade de vórtices com nuvens associadas no Hemisfério Sul. Em alguns casos, as nuvens se organizam nos vórtices ou ciclones sobre o continente da América do Sul. Carleton (1979, 1981) notou em algumas regiões a ocorrência de nuvens com forma de vírgula invertida associadas com ciclogêneses. Uma dessas regiões é a parte sudeste da América do Sul. Um estudo de imagens de satélite para um ano (abril de 1979 a março 1980) mostrou que as perturbações de escala intermediária, que se formam sobre essa região, tem uma ligeira preferência para as estações de transição (Bonatti and Rao, 1987) Tais perturbações provocam chuva muito intensa sobre as regiões sul do Brasil e Uruguai.

A instabilidade baroclínica e a liberação de calor latente de condensação parecem ser os mecanismos básicos para o desenvolvimento das baixas polares (perturbações de escala intermediária que se formam nas correntes polares). Mansfield (1974) e Duncan (1977) sugerem a instabilidade baroclínica seca, enquanto Rasmussen (1979 e 1981) propôs a CISK como mecanismo de sua formação. Reed (1979) e Mullen (1979) propõem que tanto a instabilidade baroclínica como a CISK são importantes.

Sardie e Warner (1983) usaram um modelo quase-geostrófico de três camadas para discutir o mecanismo de desenvolvimento das baixas polares. Eles distinguiram dois tipos de baixas polares: aquelas que se formam no Pacífico em torno de 40°N e outras que se formam no Atlântico mais ao norte em torno de 60°N. Concluíram que a instabilidade baroclínica úmida é importante para as baixas polares do Pacífico, enquanto que a instabilidade baroclínica úmida juntamente com a CISK são os mecanismos geradores das baixas polares do Atlântico. Entretanto, na

sua maneira de definir baroclinia úmida, o aquecimento é expresso em termos de levantamento de grande escala tal que o termo de aquecimento pode ser incluído com o termo adiabático (estabilidade estática vezes velocidade vertical). Então, o efeito do aquecimento seria equivalente à uma redução na estabilidade estática. Aquecimento adicional pode reduzir suficientemente a estabilidade estática, levando a uma seleção de modos tal que a perturbação tenha escala muito pequena. Esse é um resultado conceitualmente inconsistente (Mak, 1983a). Além disso, estabilidade estática muito baixa invalida a suposição quase-geostrófica, pois geraria fortes movimentos verticais ($>> 10^{-3} \text{ mb s}^{-1}$) tornando a aproximação hidrostática inaceitável e a divergência muito grande. Porém, é necessário a utilização de algum tipo de parametrização de CISK para explicar o desenvolvimento de perturbações de escala intermediária, pelo menos aquelas associadas com precipitação intensa e com nuvens cúmulos. Em um estudo recente, Sardie e Warner (1985) realizaram experimentos numéricos e interpretaram seus resultados em vista de seu estudo anterior. Os problemas de modelos de baixa resolução vertical tal como o usado por Sardie e Warner (1983) foram discutidos por Staley e Gall (1977). Satyamurty et alii (1982) ressaltaram também a importância de modelos de alta resolução vertical para o estudo da instabilidade baroclínica de escala intermediária.

Então, espera-se que usando modelos multiníveis com a inclusão de liberação de calor latente como parametrizada por Mak (1982) possam ser obtidos melhores resultados na análise da instabilidade baroclínica úmida como o mecanismo gerador das baixas polares. Este modelo pode também dar bons resultados na análise da geração dos sistemas de escala intermediária que se formam nas estações de transição na região centro sul da América do Sul, os quais afetam o tempo no sul do Brasil.

Na evolução do estágio incipiente para amplitude finita, pode-se estudar o desenvolvimento das ondas baroclínicas supondo ser a sua geração como o dado pela teoria linear. A seguir, verificar como tais campos com amplificação exponencial são modificadas pelos efeitos de segunda ordem para se obter as características gerais em amplitude finita observadas nos mapas de tempo em latitudes médias. Saltzman e Tang (1972) utilizando tal procedimento desenvolveram um modelo analítico usando as equações de balanço dadas em Arakawa (1962), tal que o campo inicial é dado pelo modelo quase-geostrófico de duas camadas, incluindo variação senoidal na direção meridional. Este campo inicial é modificado pelos efeitos não-geostróficos de segunda ordem, alterando o estado básico e gerando perturbações de segunda ordem. Com este modelo Saltzman e Tang (1972) conseguiram reproduzir características observadas relevantes, tais como: o deslocamento meridional relativo e as intensificações das áreas de alta e de baixa pressão, a formação de baixas desprendidas em níveis superiores na troposfera com uma divisão da corrente de jato e a formação de zonas com fortes gradientes horizontais de temperatura representando frentes na média troposfera. Porém, em Saltzman e Tang (1972) tem-se o problema de resolução vertical muito pobre.

Saltzman e Tang (1974) estudaram a frontogênese na média troposfera em associação à ondas baroclínicas em desenvolvimento. Saltzman e Tang (1975a) generalizaram o modelo anterior no sentido de aumentar a ordem da solução dos campos da velocidade vertical e da função de corrente, porém mantendo o modelo de duas camadas verticais. Saltzman e Tang (1975b), com pequenas modificações, mostraram ser válida a aplicação de tal modelo para o caso da formação de frentes e de anéis térmicos desprendidos em uma corrente oceânica baroclínica.

Saltzman e Tang (1985) introduziram no seu modelo analítico uma equação para conservação de vapor d'água, considerado como constituinte passivo, com o intuito de se analisar as nuvens associadas às frentes. Saltzman e Tang (1985) chamaram tais nuvens de "nuvem vírgulas", porém Browning (1986) distingue através de observações baseadas em imagens de satélites três sequências básicas de desenvolvimento de vórtices em latitudes médias, a saber: desenvolvimento de nuvem vírgula inteiramente dentro do ar frio (Figura 1.2.a); desenvolvimento de uma oclusão instantânea ou falsa oclusão (Figura 1.2.b); e desenvolvimento de uma onda frontal (Figura 1.2.c). A formação de nuvens estudadas por Saltzman e Tang (1985) se refere ao terceiro caso e não ao primeiro como por eles sugerido. Existem diferenças fundamentais entre ambos tanto na formação como em escala. Browning (1986) ressalta que a distinção entre fenômenos frontais, ou baroclínicos, e os convectivos tende ser obscura. Zonas de chuva frontal adquirem comumente caráter convectivo; por outro lado, alguns fenômenos classificados como essencialmente convectivos podem adquirir características frontais. Essa característica dual é mais evidente nos sistemas com nuvens vírgula e nas baixas polares. No caso de nuvens associadas à frentes, Krishnamurti e Moxim (1971) estudaram a liberação de calor latente distinguindo duas regiões principais: a cauda onde há precipitação convectiva e a região da baixa na superfície onde há precipitação estável não-convectiva. Porém, a escala horizontal das nuvens vírgula é da ordem de 1000 a 2000 km e a de tempo de 0,5 a 1,5 dias (Mullen 1979), enquanto que, as ondas frontais tem escala horizontal da ordem de 3500 a 5000 km e de tempo de 4 a 7 dias.

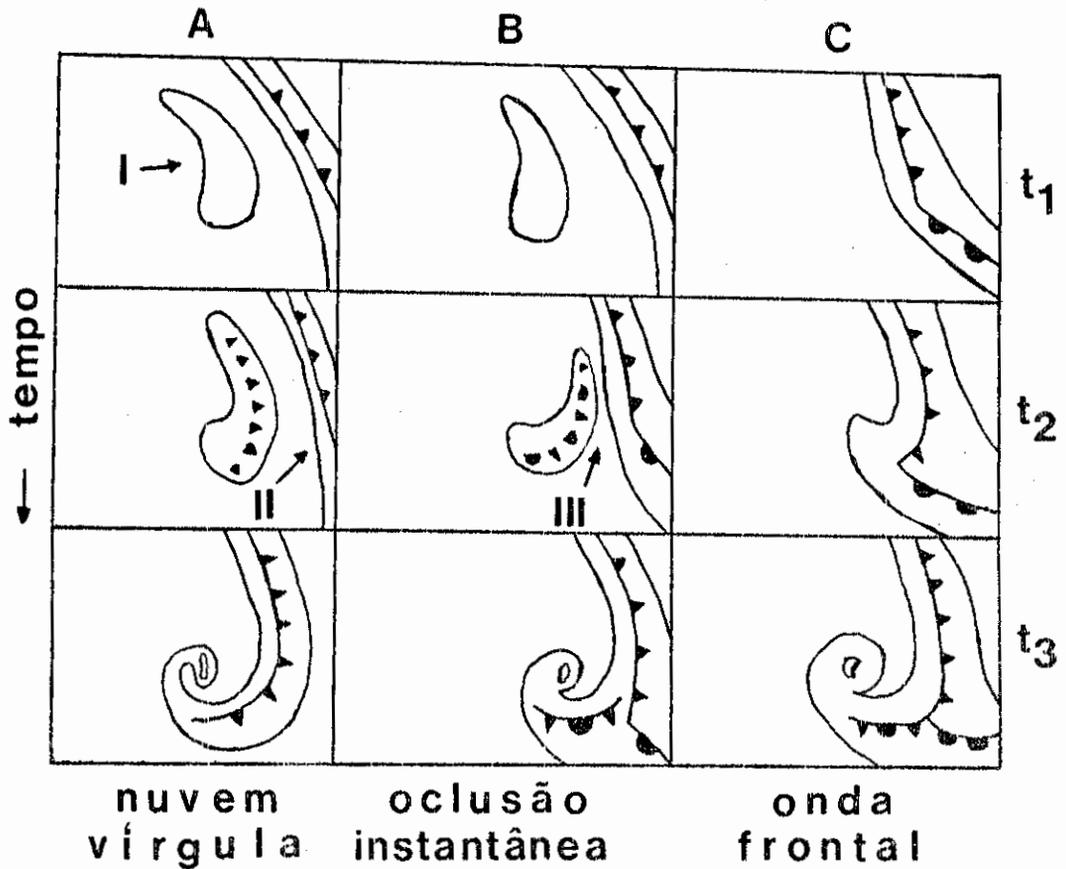


Fig 1.2 - Descrição esquemática da três sequências básicas de desenvolvimento de vórtices, evidente através de imagens de satélite: a) desenvolvimento de nuvem vírgula inteiramente dentro do ar frio; b) desenvolvimento de uma oclusão instantânea e c) desenvolvimento de uma onda frontal. Os algarismos romanos I, II e III indicam, respectivamente, uma região de forte convecção, uma banda de nuvem em decaimento e uma banda de nuvem convectiva mergindo com uma banda de nuvem frontal.

FONTE: adaptado de Browning (1986).

Browning (1986) ressalta que os sistemas de escala intermediária com nuvens vírgula (Figura. 1.2.a) ocorrem em associação com baroclinia em alguma parte ou em toda a profundidade da troposfera e, ao mesmo tempo, instabilidade condicional em uma profundidade substancial. A oclusão instantânea (Figura 1.2.b) é o nome dado a um sistema com nuvem na forma de lambda, produzida quando uma banda de nuvens associada com um cavado polar interage com uma banda de nuvens associada com a frente polar (Reed, 1979). A formação do primeiro ou do segundo caso, depende da posição relativa do cavado da onda curta ou do associado máximo de vortacidade em relação à frente polar. No primeiro caso, o cavado de onda curta e o associado máximo de vortacidade ocorrem bem para dentro do ar frio e não interage significativamente com a frente polar principal. Por outro lado, quando o máximo de vortacidade ocorre sobre a frente polar há a formação de uma onda frontal (Figura 1.2.c).

Dentro do contexto exposto até aqui, pode-se também analisar a formação no oceano de frentes e de perturbações de mesoescala associadas (com comprimento de onda de algumas centenas de quilômetros), com ênfase na região de confluência entre a corrente do Brasil, quente e com alta salinidade, e a corrente circumpolar Antártica, fria e com baixa salinidade. O ramo dessa última que chega até a bacia central argentina é chamado de corrente das Malvinas (Falkland). Recentemente, Roden (1986) analisou a estrutura observada das frentes termohalinas e do escoamento baroclínico na bacia argentina durante a primavera austral de 1984. Notou que as correntes do Brasil e a das Malvinas divergem rapidamente em torno de 42°W . Nessa região entre as correntes há a formação de turbilhões ciclônicos e anticiclônicos e frentes termohalinas fortes acompanham os contornos dessas correntes. Algumas das perturbações de mesoescala dessa região se desenvolvem em

faixas estreitas com um ou dois vórtices no final. Daí, ficam instáveis, separam-se da corrente principal e se desenvolvem em turbilhões e anéis de centro quente, predominantemente de forma elíptica. Têm eixos da ordem de 100 a 200 km e velocidade de propagação de 10 a 20 m s⁻¹. Entretanto, o campo de escoamento de mesoescala e a estrutura termohalina associada com a região de confluência entre a extensão para o mar aberto da corrente do Brasil e o ramo para norte-leste da corrente circumpolar Antártica, ainda são muito pouco conhecidos (Roden, 1986). Porém, baseando nas conclusões do estudo observacional de Roden (1986), pode-se sugerir que a instabilidade baroclínica é um fator importante no desenvolvimento de tais perturbações.

Serão estudadas distintamente neste trabalho as escalas das nuvens vírgula e das ondas frontais, nos seus estágios incipientes e na evolução para amplitude finita. Também será feita uma aplicação para o caso de frentes térmicas oceânicas e de perturbações de mesoescala associadas. Para tanto, os objetivos principais são os seguintes:

- a- elaborar um modelo linear quase-geostrófico multinível em diferenças finitas, incluindo a parametrização do aquecimento por liberação de calor latente como a dada por Mak (1982) e permitindo a utilização de perfis verticais observados de vento zonal e de estabilidade estática;
- b- aplicar tal modelo para sistemas de escala intermediária, que se formam principalmente nas estações de transição no centro-sul da América do

Sul e que causam fenômenos de tempo no sul do Brasil, e para as baixas polares do Pacífico Norte estudadas por Mullen (1979);

- c- estudar os efeitos não-lineares, não geostróficos e de liberação de calor latente na formação de frentes, através da generalização do modelo de Saltzman e Tang (1972, 1975a, 1985), para ser multinível na vertical, partindo do modo mais instável do caso seco, o qual será chamado de modo de Eady-Charney;
- d- empregar o modelo não-linear para o estudo do desenvolvimento dos sistemas de escala intermediária, com nuvens vírgulas invertidas, que se formam sobre o centro-sul do continente sul-americano, partindo do modo mais instável determinado quando se inclui a parametrização de liberação de calor latente proposta por Mak (1982), o qual será chamado de modo de Mak;
- e- empregar o modelo linear e o não-linear, modificados para o oceano e partindo de estados básicos típicos da região da confluência das correntes do Brasil e das Malvinas, para o estudo da formação de frentes térmicas oceânicas e de perturbações de mesoescala associadas nessa região.

No Capítulo 2 encontra-se a elaboração do modelo linear e a sua aplicação para os sistemas de escala intermediária da América do Sul e para as baixas polares do Pacífico Norte, como proposto nos itens a e b. No Capítulo 3 está a generalização do modelo de Saltzman e Tang (1972, 1975a, 1985) e no Capítulo 4 o estudo dos efeitos não-

lineares, não-geostróficos e de liberação de calor latente, como expresso no item c. No Capítulo 5, como proposto no item d, encontra-se o estudo do desenvolvimento do modo de Mak. No Capítulo 6 tem-se o estudo teórico da formação de frentes térmicas e de perturbações de mesoescala associadas na bacia central argentina do Atlântico Sul (item e), bem como as modificações necessárias ao modelo para sua aplicação ao oceano. No Capítulo 7 há discussões, as conclusões e as preposições de novos trabalhos.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE LINEAR DA INSTABILIDADE BAROCLÍNICA COM O EFEITO DA LIBERAÇÃO DE CALOR LATENTE

Serão descritas neste capítulo as equações de um modelo linear quase-geostrófico para o estudo das perturbações baroclínicas em desenvolvimento em latitudes médias. Uma versão com duas camadas na vertical de tal modelo foi proposto por Phillips (1954). Porém, Staley e Gall (1977) mostraram que essa resolução é muito pobre, pois tanto a estrutura vertical do vento do estado básico bem como a da estabilidade estática, essa principalmente nos baixos níveis, são importantes na determinação das escalas e da estrutura das ondas dominantes. Por exemplo, baixa estabilidade estática próximo à superfície resulta em ondas curtas mais instáveis. Então, para um estudo das perturbações baroclínicas de escala intermediária é crucial a utilização de modelos multiníveis na vertical, além do que será incluído o efeito da liberação de calor latente.

Recentemente, Mak (1981, 1982) discutiu os problemas das formulações anteriores e desenvolveu uma nova parametrização do tipo "wave-CISK". Brevemente, a interação cooperativa entre a convecção cumulus e as perturbações de grande escala levando a um crescimento instável dos sistemas de grande escala é chamado de CISK. O aquecimento devido às nuvens cumulus é parametrizado em termos das variáveis de grande escala. Há basicamente dois tipos de parametrizações de CISK. No primeiro tipo, a convergência de umidade em baixos níveis é produzida pelo escoamento convergente na camada limite por efeitos de fricção, e é chamado de Ekman-CISK. No segundo tipo, essa convergência em baixos níveis é tomada como sendo a convergência associada à própria onda, e é conhecido como "wave-CISK".

O aspecto mais indesejável da "wave-CISK" é que a formulação comumente usada torna a onda mais curta possível no modelo a mais instável (Hayashi, 1970). Alguns modelos com Ekman-CISK parecem eliminar esse problema (Chang and Williams, 1974; Strunge-Pedersen and Rasmussen, 1985). Os princípios básicos da parametrização de Mak são consisamente dados em Mak (1986) (veja também Cho, 1986). Deve ser ressaltado que apenas o aquecimento devido à condensação não é suficiente para levar ao crescimento espontâneo das perturbações. Para a CISK ser efetiva é necessário ligá-la a mecanismos adicionais de geração tal como a instabilidade baroclínica. Na "wave-CISK" convencional toda a convergência de umidade obtida pelos modelos de grande escala é canalizada de volta nos processos de restauração ("feedback"). Na parametrização de Mak (1982), entretanto, apenas a circulação secundária quase-balanceada induzida dinamicamente é a responsável pela convergência de umidade. Mak (1982) parametrizou o aquecimento envolvido na interação cooperativa já citada em termos da velocidade vertical induzida nos baixos níveis, onde a maior parte da umidade é concentrada. A velocidade vertical está relacionada com o campo de vorticidade e é dada na parametrização apenas pela parte dinâmica da equação omega quase-geostrófica.

Para o estudo do desenvolvimento de perturbações baroclínicas de escala sinótica - ciclogênese - em latitudes médias pode-se utilizar o modelo quase-geostrófico sobre dois pontos de vista. O primeiro seria aquele conhecido como método do valor inicial, ou seja, a partir de um estado inicial procede-se a integração numérica do modelo; a seguir, analisar o crescimento ou não da energia potencial e da energia cinética das ondas dominantes. O segundo seria o método dos modos normais, o qual consiste na suposição da existência de um estado básico sobre o qual são superimpostas pequenas

perturbações; depois, procede-se a linearização das equações do modelo e analisa-se a taxa de crescimento da amplitude e a estrutura de tais perturbações através do cálculo dos autovalores e das autofunções do sistema linearizado. No presente estudo adotou-se o método dos modos normais, o qual permite uma solução semi-analítica (diferenças finitas só na vertical) mesmo para um sistema de equações não-linear mais completo, após a solução da parte linear, como será mostrado no Capítulo 3. Então, a ciclogênese será analisada como uma manifestação da amplificação de perturbações infinitesimas superimpostas à uma corrente zonal baroclínica.

2.1 - MODELO LINEAR MULTINÍVEL EM DIFERENÇAS FINITAS

Nesta seção é elaborado um modelo linear quase-geostrófico multinível em diferenças finitas utilizando a técnica dos modos normais. As variáveis são tais que a estrutura horizontal é determinada analiticamente e a vertical por diferenças finitas. A grade vertical e a distribuição de variáveis são mostradas na Figura 2.1. A equação da vorticidade é aplicada aos níveis ímpares e a equação da energia termodinâmica aos níveis pares. As condições de contorno são tais que a velocidade vertical em coordenada vertical p (ω) é nula no topo (p_g) e na superfície (p_t) do modelo. É considerado o efeito da liberação de calor latente segundo a parametrização proposta por Mak (1982). No Apêndice A encontra-se uma discussão sobre as equações aqui usadas e sobre as condições para se ter instabilidade neste modelo. As variáveis dependentes são definidas como:

$$\Psi_{2j-1}(x, y, t) = - U_{2j-1} Y + \Psi'_{2j-1} , \quad (2.1)$$

$$\omega_{2j}(x, y, t) = \omega'_{2j}(x, t) , \quad (2.2)$$

$$\dot{Q}_{2j}(x,y,t) = \dot{Q}'_{2j}(x,t) ; \quad (2.3)$$

onde $j=1$ a J , o número de camadas; ψ é a função de corrente, ϕ / f_0 , no qual ϕ é o geopotencial e f_0 é o parâmetro de Coriolis (constante); U_{2j-1} é o estado básico do vento zonal, variando apenas com o nível; x, y, p, t são, respectivamente, distância zonal, distância meridional, nível de pressão e tempo; a taxa de aquecimento \dot{Q}'_{2j} é dada por Mak (1982):

$$\dot{Q}'_{2j}(x,t) = - \epsilon C_p h_{2j} \omega'_a(x, p_b, t) , \quad (2.4)$$

onde ϵ ($K \text{ mb}^{-1}$) é uma constante arbitrária, C_p é o calor específico do ar seco à pressão constante, h_{2j} define a estrutura vertical da fonte de calor e $\omega'_a(x, p_b, t)$ é a velocidade vertical ω induzida baroclinicamente em p_b . A umidade é considerada uniformemente distribuída em uma camada entre a superfície e p_b . Isto significa que p_b é o nível da base da nuvem. O fornecimento de umidade para a condensação é tomado como sendo proporcional à $-\omega'_a(x, p_b, t)$ e à umidade específica desta camada. Então, o parâmetro de intensidade de aquecimento ϵ depende implicitamente do conteúdo de vapor d'água da camada úmida.

Para se aplicar o método dos modos normais, supõe-se soluções do tipo onda para as perturbações da forma:

$$\psi'_{2j-1}(x,t) = \text{Re} \{ \hat{\psi}_{2j-1} \exp[ik(x - ct)] \} , \quad (2.5)$$

$$\omega'_{2j}(x,t) = \text{Re} \{ \hat{\omega}_{2j-1} \exp[ik(x - ct)] \} , \quad (2.6)$$

$$\dot{Q}'_{2j}(x,t) = \text{Re} \{ \hat{Q}_{2j} \exp[ik(x - ct)] \} , \quad (2.7)$$

onde $k = 2\pi/L$ é o número de onda e L o comprimento de onda; $c = c_R + ic_I$, c_R é a velocidade de fase e $v_I = kc_I$ é a

taxa de crescimento da onda; $i = \sqrt{-1}$; $\text{Re} \{ \}$ representa a parte real; e as variáveis com símbolo " $\hat{}$ " são as amplitudes. Note que as perturbações são independentes da latitude.

As equações linearizadas da vorticidade e da energia termodinâmica para as amplitudes dadas nas Equações 2.5 e 2.6 são, respectivamente, em diferenças finitas:

$$[(c - U_{2j-1})k^2 + \beta]\hat{\Psi}_{2j-1} - \frac{f_0}{\Delta p} \left(\frac{\hat{\omega}_{2j+2}}{ik} - \frac{\hat{\omega}_{2j}}{ik} \right) = 0 \quad (2.8)$$

e

$$(c - U_{2j-1}) \frac{(\hat{\Psi}_{2j+1} - \hat{\Psi}_{2j-1})}{\Delta p} + \frac{(U_{2j+1} - U_{2j-1})}{\Delta p} \frac{(\hat{\Psi}_{2j-1} + \hat{\Psi}_{2j+1})}{2} - \frac{\sigma_{2j}}{f_0} \frac{\hat{\omega}_{2j}}{ik} + \frac{R \epsilon h_{2j}}{f_0 p_{2j}} \frac{\hat{\omega}_{a2jb}}{ik} = 0, \quad (2.9)$$

onde β é o parâmetro de Rossby, Δp é o espaçamento vertical ($= [p_s - p_t]/J$), σ é a estabilidade estática, R é a constante do gás para o ar seco e $2j_b$ corresponde ao nível do modelo onde se localiza a base da nuvem. Note que $\hat{\omega}$ aparece sempre dividido por ik e é o único termo com coeficiente complexo; então, é conveniente definir uma nova variável tal que

$$\hat{W} = \frac{\hat{\omega}}{ik}. \quad (2.10)$$

Para se obter um problema de autovalor-autovetor com as Equações 2.8 e 2.9, resta saber qual a

relação entre $\hat{W}_{a2j} = \hat{W}_b$ e $\hat{\Psi}_{2j-1}$. Para tanto, como já ressaltado anteriormente, e seguindo a parametrização proposta por Mak (1982), considera-se a equação-ômega correspondente, de modo que

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_a + \hat{\omega}_d, \quad (2.11)$$

onde ω_a é a parte da velocidade vertical induzida baroclinicamente e obtida através da equação-ômega adiabática, e ω_d é a parte da velocidade vertical induzida exclusivamente pelo aquecimento dado na Equação 2.4. Então, pode-se escrever em diferenças finitas as duas componentes da equação-ômega da seguinte forma:

$$\frac{f_o^2}{\sigma_{2j}} \frac{(\hat{W}_{a2j-2} - 2\hat{W}_{a2j} + \hat{W}_{a2j+2})}{(\Delta p)^2} - k^2 \hat{W}_{a2j} = \frac{\beta f_o}{\sigma_{2j}} \frac{(\hat{\Psi}_{2j+1} - \hat{\Psi}_{2j-1})}{\Delta p} - k^2 \frac{f_o}{\sigma_{2j}} \frac{(U_{2j+1} - U_{2j-1})}{\Delta p} (\hat{\Psi}_{2j-1} + \hat{\Psi}_{2j+1}) \quad (2.12)$$

e

$$\frac{f_o^2}{\sigma_{2j}} \frac{(\hat{W}_{d2j-2} - 2\hat{W}_{d2j} + \hat{W}_{d2j+2})}{(\Delta p)^2} - k^2 \hat{W}_{d2j} = -k^2 \frac{Re}{P_s} \frac{H_{2j}}{\sigma_{2j}} \hat{W}_b, \quad (2.13)$$

onde $H_{2j} = h_{2j} P_s / P_t$.

A "velocidade" \hat{W}_b em função de $\hat{\Psi}_{2j-1}$ é então obtida reescrevendo a Equação 2.12 do seguinte modo:

$$\lambda^2_{2j} \hat{W}_{a2j-2} - (k^2 + 2 \lambda^2_{2j}) \hat{W}_{a2j} + \lambda^2_{2j} \hat{W}_{a2j+2} =$$

$$\lambda_{2j}^2 \frac{\Delta P}{f_0} \{ -[\beta + k^2 (U_{2j+1} - U_{2j-1})] \hat{\psi}_{2j-1} + [\beta - k^2 (U_{2j+1} - U_{2j-1})] \hat{\psi}_{2j+1} \}, \quad (2.15)$$

onde

$$\lambda_{2j}^2 = \frac{f_0^2}{\sigma_{2j} (\Delta P)^2}, \quad (2.16)$$

para $j=1, J$ e com $\hat{W}_{a0} = \hat{W}_{a2J} = 0$, e de onde necessita-se apenas $\hat{W}_b = \hat{W}_{a2jb}$. Escrevendo a Equação 2.15 em forma matricial

$$A \underset{\sim}{W}_a = B \underset{\sim}{\Psi}, \quad (2.17)$$

onde

$$\underset{\sim}{W}_a = [\hat{W}_{a2}, \hat{W}_{a4}, \dots, \hat{W}_{a2j}, \dots, \hat{W}_{a2J-4}, \hat{W}_{a2J-2}]^T,$$

$$\underset{\sim}{\Psi} = [\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_3, \dots, \hat{\psi}_{2j-1}, \dots, \hat{\psi}_{2J-3}, \hat{\psi}_{2J-1}]^T,$$

e as matrizes A e B são facilmente construídas, e desde que $\det(A)$ não seja nulo, obtém-se

$$\underset{\sim}{W}_a = (A^{-1} B) \underset{\sim}{\Psi}, \quad (2.18)$$

onde A^{-1} é a matriz inversa de A. De onde a linha jb da matriz $(A^{-1} B)$ contém os coeficientes de $\hat{\psi}_{2j-1}$ que permitem escrever \hat{W}_b em função de $\hat{\psi}_{2j-1}$, os quais podem ser obtidos diretamente por eliminação de Gauss.

Então, a equação resultante para o modelo multinível em um plano-beta, é obtida eliminando-se \hat{W} entre

as Equações 2.8 e 2.9, a qual corresponde à equação da vorticidade potencial quase-geostrófica, incluindo aquecimento e em diferenças finitas, e é dada por:

$$(\beta - k^2 U_1 - \lambda_2^2 U_3) \hat{\Psi}_1 + (\lambda_2^2 U_1) \hat{\Psi}_3 - \epsilon_0 \lambda_2^2 H_2 \hat{W}_b = c [-(k^2 + \lambda_2^2) \hat{\Psi}_1 + \lambda_2^2 \hat{\Psi}_3] \quad (2.19.a)$$

para $j = 1$,

$$(\lambda^2_{2j-2} U_{2j-1}) \hat{\Psi}_{2j-3} + (\beta - \lambda^2_{2j-2} U_{2j-3} - k^2 U_{2j-1} - \lambda^2_{2j} U_{2j+1}) \hat{\Psi}_{2j-1} + (\lambda^2_{2j} U_{2j-1}) \hat{\Psi}_{2j+1} - \epsilon_0 (\lambda^2_{2j} H_{2j} - \lambda^2_{2j-2} H_{2j-2}) \hat{W}_b = c [\lambda^2_{2j-2} \hat{\Psi}_{2j-3} - (k^2 + \lambda^2_{2j-2} + \lambda^2_{2j}) \hat{\Psi}_{2j-1} + \lambda^2_{2j} \hat{\Psi}_{2j+1}] \quad (2.19.b)$$

para $j = 2, J-1$, e

$$(\lambda^2_{2J-2} U_{2J-1}) \hat{\Psi}_{2J-3} + (\beta - \lambda^2_{2J-2} U_{2J-3} - k^2 U_{2J-1}) \hat{\Psi}_{2J-1} + \epsilon_0 \lambda^2_{2J-2} H_{2J-2} \hat{W}_b = c [\lambda^2_{2J-2} \hat{\Psi}_{2J-3} - (k^2 + \lambda^2_{2J-2}) \hat{\Psi}_{2J-1}] \quad (2.19.c)$$

para $j=J$, onde $\epsilon_0 = \frac{R \epsilon \Delta p}{f_0 p_s}$

A Equação 2.19 forma um problema de autovalor-autovetor, onde c é o autovalor e $\hat{\Psi}$ é o autovetor. Usando as condições de contorno ($\hat{W}_0 = \hat{W}_{2J} = 0$), obtém-se os valores da função de corrente nos contornos dados por:

$$\hat{\Psi}_0 = \frac{(c - U_t)}{(c - U_1)} \quad (2.20a)$$

e

$$\hat{\Psi}_{2J} = \frac{(c - U_S)}{(c - U_{2J-1})} \quad (2.20b)$$

para o topo e superfície do modelo, respectivamente.

A amplitude da velocidade vertical é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{2j} = ik \lambda^2_{2j} \frac{\Delta p}{f_0} [(c - U_{2j-1}) \hat{\Psi}_{2j+1} - (c - U_{2j+1}) \hat{\Psi}_{2j-1}] \\ + ik \frac{R\epsilon}{p_s} \frac{H_{2j}}{\sigma_{2j}} \hat{W}_b . \end{aligned} \quad (2.21)$$

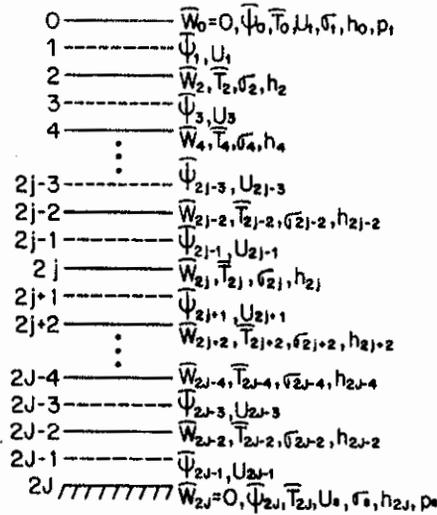


Fig. 2.1 - Grade vertical com distribuição das váriaveis nas J camadas

2.1.1 - ENERGÉTICA

As relações de energia podem ser obtidas da equação da vorticidade e da equação da energia termodinâmica. São dadas por

$$\frac{dE_C}{dt} = C(E_p, E_C) , \quad (2.22)$$

$$\frac{dE_p}{dt} = C(\bar{E}_p, E_p) - C(E_p, E_C) + G , \quad (2.23)$$

onde E_C é a energia cinética turbulenta, E_p é a energia potencial disponível turbulenta, \bar{E}_p é a energia potencial disponível do estado básico, G é a geração de E_p pelo aquecimento e $C(A,B)$ representa a conversão de A para B , se positivo. Os termos das Equações 2.22 e 2.23 são integrais de volume (unitário na direção meridional) no sistema (x,y,p) sobre um comprimento de onda e são dadas, em diferenças finitas consistentes com as Equações 2.8 e 2.9, por

$$E_C = \frac{k^2 b}{2} \sum_{j=1}^J (\hat{\psi}_{R2j-1}^2 + \hat{\psi}_{I2j-1}^2) , \quad (2.24)$$

$$E_p = \frac{b}{2} \sum_{j=1}^{J-1} \lambda^2_{2j} [(\hat{\psi}_{R2j+1} - \hat{\psi}_{R2j-1})^2 + (\hat{\psi}_{I2j+1} - \hat{\psi}_{I2j-1})^2] , \quad (2.25)$$

$$C(E_p, E_C) = \frac{f_0 b}{\Delta p} \sum_{j=1}^{J-1} [\hat{\omega}_{R2j} (\hat{\psi}_{R2j+1} - \hat{\psi}_{R2j-1}) + \hat{\omega}_{I2j} (\hat{\psi}_{I2j+1} - \hat{\psi}_{I2j-1})] , \quad (2.26)$$

$$C(\bar{E}_p, E_p) = kb \sum_{j=1}^{J-1} \lambda^2_{2j} (U_{2j+1} - U_{2j-1}) \cdot (\hat{\psi}_{R2j-1} \hat{\psi}_{I2j+1} - \hat{\psi}_{R2j+1} \hat{\psi}_{I2j-1}) \quad (2.27)$$

e

$$G = - \frac{Rb\Delta p}{C_p f_0} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{\lambda_{2j}^2}{p_{2j}} [\hat{Q}_{R2j}(\hat{\Psi}_{R2j+1} - \hat{\Psi}_{R2j-1}) + \hat{Q}_{I2j}(\hat{\Psi}_{I2j+1} - \hat{\Psi}_{I2j-1})] , \quad (2.28)$$

onde

$$b = \frac{\Delta p}{(p_s - p_t)} \exp(2 kc_I t) , \quad (2.29)$$

e os índices R e I representam as partes real e imaginária das amplitudes, respectivamente.

A conversão entre \bar{E}_p e E_p depende do transporte horizontal de calor sensível na presença de um estado básico com cisalhamento vertical do vento zonal (Equação 2.27). Esse cisalhamento corresponde à um gradiente horizontal norte-sul de temperatura, através da relação do vento térmico. A geração de E_p pela fonte de calor é formalmente proporcional à covariância entre a fonte e a perturbação no campo de temperatura (Equação 2.28). Por outro lado, a conversão entre E_p e E_c depende de uma circulação térmica vertical da própria perturbação (Equação 2.26).

Note que a conversão entre a energia cinética turbulenta e a do estado básico não está incluída. Este processo não é considerado. Então, a energia potencial disponível da perturbação pode ser gerada neste modelo por três processos: pela conversão de energia potencial do estado básico, pela conversão de energia cinética da perturbação ou por geração pela fonte de calor. Porém, o único modo da energia cinética da perturbação crescer é através de conversão de energia potencial disponível da

perturbação. O ciclo clássico de uma onda baroclínica em desenvolvimento é $\bar{E}_p \rightarrow E_p \rightarrow E_C$. Mas, quando há geração de E_p por fontes de calor, o ciclo principal pode ser $G \rightarrow E_p \rightarrow E_C$, inclusive podendo haver uma taxa de transferência maior que no caso anterior. Este ciclo seria representativo do CISK clássico, que Wang (1987) discute a sua não-validade na explicação da geração de tempestades tropicais; porém, ressalta que o "espírito" do CISK como uma teoria de intensificação cooperativa é válida e sobrevive. O avanço na teoria do CISK clássico deve ser encarado como o primeiro esforço em entender as interações dinâmicas e termodinâmicas entre a convecção nos cúmulos e as perturbações de grande escala. Além disso, se tal interação existe, não é confinada aos trópicos; o aquecimento por cúmulos representa uma importante fonte de energia e tem um papel essencial na dinâmica de sistemas de tempo subtropical e extratropical, tais como, ciclones extratropicais, depressões monsonicas, baixas polares, ciclones explosivos, vórtices com chuva intensa e vórtices do platô tibetano (Wang, 1987).

Por outro lado, neste modelo a variação da energia total da perturbação, $E_p + E_C$, depende apenas da geração pela fonte de calor e da conservação de energia potencial disponível do estado básico, e é dada por

$$\frac{d}{dt} (E_p + E_C) = C(\bar{E}_p, E_p) + G . \quad (2.30)$$

Portanto, o ciclo de energia clássico de uma perturbação baroclínica em desenvolvimento é dado pelo transporte horizontal de calor sensível do equador para os pólos, na presença de um vento zonal crescendo com a altura em latitudes médias, convertendo energia potencial disponível do estado básico em energia potencial disponível da perturbação. Esse processo exige uma circulação térmica

vertical na qual o ar quente ascende e o ar frio desce, convertendo energia potencial disponível da perturbação em energia cinética da perturbação através do abaixamento do seu centro de massa.

Usando as Equações de 2.24 a 2.30, pode-se escrever para o modelo linear que:

$$\frac{E_C}{(E_C + E_p)} = \frac{C(E_p, E_C)}{C(\bar{E}_p, E_p) + G} , \quad (2.31)$$

$$\frac{E_p}{(E_C + E_p)} = \frac{C(\bar{E}_p, E_p) - C(E_p, E_C) + G}{C(\bar{E}_p, E_p) + G} \quad (2.32)$$

e

$$2 kc_I (E_C + E_p) = C(\bar{E}_p, E_p) + G , \quad (2.33)$$

pois d/dt pode ser substituído por $2 kc_I$ neste caso.

Então, a fração de E_C para a energia total da perturbação depende da razão entre a conversão de E_p em E_C e a conversão entre \bar{E}_p e E_p mais a geração de E_p . Portanto, a perturbação no estágio incipiente terá, relativamente, tanto mais energia cinética quanto maior for a eficiência de $C(\bar{E}_p, E_C)$ ou quanto menor for $C(E_p, E_C) + G$. Além disso, as Equações de 2.31 a 2.33, associadas às Equações de 2.24 a 2.29, servem de teste, à posteriori, ao código do programa de computador do modelo, o que é facilitado ao se proceder uma normalização tornando a energia total da perturbação unitária, pois tais equações estão em diferenças finitas consistentes com a energética.

2.1.2 - COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS EM DIFERENÇAS FINITAS COM A SOLUÇÃO ANALÍTICA DE MAK

Nessa subseção compara-se os resultados de Mak (1982) com aqueles obtidos pelo modelo linear. Mak (1982) usando um modelo analítico no plano-f ($\beta = 0$) obteve as características da instabilidade baroclínica de um estado básico com estabilidade estática constante ($0,04 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \text{ mb}^{-2}$) e vento zonal linear com a pressão. A estrutura vertical do aquecimento também, foi considerada linear com a pressão e limitada entre 900 e 400 mb. O topo do modelo foi fixado em 150 mb, onde um vento zonal de 30 m s^{-1} foi considerado, e a pressão de superfície foi tomada 1000 mb, com vento zonal nulo nesse nível. Usando estas mesmas características, e com o parâmetro de Coriolis igual a 10^{-4} s^{-1} (em torno de 45°N), rodou-se o modelo linear de diferenças finitas, descrito anteriormente, variando o número de camadas (J). A solução para o caso de duas camadas encontra-se no Apêndice B.

A Figura 2.2 mostra a variação da taxa de crescimento ($v_I = k c_I$) com o comprimento de onda (a) para $\epsilon = 0,8$ e $J = 10, 14$ e 20 e a estrutura vertical da função de corrente (b e c) da onda mais instável (maior v_I) para $\epsilon = 1$ e $J = 20$ e 30 . Nota-se na Figura 2.2a uma rápida convergência da taxa de crescimento de 10 para 20, com as escalas da onda mais instável e da onda de corte inferior praticamente não se alterando. As Figuras 2.2.b e c mostram que não há praticamente diferenças na estrutura vertical da onda mais instável com 20 ou 30 camadas.

Na Figura 2.3 encontra-se a estrutura vertical da função de corrente da onda mais instável para $\epsilon = 0$ e $0,4$ e $J=20$. Comparando essa figura com a Figura 4 de Mak (1982), nota-se que são praticamente idênticas. A Figura 2.4 mostra a variação da taxa de crescimento com o comprimento

de onda para diferentes intensidades de aquecimentos (a) e também a variação da escala espacial da velocidade de fase e da taxa de crescimento da onda mais instável com ϵ (b). A concordância com as Figuras 1 e 3 de Mak (1982) é notável. Deve-se destacar que a variação da taxa de crescimento da onda mais instável não é monotônica (Figura 2.4.b).

A Tabela 2.1 apresenta uma comparação com os resultados analíticos de Mak (1982) da onda de corte inferior (L_C), do comprimento da onda mais instável (L_m), da sua taxa de crescimento e de sua velocidade de fase para $\epsilon = 1$ e para diferentes resoluções do modelo de diferenças finitas. Nota-se que para baixa resolução vertical L_C e L_m são subestimados e c_R e v_I são superestimados. Entretanto, há uma rápida convergência à medida que se aumenta a resolução. Os valores de Mak (1982) são obtidos por interpolação na sua Figura 3.

Em face aos resultados obtidos aqui, e também devido a limitações computacionais, escolheu-se a resolução de 20 camadas (18 em alguns casos). Resultados essencialmente semelhantes foram obtidos por Mak (1983b).

TABELA 2.1

ONDA DE CORTE INFERIOR (L_C), COMPRIMENTO DA ONDA MAIS INSTÁVEL (L_m), SUA TAXA DE CRESCIMENTO (v_I) E SUA VELOCIDADE DE FASE (c_R) OBTIDAS ANALITICAMENTE POR MAK (1982) E PELO MODELO DE DIFERENÇAS FINITAS.

$\epsilon = 1$	MAK	CAMADAS			
		2	10	20	30
L_C (10^6 m)	1,3	1,17	1,24	1,26	1,28
L_m (10^6 m)	2,4	2,22	2,37	2,41	2,43
v_I (10^{-5} s $^{-1}$)	2,1	3,25	2,53	2,29	2,19
c_R (m s $^{-1}$)	19,2	17,7	20,9	20,2	19,9

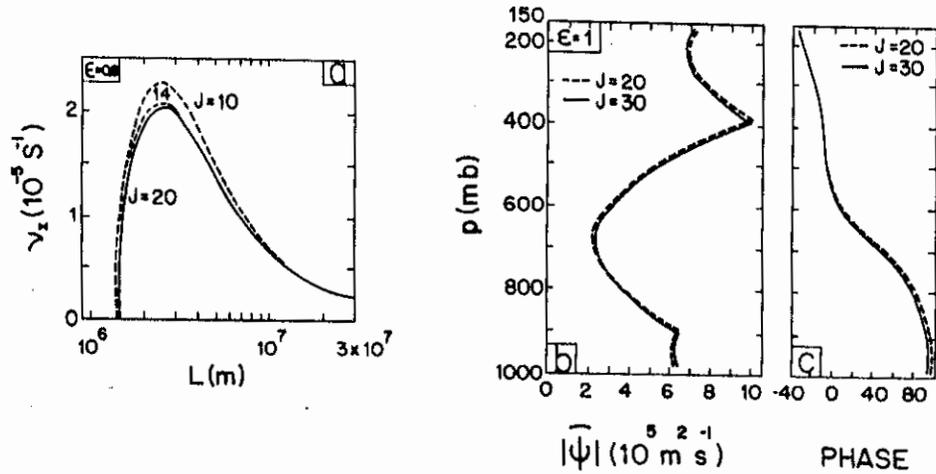


Fig. 2.2 - Taxa de crescimento como função do comprimento de onda para $\epsilon = 0,8$ e $J = 10,14$ e 20 (a); estrutura vertical da função de corrente da onda mais instável (b) e sua fase (c) para $\epsilon = 1$ e $J = 20$ e 30 .

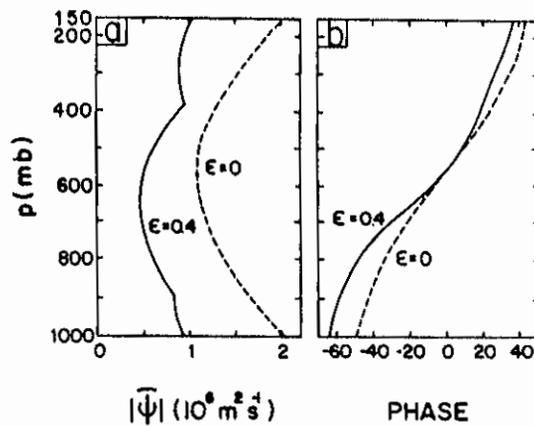


Fig. 2.3 - Estrutura vertical da função de corrente da onda mais instável (a) e sua fase (b) para $\epsilon = 0$ e $0,4$ e $J = 20$.

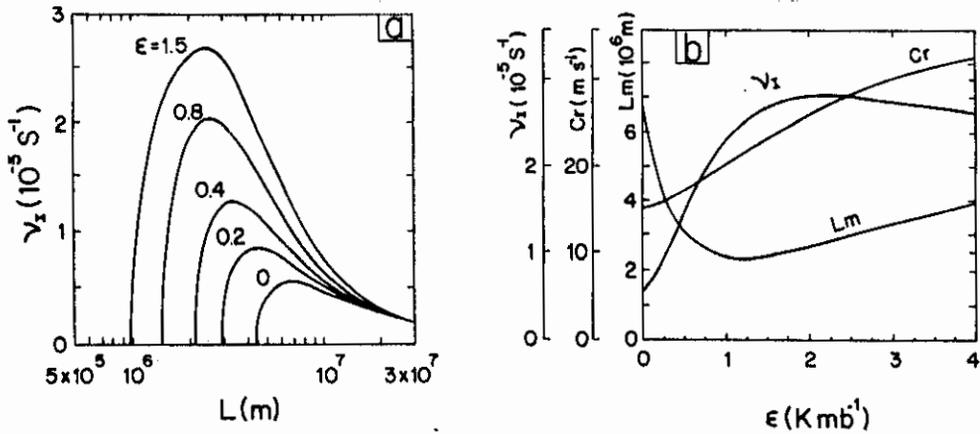


Fig. 2.4 - Variação da taxa de crescimento com o comprimento de onda para $\epsilon = 0; 0,2; 0,4; 0,8$ e $1,5$ e $J = 20$ (a), e a variação com a intensidade de aquecimento da taxa de crescimento, da velocidade de fase e do comprimento da onda mais instável para $J = 20$ (b).

2.2 - APLICAÇÃO DO MODELO LINEAR MULTINÍVEL PARA CASOS OBSERVADOS

O estudo analítico de Mak (1982) é elegante e elucidante. Entretanto, do ponto de vista de aplicação a versão em diferenças finitas é mais útil, e também, pode-se facilmente incluir outros efeitos, tal como o termo beta. Além disso, para obter solução analítica, Mak (1982) usou a função Heaviside para o perfil vertical de aquecimento (perfil M), mas esta distribuição linear com saltos não é muito realista. Com a versão em diferenças finitas, pode-se usar não só estruturas verticais de aquecimento mais realistas, bem como perfis verticais observados de vento zonal e de estabilidade estática, em contrapartida ao perfil linear de vento zonal e estabilidade estática constante usados por Mak (1982). Além disso, a equação

integral final obtida por Mak (1982) necessitou métodos numéricos usando discretização para a obtenção dos autovalores e autovetores, na qual foram necessários cerca de 86 níveis verticais para a convergência do cálculo das integrais em diferenças finitas.

Para testar a sensibilidade da parametrização de Mak (1982) com outros tipos de perfis de aquecimento, rodou-se o modelo no plano-f com 18 camadas com o estado básico de Mak (1982) e com perfis de aquecimento (perfil C) de Chang (1976) para vários ϵ , embora tais perfis sejam mais apropriados para a região tropical. O resultado é mostrado na Figura 2.5. Usou-se três diferentes perfis C de aquecimento (Figura 2.5.d): máximo em baixos (750 mb, perfil CB), médios (650 mb, perfil CM) e altos (500 mb, perfil CA) níveis. Os perfis C são dados por

$$h_{2j} = h_0 p_{2j} \exp(\alpha p'_{2j}) \text{sen}(\pi p'_{2j}) , \quad (2.34)$$

onde $p'_{2j} = (p_{2j} - p_b)/(p_* - p_b)$, sendo p_* o topo da camada de aquecimento, α é uma constante para se estabelecer o nível do máximo aquecimento e h_0 é obtido fazendo-se a integral vertical de $h(p)$ desse perfil igual à integral do perfil M.

Para baixas intensidades de aquecimento ($\epsilon < 1$) a escala zonal da onda mais estável (Figura 2.5.a) e sua taxa de crescimento (Figura 2.5.b) tem pouca mudança para os perfis CB, CM e CA. Por outro lado, para ϵ grande a escala zonal decresce e a taxa de crescimento cresce quando o nível do máximo aquecimento é abaixado. A velocidade de fase (Figura 2.5.c) decresce com a abaixamento do nível de máximo aquecimento para todos ϵ . Para efeito de comparação inclui-se também os resultados do perfil M. Nota-se que para ϵ pequeno a escala zonal é

menor e a taxa de crescimento maior para os perfis C. Enquanto que, para ϵ grande a escala zonal com o perfil M é praticamente idêntica à obtida com o perfil CB e a taxa de crescimento fica entre os perfis CB e CM. A velocidade de fase com o perfil M tende para a obtida com o perfil CM para ϵ pequenos e grandes; para ϵ médios tende para a do perfil CB.

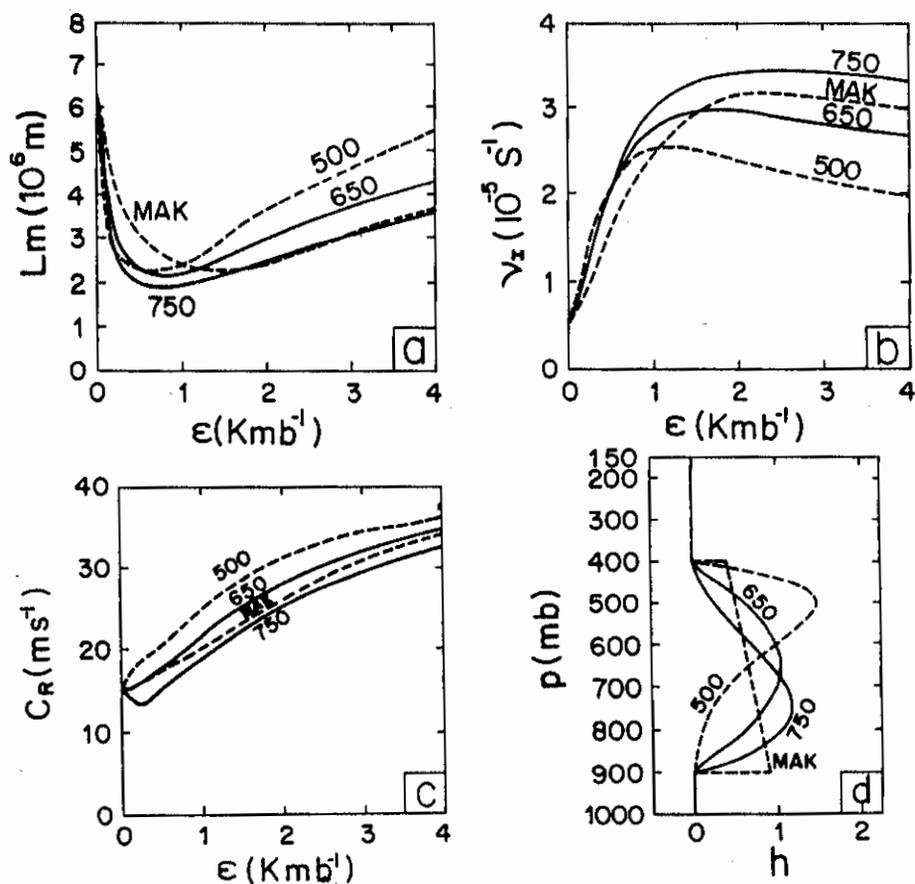


Fig. 2.5 - Comparação entre os comprimentos da onda mais estável (a), sua taxa de crescimento (b) e sua velocidade de fase (c) usando perfis verticais selecionados de aquecimento (d).

Estes testes de sensibilidade mostram que a parametrização de Mak (1982) pode ser usada com sucesso com os perfis verticais de aquecimento de Chang (1976), os quais são mais realistas mesmo em latitudes médias em relação ao perfil M, pois em todos os casos notou-se variação sistemáticas com das escalas importantes para se analisar a instabilidade. Para ϵ pequeno ($\epsilon < 1$) as mudanças desses parâmetros com o nível de aquecimento máximo são muito pequenas.

Em vista destes resultados aplicar-se-á o modelo de diferenças finitas, usando o esquema de parametrização de liberação de calor latente proposto por Mak (1982), porém com perfis verticais de aquecimento do tipo Chang (1976), para se verificar se o estágio incipiente dos sistemas de escala intermediária tem como mecanismo gerador a instabilidade baroclínica úmida, ou seja, modificada pela liberação de calor latente.

2.2.1 - PERTURBAÇÃO ASSOCIADA COM NUVEM TIPO VÍRGULA (INVERTIDA) NO SUL DO BRASIL

A experiência sinótica mostra que perturbações de escala intermediária formam-se sobre as regiões do Paraguai, norte da Argentina, Uruguai e sul do Brasil com ligeira preferência para estações de transição. Essas perturbações têm escala espacial da ordem de 1.500km, propagam-se para leste com velocidades variáveis e dissipam-se em cerca de dois dias. Têm centros relativamente quentes próximos à superfície e não são associadas com cavados nas camadas superiores.

A Figura 2.6 mostra um exemplo típico de desenvolvimento local sobre o continente de uma perturbação de escala intermediária que toma a forma de uma nuvem tipo vírgula invertida. O desenvolvimento dessa perturbação tem

início em cerca de 09:00 TMG no dia 14 de abril de 1979 e a dissipação tem lugar em torno de 21:00 TMG no dia 15 de abril de 1979. A escala horizontal estimada é cerca de 1.500 km e sua velocidade de fase relativa à superfície é em torno de 8 m s^{-1} . A Figura 2.7 apresenta a carta de pressão à superfície para o dia 15 de abril de 1979 mostrando uma baixa relativamente quente que não persiste na atmosfera superior. A Figura 2.8a mostra uma secção vertical no tempo do vento observado sobre Porto Alegre (31°S , 51°W) de 13 a 17 de abril de 1979. Pode-se notar uma onda propagando-se no nível de 700 mb e um duplo máximo na vertical no vento (700 e 200 mb) às 12:00 TMG do dia 15 de abril de 1979. Esse duplo máximo sugere que a liberação de calor latente é importante para o desenvolvimento da perturbação (Gall, 1976c). A precipitação das últimas 24 horas sobre Porto Alegre é também mostrada na Figura 2.8a; a precipitação começa algumas horas antes da passagem da baixa e continua por 30 horas chegando a um total de 65mm.

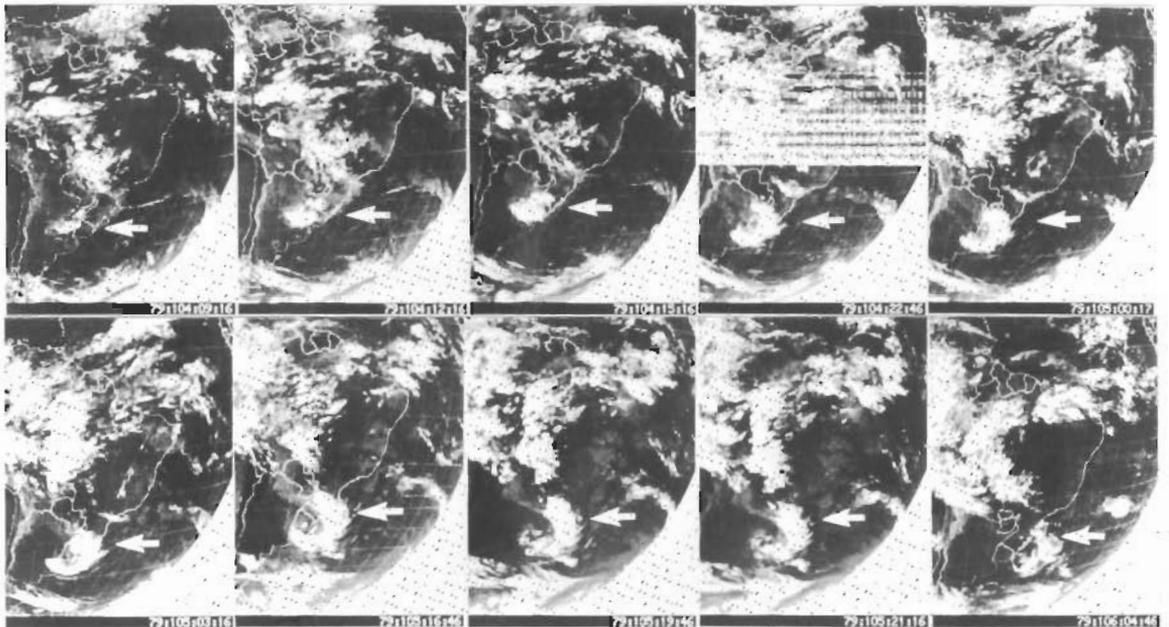


Fig. 2.6 - Sequência de imagens no canal infravermelho (satélite GOES-W) de 14 e 15 de abril de 1979, mostrando a formação de uma nuvem tipo vírgula invertida sobre o nordeste da Argentina, Uruguai e extremo sul do Brasil (em torno de 35°S).

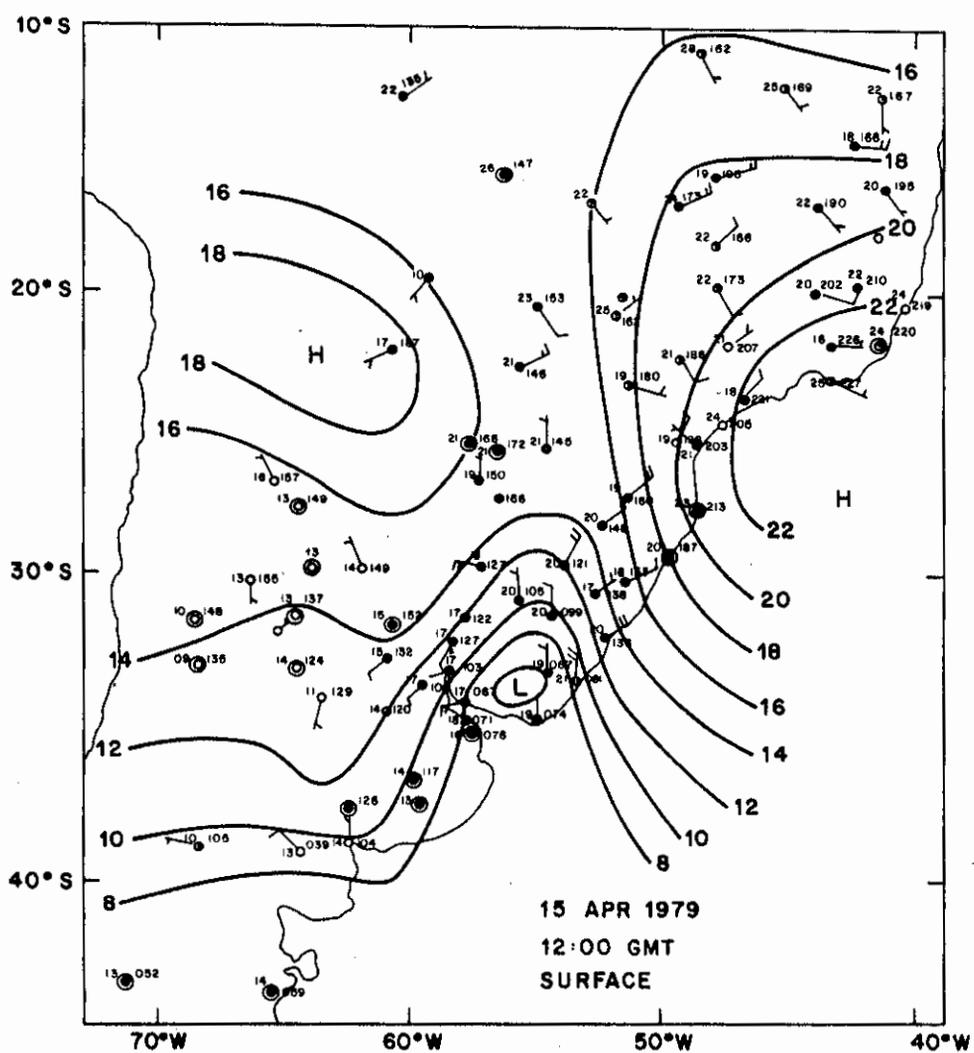


Fig. 2.7 - Carta de superfície para o dia 15 de abril de 1979, 12:00 TMG (analísada por Prakki Satyamurty).

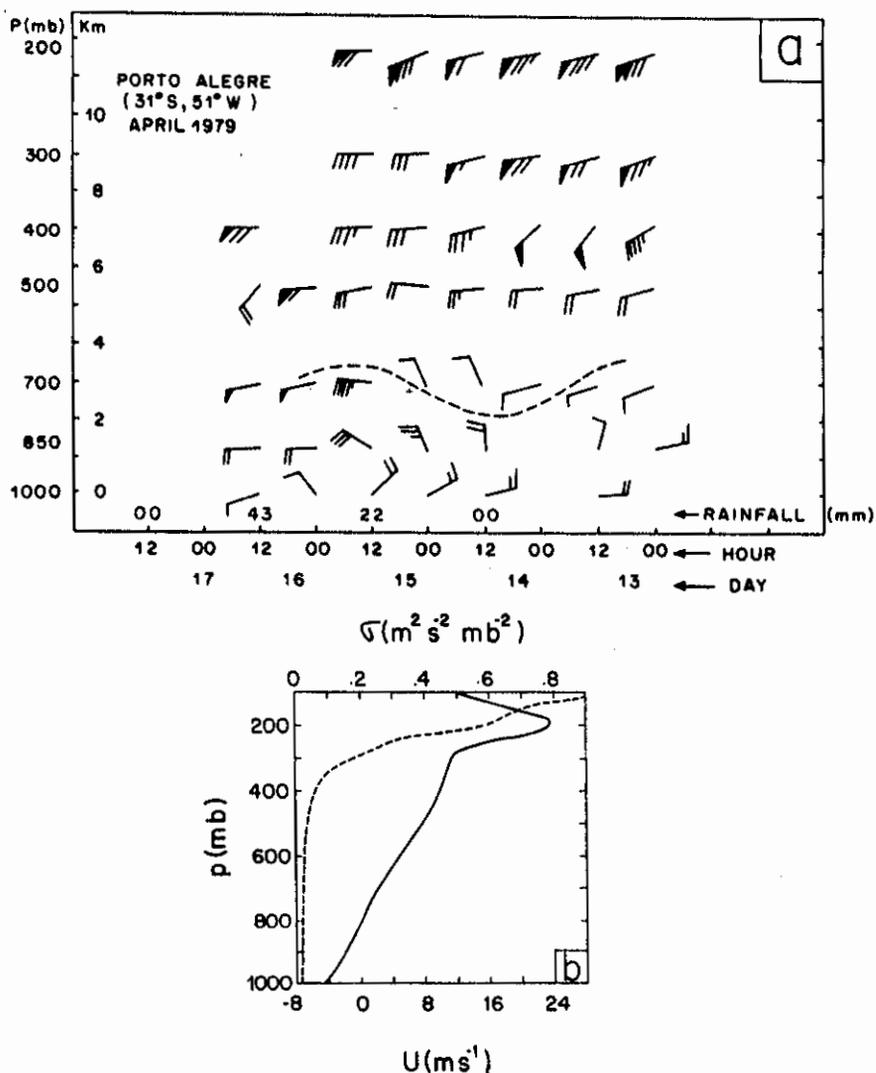


Fig. 2.8 - Estrutura vertical do vento e da estabilidade estática e precipitação sobre Porto Alegre em abril de 1979: (a) seção vertical versus tempo do vento observado, chuva das últimas 24 horas e a propagação de uma onda (linha tracejada) no nível de 700 mb entre os dias 13 e 17; (b) vento zonal (linha contínua) e estabilidade estática (linha tracejada) médios mensais.

Com relação a possíveis mecanismos para geração de tais perturbações, surgem como candidatos dois processos: ciclogênese à jusante da montanha e instabilidade baroclínica úmida. Embora tenha sido selecionado um caso de perturbação de escala intermediária

com nuvem tipo vírgula invertida sobre a América do Sul para um estudo quantitativo, observa-se perturbações semelhantes nas imagens de satélite sobre o sudeste do Oceano Pacífico e sobre a região do Oceano Atlântico próxima à parte sul-sudeste do litoral leste da América do Sul. A falta de dados convencionais impede uma descrição detalhada de perturbações sobre os oceanos. Uma inspeção cuidadosa de perturbações com nuvem tipo vírgula invertida usando imagens de satélite não sugere uma preferência pelo lado à jusante da montanha (Bonatti and Rao, 1987). Desde que perturbações com nuvem tipo vírgula invertida formam-se tanto do lado leste quanto oeste do continente, o mecanismo de geração das perturbações sobre o continente e sobre o oceano devem ser semelhantes. Até que se tenha um estudo comparativo detalhado entre as perturbações continentais e oceânicas, parece razoável supor que a instabilidade baroclínica úmida é o mecanismo comum de geração. Desde que a perturbação continental da região central da América do Sul, mencionada anteriormente, tem escala intermediária (em torno de 1500 km) e desde que está associada com precipitação copiosa (65 mm em 30 horas), a liberação de calor latente deve ter papel importante no seu desenvolvimento. Então, será aplicado o modelo linear em diferenças finitas desenvolvido na Seção 2.1 para este caso.

A Figura 2.8b mostra o vento zonal médio mensal e a estabilidade estática calculada (suavizada por uma média de 5 pontos na vertical) para abril de 1979 sobre Porto Alegre. Os dados de vento e temperatura foram obtidos de Chu e Hastenrath (1982) e interpolados na grade vertical usando funções "cubic-spline". Com esses perfis foi analisada a instabilidade baroclínica seca e a úmida com os perfis C e M de aquecimento utilizando o modelo linear no plano-beta e com 18 camadas na vertical.

Rodou-se o modelo para vários ϵ e a dependência das características de instabilidade com α . está, em geral, de acordo com as discussões feitas anteriormente. Entretanto, os resultados que apresentam melhor concordância com as observações são dados na Figura 2.9 para $\epsilon = 0,2$. Estudos posteriores são necessários para quantificar a distribuição vertical do calor de condensação dessas perturbações; neste estágio não é possível explicar porque a concordância é melhor com $\epsilon = 0,2$ e $\alpha = -2$.

A Figura 2.9a mostra a taxa de crescimento para o caso seco ($\epsilon = 0$) e para o caso úmido com perfil de aquecimento C ($\epsilon = 0,2$ e $\alpha = -2$) e com perfil M ($\epsilon = 0,4$). Não há uma seleção clara para o caso seco e o caso úmido com perfil M seleciona dois comprimentos de onda: um em torno de 600 km e o outro em torno de 1850 km. A estrutura vertical da onda de 600 km é confinada abaixo de 850 km e a de 1850 km tem estrutura vertical semelhante à obtida com perfil C de aquecimento. Entretanto, a estrutura vertical do aquecimento com máximo em 900 mb não é realista para estas perturbações (Pedro Leite da Silva Dias, comunicação verbal). O caso com perfil C seleciona uma escala em torno de 2000 km. A amplitude e a fase da função de corrente são dadas na Figura 2.9b. Há um duplo máximo na vertical e a região baroclínica é confinada entre 800 e 650 mb, evidenciada pela grande inclinação para oeste da fase da função de corrente. Este duplo máximo na vertical na função de corrente implica na mesma estrutura para a energia cinética como em Gall (1976c), o que também concorda com o duplo jato na Figura 2.8a. Se o atrito de superfície fosse incluído, o máximo inferior seria melhor definido.

A Figura 2.9c mostra a estrutura da velocidade vertical e sua fase. Há um máximo em torno de 700 mb e uma inclinação para oeste em quase toda a

atmosfera. O perfil C de aquecimento é dado na Figura 2.9d e mostra um máximo (cerca de $26,5 \text{ K dia}^{-1}$) em torno de 720 mb. Deve ser ressaltado que a magnitude da amplitude da Figura 2.9b é arbitrária (é um autovetor) e foram obtidas fixando-se a taxa de aquecimento. Embora $26,5 \text{ K dia}^{-1}$ pareça alto, é coerente encontrar-se tais taxas de aquecimento em perturbações com alta taxa de precipitação, como já citado anteriormente, para esses sistemas de vida curta concentrando a precipitação em um intervalo de tempo pequeno. Além disso, esta taxa de aquecimento é encontrada apenas no nível de 720 mb, de modo que a média vertical do aquecimento pode ser bem menor que esta quantidade.

A amplitude e a fase da temperatura são dadas na Figura 2.9c. Há dois máximos, um em torno de 750 mb e o outro em torno de 300 mb. A diferença de fase entre a temperatura e a velocidade vertical mostra uma correlação negativa entre estas variáveis, implicando em uma conversão de energia potencial disponível da perturbação em energia cinética da perturbação.

A primeira coluna da Tabela 2.2 dá as escalas e as características energéticas (normalizadas de modo que a energia total é unitária) da onda mais instável para o caso do hemisfério Sul (HS) com perfil C de aquecimento. A velocidade de fase de $3,9 \text{ m s}^{-1}$ é razoável em comparação com o valor observado de cerca de 8 m s^{-1} , enquanto que a velocidade de grupo (C_g) de $4,4 \text{ m s}^{-1}$ se aproxima mais da velocidade observada. A taxa de crescimento de $9,8 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ (tempo de multiplicação-e "e-folding time" - em torno de 28,3 horas) é razoável desde que o ciclo de vida observado destas perturbações de escala intermediária tem duração de cerca de 2 dias.

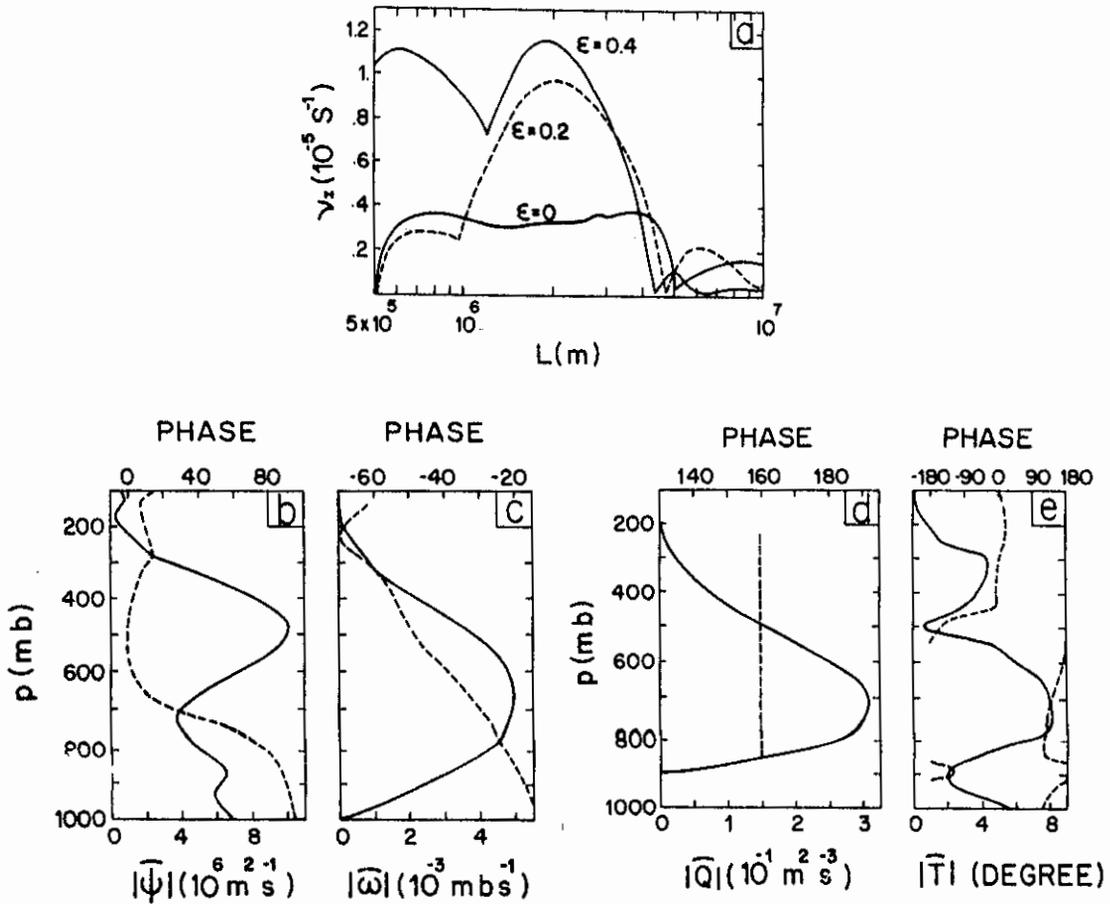


Fig. 2.9 - Instabilidade baroclínica para a perturbação com nuvem tipo virgula invertida na América do Sul central: (a) taxa de crescimento sem liberação de calor latente ($\epsilon = 0$); com liberação de calor latente dada pelo perfil C ($\epsilon = 0,2$ e $\alpha = -2$, linha tracejada) e para o perfil M ($\epsilon = 0,4$, linha contínua); (b) estrutura vertical da função de corrente da onda mais instável para o caso do perfil C; (c) sua velocidade vertical; (d) o perfil C usado e (e) a estrutura vertical da temperatura. As linhas tracejadas em b,c,d e e são as fases e as linhas contínuas as amplitudes.

A energética teórica das perturbações de escala intermediária (Tabela 2.2, coluna 1) mostra que E_C é duas vezes E_p , enquanto que a geração de E_p pela liberação de calor latente, G , é muito maior que $C(\bar{E}_p, E_p)$. Isto confirma a importância da liberação de calor latente no desenvolvimento de tais perturbações. Então, a instabilidade baroclínica úmida parece ser o mecanismo de geração das perturbações de escala intermediária com nuvem tipo vírgula invertida que afetam o tempo no sul do Brasil.

TABELA 2.2

ESCALAS E CARACTERÍSTICAS ENERGÉTICAS TEÓRICAS PARA AS
PERTURBAÇÕES DE ESCALA INTERMEDIÁRIA BAROCLINICAMENTE
INSTÁVEIS OBSERVADAS

	HS	HN
L_m (km)	2000	1600
C_r (ms^{-1})	3,9	26,4
v_I ($10^{-5} s^{-1}$)	0,98	2,97
C_g (ms^{-1})	4,4	22,7
E_C ($m^2 s^{-2}$)	0,696	0,658
E_p ($m^2 s^{-2}$)	0,304	0,342
$C(E_p, E_C)$ ($10^{-5} m^2 s^{-3}$)	1,36	3,90
$C(\bar{E}_p, E_p)$ ($10^{-5} m^2 s^{-3}$)	0,31	2,36
G ($10^{-5} m^2 s^{-3}$)	1,64	3,56

2.2.2 - PERTURBAÇÕES DE ESCALA INTERMEDIÁRIA NO PACÍFICO
NORTE

Como comentado anteriormente, Mullen (1979) estudou ciclones de escala intermediária que são observadas perto do jato polar, muitos deles sendo associados a nuvens do tipo vírgula. Mullen (1979) analisou 22 casos no oceano Pacífico Norte e fez seções verticais compostas de vento e temperatura observados nos estágios de gênese e maduro. Na

gênese estas perturbações têm um localização média em 39°N e 173°E , durante o período analisado (invernos de 1975/76 e 1976/77). A velocidade de fase média é de $19,5 \text{ m s}^{-1}$ e a escala horizontal é de cerca de 2000 km. São perturbações profundas na vertical, têm amplitudes maiores nos níveis superiores e muitas são associadas no estágio maduro a nuvens do tipo vírgula orientadas norte-sul com a cauda do lado equatorial.

Usando o vento zonal e a temperatura dados na Figura 2 de Mullen (1979) para o estágio de gênese e um perfil C de aquecimento com $\alpha = 0,1$, analisou-se as características de instabilidade baroclínica. A estabilidade estática foi suavizada através de uma média com 5 pontos na vertical. Rodou-se o modelo linear no plano-beta para vários valores de ϵ e os resultados que apresentam melhor concordância com as observações são para $\epsilon = 0,1$ e são mostrados na Figura 2.10. A taxa de crescimento para o caso seco ($\epsilon = 0$) e para o caso úmido ($\epsilon = 0,1$) com perfis M e C ($\alpha = 0,1$) de aquecimento é mostrada na Figura 2.10a. O caso seco seleciona duas escalas horizontais: uma em torno de 1000 km e outra em torno de 4250 km. A primeira tem estrutura vertical muito rasa e a segunda escala muito grande em comparação com as observações já citadas. A seleção do caso com o perfil M não é muito clara, mostrando uma tendência para gerar ondas muito curtas (cerca de 375 km). Entretanto, a seleção do caso do perfil C de aquecimento é melhor identificada em torno de 1600 km; as Figura 2.10b a 2.10e mostram a estrutura vertical dessa onda mais instável. A amplitude da função de corrente tem estrutura profunda na vertical mostrando valores significativos até 300 mb e tem um duplo máximo, um na superfície e o outro em torno de 600 mb, o que concorda novamente com Gall (1976c), como já notado para o caso do HS. Se o atrito de superfície fosse incluído, provavelmente o máximo inferior seria encontrado

em níveis relativamente mais altos. A variação de fase da função de corrente (Figura 2.10b) mostra que a região baroclínica está abaixo de 650 mb. A amplitude da velocidade vertical (Figura 2.10c) tem um máximo em torno de 700 mb e a amplitude da temperatura (Figura 2.10e) tem valores significativos apenas abaixo de 650 mb. A diferença de fase entre a velocidade vertical e a temperatura sugerem uma correlação negativa entre essas variáveis indicando a conversão baroclinicamente instável de E_p em E_c . A estrutura vertical do aquecimento é dada na Figura 2.10d e é semelhante à usada por Sardie e Warner (1985) para modelar as baixas polares do Pacífico Norte. Tal estrutura tem um máximo de $22,5 \text{ K dia}^{-1}$ em 500 mb; novamente, este valor parece alto mas não é incomum encontrar tais taxas de aquecimento no desenvolvimento rápido de ciclones oceânicos com tempo de vida pequeno.

A segunda coluna da Tabela 2.2 mostra as escalas e as propriedades energéticas (normalizadas de modo que a energia total seja unitária) da onda mais instável para o caso com perfil C do Hemisfério Norte (HN). O valor de $26,4 \text{ m s}^{-1}$ para a velocidade de fase compara bem como o observado de $19,3 \text{ m s}^{-1}$, enquanto a velocidade de grupo de $22,7 \text{ m s}^{-1}$ está em melhor concordância. Não é possível pelo estudo de Mullen (1979) calcular a taxa de crescimento, porém o valor dado na Tabela 2.2 de $2,97 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (tempo de multiplicação-e em torno de 9,5 horas) parece ser razoável em vista do rápido crescimento e curto período de vida destas perturbações. As características da energética teórica destas perturbações no estágio incipiente são tais que E_p é cerca de metade de E_c e a geração de E_p pelo aquecimento é maior que a conversão de \bar{E}_p em E_p , evidenciando novamente a importância da liberação de calor latente na sua formação.

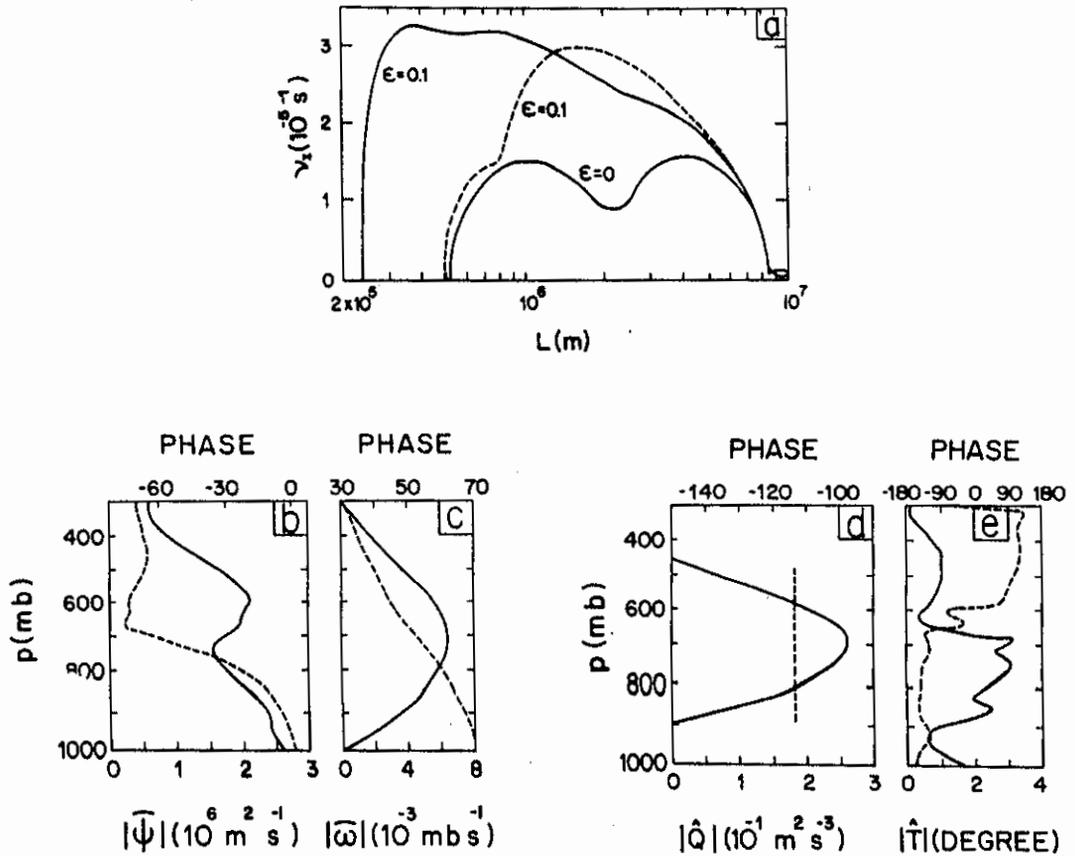


Fig. 2.10 - Instabilidade baroclínica para a perturbação de escala intermediária estudadas por Mullen (1979): (a) taxa de crescimento sem liberação de calor latente ($\epsilon = 0$); com liberação de calor latente dada pelo perfil C ($\epsilon = 0,1$ e $\mu = 0,1$, linha tracejada) e para o perfil M ($\epsilon = 0,1$, linha contínua); (b) estrutura vertical da função de corrente da onda mais instável para o caso do perfil C; (c) sua velocidade vertical; (d) o perfil C usado e (e) a estrutura vertical da temperatura. As linhas tracejadas em b,c,d e e são as fases e as linhas contínuas as amplitudes.

Portanto, a instabilidade baroclínica úmida parece ser o mecanismo de geração das perturbações de escala intermediária do Pacífico norte estudadas por Mullen (1979), desde que as principais características dessas perturbações são capturadas pelos resultados do modelo linear.

Os resultados apresentados nesse capítulo foram publicados em um artigo recente na revista "Journal of the Atmospheric Sciences" (Bonatti and Rao, 1987) e encontra-se uma cópia no Apêndice C.

CAPÍTULO 3

ELABORAÇÃO DE UM MODELO ANALÍTICO NÃO-LINEAR PARA PERTURBAÇÕES BAROCLÍNICAS EM DESENVOLVIMENTO

Será aqui desenvolvido um modelo não-linear, incluindo os efeitos de liberação de calor latente, de resfriamento e de atrito e uma equação de algum constituinte que se conserva no tempo, com o intuito de se estudar a formação de frentes e o desenvolvimento baroclínico de perturbações de escala intermediária. Esse modelo admite soluções tipo onda na horizontal e no tempo, e diferenças finitas na vertical. A seguir, serão apresentadas as equações que compõem o modelo mantendo-se as derivadas com a pressão em forma analítica. A discretização vertical segue basicamente os princípios dados no Capítulo 2 e será omitida para simplificar a apresentação das equações do modelo.

3.1 - PROPOSIÇÃO DO MODELO

As equações hidrodinâmicas com aproximação de balanço em coordenadas de pressão e no plano-beta de latitudes médias, consistentes energeticamente e do ponto de vista de escala na ausência (Charney, 1955; Arakawa, 1962), podem ser escritas como o seguinte conjunto de equações, onde foram incluídos atrito do tipo Rayleigh e resfriamento do tipo newtoniano dependentes apenas da pressão:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{V}_\psi \cdot \nabla \xi + \beta v_\psi - f \frac{\partial \omega}{\partial p} + \left[\vec{V}_x \cdot \nabla \xi + \beta v_x \right. \\ \left. + \omega \frac{\partial \xi}{\partial p} - \xi \frac{\partial \omega}{\partial p} + k \cdot \left(\nabla \omega \times \frac{\partial \vec{V}_\psi}{\partial p} \right) \right] = - \Lambda_\xi \xi \quad , \quad (3.1)$$

para a equação da componente vertical da vorticidade,

$$\nabla \cdot (f \nabla \psi) + 2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = \nabla^2 \phi \quad (3.2)$$

para a equação da divergência ou equação de balanço, nesse caso,

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{R T}{p} = 0 \quad (3.3)$$

para a aproximação hidrostática,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V}_\psi + \vec{V}_\chi) \cdot \nabla T + \omega \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{R T}{p C_p} \right) = \frac{\dot{Q}}{C_p} - \Lambda_T T \quad (3.4)$$

para a equação da energia termodinâmica, e

$$\nabla \cdot \vec{V}_\chi = - \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (3.5)$$

para a equação da continuidade. Os símbolos estão definidos na Lista de Símbolos.

As partes rotacional, \vec{V}_ψ , e divergente, \vec{V}_χ , do vento são definidas como:

$$\vec{V}_\psi = \hat{k} \times \nabla \psi \quad (3.6)$$

e

$$\vec{V}_\chi = \nabla \chi \quad (3.7)$$

Portanto, o sistema de balanço tem como variáveis dependentes ψ , χ , ω , e T .

Para a utilização do sistema de balanço serão feitas as seguintes suposições (Saltzman and Tang, 1972):

- a- o crescimento das ondas instáveis é determinado primariamente pela versão linear quase-geostrófica dessas equações;
- b- o parâmetro de coriolis f será constante onde aparece como coeficiente, inclusive na equação de balanço (Equação 3.2);
- c- o termo entre colchetes da Equação 3.1, tradicionalmente excluído na teoria quase-geostrófica, representa efeitos de segunda ordem que contém mudanças na onda quase-geostrófica instável inicial;
- d- o termo entre parenteses da Equação 3.2 será desprezado.

As suposições feitas nos itens b e d implicam que a equação de balanço para este modelo simplificado torna-se:

$$f_0 \psi = \phi \quad (3.8)$$

Embora não justifique completamente o desprezo do termo entre parenteses da Equação 3.2, pode ser mostrado que para uma componente individual dupla de Fourier de ψ no plano x-y a Equação 3.8 satisfaz a Equação 3.2, para f constante.

Usando a Equação 3.8 na Equação 3.3 obtem-se

$$T = - \frac{p f_0}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial p}, \quad (3.9)$$

a qual pode ser usada na Equação 3.4 mudando-a para

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) + (\vec{V}_\Psi + \vec{V}_\chi) \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) + \frac{\sigma}{f_0} \omega = \\ - \frac{R \dot{Q}}{f_0 p C_p} - \Lambda_T \frac{\partial \Psi}{\partial p}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$\sigma = \frac{R}{p^2} \left(\frac{R T}{C_p} - \frac{\partial T}{\partial \ln p} \right) \quad (3.11)$$

é a estabilidade estática.

Lembrando que

$$\xi = \nabla^2 \Psi \quad (3.12a)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{V}_\chi = \nabla^2 \chi, \quad (3.12b)$$

e expandindo as variáveis dependentes, ζ , em uma média zonal, $\bar{\zeta}$, e o respectivo desvio, ζ' , o sistema formado pelas Equações 3.1, 3.10, 3.9 e 3.5, respectivamente, pode ser escrito na seguinte forma:

a) média zonal:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \bar{\Psi}' + \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \bar{\Psi}'$$

$$- f_0 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = - \bar{N} - \Lambda_{\xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y^2}, \quad (3.13a)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{N} = & \beta \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial y} + \bar{\omega} \frac{\partial^2}{\partial y \partial p} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y \partial p} \\ & + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial y} \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial y^3} + \overline{\omega' \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 \Psi'} - \overline{\nabla^2 \Psi' \frac{\partial \omega'}{\partial p}} + \overline{\frac{\partial \omega'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p}} \\ & + \overline{\frac{\partial \omega'}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p}} + \overline{\frac{\partial \chi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi'} + \overline{\frac{\partial \chi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Psi'}; \quad (3.13b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial p} \right) - \overline{\frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p}} + \overline{\frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p}} + \frac{\sigma}{f_0} \omega = \\ & - \bar{P} - \frac{R \bar{Q}}{f_0 p C_p} - \Lambda_T \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial p}, \quad (3.14a) \end{aligned}$$

onde

$$\bar{P} = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y \partial p} + \overline{\frac{\partial \chi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p}} + \overline{\frac{\partial \chi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p}}; \quad (3.14b)$$

$$\bar{T} = \bar{\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} = - \frac{p f_0}{R} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial p}, \quad (3.15)$$

onde $\bar{\theta}$ é a temperatura potencial média zonal com $p_0 = 1000$ mb; e

$$\frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial y^2} = - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p}; \quad (3.16)$$

b) perturbação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi' - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' + \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial y^3} \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \omega'}{\partial p} = \\ \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi' - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' \\ + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi' - N' - \Lambda_{\xi} \nabla^2 \psi' \quad , \end{aligned} \quad (3.17a)$$

onde

$$\begin{aligned} N' = & \beta \frac{\partial \chi'}{\partial y} + \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 \psi' + \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial y^2 \partial p} \omega' - \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \frac{\partial \omega'}{\partial p} - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} \nabla^2 \psi' \\ & + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y \partial p} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y \partial p} \frac{\partial \omega'}{\partial y} + \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial y^3} \frac{\partial \chi'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi' \\ & + \omega' \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 \psi' - \nabla^2 \psi' \frac{\partial \omega'}{\partial p} + \frac{\partial \omega'}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial p} + \frac{\partial \omega'}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y \partial p} \\ & + \frac{\partial \chi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' + \frac{\partial \chi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi' - \omega' \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 \psi' + \nabla^2 \psi' \frac{\partial \omega'}{\partial p} \\ & - \frac{\partial \omega'}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial p} - \frac{\partial \omega'}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y \partial p} - \frac{\partial \chi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' \\ & - \frac{\partial \chi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi' \quad ; \end{aligned} \quad (3.17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y \partial p} \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial p} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y \partial p} \\ + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial p} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y \partial p} + \frac{\sigma}{f_0} \omega' = - P' \end{aligned}$$

$$-\frac{R \dot{Q}'}{f_0 p C_p} - \Lambda_T \frac{\partial \Psi'}{\partial p}, \quad (3.18a)$$

onde

$$P' = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y \partial p} \frac{\partial \chi'}{\partial y} + \frac{\partial \chi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p} + \frac{\partial \chi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p} - \frac{\partial \chi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p} - \frac{\partial \chi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p}; \quad (3.18b)$$

$$T' = \theta' \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} = - \frac{p f_0}{R} \frac{\partial \Psi'}{\partial p}, \quad (3.19a)$$

e

$$\nabla^2 \chi' = - \frac{\partial \omega'}{\partial p}. \quad (3.19b)$$

A estabilidade estática σ que aparece nas Equações 3.14 e 3.18 será considerada função apenas da pressão e calculada com base em uma temperatura de referência $\bar{T}^*(p)$, ou seja,

$$\sigma = \sigma(p) = \frac{R}{p^2} \left(\frac{R \bar{T}^*}{C_p} - \frac{d \bar{T}^*}{d \ln p} \right). \quad (3.20)$$

Com esta restrição, obtem-se a equação-ômega para a média zonal e para o desvio com base nas Equações 3.13 e 3.14 e Equações 3.17 e 3.18, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial p^2} = \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p} \right) - \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi' - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Psi' \right) - \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \bar{N}}{\partial p} - \frac{R}{\sigma p c_p} \frac{\partial^2 \dot{Q}}{\partial y^2} + \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\Lambda_{\xi} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y^2} \right) \\
 & - \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\Lambda_T \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial p} \right)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

e

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \omega' + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega'}{\partial p^2} &= \frac{\beta f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p} - M_1 + M_2 \\
 - \left(\frac{f_0}{\sigma} \nabla^2 p' - \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial N'}{\partial p} \right) &- \frac{R}{\sigma p c_p} \nabla^2 \dot{Q}' \\
 - \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\Lambda_{\xi} \nabla^2 \Psi' \right) &- \frac{f_0}{\sigma} \nabla^2 \left(\Lambda_T \frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) ,
 \end{aligned} \tag{3.22a}$$

onde

$$\begin{aligned}
 M_1 = \frac{f_0}{\sigma} \nabla^2 \left(- \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y \partial p} \frac{\partial \Psi'}{\partial x} - \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p} \right. \\
 \left. + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y \partial p} \right)
 \end{aligned} \tag{3.22b}$$

e

$$\begin{aligned}
 M_2 = \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(- \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi' + \frac{\partial^3 \bar{\Psi}}{\partial y^3} \frac{\partial \Psi'}{\partial x} - \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi' \right. \\
 \left. + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Psi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi' - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Psi' \right) .
 \end{aligned} \tag{3.22c}$$

O aquecimento considerado é apenas aquele devido à liberação de calor latente e a parametrização

utilizada é a de Mak (1982) discutida no Capítulo 2. Para tanto a velocidade vertical será separada em três partes:

$$\omega = \omega_a + \omega_d + \omega_\Lambda, \quad (3.23)$$

onde ω_a é a parte induzida dinamicamente, ω_d é parte induzida pelo aquecimento e ω_Λ pelo atrito. Com base nas Equações 3.21 e 3.22 facilmente se separa os termos responsáveis por cada uma dessas partes para a média zonal e desvio, respectivamente. Então, com base na parametrização de Mak (1982), pode-se escrever:

$$\bar{Q} = - \epsilon C_p h(p) \bar{\omega}_a(p_b) \quad (3.24)$$

e

$$Q' = - \epsilon C_p h(p) \omega'_a(p_b), \quad (3.25)$$

para o aquecimento médio zonal e para o desvio, respectivamente, e onde

$$h(p) = \frac{p}{p_s} H(p). \quad (3.26)$$

E, assim, fechamos o sistema de equações do modelo aqui proposto.

3.2 - DECOMPOSIÇÃO DOS CAMPOS EM ORDENS DE EVOLUÇÃO

Para obter a solução do modelo proposta na seção anterior, cada variável dependente ζ será decomposta em componentes, de acordo com a evolução no tempo do sistema baroclínico em desenvolvimento e com a ordem de importância dos diversos termos das equações anteriores (Saltzman e Tang, 1972, 1975a e b, 1985), de modo que:

$$\bar{\zeta} = \sum_{n=0}^2 \bar{\zeta}^{(n)} \quad (3.27)$$

e

$$\zeta' = \sum_{n=1}^3 \zeta^{(n)} \quad , \quad (3.28)$$

onde $\bar{\zeta}^{(0)}$ é o estado básico inicial fixo, $\zeta^{(1)}$ é a perturbação baroclínica quase-geostrófica de primeira ordem, $\bar{\zeta}^{(1)}$ é a mudança no estado básico forçada por $\zeta^{(1)}$; $\zeta^{(2)}$ é a perturbação de segunda ordem forçada por $\bar{\zeta}^{(1)}$ e pelas componentes não-geostróficas geradas por $\zeta^{(1)}$, e assim por diante, até os estágios dados nas Equações 3.27 e 3.28.

Note que as Equações 3.13 e 3.21 e as Equações 3.17 e 3.22 formam dois sistemas nas variáveis $\bar{\psi}$, $\bar{\omega}$ e ψ' , ω' , respectivamente. Em termos das expansões dadas nas Equações 3.27 e 3.28, essas variáveis serão consideradas tais que:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} + \bar{\omega}^{(2)} \quad , \quad (3.29a)$$

$$\omega' = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} \quad ; \quad (3.29b)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}^{(0)} + \bar{\psi}^{(1)} + \bar{\psi}^{(2)} \quad , \quad (3.30a)$$

e

$$\psi' = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)} \quad , \quad (3.30b)$$

onde

$$\bar{\psi}^{(0)} = \bar{\psi}^{(*)}(p) - \bar{u}^{(0)}(p) (y-y_0) \quad , \quad (3.31)$$

sendo $\bar{\psi}^{(*)}$ obtido de $\bar{T}^{(*)}$ pela Equação 3.9, com condição de contorno $\bar{\psi}^{(*)}(p_s) = 0$, e $\bar{u}^{(0)}(p)$ é o vento zonal do

estado básico inicial. As demais variáveis derivadas de Ψ e ω têm as ordens coerentes com as Equações 3.29 e 3.30.

Para se obter as equações correspondentes às diversas ordens das variáveis dependentes Ψ e ω serão feitas mais duas aproximações de modo que os termos envolvendo \bar{N} e \bar{P} na Equação 3.21 e N' e P' na Equação 3.22 serão desprezados (Saltzman and Tang, 1972 e 1975a), pois tais termos causam pouca variação em ω (cerca de 20%), mas não alteram o seu padrão espacial em geral, além de não ter valor significativo em todos os pontos. Apesar disso, $\omega^{(2)}$ permanece com efeitos não geostróficos, pois $\Psi^{(2)}$ tem uma parte não-geostrófica.

A seguir serão formuladas as equações para as diversas ordens descritas nas Equações 3.29 e 3.30. Detalhes de derivação e do uso das parametrizações de aquecimento, atrito e resfriamento são dados no Apêndice D.

3.2.1 - PERTURBAÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM

Dado o estado básico $\bar{u}^{(0)}(p)$ e $\bar{T}^{(*)}(p)$, ou equivalentemente $\sigma(p)$, e considerando que as perturbações de primeira ordem são quase-geostróficas lineares, as equações que as governam são:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi^{(1)} + \bar{u}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^{(1)} + \beta \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial p} = - \Lambda_{\xi} \nabla^2 \psi^{(1)}, \quad (3.32)$$

$$\nabla^2 \omega^{(1)} + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega^{(1)}}{\partial p^2} = \frac{2 f_0}{\sigma} \frac{d\bar{u}^{(0)}}{dp} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\beta f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial x \partial p} - \frac{R}{\sigma p c_p} \nabla^2 \dot{Q}(1) + \frac{f_0}{\sigma} \frac{d \Lambda_\xi}{dp} \nabla^2 \psi(1) \\
 & + \frac{f_0}{\sigma} (\Lambda_\xi - \Lambda_T) \nabla^2 \frac{\partial \psi(1)}{\partial p} , \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

com as condições de contorno

$$\omega(1) = 0 \quad (3.34a)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial t \partial p} + \bar{u}(0) \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial x \partial p} - \frac{d\bar{u}(0)}{dp} \frac{\partial \psi(1)}{\partial x} + \Lambda_T \frac{\partial \psi(1)}{\partial p} = 0 \quad (3.34b)$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$. Note que as Equações 3.32 e 3.33 correspondem exatamente ao modelo linear quase-geostrófico do Capítulo 2, para o caso de não-dependência em y . Este problema de instabilidade para o caso de duas camadas com $v_\psi = 0$ em $y = 0$ e D foi estudado por Phillips (1954), na ausência de fontes e sumidouros.

Serão supostas soluções do tipo onda na forma

$$\zeta(1) = [\zeta_R(p) \cos kX - \zeta_I(p) \sin kX] \sin^\ell y \exp(\nu_I t) , \quad (3.35)$$

onde $X = x - c_R t$, $\ell = \pi / D$ com $D = L$ ou $k = 2\ell$, k representa o número da onda mais instável e ζ representa as variáveis dependentes. Pela definição de onda dada na Equação 3.35, não há propagação de fase na direção meridional, apenas pode haver propagação de energia ($C_{gy} = \partial \nu / \partial \ell$ pode ser não-nulo).

Note que apesar de $v_{\psi}^{(1)}$ ser nulo em $y = 0$ e D , a associada componente meridional divergente $v_x^{(1)}$ não o é. Além disso, a localização da origem $x = 0$ e a amplitude de $\psi^{(1)}$ são arbitrárias. As demais variáveis dependentes da perturbação de primeira ordem podem ser obtidas em função de Ψ_R , Ψ_I , ω_R e ω_I .

3.2.2 - CAMPO ZONAL DE PRIMEIRA ORDEM

As propriedades dos transportes associados às ondas baroclínicas em desenvolvimento induzem uma mudança de segunda ordem no campo zonal médio. Considerando o campo de $\psi^{(1)}$ dado pela Equação 3.35 na Equação 3.13 e na Equação 3.21 com \bar{N} e \bar{P} desprezados, como já ressaltado anteriormente, obtém-se:

$$\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{\omega}^{(1)}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}^{(1)}}{\partial y^2} = 2 \frac{f_0}{\sigma} k \ell^3 \left(\Psi_R \frac{d \Psi_I}{dp} - \Psi_I \frac{d \Psi_R}{dp} \right) \cdot$$

$$\text{sen } 2\ell y \exp(2\nu_I t) - \frac{R}{\sigma p C_p} \frac{\partial^2 \bar{Q}^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{f_0}{\sigma} \frac{d \Lambda_\xi}{dp} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(1)}}{\partial y^2}$$

$$+ \frac{f_0}{\sigma} (\Lambda_\xi - \Lambda_T) \frac{\partial^3 \bar{\psi}^{(1)}}{\partial y^2 \partial p} \quad (3.36)$$

e

$$\frac{\partial^3 \bar{\psi}^{(1)}}{\partial t \partial y^2} + \Lambda_\xi \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(1)}}{\partial y^2} = f_0 \frac{\partial \bar{\omega}^{(1)}}{\partial p} \quad , \quad (3.37)$$

o que sugere soluções do tipo

$$\bar{\zeta}^{(1)} = \tilde{\zeta}^{(1)}(p) \text{sen } 2\ell y \exp(2\nu_I t) \quad , \quad (3.38)$$

com condições de contorno

$$\tilde{\omega}^{(1)} = 0 \quad (3.39a)$$

ou

$$\frac{d \tilde{\psi}^{(1)}}{dp} = \frac{k \ell}{2(2 v_{I^+} \Lambda_T)} \left(\Psi_I \frac{d \Psi_R}{dp} - \Psi_R \frac{d \Psi_I}{dp} \right), \quad (3.39b)$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$. As demais variáveis dependentes do estado básico de primeira ordem podem ser obtidas em função de $\tilde{\psi}^{(1)}$ e $\tilde{\omega}^{(1)}$. Veja o Apêndice D para detalhes.

3.2.3 - PERTURBAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

Usando os resultados das subseções anteriores pode-se determinar os forçantes para $\psi^{(2)}$ e $\omega^{(2)}$. No caso de $\psi^{(2)}$, será considerado forçante de terceira ordem o termo da divergência na equação da vorticidade (Saltzman and Tang, 1972, 1975a). Então, as Equações 3.17 e 3.22 para perturbações de segunda ordem tornam-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi^{(2)} + \bar{u}(0) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^{(2)} + \beta \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} + \Lambda_\xi \nabla^2 \psi^{(2)} = L_1^{(2)} + L_2^{(2)} - N^{(2)} \quad (3.40)$$

e

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega^{(2)}}{\partial p^2} + \nabla^2 \omega^{(2)} = F_{a1}^{(2)} + F_{a2}^{(2)} + F_q^{(2)} + F_\Lambda^{(2)} \quad (3.41)$$

onde $L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$, $N^{(2)}$, $F_{a1}^{(2)}$, $F_{a2}^{(2)}$, $F_q^{(2)}$ e $F_\Lambda^{(2)}$ são definidos no Apêndice D, e com as seguintes condições de contorno

$$\omega^{(2)} = 0 \quad (3.42a)$$

ou

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial t \partial p} + \bar{u}^{(0)} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial x \partial p} - \frac{d\bar{u}^{(0)}}{dp} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} + \Lambda_T \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial p} = \\
 & \frac{\partial \bar{\psi}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x \partial p} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(1)}}{\partial y \partial p} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x \partial p} \\
 & - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y \partial p} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x \partial p} \\
 & + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y \partial p} , \tag{3.42b}
 \end{aligned}$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$.

As formas dos forçantes $L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$, $N^{(2)}$, $F_{a1}^{(2)}$, $F_{a2}^{(2)}$, $F_q^{(2)}$ e $F_\Lambda^{(2)}$ sugerem que as perturbações de segunda ordem são dadas por

$$\begin{aligned}
 \zeta^{(2)} = & \sum_{r,m,n} [(Z_{Ar,m,n} \cos nkX + Z_{Br,m,n} \text{sen } nkX) \cos m \ell y \\
 & + (Z_{Cr,m,n} \cos nkX + Z_{Dr,m,n} \text{sen } nkX) . \\
 & \text{sen } m \ell y] \exp(r v_I t) , \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

e as demais variáveis dependentes podem ser obtidas a partir de $\psi^{(2)}$ e $\omega^{(2)}$ (Veja o Apêndice D).

3.2.4 - CAMPO ZONAL DE SEGUNDA ORDEM

Os transportes associados às interações entre as perturbações de primeira e segunda ordem e devido à segunda ordem somente, induzem mudanças no campo zonal

que serão descritos a seguir. As equações para o campo zonal de segunda ordem são dadas por

$$\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{\omega}^{(2)}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}^{(2)}}{\partial y^2} = \bar{F}_a^{(2)} + \bar{F}_q^{(2)} + \bar{F}_\Lambda^{(2)} \quad (3.44)$$

e

$$\frac{\partial^3 \bar{\psi}^{(2)}}{\partial t \partial y^2} + \Lambda_\xi \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(2)}}{\partial y^2} - f_0 \frac{\partial \bar{\omega}^{(2)}}{\partial p} = \bar{L}^{(2)}, \quad (3.45)$$

onde $\bar{F}_a^{(2)}$, $\bar{F}_q^{(2)}$, $\bar{F}_\Lambda^{(2)}$ e $\bar{L}^{(2)}$ são definidos no Apêndice D, e com as seguintes condições de contorno

$$\bar{\omega}^{(2)} = 0 \quad (3.46a)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(2)}}{\partial t \partial p} + \Lambda_T \frac{\partial \bar{\psi}^{(2)}}{\partial p} &= \frac{\partial \bar{\psi}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(1)}}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(1)}}{\partial x \partial p} \frac{\partial \bar{\psi}^{(2)}}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial \bar{\psi}^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(2)}}{\partial x \partial p} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(2)}}{\partial y \partial p} \\ &- \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(1)}}{\partial y \partial p} \frac{\partial \bar{\psi}^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(2)}}{\partial y \partial p}, \end{aligned} \quad (3.46b)$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$.

As formas dos forçantes $\bar{F}_a^{(2)}$, $\bar{F}_q^{(2)}$, $\bar{F}_\Lambda^{(2)}$ e $\bar{L}^{(2)}$ sugerem que os campos zonais de segunda ordem são dados por

$$\bar{\zeta}^{(2)} = \sum_{r,m} (Z_{Ar,m} \cos m \ell y + Z_{Br,m} \sin m \ell y) \exp(rv_I t), \quad (3.47)$$

e as demais variáveis dependentes podem ser obtidas a partir de $\bar{\psi}^{(2)}$ e $\bar{\omega}^{(2)}$ (Veja o Apêndice D).

3.2.5 - PERTURBAÇÃO DE TERCEIRA ORDEM

Como já citado anteriormente, só se terá perturbação de terceira ordem nos campos da função de corrente e de temperatura devido à divergência/convergência associada à $\omega^{(2)}$. Então, pode-se escrever

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi^{(3)} + \bar{u}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^{(3)} + \beta \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x} + \Lambda_{\xi} \nabla^2 \psi^{(3)} = f_0 \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial p}, \quad (3.48)$$

com a seguinte condição de contorno

$$\frac{\partial^2 \psi^{(3)}}{\partial t \partial p} + \bar{u}^{(0)} \frac{\partial^2 \psi^{(3)}}{\partial x \partial p} - \frac{d\bar{u}^{(0)}}{dp} \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x} + \Lambda_T \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial p} = 0, \quad (3.49)$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$. A forma de $\omega^{(2)}$ dada pela Equação 3.43 em associação com a Equação 3.48 mostra que a Equação 3.43 é válida também para $\psi^{(3)}$. O campo de perturbação de temperatura de terceira ordem é obtido diretamente de $\psi^{(3)}$ usando a Equação 3.39. Para detalhes das componentes de $\psi^{(3)}$ veja o Apêndice D.

3.3 - INCLUSÃO DE CONSTITUINTES PASSIVOS

Nessa subseção será equacionado o problema da presença de algum constituinte que se conserva no tempo, cuja configuração inicial homogênea é redistribuída de acordo com os movimentos associados com as ondas baroclínicas em desenvolvimento.

Em uma primeira aproximação, o vapor d'água na atmosfera será considerado um constituinte passivo ou, equivalente, as suas fontes e seus sumidouros se cancelam. Como parâmetro representativo da umidade é tomada a razão de mistura q , a qual de acordo com as suposições acima obedece a seguinte equação de conservação:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial p} = 0 \quad (3.50)$$

Em geral q pode representar qualquer constituinte passivo porém, por conveniência, a dedução das expressões dos coeficientes de q será feita supondo que o constituinte considerado é a razão de mistura.

Considerando a separação em média e desvio zonais da razão de mistura e a equação da continuidade de massa, a Equação 3.50 pode ser separada em duas partes:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'q'} + \frac{\partial}{\partial p} \overline{\omega'q'} = 0 \quad (3.51)$$

para a média zonal, e

$$\begin{aligned} \frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial q'}{\partial y} + \bar{\omega} \frac{\partial q'}{\partial p} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \omega' \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \\ + u' \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial q'}{\partial y} + \omega' \frac{\partial q'}{\partial p} - u' \frac{\partial \bar{q}'}{\partial x} - v' \frac{\partial \bar{q}'}{\partial y} - \omega' \frac{\partial \bar{q}'}{\partial p} = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

para o desvio zonal.

Procedendo-se a decomposição de q nas componentes descritas nas Equações 3.27 e 3.28, de modo que

$$q = \bar{q} + q' = \bar{q}^{(0)} + \bar{q}^{(1)} + q^{(1)} + q^{(2)} \quad , \quad (3.53)$$

e considerando o estado básico da razão de mistura, $\bar{q}^{(0)}$, com distribuição horizontal uniforme e com gradiente meridional zonalmente uniforme ($\partial \bar{q}^{(0)} / \partial y$ constante), pode-se escrever as equações para as diversas componentes dadas na Equação 3.53, as quais são apresentadas a seguir.

A perturbação de primeira ordem é dada por

$$q^{(1)} = (q_R \cos kX - q_I \sin kX) \sin \ell y \exp(v_I t) \quad (3.54)$$

e satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial t} + \bar{u}^{(0)} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial p} (\bar{q}^{(0)} \omega^{(1)}) - \bar{q}^{(0)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial p} = 0 \quad ; \quad (3.55) \end{aligned}$$

o campo zonal de primeira ordem é dado por

$$\bar{q}^{(1)} = (\tilde{q}_0^{(1)} + \tilde{q}_A^{(1)} \cos 2\ell y + \tilde{q}_B^{(1)} \sin 2\ell y) \exp(v_I t) \quad (3.56)$$

e satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{\chi}^{(1)}}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial p} (\bar{q}^{(0)} \bar{\omega}^{(1)}) - \bar{q}^{(0)} \frac{\partial \bar{\omega}^{(1)}}{\partial p} \\ + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \bar{q}^{(1)} \right] + \frac{\partial}{\partial p} (\bar{\omega}^{(1)} \bar{q}^{(1)}) = 0 \quad ; \quad (3.57) \end{aligned}$$

e a perturbação de segunda ordem é dada por

$$q^{(2)} = \sum_{r,m,n} (q_{Ar,m,n} \cos nkX + q_{Br,m,n} \sin nkX) \cos m \ell y$$

$$+(q_{Cr,m,n} \cos nkX + q_{Dr,m,n} \text{sennkX}) \text{senm} \ell y \exp(rv_{IT}) , \quad (3.58)$$

e satisfaz a equação

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q^{(2)}}{\partial t} + \bar{u}^{(0)} \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial p} (\bar{q}^{(0)} \omega^{(2)}) - \bar{q}^{(0)} \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial p} - \frac{\partial \bar{\psi}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\chi}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} \\ & + \frac{\partial \bar{q}^{(1)}}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial p} (\bar{\omega}^{(1)} q^{(1)}) - q^{(1)} \frac{\partial \bar{\omega}^{(1)}}{\partial p} \\ & + \frac{\partial}{\partial p} (\bar{q}^{(1)} \omega^{(1)}) - \bar{q}^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial p} + \left\{ \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y} \right\} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} \\ & + \left\{ \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \right\} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p} (\omega^{(1)} q^{(1)}) - q^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial p} \\ & - \left\{ \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y} \right\} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} - \left\{ \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \right\} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} \\ & - \frac{\partial}{\partial p} (\omega^{(1)} q^{(1)}) + q^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial p} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.59)$$

As expressões para as amplitudes nas Equações 3.54, 3.56 e 3.58 encontram-se no Apêndice D. A velocidade vertical $\omega^{(2)}$ que aparece na Equação 3.59 é apenas a parte de $\omega^{(2)}$ dada pela Equação 3.43 fazendo-se $F_{a2}^{(2)} = 0$ na Equação 3.41 (Salzman and Tang, 1985).

Como é bem conhecido, o vapor d'água não é um constituinte passivo da atmosfera, pois condensação e evaporação estão continuamente atuando e os processos de condensação proporcionam a liberação de calor latente, que

pode modificar os campos de temperatura e de movimento das ondas. Porém, pode-se supor que tais processos são relativamente menores que os processos advectivos (Saltzman and Tang, 1985), ou pode-se também supor que tais processos se cancelam de modo que a quantidade total de vapor d'água é conservada. Desse modo, pode-se explorar qual a implicação que a redistribuição de vapor d'água pelas ondas baroclínicas em desenvolvimento teria na formação de nuvens. Isto é, pode-se inferir, baseando-se em alguma definição "dinâmica", a forma das nuvens associadas ao campo de razão de mistura calculando-se a umidade relativa. Aqui também são desprezados os processos de precipitação, o que pode ocasionar regiões com supersaturação, pois o crescimento local de q é exponencial no tempo.

Levando em consideração as restrições acima pode-se determinar a umidade relativa U_r por

$$U_r = \frac{q(x,y,p,t)}{q_{sat}(p,T(x,y,p,t))} , \quad (3.60)$$

onde $q_{sat}(p,T)$ é a razão de mistura de saturação e é dada por

$$q_{sat}(p,T) = 0,622 \frac{e_{sat}(T)}{p} \quad (3.61)$$

onde $e_{sat}(T)$ é a pressão de vapor de saturação e será calculada pela fórmula modificada de Tetens (Murray, 1967)

$$e_{sat}(T) = 6,108 \exp \left[\frac{17,27 (T - 273,16)}{T - 35,86} \right] . \quad (3.62)$$

Para a obtenção dos contornos das nuvens, supõe-se que a nebulosidade é proporcional a U_r , como em muitos modelos dinâmicos (Smagorinsky, 1960; Vallis, 1982);

mais precisamente, relaciona-se a cobertura de nuvens às regiões que tenham U_r acima de um valor crítico pré-fixado onde o movimento vertical é ascendente (Lewis, 1957). O valor crítico normalmente escolhido para periferia das nuvens é de $U_r = 0,6$ ou 60% (Saltzman and Tang, 1985). Embora na obtenção dos coeficientes da razão de mistura usou-se $\omega^{(2)}$ com $F_{a2}^{(2)}$ nulo, para a determinação dos contornos das nuvens a velocidade vertical é a total no sistema (x, y, z, t) , aproximada por (Holton, 1979)

$$w = - \frac{p g}{R T} \omega , \quad (3.63)$$

onde ω e T são os campos totais, obtidos da Equação 3.29 e usando a equação 3.30 na Equação 3.9, respectivamente.

CAPÍTULO 4

EFEITOS SECUNDÁRIOS DE LIBERAÇÃO DE CALOR LATENTE E DE ATRITO NO DESENVOLVIMENTO DE FRENTES ATMOSFÉRICAS

A estrutura observada das ondas ciclônicas de latitudes médias é muito diferente das ondas simétricas obtidas pela teoria linear baroclínica quase-geostrófica. Palmén e Newton (1969) descrevem as principais características observadas das ondas ciclônicas baroclínicas como:

- a- baixos níveis: desenvolvimento de sistemas com intensa circulação ciclônica (baixas), movendo-se para leste e para os pólos, e de sistemas com circulação anticiclônica (altas) mais fracos e difusos, movendo-se para leste e para o equador;
- b- altos níveis na troposfera: desenvolvimento de ondas de grande amplitude, frequentemente chegando a formar baixas desprendidas, que são deslocadas na direção equatorial em relação à latitude de sua origem, e frequentemente acompanhadas por uma divisão da corrente de jato;
- c- desenvolvimento de zonas frontais relativamente profundas em forma de S, separando as massas de ar frio que se deslocam para o equador das massas de ar quente que se deslocam para os pólos;
- d- desenvolvimento de inclinações horizontais nos cavados e nas cristas tais que, no Hemisfério Norte, são geralmente orientadas NE-SE em latitudes baixas e médias e NO-SE em altas latitudes e, no Hemisfério Sul, NO-SE em latitudes baixas e médias e NE-SE em altas latitudes;

e- desenvolvimento de inclinações para oeste na vertical das baixas/cavados e altas/cristas, em ambos hemisférios (essa característica é bem representada pela teoria linear).

O objetivo desse capítulo é, através de uma análise analítica relativamente simples, mostrar como os efeitos de segunda ordem podem modificar uma onda baroclínica com crescimento exponencial no tempo, levando-a para as características descritas nos itens a-d acima, generalizando os trabalhos de Saltzman e Tang (1972, 1975a, 1985). Saltzman e Tang utilizaram o modelo de balanço (Arakawa, 1962), simplificando a equação de balanço para o quase-geostrófico, com duas camadas na vertical. A generalização citada se refere a utilizar o modelo multi-nível descrito no Capítulo 3, de modo que o próprio modelo escolhe os níveis de máximos e mínimos das variáveis em estudo. Além disso com resolução maior, pode-se usar estados básicos mais realistas. Tais fatos permitem a formação, mais coerente com as observações, de frentes em níveis mais próximos à superfície, em comparação com a frontogênese na média troposfera obtida por Saltzman e Tang (1974).

Tal modelo apresenta algumas deficiências ressaltadas em Saltzman e Tang (1985), das quais eliminou-se os problemas da resolução vertical e da falta do efeito da liberação de calor latente e de atrito. Porém, permanecem as seguintes características: as fronteiras latitudinais são fechadas para o escoamento geostrófico (não-divergente) e abertas para o não-geostrófico (divergente); como os campos primários são dados por uma única onda, são desprezadas as interações barotrópicas onda-onda e o escoamento médio-onda, integradas na área; nenhuma realimentação para o estado básico zonal térmico é

incluída, de modo que a onda primária cresce exponencialmente sem saturação (isto é, sem alcançar o estágio de oclusão). Então, pode-se considerar apenas os primeiros estágios de crescimento, durante os quais a amplitude finita da onda atinge sua estrutura fundamental. A partir daí, o contínuo crescimento exponencial das amplitudes dos campos com o tempo, sem realimentação para o estado básico, mascararia os resultados do modelo.

A Figura 4.1 apresenta o estado básico utilizado para a obtenção do modo baroclinicamente mais instável, o qual serve como campo primário para a aplicação do modelo descrito no Capítulo 3. Tal estado básico é obtido de Oort e Rasmusson (1971) e representa condições médias zonais de inverno em 45°N . O modelo linear rodado com esse estado básico não inclui os efeitos de liberação de calor latente e do atrito, o que proporciona a geração de um modo mais instável do tipo Charney. O modo mais instável obtido têm escala horizontal de 4065 km (correspondente à onda 7 em 45° de latitude), com velocidade de fase de $6,62 \text{ m s}^{-1}$ e taxa de crescimento de $4,207 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ (tempo de multiplicação-e de 2,75 dias). O fato de se usar um estado básico para o Hemisfério Norte não torna a análise restrita para esse hemisfério, pois estados básicos semelhantes em latitudes médias do Hemisfério Sul apresentariam, neste modelo, resultados aproximadamente simétricos em relação ao Equador. Então, pode-se considerar que esta análise seja válida para as latitudes médias de ambos hemisférios, desde que não são incluídos efeitos assimétricos como, por exemplo, a topografia.

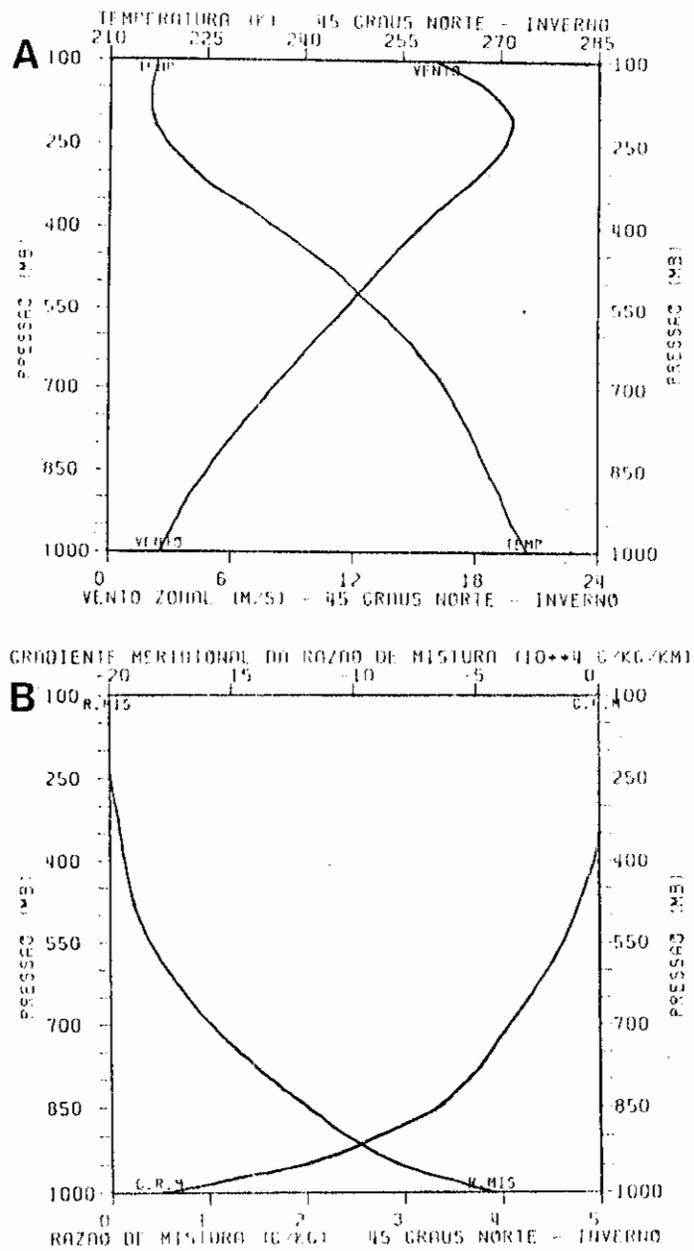


Fig. 4.1 - Estado básico usado na simulação de frentes atmosféricas, para condições médias de inverno em 45°N: a) vento zonal (ms^{-1}) e temperatura (K) e b) razão de mistura (g kg^{-1}) e seu gradiente meridional ($10^4 \text{ g kg}^{-1} \text{ km}^{-1}$).

Para uma melhor análise dos efeitos de liberação de calor latente e do atrito, foram elaborados três experimentos. Todos eles partem do mesmo campo primário obtido do modelo linear seco e sem atrito. O primeiro, denominado de caso I, serão considerados apenas os efeitos de alta ordem (acima da linear), sem liberação de calor latente e sem atrito. O segundo, incluirá apenas a liberação de calor latente nos campos de alta ordem, cujo perfil vertical de aquecimento é tal que $\alpha = 0,8$ e $\beta = 1$, sendo máximo em 500 mb, e será referenciado como caso II. O terceiro experimento, chamado de caso III, considerará tanto a liberação de calor latente quanto o atrito e o resfriamento (daqui por diante denominados dissipação) nos campos de alta ordem. A seguir, serão apresentados os resultados mais importantes do modelo descrito no Capítulo 3, em confronto com resultados de outros modelos da literatura e com as observações disponíveis.

4.1 - ESTRUTURAS HORIZONTAIS

4.1.1 - BAIXOS NÍVEIS

Serão apresentadas neste item seções horizontais no nível de 850 mb para representar a estrutura das frentes atmosféricas em baixos níveis. A razão de se escolher 850 mb é porque os campos de umidade relativa nesse nível e, portanto, a cobertura de nuvens como inferida pelas configurações dos campos de grande escala, possuem estruturas bastante interessantes, principalmente quando se faz a inclusão dos efeitos de liberação de calor latente. A estrutura térmica abaixo de 850 mb até a superfície é bastante semelhante à desse nível, sendo que 950 mb apresenta gradientes horizontais de temperatura potencial mais fortes, principalmente no caso III. Também, o perfil vertical do aquecimento por liberação de calor latente ($H(p)$) é nulo abaixo de 900 mb e seu efeito é

melhor entendido acima desse nível. Então, com a finalidade de comparação entre os casos seco e úmido, torna-se mais proveitoso apresentar o nível de 850 mb para a análise das estruturas horizontais próximas à superfície. É bom salientar que neste modelo não há inclusão de processos devido à superfície (a camada limite não é parametrizada e a topografia não é considerada) mas mesmo assim a frente térmica mais intensa se localiza no primeiro nível do modelo acima da superfície (950 mb, neste caso). Porém, numa tentativa de se considerar de alguma forma o efeito da camada limite, o caso III inclui o atrito do tipo Rayleigh com coeficiente variável na vertical. Considera-se também um resfriamento do tipo Newtoniano com coeficiente também variável na vertical, para simular o resfriamento radiativo. Os perfis usados para esses coeficientes são, respectivamente:

$$\Lambda_{\xi}(p) = 1,1574 \times 10^{-6} \exp [(p - 1000) / 200] \quad (4.1)$$

e

$$\Lambda_T(p) = 2,315 \times 10^{-6} + 4,052 \times 10^{-6} \exp(2,636p^*) \sin(\pi p^*) \quad , \quad (4.2)$$

onde $p^* = (p-100)/900$. Os valores de Λ_{ξ} (s^{-1}) são ajustados de modo a se obter um máximo de fricção na superfície, com um tempo de decaimento-e de 10 dias, e diminui para um décimo desse valor em 500 mb. Os valores de Λ_T ($K s^{-1}$) são ajustados de acordo com a Figura 10.4 de Hess (1959), com máximo resfriamento em 750 mb.

As seções horizontais apresentadas a seguir são tais que na abscissa está representada uma onda e meia na direção zonal ($0,25 \leq X=x/L \leq 1,25$) e na ordenada uma largura de canal de ($0 \leq Y=y/D \leq 1$). A latitude mais ao sul representaria cerca de $25^{\circ}N$; a mais ao norte cerca de $65^{\circ}N$ e a central $45^{\circ}N$, para $L = D = 4065$ km.

A Figura 4.2 mostra os campos de temperatura potencial no nível de 850 mb, para os casos I, II e III após 5,75 e 6,75 dias, considerando-se uma perturbação inicial máxima de 1 m s^{-1} na velocidade meridional. Pode-se notar o aumento da concentração das isentropas no tempo comparando-se as Figuras 4.2.a, b e c com as Figuras 4.2.d, e e f, respectivamente. A liberação de calor latente (Figuras 4.2.b e 4.2.e) intensifica tal concentração e a dissipação além de intensificá-la ainda mais, produz um confinamento em torno do centro do canal (Figuras 4.2.c e 4.2.f).

A zona frontal, associada com essa concentração de isentropas, pode ser melhor identificada através dos valores máximos dos correspondentes campos de $|\nabla_h \theta| L$, que são apresentados na Figura 4.3, em 850 mb, após 6,75 dias.

Outro aspecto importante a se destacar nas Figuras 4.2 e 4.3 é o deslocamento relativo do ar frio para leste e para o equador e do ar quente para leste e para o pólo, culminando com a concentração das isotermas em forma de S. Além disso, o deslocamento do ar quente para o pólo causa uma frente quente, evidenciada pelas isolinhas do campo de $|\nabla_h \theta| L$ na Figura 4.3. Tal frente quente fica melhor definida quando se inclui no cálculo do $|\nabla_h \theta| L$ o termo devido a $\psi^{(3)}$. Então, para a frente quente, a divergência devido a $\omega^{(2)}$ parece ser importante. Esse aspecto será melhor ressaltado quando se discutir as diversas ordens de evolução separadamente.

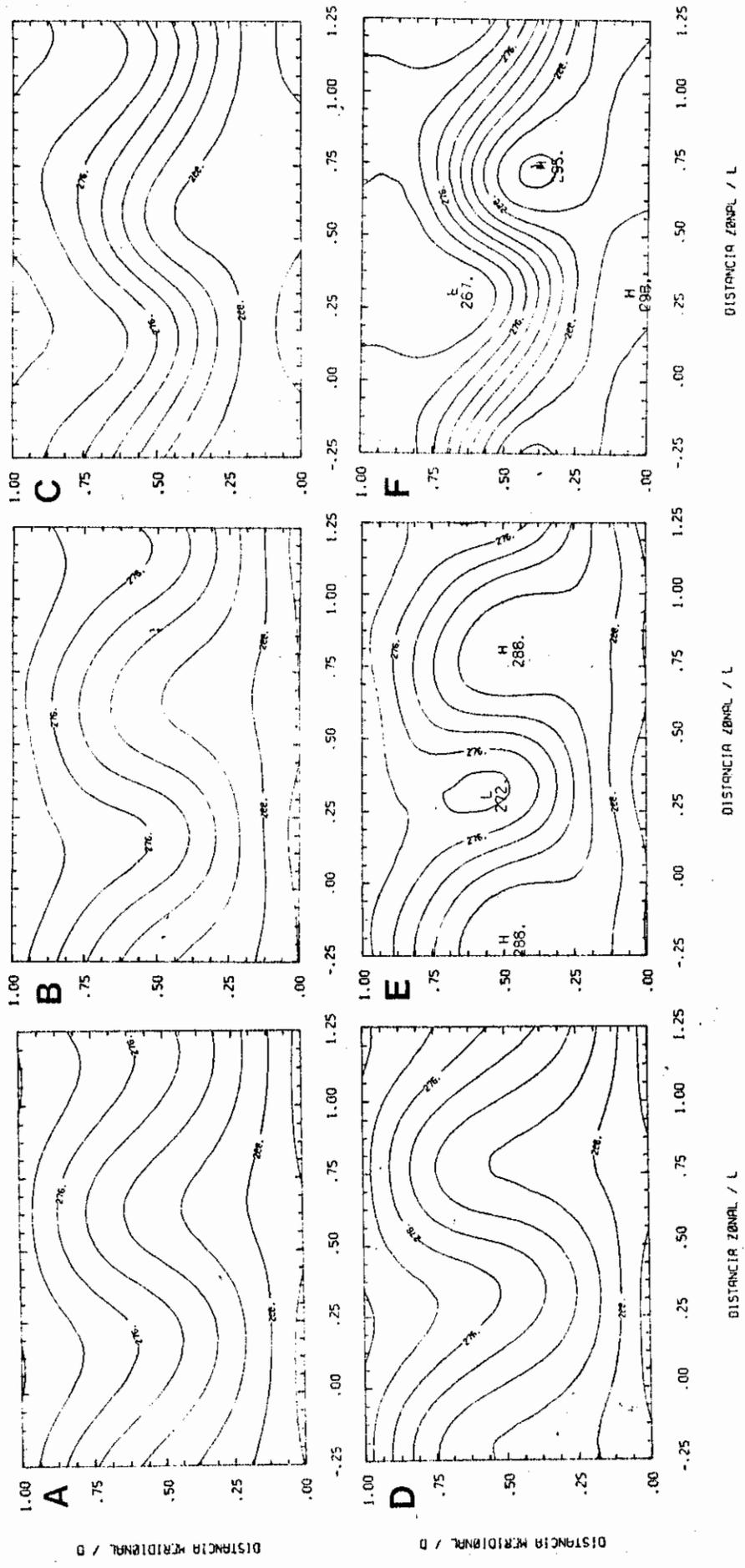


Fig. 4.2 - Seções horizontais de temperatura potencial, em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I (a e e), II (b e c) e III (c e f). As isotermas variam de 270 a 294 K, com intervalo de 3 K.

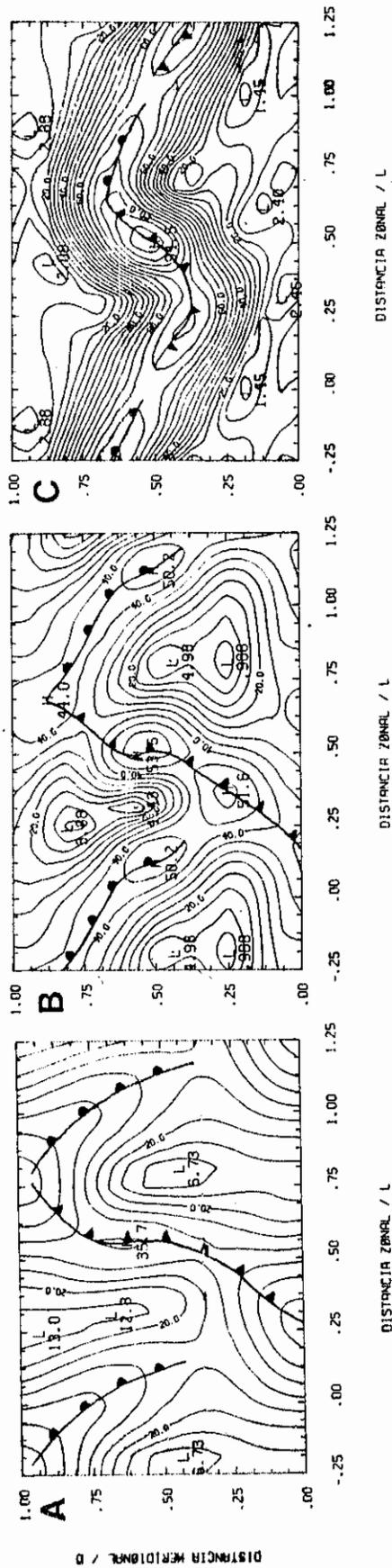


Fig. 4.3 - Seções horizontais do módulo do gradiente horizontal de temperatura potencial multiplicado pelo comprimento da onda mais instável, em 850 mb após 6,75 dias, para os casos I (a), II (b) e III (c). As isolinhas variam de 5 a 90K, com intervalo de 5K. As frentes estão indicadas com a convenção sinótica.

A Figura 4.4 mostra os campos da função de corrente em 850 mb para os casos I, II, III, em 5,75 e 6,75 dias. O valor de referência, $\bar{\Psi}^*$, não foi incluído. Pode-se notar um aprofundamento da baixa na função de corrente ao norte por efeitos não-lineares e com a sua posição correspondendo bem com as frentes esboçadas na Figura 4.3. Como no início predomina o campo linear, com máxima amplitude no centro do canal, torna-se óbvia a propagação para o pólo das baixas e para o equador das altas, o que concorda bem com a Figura 3.17 de Palmén e Newton (1969). Esse deslocamento relativo das altas e baixas proporciona um transporte de vorticidade relativa das latitudes onde é baixa (centro do canal) para as latitudes onde é alta (Kuo, 1951). Portanto, há uma divergência no transporte de vorticidade relativa no centro do canal. Esse transporte de vorticidade relativa pelo vento não-divergente é igual à convergência de transporte de momentum pelo vento não-divergente. Então, as inclinações meridionais do campo da função de corrente tem conexão com esse transporte meridional de vorticidade. Há um grande aumento nas inclinações horizontais dos cavados e das cristas com a inclusão dos efeitos da liberação de calor latente (Figura 4.4e), sendo esse efeito ainda maior quando se inclui a dissipação (Figura 4.4.f). Desse modo, há uma intensificação na convergência do transporte de momentum no centro do canal quando se inclui os efeitos da liberação de calor latente e da dissipação. Para tal quadro, as configurações tem inclinações horizontais tais que ao norte tem uma orientação NO-SE (HN), a seguir mais ao sul, são de NE-SO, voltando a ser NO-SE bem ao sul do canal (Figuras 4.4e e 4.4f), tendo, portanto, no lado equatorial uma região com divergência de transporte de momentum. Essas inclinações são também evidentes quando se analisa os campos correspondentes de vorticidade em 850 mb (Figura 4.5). além disso, a inclusão dos efeitos da umidade e da dissipação aumenta a atividade, quebrando a estrutura da

vorticidade em uma "família" de centros fechados de escala menor (Figuras 4.5e e f).

Na Figura 4.6 encontra-se o movimento vertical (em 10^5 mb s^{-1}) em 850 mb para os casos I, II, III após 5,75 e 6,75 dias. Pode-se notar, em geral, movimento ascendente de ar quente adiante da frente e movimento descendente de ar frio atrás da frente. O movimento ascendente adiante da frente é mais intenso que o descendente atrás da frente em 6,75 dias. A inclusão da liberação de calor latente e da dissipação não só aumenta o movimento vertical, bem como muda as configurações, quebrando as estruturas em centros menores, tornando-as mais próximas às observadas. É importante salientar que as estruturas do movimento vertical dadas nas Figuras 4.6.e e f são muito semelhante à obtida por Saltzman e Tang (1975a, Fig.4) para o caso I. Tais campos teóricos comparam bem com o movimento vertical calculado observacionalmente por Kung (1973). Porém, Saltzman e Tang (1975a) obtiveram tal estrutura porque usaram um valor de estabilidade estática muito baixo para condições médias (secas) em 500 mb ($0,01378 \text{ m}^2 \text{ mb}^{-2} \text{ s}^{-2}$) o que é equivalente a incluir de uma forma indireta algum efeito de liberação de calor latente. Pode-se notar pela Figura 4.6.d que, com valores mais apropriados para a estabilidade estática em um modelo multinível, o caso I não consegue reproduzir tal configuração. A Figura 4.7 mostra os campos correspondentes de divergência em 850 mb. Em geral, onde há convergência o movimento vertical é ascendente e onde há divergência é descendente.

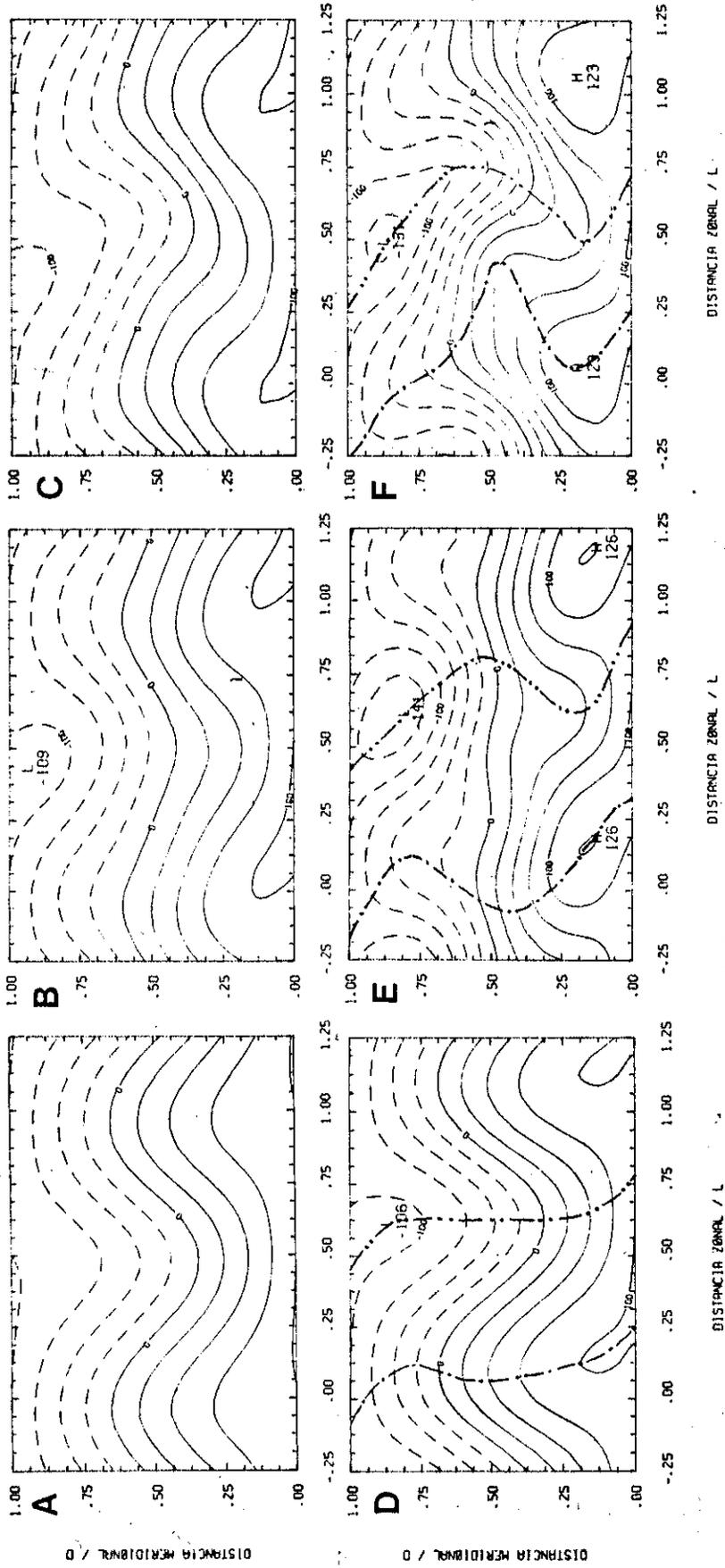


Fig. 4.4 - Seções horizontais da função de corrente, sem o valor de referência e multiplicada por 10^{-5} , em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas variam de -125 a $125 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, com intervalo de $25 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

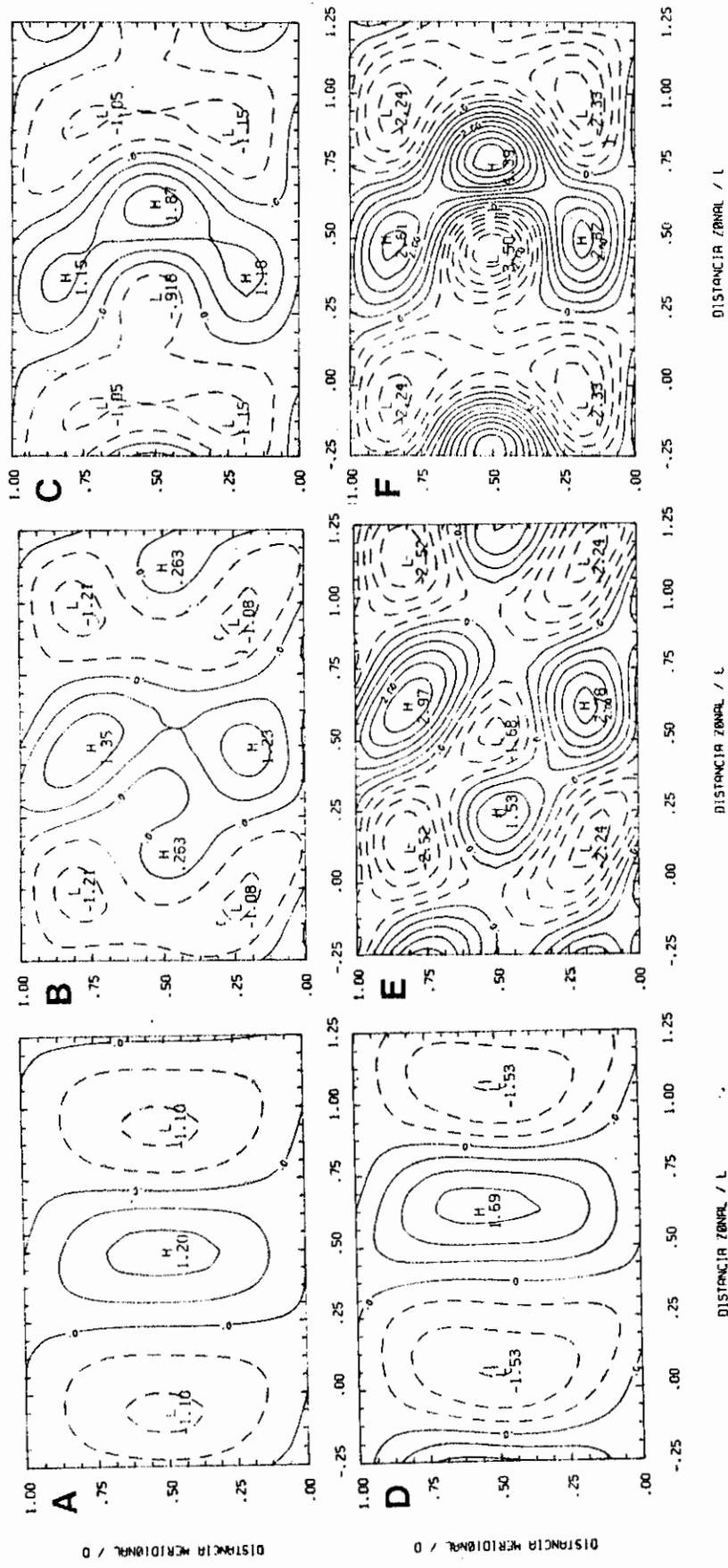


Fig. 4.5 - Seções horizontais da vorticidade relativa, multiplicada por 10⁵, em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas variam de -5 a 5 s⁻¹, com intervalo de 0,5 s⁻¹.

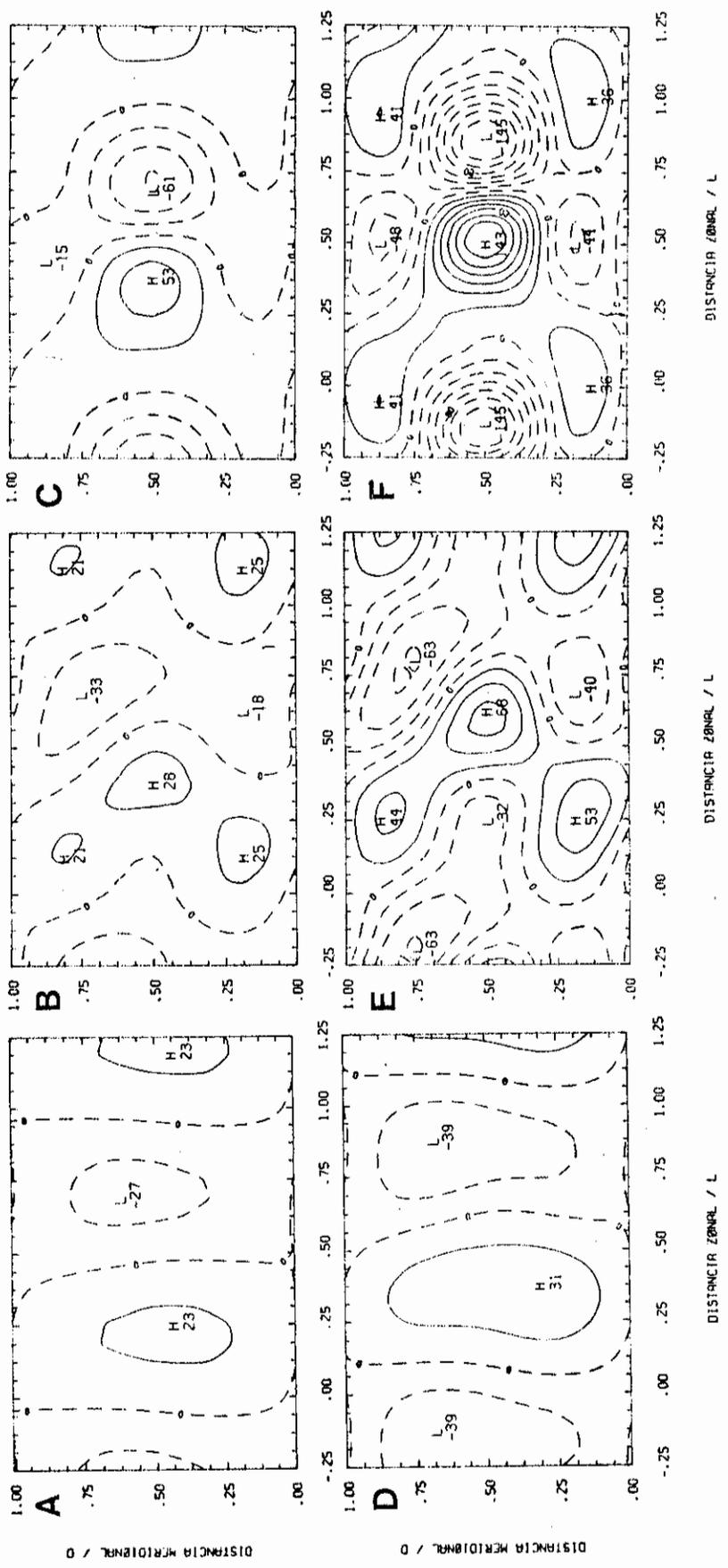


Fig. 4.6 - Seções horizontais da velocidade vertical, multiplicada por 10^5 , em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas variam de -120 a 120 mb s^{-1} , com intervalo de 20 mb s^{-1} .

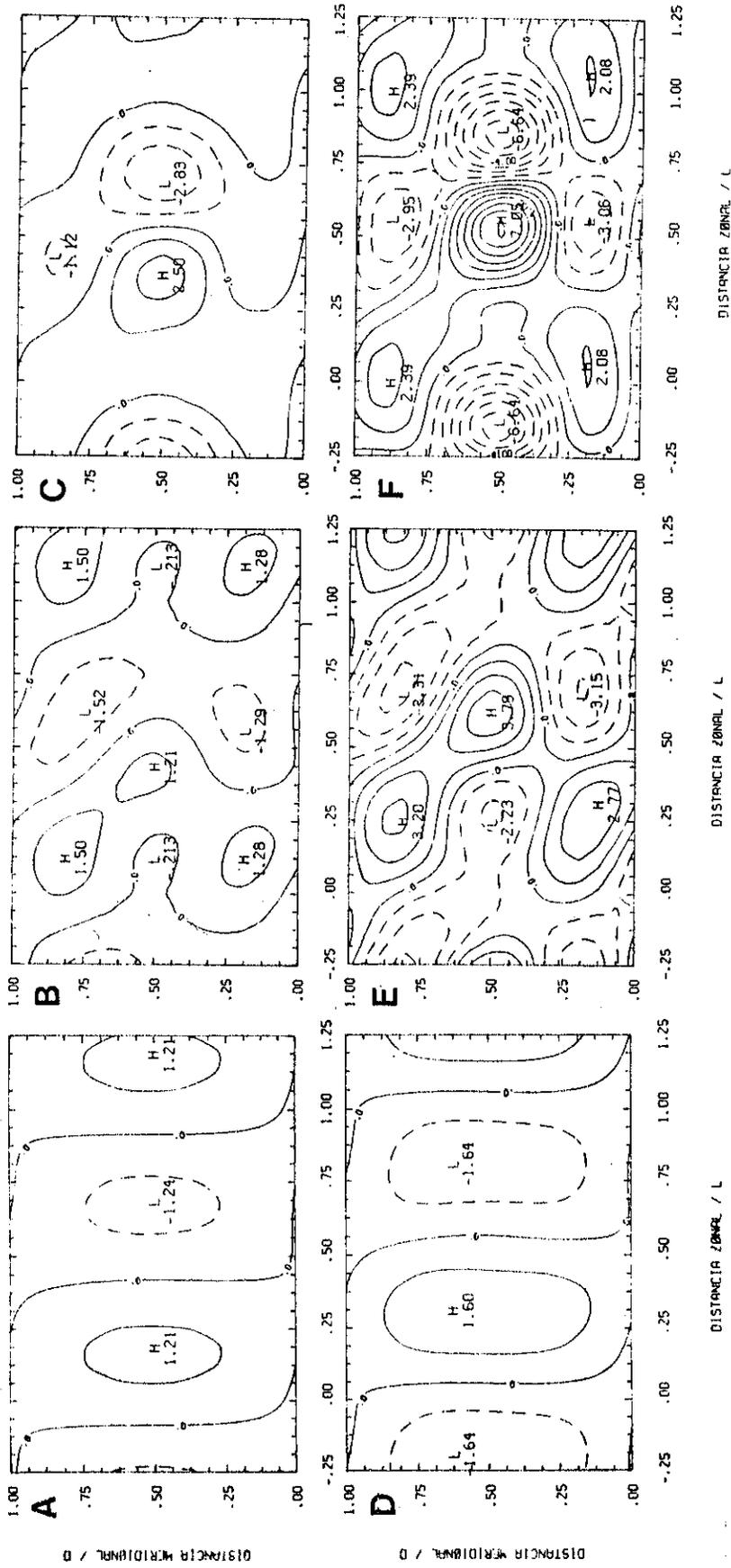


Fig. 4.7 - Seções horizontais da divergência horizontal, multiplicada por 10^6 , em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas variam de -7 a 6 s^{-1} , com intervalo de 1 s^{-1} .

Outro aspecto a salientar é que tanto a velocidade vertical como a divergência apresentam valores muito baixos quando comparados com as observações. Os campos de vortacidade e de divergência deveriam ser da mesma ordem de grandeza (Orlanski et alii, 1985), mas a divergência é uma ordem de grandeza menor que a vortacidade. Isto explica os movimentos verticais pequenos, pois a divergência existente é aquela devido ao rearranjo dos campos de movimento para continuar válido o modelo de balanço. Porém, um aspecto positivo (Orlanski et alii, 1985) é que os campos de vortacidade e de divergência se concentram em regiões de tamanhos semelhantes com escala relativamente pequena. Isto é melhor verificado quando se inclui a dissipação (4.5.f e 4.7.f).

Na Figura 4.8 são apresentados os campos de razão de mistura, após a sua redistribuição pelos campos de movimento, e da umidade relativa em 850 mb para os casos I, II, III após 5,75 dias. As configurações da razão de mistura (Figura 4.8a, b e c) são bastante semelhantes nos três casos, mostrando concentração de vapor d'água ao longo das frentes térmicas, constituindo frentes de umidade. A diferença mais saliente entre os casos é que no II e no III existem estruturas meridionais mais complexas, em comparação com o caso I. Nos campos de umidade relativa (Figuras 4.8d,e e f), as diferenças entre os três casos é bastante nítida, porém os aspectos relevantes principais estão presentes nos três casos, ou seja, a região seca no lado equatorial e oeste da frente fria é a região com maior concentração de umidade no lado polar e a leste da frente fria, caracterizando a citada frente de umidade.

Utilizando os campos de razão de mistura, os campos térmicos dados na Figura 4.2, os campos de movimento vertical dados na Figura 4.6 e os da umidade relativa dados na Figura 4.8, inferiu-se a região em que deve haver

cobertura de nuvens de acordo com o descrito no Capítulo 3. O resultado está apresentado na Figura 4.9 juntamente com o campo de vento descontando-se o deslocamento do sistema. Nos casos I e II o valor de referência da umidade relativa usado para delimitar a cobertura de nuvens, onde a velocidade vertical é ascendente, foi de 0,7 e no caso III de 0,58. Pode-se notar a formação de cobertura de nuvens típicas de frentes frias no caso II e III, com a cabeça alargada cobrindo a região de movimento vertical ascendente mais intenso adiante da frente e a existência de uma cauda, cobrindo uma região bem menor. Esta estrutura é bastante semelhante à obtida para o nível de 750 mb por Saltzman e Tang (1985), com um modelo quase-geostrófico seco de duas camadas, porém, como já ressaltado anteriormente, utilizaram um valor muito baixo para a estabilidade estática em 500 mb. Nota-se, aqui, que o caso I não consegue reproduzir a cauda da cobertura de nuvens nos horários apresentados. Com a introdução da liberação de calor latente isto é constatado. Outro fato a se destacar é que a escala da cobertura de nuvens é de alguns milhares de quilômetros, não sendo, definitivamente, nuvens vírgulas como propõe Saltzman e Tang (1985). Tais coberturas de nuvens são as frequentemente encontradas associadas às zonas frontais (Browning, 1986). As nuvens vírgulas que têm escalas espacial e temporal bem menores, serão discutidas no próximo capítulo. Ressalta-se que como o campo de movimento vertical torna-se muito complexo a partir de 5,75 dias, a inferência da cobertura de nuvens utilizando apenas variáveis de grande escala perde o significado. Por esse motivo analisou-se as variáveis úmidas nesse horário.

Quanto ao movimento relativo ao deslocamento das ondas, nota-se a advecção de ar quente para norte adiante da frente fria e de ar frio para sul atrás da frente fria. É também bem clara a diferença nas inclinações entre os casos I e II e o caso III, sendo que no caso II o

centro de circulação anticiclônica na região da frente fria fica mais ao sul e mais a leste em relação ao caso I e III. Tais fatos evidenciam que os efeitos não-lineares são mais intensos nos casos II e III. O centro de circulação ciclônica fica mais ao norte, relativamente, no caso II e mais a NE no caso III em relação ao caso I, ad-vectando ar frio para o sul, bem semelhante ao caso observado. No caso I, embora o outro de circulação anticiclônica fique a NE do centro de circulação ciclônica, não há uma inclinação meridional clara de cada centro, como nos casos II e III.

As configurações mostradas nas Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.9, são bastante semelhantes ao caso clássico de um ciclone observado em desenvolvimento mostrado na Figura 11.3 de Palmén e Newton (1969), embora as características na superfície não sejam bem representadas nesse modelo, devido a não inclusão da física da camada limite.

Com a finalidade de comparação com a estrutura da temperatura potencial apresentada na Figura 4.2, apresenta-se na Figura 4.10 os campos correspondentes da temperatura potencial equivalente. Em geral os padrões são semelhantes, porém, os gradientes horizontais da temperatura potencial equivalente são muito mais fortes, principalmente na região onde se localizam as frentes (veja Figura 4.3). Particularmente no caso III (Figura 4.10.f), é notável a concentração das isolinhas de θ_e . Nota-se claramente que a identificação das frentes é muito mais clara quando se usa seções horizontais de θ_e .

4.1.2 - ALTOS NÍVEIS

A Figura 4.11 apresenta a função de corrente para o nível de 350 mb para os casos I, II e III em 6,75; 7,25 e 7,75 dias, sem o valor de referência para o nível considerado. Nota-se que em 6,75 dias os campos são

bastante simétricos, apresentando ondas com amplitude maior no centro. Em 7,25 dias, há um aumento das amplitudes, com os casos II e III já mostrando efeitos não-lineares mais fortes e o caso III com uma baixa mais intensa já despreendida. Em 7,75 dias, novamente as amplitudes se intensificam, e no caso III há o despreendimento completo da baixa, com uma consequente divisão no escoamento, com uma alta também fechada porém menos intensa que a baixa. É importante notar a clara propagação para o equador da baixa (despreendida) e para o pólo da alta nos casos II e III, sendo que nesses casos a inclinação horizontal da fase é muito mais intensa que no caso I, proporcionando um maior transporte local de momentum das laterais para o centro do canal. Portanto, a intensificação dos efeitos não-lineares pela liberação de calor latente é muito importante para o despreendimento da baixa em altos níveis, o que ocorreu cerca de um dia após o estabelecimento da frente em baixos níveis. Esta baixa despreendida atinge, para baixo cerca de 450 mb no modelo.

4.2 - ESTRUTURAS VERTICAIS

4.2.1 - SEÇÕES ZONAIS

Serão apresentadas a seguir seções zonais mostrando a estrutura vertical dos campos em análise para uma latitude ($Y=0,75$) cortando a região central da cabeça das nuvens mostradas nas Figuras 4.9.e, f, g. São também mostradas seções verticias do escoamento e da nebulosidade em latitudes cortando a cauda da nuvem ($Y=0,375$).

A Figura 4.12 mostra a estrutura vertical da temperatura em $Y=0,75$ após 5,75 e 6,75 dias para os casos I, II e III. Nota-se a clara inclinação para leste (Kuo, 1952) e a intensificação da frente fria de 5,75 para 6,75

dias. Além disso, destaca-se a influência não linear mais intensa no caso III, bem como "bolhas" de ar quente se deslocando para leste em baixos níveis, onde há um forte gradiente, e um caráter mais ondulatorio dos campos nos níveis mais acima.

Na Figura 4.13 tem-se a estrutura vertical da temperatura potencial em $Y=0,75$ após 5,75 e 6,75 dias para os casos I, II e III. As características gerais são semelhantes às da Figura 4.12. Além disso, a separação das massas de ar quente e frio é muito mais clara, principalmente no caso III (Figura 4.13), e a inclinação para leste com a altura determina a formação de uma catafrente fria (Browning, 1986).

Para melhor analisar a estrutura vertical da catafrente fria, apresenta-se na Figura 4.14 os campos correspondentes de $|\nabla_h \theta| L$. Para a separação das massas de ar relativamente quente e frio adotou-se a seguinte convenção: para a frente fria linhas tracejadas com um ponto e para a frente quente linhas tracejadas com dois pontos. Nota-se claramente a inclinação para leste com a altura das massas de ar frio e quente, mais intensa em níveis médios, bem como aprofundamento da frente fria com a inclusão da liberação de calor latente. O aquecimento adiante da frente fria do lado polar (em $Y=0,75$) é que causa o seu aprofundamento até próximo à tropopausa (cerca de 250 mb); no caso seco, a frente fria não ultrapassa 450 mb e a frente quente nessas latitudes chega até em torno de 600 mb para o caso seco.

Na Figura 4.15 encontra-se as correspondentes seções zonais da velocidade vertical e do desvio da função de corrente em relação ao valor de referência do nível, após 6,75 dias. Os pontos mais importantes a se destacar desses campos são a inclinação

para oeste com a altura e a intensificação do movimento vertical com a inclusão dos efeitos de umidade e da dissipação; no caso da função de corrente, há uma intensificação dos sistemas em baixos níveis quando se incluem esses efeitos. Além disso, os três casos apresentam o caráter clássico da circulação vertical em relação à posição das altas/cristas e dos baixas/cavados. Tem-se movimento ascendente máximo de ar quente adiante do cavado de níveis médios e movimento descendente de ar frio atrás do cavado. Para suportar tal estrutura de movimentos deve haver no ramo ascendente convergência de massa associada com advecção de ar quente adiante da baixa em baixos níveis e divergência de massa atrás da crista em altos níveis. No ramo descendente tem-se convergência de massa adiante da crista em altos níveis e divergência de massa associada à advecção de ar frio adiante da alta em baixos níveis. Esquemáticamente pode-se encontrar tal estrutura na Figura 9.2 de Holton (1979).

A seguir serão analisadas seções zonais de algumas variáveis úmidas relevantes ao estudo. A Figura 4.16 mostra as estruturas verticais da temperatura potencial equivalente e da razão de mistura após 5,75 dias. Comparando as Figuras 4.12, 4.13 e 4.16, nota-se que a última define muito melhor a separação da massa de ar frio e seco da massa de ar quente e úmido (veja também Figuras 4.16.d, e e f), principalmente com a inclusão da liberação de calor latente e dissipação. Principalmente no caso I e II (Figuras 4.16 a e b), identifica-se a catafrente já em 5,75 dias e no caso da temperatura potencial só se tem esse tipo de estrutura melhor definida um dia depois. A estrutura vertical dos campos de razão de mistura não sofrem alterações significantes nos três casos (Figuras 4.16.d, e e f), talvez devido ao alto truncamento dos campos de razão de mistura, ou ainda, devido a não se considerar a precipitação.

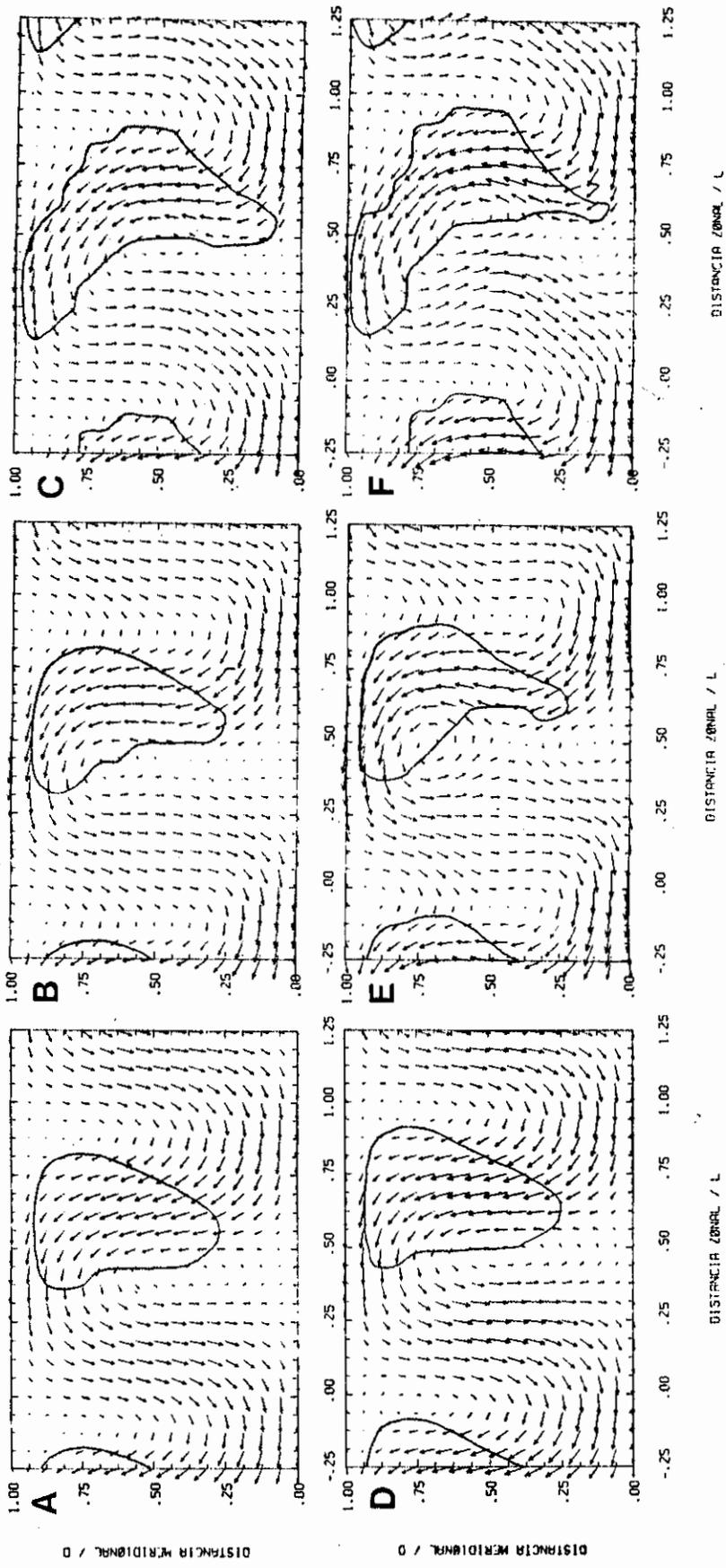


Fig. 4.9 - Seções horizontais do movimento relativo ao deslocamento da onda, em 850 mb e após 5,25 e 5,75 dias, para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). A seta de referência corresponde a um módulo de 10 ms⁻¹ e as linhas contínuas delimitam a cobertura de nuvens.

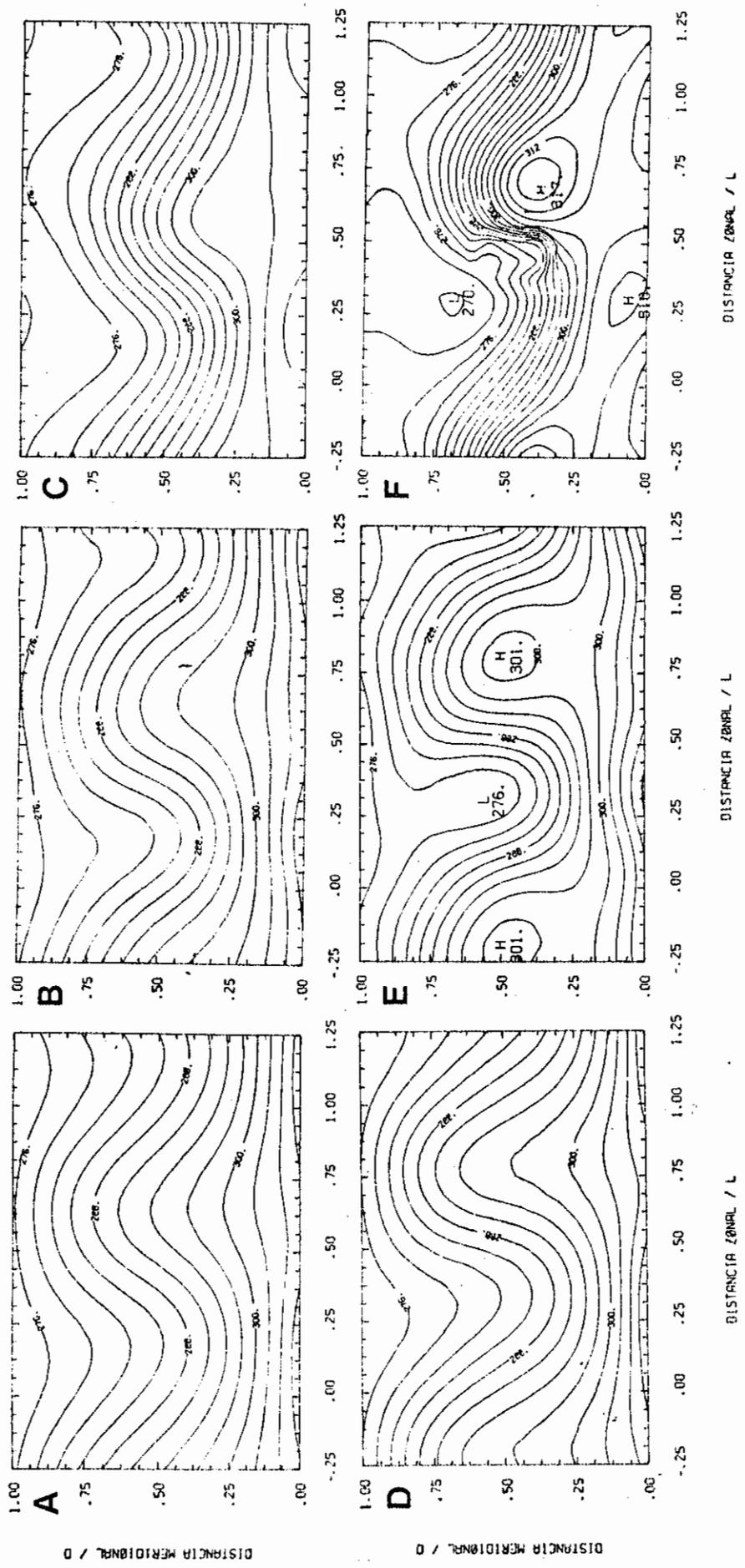


Fig. 4.10 - Seções horizontais da temperatura potencial equivalente, em 850 mb e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas variam de 273 a 315K, com intervalo de 3K.

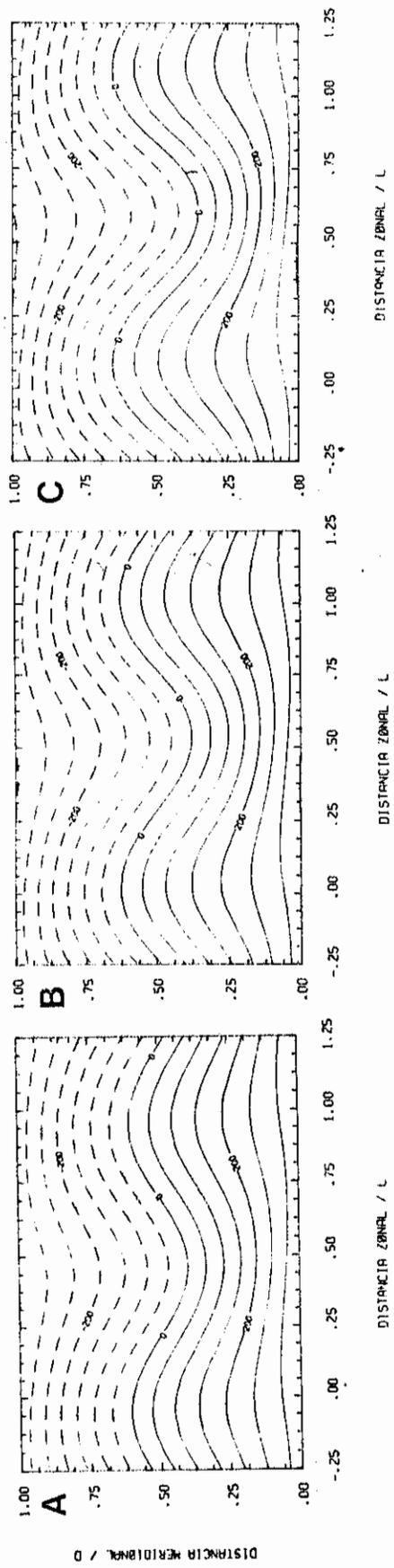


Fig. 4.11 - Função de corrente, sem o valor de referência e multiplicada por 10^{-5} , em 350 mb e após 6,75; 7,25 e 7,75 dias, para os casos I (a, b e c); II (d, e e f) e III (g, h e i). As isolinhas variam de $-350 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ a $350 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, com intervalo de $50 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

(continua)

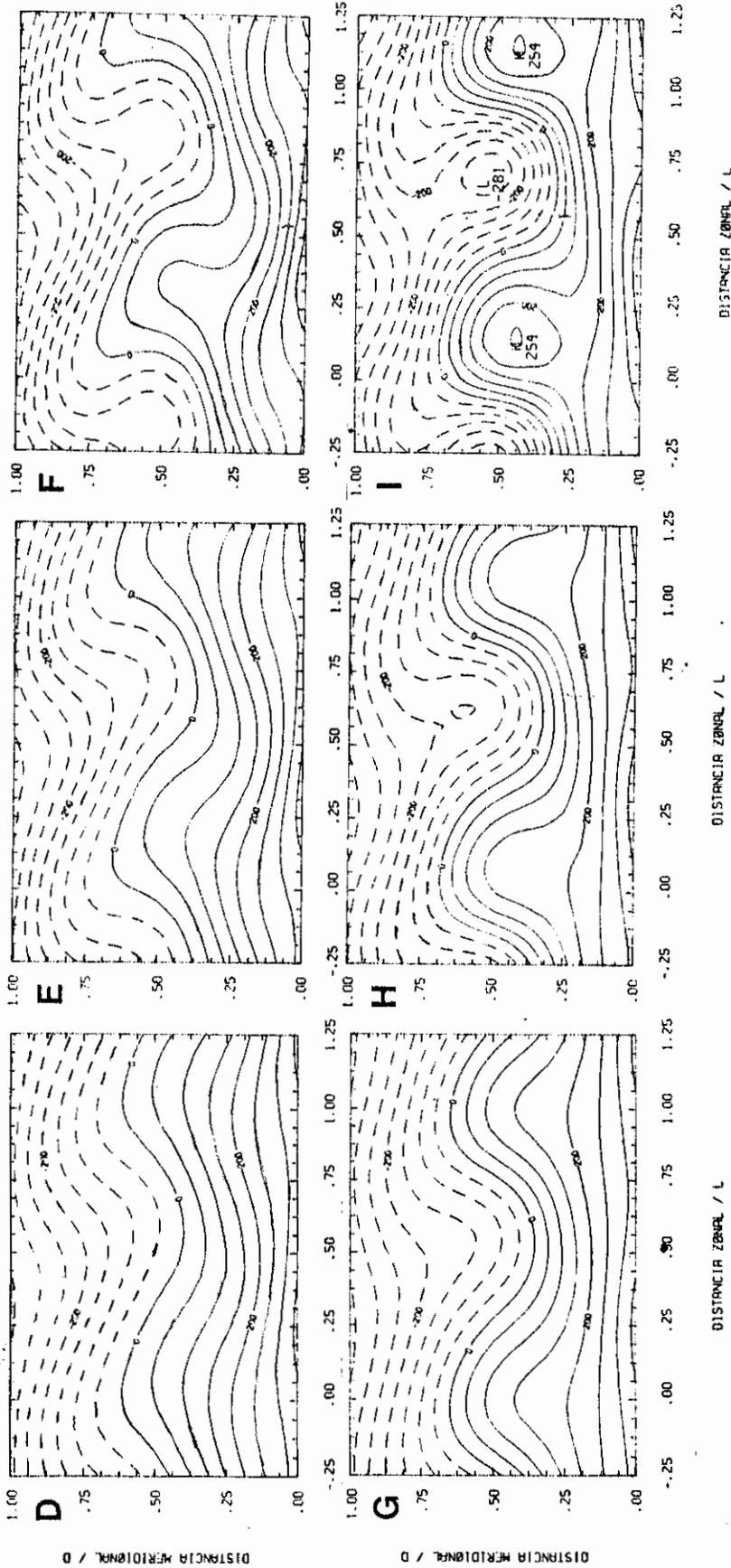


Fig. 4.11 - Conclusão

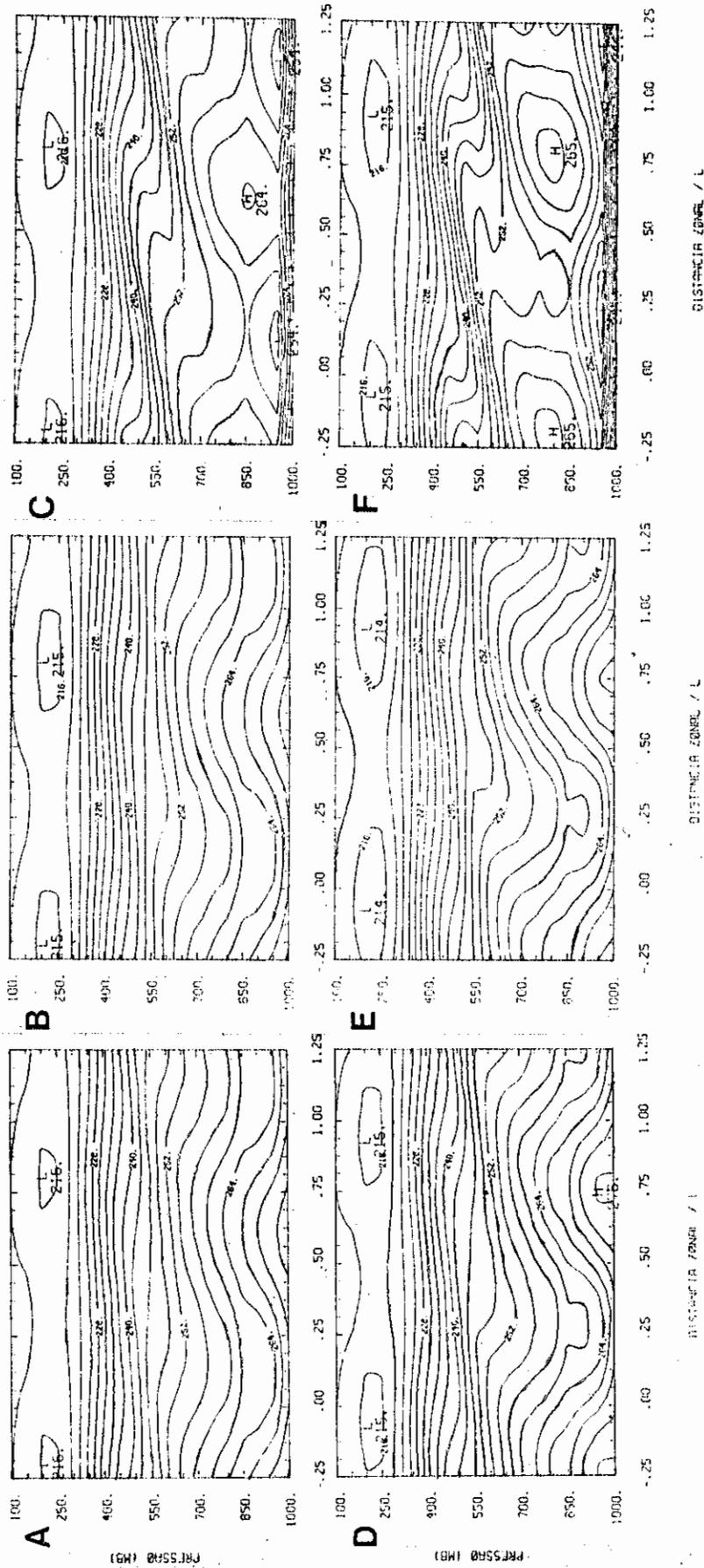


Fig. 4.12 - Seção zonal da temperatura, em $Y=0,75$ e após 5,75 e 6,75 dias para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas variam de 215 a 276K com intervalo de 3K.

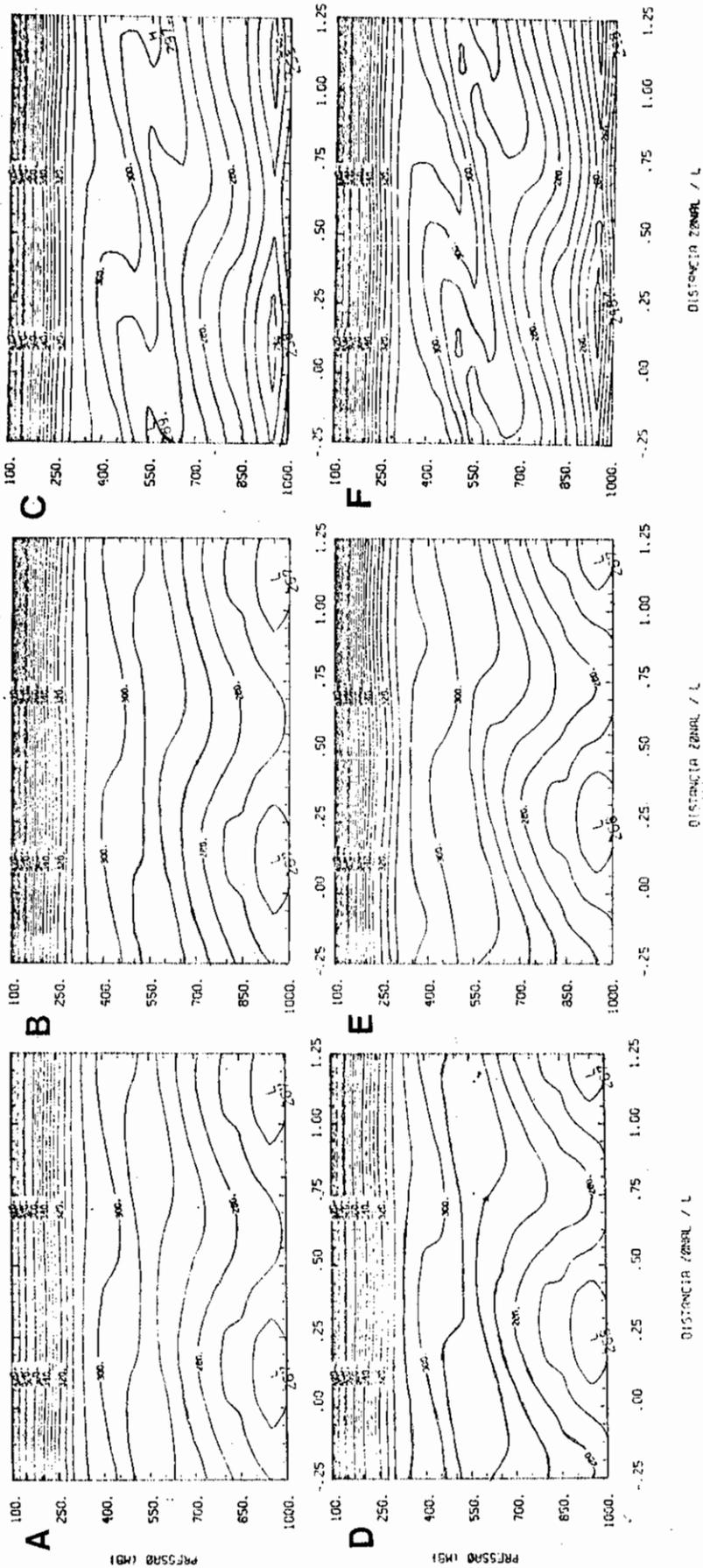


Fig. 4.13 - Seção zonal da temperatura potencial, em $Y=0,75$ e após 5,75 e 6,75 dias para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas variam de 250 a 430K, com intervalo de 5K.

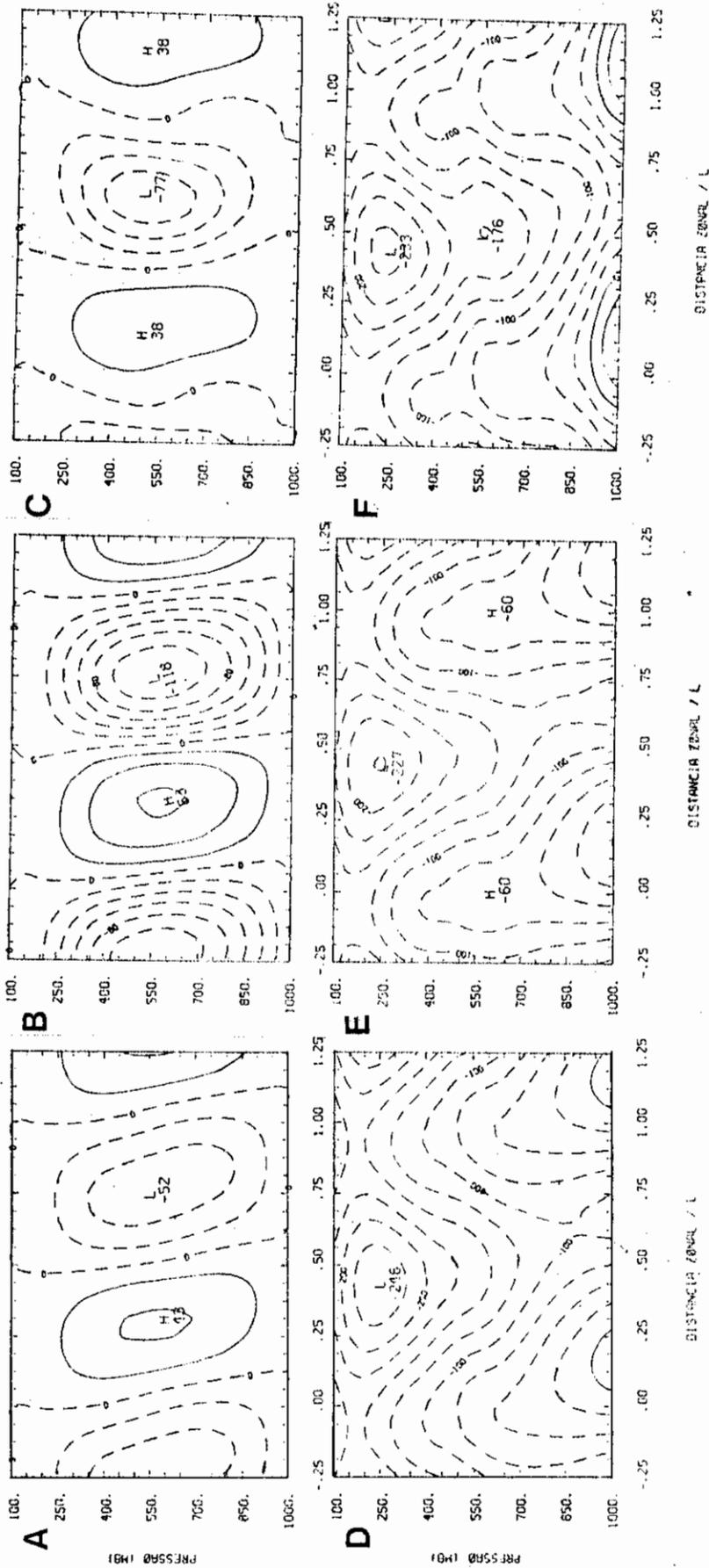


Fig. 4.15 - Seções zonais, em $Y=0,75$ e após 6,75 dias, da velocidade vertical, multiplicada por 10^5 , para os casos I (a), II (b) e III (c) e da função de corrente, sem o valor de referência e multiplicada por 10^{-5} , para os casos I (d), II (e) e III (f). As isolinhas em a, b e c variam de -100 a $60 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, com intervalo de $20 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, e em d, e e f de -225 a $50 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, com intervalo de $25 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

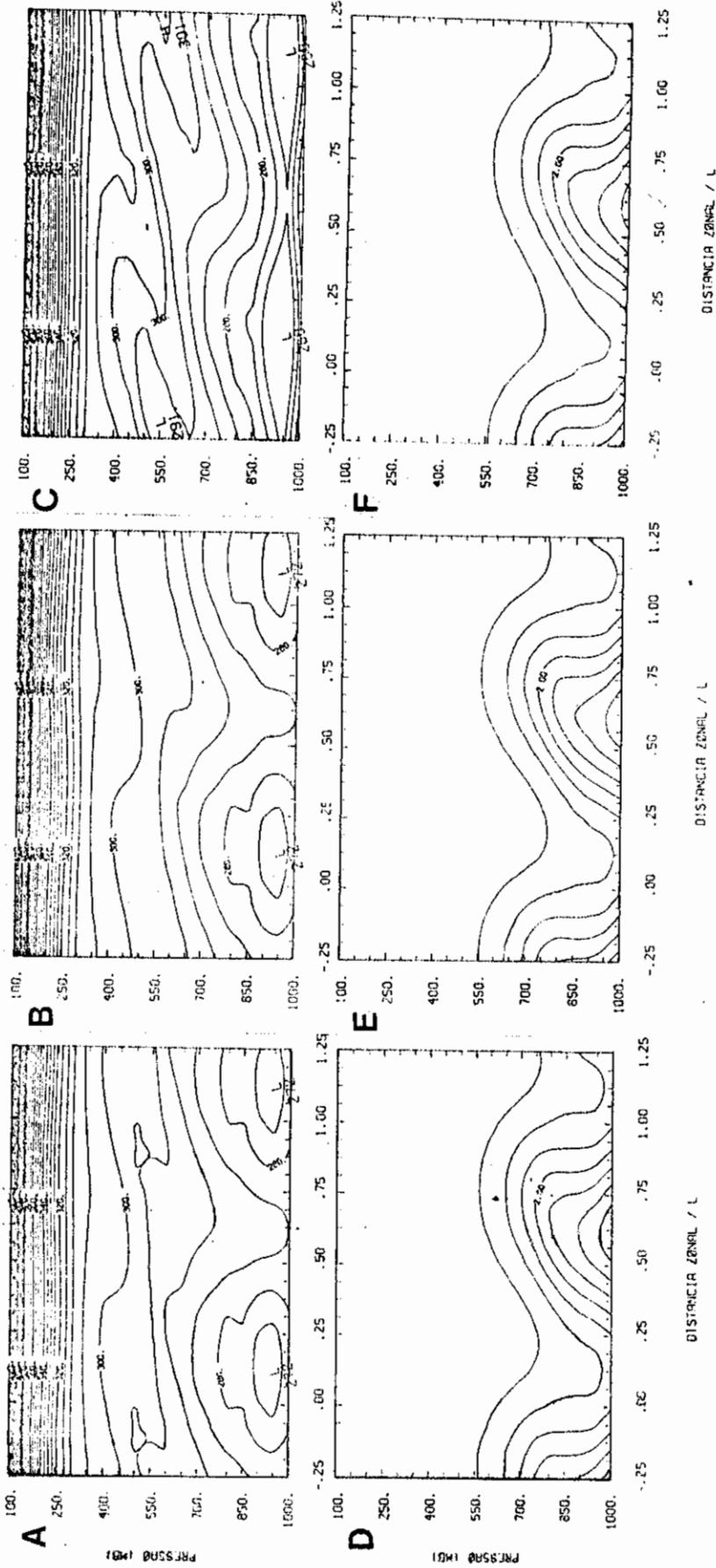


Fig. 4.16 - Seções zonais, em $Y=0,75$ e após $5,75$ dias da temperatura potencial equivalente para os casos I (a), II (b) e III (c) e da razão de mistura para os casos I (d), II (e) e III (f). As isolinhas em a, b e c variam de 265 a $430K$, com intervalo de $5K$, e em d, e e f variam de $0,5$ a $3,5 \text{ gkg}^{-1}$, com intervalo de $0,5 \text{ gkg}^{-1}$.

A Figura 4.17 mostra as seções zonais indicadas da cobertura de nuvens, da circulação relativa ao movimento da onda e da umidade relativa após 5,75 dias. Para a estrutura vertical da cobertura de nuvens, o critério objetivo descrito no Capítulo 3 torna-se insuficiente principalmente em altos níveis, onde a formação de bigornas depende da umidade trazida de dentro da nuvem e advectada pelo vento horizontal. A cobertura de nuvens é melhor associada com a configuração do movimento vertical no início do desenvolvimento porém, em estágios mais avançados os processos advectivos também se tornam importantes na determinação da nebulosidade (Carr e Millard, 1985). Além disso, há variações espaciais da umidade relativa, e também regiões com movimento descendente, dentro da própria nuvem (Figura 13.14 de Palmén e Newton, 1969). Por isso, o traçado da estrutura vertical da nuvem foi baseado no movimento vertical, na umidade relativa e no vento. Em baixos níveis foi considerada a região de movimento ascendente com umidade relativa maior que 0,6. Em níveis médios, baseou-se em movimento ascendente e umidade relativa maior que 0,6 na parte leste e maior que 0,5 na parte oeste. Em altos níveis considerou-se ventos de oeste em relação ao deslocamento da onda e umidade relativa maior que 0,4. Com esse critério um tanto subjetivo determinou-se as estruturas verticais das nuvens frontais.

As seções na cabeça da nuvem (Figuras 4.17.a, b e c) não apresentam diferenças significativas com a bigorna do aglomerado de nuvens, associada à saída do jato de dentro da nuvem no lado leste, sendo mais longa no caso II. Nota-se claramente, comparando-se as Figuras 4.17.a, b e c e 4.17.d, e e f, o movimento descendente de ar frio e seco atrás da frente, e o movimento ascendente de ar quente e úmido adiante da frente, chamado de esteira

transportadora quente (Browning, 1986). O ar frio que é levado para leste em baixos níveis, atravessando a parte inferior do aglomerado de nuvens, é uma componente da esteira transportadora fria, como esquematizado na Figura 10 de Saltzman e Tang (1985). A Figura 4.3 em conjunto com a Figura 4.9 e a Figura 4.17 associada à Figura 4.16 se assemelham bastante ao esquema representativo de uma catafrente observada dado na Figura 4 de Browning (1986).

Na região da cauda da nuvem (Figura 4.17 h, g e i), a circulação vertical é semelhante à região da cabeça nos casos I e II e no caso III os movimentos ascendentes são mais rigorosos e profundos. Para a delimitação da região de cobertura de nuvens, eliminou-se a região com umidade relativa maior que 0,4 nos altos níveis, pois além de se estar no lado equatorial, onde a razão de mistura é maior, não se espera a presença de bigornas nessa região do aglomerado de nuvens frontais. As configurações que se obtém são bastante semelhantes nos três casos, sendo essa nebulosidade pouco profunda, atingindo no máximo 600 mb. A umidade relativa na região da cauda da nuvem (Figuras 4.17 j, k e l) tem características semelhantes nos três casos, ou seja, uma região seca a oeste da nuvem com movimento descendente, proporcionando uma frente de umidade com inclinação para leste semelhante à catafrente fria. O mesmo ocorre na região da cabeça da nuvem (Figuras 4.17 d, e e f), porém com estruturas mais profundas na vertical.

As seções verticais zonais da circulação mostradas na Figura 4.17 são obtidas calculando-se o movimento vertical aproximado no sistema Z, como descrito no Capítulo 3, e construindo-se o campo vetorial de $(u - c_R, 10^3 w)$. Isto é feito para uma melhor visualização de tal circulação.

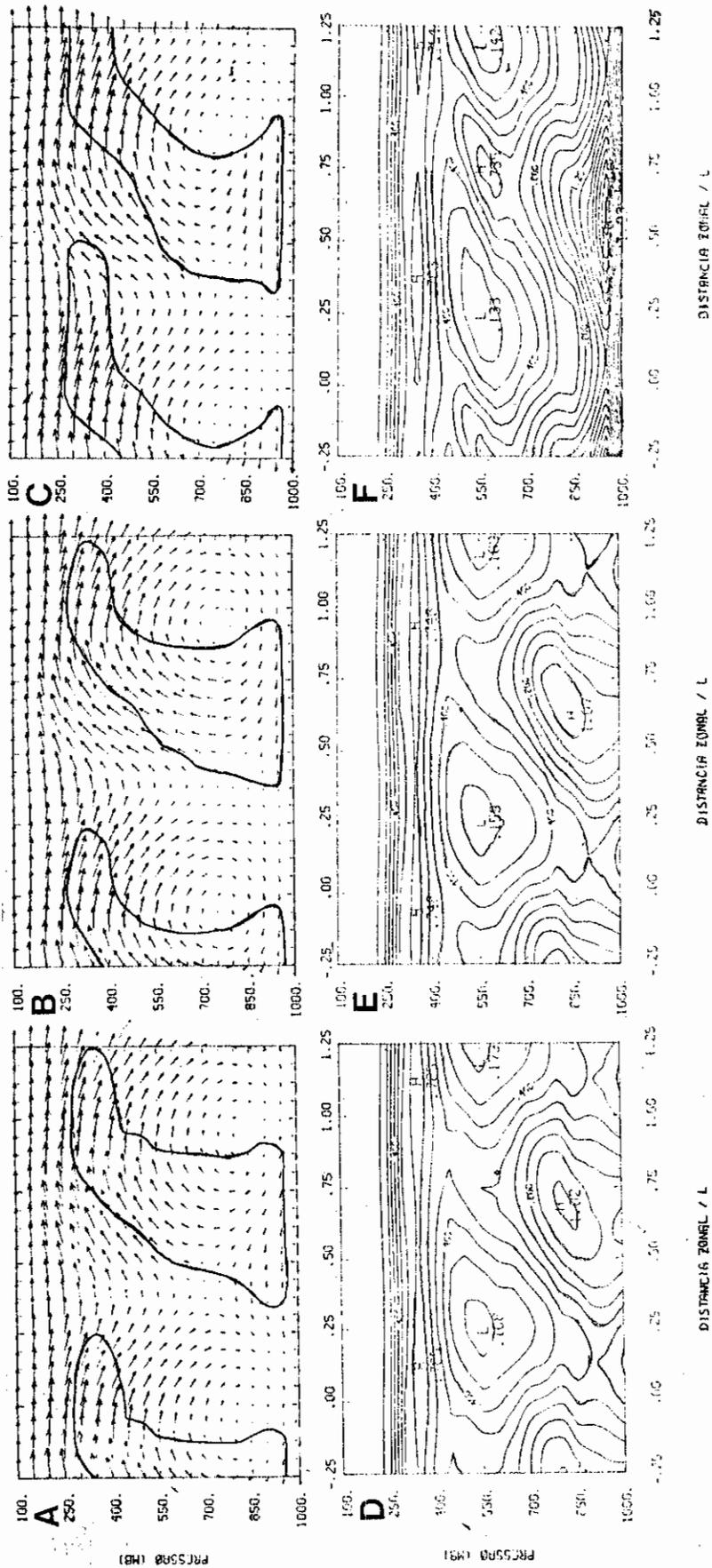


Fig. 4.17 - Seções zonais do movimento relativo ao deslocamento da onda e da unidade relativa após 5,75 para os casos I (a, em $Y=0,75$; d, em $Y=0,5$ e g em $Y=0,375$), II (b, em $Y=0,75$; e, em $Y=0,5$ e h em $Y=0,375$) e III (c, em $Y=0,75$; f, em $Y=0,5$ e i em $Y=0,375$). As setas de todas as figuras são igualmente escaladas.

(continua)

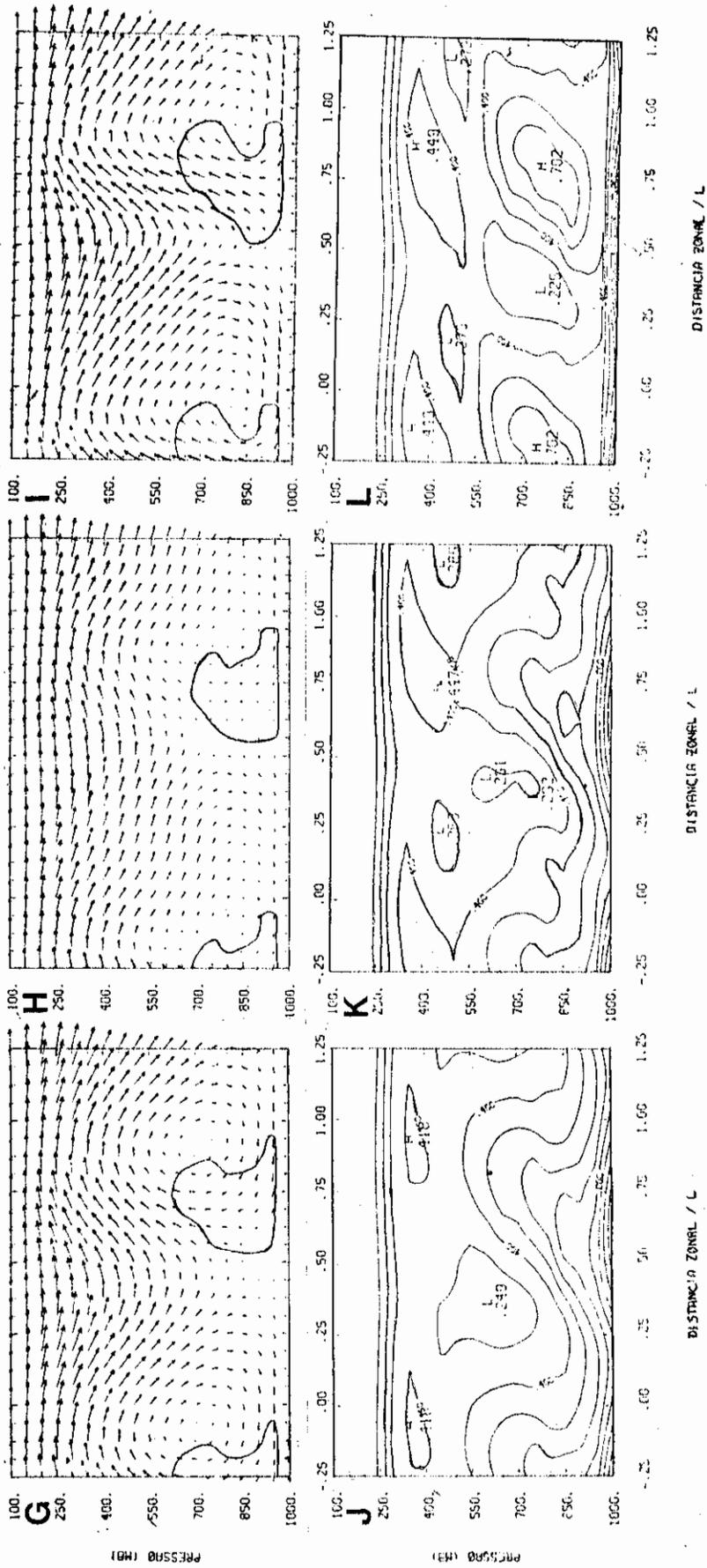


Fig. 4.17 - Conclusão

4.2.2 - SEÇÕES MERIDIONAIS

As seções meridionais apresentadas nesse item se situam em uma longitude ($X=0,75$) que corta desde a cauda até a cabeça da nuvem. A Figura 4.18 apresenta a estrutura vertical da temperatura para a seção mencionada, para os casos I, II e III, após 5,75 e 6,75 dias. Pode-se notar a bem destacada separação de ar frio do ar quente no caso III após 6,75 dias. Nos três casos há, em geral, uma inclinação para o equador das isotermas na baixa e média troposfera, com o gradiente de temperatura equador-pólo se invertendo em altos níveis, caracterizando a tropopausa, mais alta no lado equatorial.

Na Figura 4.19 encontra-se as seções meridionais correspondentes da temperatura potencial. Novamente no caso III é que há uma clara separação do ar quente do ar frio. Pode-se também destacar a presença da tropopausa em ambos os casos. O fator mais relevante é a presença de uma região com maior concentração de isentropas, partindo da superfície, no lado equatorial e penetrando em níveis superiores, com a concentração tornando-se menos intensa. Tal estrutura fica mais clara no caso III com a inclusão da dissipação e é bastante semelhante à dada por Sanders (1955).

Para uma melhor visualização da separação das massas de ar quente e fria, a Figura 4.20 mostra a seção meridional de $|\nabla_h \theta|$ L após 6,75 dias. Claramente nas regiões de separação encontram-se gradientes mais intensos de temperatura potencial no caso III, principalmente em baixos níveis.

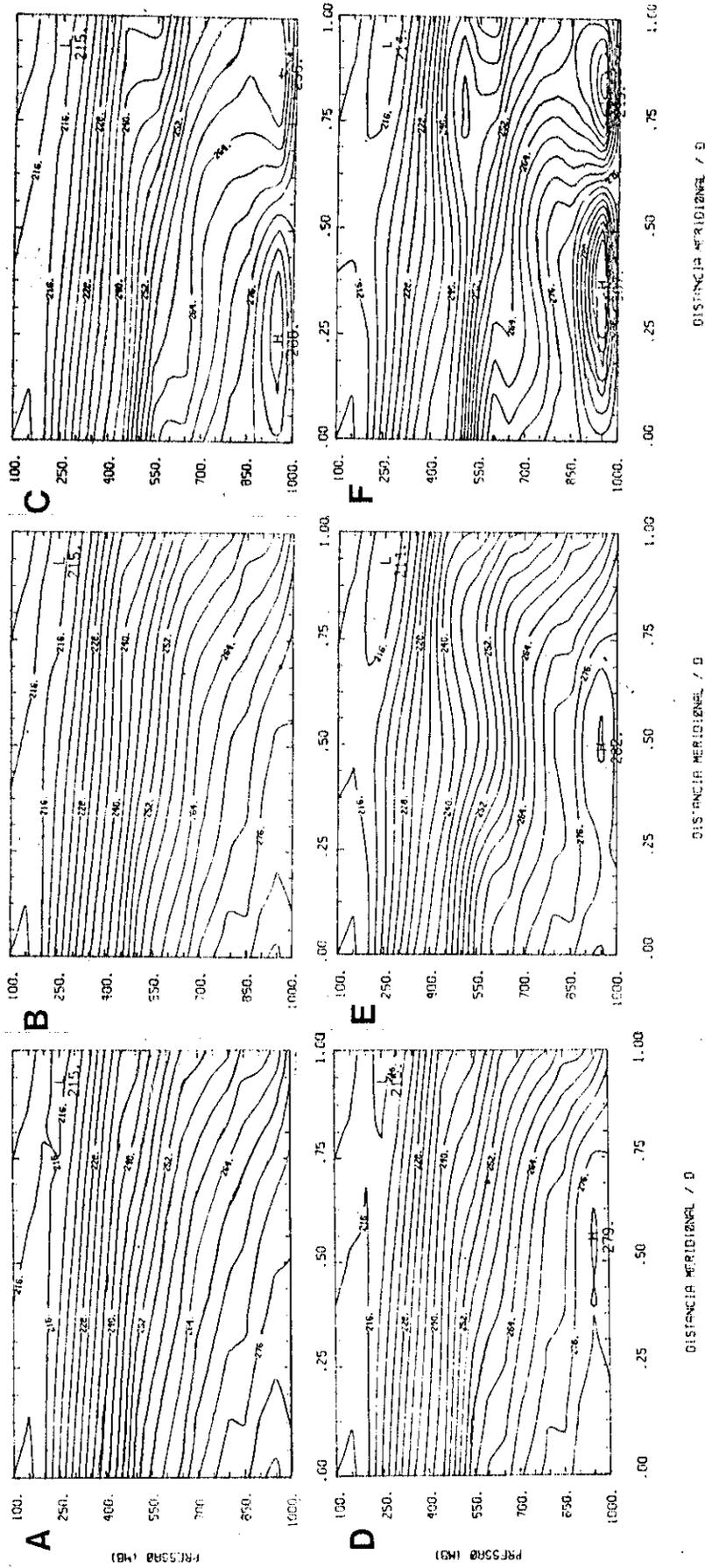


Fig. 4.18 - Seções meridionais de temperatura, em $X=0,75$ e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isotermas variam de 216 a 285K, com intervalo de 3K.

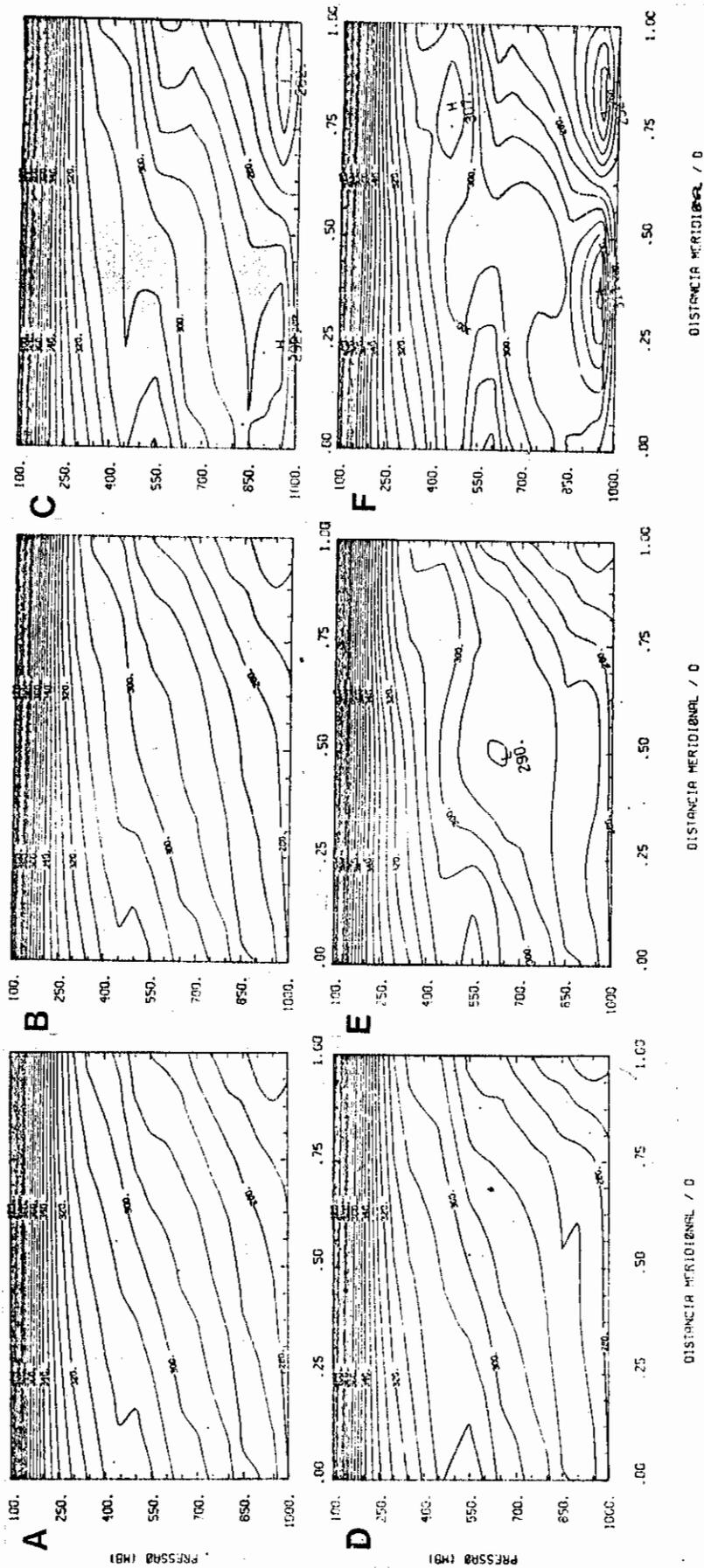


Fig. 4.19 - Seções meridionais de temperatura potencial, em $X=0,75$ e após 5,75 e 6,75 dias, para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isentropas variam de 255 a 430K, com intervalo em 5K.

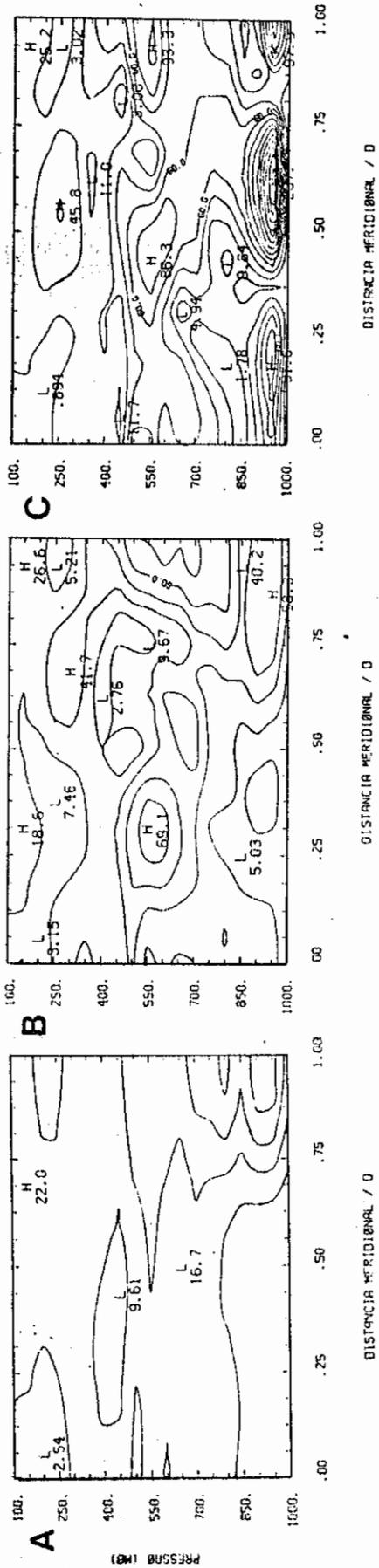


Fig. 4.20 - Seção meridional, em $X=0,75$ e após 6,75 dias, do módulo do gradiente horizontal de temperatura potencial, multiplicado pelo comprimento da onda mais instável, para os casos I (a), II (b) e III (c). As isolinhas variam de 15 a 195K, com intervalo de 15K.

Na Figura 4.21 são mostradas as seções meridionais ($X=0,75$) após 6,75 dias da velocidade vertical e do desvio da função de corrente, em relação ao valor de referência de cada nível, para os casos I, II e III. Há uma clara intensificação, com movimento ascendente mais intenso, e uma diminuição de escala no movimento vertical quando se inclui a liberação de calor latente (Figura 4.21.b), concordando com os resultados de Sawyer (1956). Keyser e Anthes (1986), alegando a ausência da física da camada limite, contestaram resultados semelhantes obtidos por Mak e Bannon (1984), os quais usaram um modelo semi-geostrófico analítico para simular a frontogênese em um atmosfera úmida. Porém, Mak e Bannon (1986) reafirmaram ser o efeito da liberação de calor latente mais importante que o da camada limite na intensificação do movimento vertical, isto é, o efeito isolado do aquecimento devido à condensação pode intensificar e estreitar (diminuição de escala) o campo do movimento vertical nas zonas frontais. Quando se inclui a dissipação (Figura 4.21.c), o efeito de diminuição de escala é menor, embora haja uma intensificação do movimento ascendente.

O campo da função de corrente dado na Figura 4.21 mostra uma inclinação da região da alta e da baixa em baixos níveis para o pólo, enquanto que a baixa em altos níveis se inclina para o equador. Além disso, a liberação de calor latente e a dissipação intensificam a baixa e desintensificam a alta em baixos níveis, o que concorda com o fato observado da baixa em superfície ser mais intensa que a alta.

A seguir serão apresentadas as seções meridionais de algumas variáveis úmidas relevantes ao estudo. Na Figura 4.22 encontram-se a temperatura potencial equivalente e a razão de mistura para os casos I, II e III, após 5,75 dias. O principal ponto a ressaltar é a melhor

definição daquela região destacada por Sawyer (1956), onde a concentração das isentropas é mais intensa, mesmo nos casos I e II. Além disso, combinando as Figuras 4.22.a, b e c e 4.22.d, e, e f, respectivamente, nota-se a clara separação das massas de ar quente e úmida das massas de ar frio e seco, principalmente no caso III, em baixos níveis. Os efeitos do calor latente e da dissipação não afetam significativamente a estrutura vertical da razão de mistura (Figuras 4.22.d, e e f).

A Figura 4.23 mostra seções meridionais ($X=0,75$) do aglomerado de nuvens, da circulação vertical associada e da umidade relativa após 5,75 para os casos I, II e III. A delimitação da cobertura de nuvens é feita do mesmo modo que o da Figura 4.17. A região da cauda, no lado equatorial, é mais rasa que a da cabeça no lado polar, em todos os casos. Sobre a região da cauda há advecção de ar com temperatura potencial equivalente relativamente baixa (compare as Figuras 4.22 e 4.23). No lado polar em baixos níveis também há penetração de ar frio e seco (veja Figuras 4.23 d, e e f). Pode-se notar também que principalmente no caso III, no lado equatorial da cabeça da nuvem (Figuras 4.22 e 4.23) há instabilidade condicional, pois a temperatura potencial equivalente decresce com a altura nessa área. Essa, região corresponde àquela onde há precipitação convectiva em uma catafrente. A inclusão da dissipação (Figura 4.23.c) intensifica o movimento vertical dentro da nuvem e pode-se notar a formação de células de circulação de escala pequena à norte e à sul da cobertura de nuvens em níveis médios. Do ponto de vista qualitativo, a semelhança das Figuras 4.22.c e f e da Figura 5 de Browning (1986) é notável, a qual mostra esquematicamente um corte SO-NE das nuvens associadas a uma catafrente no Hemisfério Norte. Outro ponto a se destacar é a delimitação bastante razoável da bigorna no caso III (Figura 4.23.c),

embora o atrito usado não seja apropriado dentro da nuvem, como o, por exemplo, usado por Geisler (1981).

As seções meridionais da circulação mostradas na Figura 4.23 são obtidas calculando-se o movimento vertical aproximado no sistema Z, como descrito no Capítulo 3, e construindo-se o campo vetorial de $(v, 500W)$ para uma melhor visualização. Quanto à umidade relativa, os casos I e II (Figura 4.23.d e e) apresentam distribuições bastante semelhantes, enquanto que a inclusão de dissipação (Figura 4.23.f) intensifica a frente de umidade no centro do canal, com o lado equatorial tornando-se mais seco e o lado polar mais úmido, em baixos níveis, em relação aos casos I e II.

4.3 - SEPARAÇÃO EM ORDENS DE EVOLUÇÃO

Neste item será apresentada a separação em ordens de evolução de alguns campos para um melhor entendimento da contribuição de cada componente. A componente $\bar{\theta}^{(0)}$ é invariante no tempo pois resulta do estado básico usado e, portanto, é comum a todos os casos. As componentes lineares ($\theta^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, etc) também são comuns a todos os casos, pois os efeitos de liberação de calor latente, atrito e resfriamento só foram incluídos depois desse estágio.

Na Figura 4.24 são apresentadas as seções meridionais correspondentes à temperatura potencial média zonal. A Figura 4.24.a mostra $\bar{\theta}^{(0)} - \bar{\theta}^{(*)}$, que corresponde à parte da temperatura devida ao vento término associado ao campo zonal básico $\bar{u}^{(0)}$ (o campo de $\bar{T}^{(*)}$ se encontra na Figura 4.1.a). Este campo é simétrico em relação a $Y=0,5$ e tem máximo valor em torno de 850 mb no lado equatorial, sendo que o gradiente equador-pólo muda em torno de 200 mb, caracterizando a tropopausa do estado

básico. A sobreposição da componente $\bar{\theta}^{(1)}$ (Figuras 4.24.b, d e f), que depende essencialmente do transporte de calor sensível do equador para o pólo pela perturbação de primeira ordem $(v^{(1)}T^{(1)})$, tem um efeito maior em baixos níveis, sendo que no caso III (Figuras 4.24.f) é notável a intensificação dos gradientes em torno de 950 mb, porém continuando simétrico em relação a $Y=0,5$. O efeito da dissipação em $\bar{\theta}^{(1)}$ é o responsável pela estrutura da temperatura potencial mais próxima à observada por Sanders (1955) e dada na Figura 4.18.c e f. A sobreposição de $\bar{\theta}^{(2)}$ (Figuras 4.24.c, e e g) tem o efeito principal de quebrar a simetria em torno de $Y=0,5$, sendo o efeito maior em baixos níveis no lado polar no caso III (Figura 4.24 g).

Na Figura 4.25 encontram-se as seções horizontais em 850 mb após 6,75 dias, das componentes da perturbação na temperatura potencial. O campo de $\theta^{(1)}$ (Figura 4.25.a) é uma onda com máxima amplitude no centro do canal. A sobreposição de $\theta^{(2)}$ nos três casos (Figuras 4.25.b, d e f) causa pequenas alterações, porém já mostrando efeitos não lineares. A sobreposição de $\theta^{(3)}$ (Figuras 4.25.c, e e g) causa inclinações meridionais mais acentuadas e tanto a liberação de calor latente como a dissipação aumentam a intensidade da frente. Essas inclinações meridionais favorecem uma melhor definição da frente quente, bem como a configuração do tipo S para a zona frontal, principalmente no caso II; no caso III essas configurações são mais intensas e mais concentradas em torno do centro do canal.

A estrutura vertical das componentes da perturbação na temperatura é analisada através de duas seções: uma zonal em $Y=0,75$ e outra meridional em $X=0,75$, ambas após 6,75 dias. Na Figura 4.26 tem-se a seção zonal. Em geral, nos três casos, as configurações inclinam-se para leste em níveis baixos e médios e para oeste em altos

níveis. A inclusão de $\theta^{(2)}$ (Figuras 4.26.b, d e f) não causa influência significativa e a de $\theta^{(3)}$ (Figuras 4.26.c, e e g) aumenta as inclinações para leste em níveis médios. A influência de $\theta^{(2)}$ é maior em baixos níveis e a de $\theta^{(3)}$ em níveis médios. O efeito da liberação de calor latente não é muito significativa nessa região, porém o da dissipação é aumentar os gradientes em níveis médios (Figura 4.26.g). Portanto, $\theta^{(3)}$ deve ser importante na geração de frentes atmosféricas nos níveis médios, ou seja, a divergência devido a $\omega^{(2)}$ deve ser um fator que contribui para a geração dessas frentes. Obteve-se esse resultado por se usar uma alta resolução vertical.

Na Figura 4.27 tem-se a seção meridional acima citada. A estrutura de $\theta^{(1)}$ é tal que há um máximo na região central em 950 mb, diminuindo em direção ao equador e ao pólo. Há um máximo secundário em 800 mb e um mínimo em 150 mb. A sobreposição de $\theta^{(2)}$ é semelhante nos casos I e II (Figuras 4.27.b e d), com um aumento do máximo central em baixos níveis, porém no caso III (Figura 4.27.f) há uma diminuição e um deslocamento para o equador desse máximo. Em altos níveis o efeito é semelhante nos três casos, com uma intensificação do mínimo, além de um resfriamento no lado polar e um aquecimento no lado equatorial. Quanto à inclusão de $\theta^{(3)}$ a influência em níveis médios é semelhante nos três casos (Figuras 4.27.c, e e g): aquecimento em torno de 500 mb e resfriamento em torno de 450 mb no lado equatorial e o inverso no lado polar, sendo que o efeito vai se tornando mais forte com a inclusão dos processos físicos. Em baixos níveis a influência de $\theta^{(3)}$ é pequena no caso I, porém intensifica bastante os gradientes em torno de 950 mb nos casos II e III, sendo o efeito muito maior no caso III. Portanto, $\theta^{(3)}$ mostrou-se novamente importante na determinação de frentes em níveis médios e, com a inclusão de liberação de

calor latente e dissipação, é também importante na determinação de frentes na superfície.

Para um melhor entendimento da estrutura horizontal em altos níveis da função de corrente apresentada na Figura 4.11, são mostradas na Figura 4.28 as correspondentes componentes do campo da perturbação. O campo de $\psi^{(1)}$ é uma onda com amplitude máxima no centro do canal (Figura 4.28.a). A sobreposição de $\psi^{(2)}$ não afeta significativamente em nenhum dos casos (Figuras 4.28.b, d e f), porém, intensifica mais a baixa que a alta. A inclusão de $\psi^{(3)}$ no caso I (Figura 4.28.c) causa uma pequena inclinação meridional nas estruturas e uma desintensificação da alta. Nos casos II e III a sobreposição de $\psi^{(3)}$ (Figuras 4.28.e e g) causa uma inclinação SO-NE (H. Norte) no lado equatorial e SE-NO no lado polar, o que proporciona um transporte de momentum das laterais para o centro do canal, semelhante ao caso observado, e caracterizando o que Starr (1948) chamou de "viscosidade negativa". A perturbação na função de corrente dos casos II e III possuem centros secundários ao norte e ao sul do centro do canal, sendo que os do lado polar são mais intensos porém, mais fracos que a perturbação no centro do canal, e no caso III a amplitude é cerca do dobro dos casos I e II. Portanto, $\psi^{(3)}$ é o responsável pelo desprendimento da baixa mostrado na Figura 4.11.

4.4 - MÉDIAS ZONAIS

O objetivo dessa seção é mostrar os principais campos médios zonais locais gerados a partir de uma onda baroclinicamente instável. Deve-se salientar que a circulação média zonal aqui mostrada possui apenas uma parte de sua composição real na natureza, pois não são

considerados outros processos físicos importantes na sua determinação, como por exemplo o calor latente liberado na região equatorial ou o arrasto de superfície. Deve-se considerar aqui que a frente média zonal gerada no modelo representaria a frente polar média observada na atmosfera (veja a Figura 7.4 de Palmén e Newton, 1969). Por esse motivo a circulação média zonal aqui discutida será cognominada de local.

Em primeiro lugar serão analisados os campos médios zonais da temperatura potencial e do vento zonal, mostrados na Figura 4.29. Nota-se que a liberação de calor latente causa uma diminuição da inclinação norte-sul das isentropas em níveis médios na região central do canal (Figura 4.29.b). Ao mesmo tempo a inclinação aumenta nas laterais do canal. Como consequência, o cisalhamento vertical do vento zonal médio zonal diminui em relação ao caso seco no centro do canal e aumenta nas laterais do canal (Figuras 4.29.d e e). Isto, de certa forma, não concorda com as características de convergência de momentum no centro do canal em altos níveis descrito para a Figura 4.28. Portanto, a formação do duplo jato em níveis superiores está conectada com a mudança em $\bar{\theta}$, via vento térmico, devido ao transporte de calor sensível, que é o processo que deve dominar nesse estudo. O fato das isolinhas de \bar{u} terem curvatura opostas acima e abaixo de 550 mb (Figuras 4.29.d, e e f), mostra que o vento zonal médio zonal tende a diminuir em altos níveis e a aumentar em baixos níveis no centro do canal. Com isso, o cisalhamento vertical diminui nessa região, tornando-se mais barotrópico e mostrando uma tendência para o final do ciclo de vida da perturbação. Nesse estudo, isto não chega a ocorrer devido à não realimentação do estado básico e ao fato das perturbações terem crescimento exponencial com o tempo. Por outro lado há a formação de duas zonas mais

baroclínicas ao norte e ao sul da região central do canal. Tal fato é consistente com o surgimento de perturbações com escalas meridionais menores (Hoskins, 1983). O efeito da dissipação é bastante sensível abaixo de 800 mb, refletindo as características descritas na Seção 4.3, ou seja, a formação de uma frente média zonal bem definida no centro do canal em baixos níveis (Figura 4.29.c), proporcionando um cisalhamento vertical maior do vento zonal médio zonal nessa região (Figura 4.29.f). A Figura 4.29.c em conexão com a Figura 4.29.f não compara muito bem com a Figura 7.4 de Palmén e Newton (1969), pois não há realimentação do estado básico neste estudo.

A Figura 4.30 apresenta as componentes da circulação média zonal local (\bar{v} , $\bar{\omega}$), após 6,75 dias para os casos I, II e III. Para uma melhor visualização do padrão de tal circulação na Figura 4.31 são apresentadas as seções verticais correspondentes do campo vetorial (\bar{v} , $100 \bar{\omega}$) e também os campos de liberação de calor latente médios zonais para os casos II e III. Em geral, há a formação de uma circulação térmica indireta em toda a extensão vertical do domínio do modelo, exceto em baixos níveis no caso III, localizada na região central do canal. Nas laterais do canal há a formação, por continuidade, dos ramos ascendente, no lado polar, e descendente, no lado equatorial do canal, de duas células de circulação térmica direta. Essa célula de circulação térmica indireta é essencialmente forçada pela configuração do transporte de calor sensível para os pólos, máximo em baixos níveis e no centro do canal, e corresponde à célula de Ferrel (Phillips, 1954). No caso I (Figuras 4.30.a e d e 4.31.a) os movimentos são relativamente fracos, sendo o movimento ascendente levemente superior ao descendente abrangendo áreas bastante semelhantes em tamanho e com o centro das células de circulação vertical em torno de 700 mb. Quando se introduz a liberação de calor latente, caso II (Figuras

4.30.b e e 4.31.b e d), nota-se um aumento substancial no movimento ascendente de um fator 4, abrangendo uma área um pouco menor que o movimento descendente, que aumenta de um fator 3. Além disso os centros de movimento ascendente e descendente ficam bem mais próximos. Estes aspectos estão em concordância com os resultados de Sawyer (1956). Como o movimento ascendente é mais forte, por continuidade deve se concentrar em uma região menor, sendo o movimento descendente mais lento abrangendo uma área maior. Note também que na região de movimento ascendente é que há liberação de calor latente (Figuras 4.31.d e e), sendo mais intenso o aquecimento que o resfriamento devido a esse efeito no lado descendente, ou seja, em média há um aquecimento líquido. O resfriamento surge devido ao fato de que todos os campos são considerados ondas e como $\bar{\omega}(0)$ é nulo, não há $\bar{Q}(0)$. Quanto à velocidade meridional média zonal, conseqüentemente aumenta bastante por continuidade, com os valores nos altos níveis tornando-se semelhantes aos dos baixos níveis (Figura 4.30.b), ao contrário do caso seco (Figura 4.30.a) que v decresce com a altura sendo bem menor em altos níveis que na superfície. No caso II, os centros de circulação ficam mais altos (Figura 4.31.b) em torno de 500 mb. A inclusão de dissipação provoca o surgimento no centro do canal de uma fraca célula térmica direta confinada até cerca de 850 mb e uma diminuição drástica no movimento ascendente (Figuras 4.30.c e d e 4.31.c), em relação ao caso II.

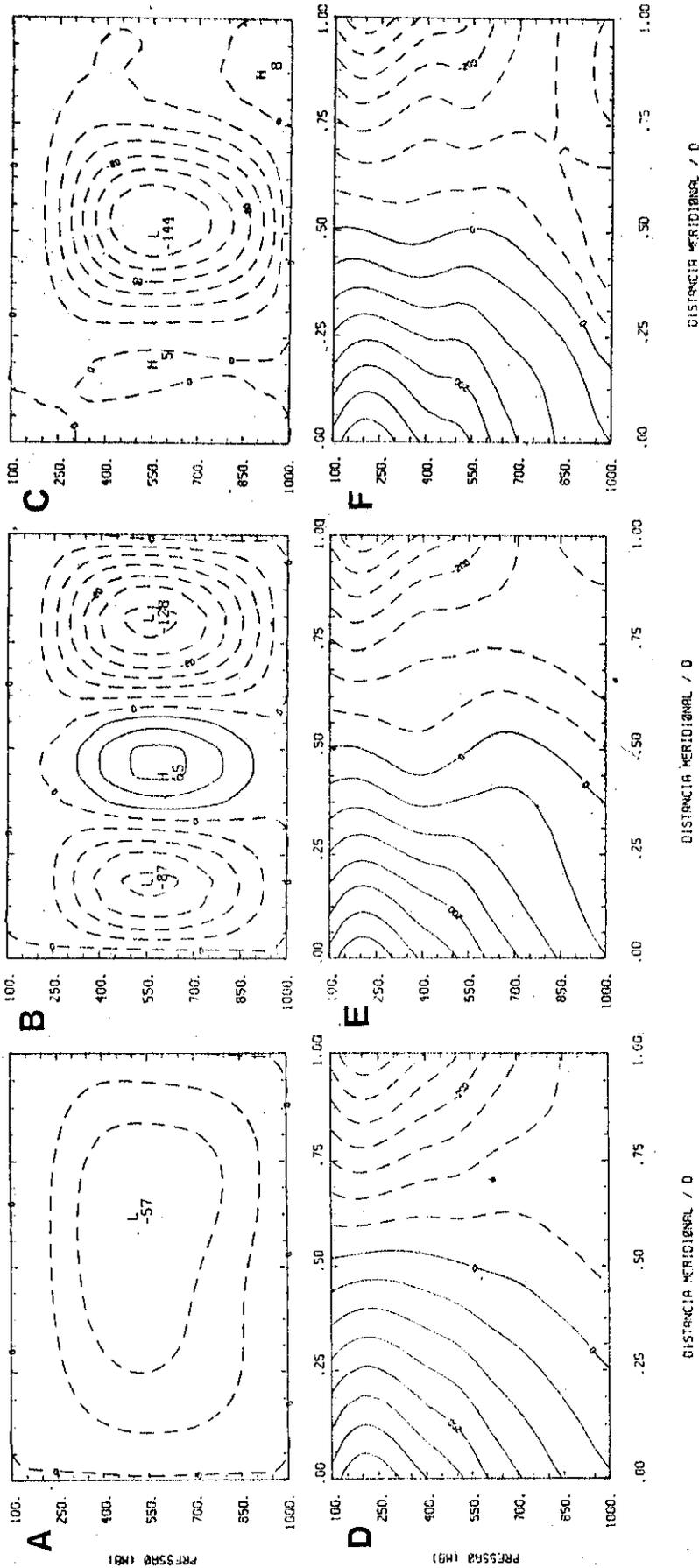


Fig. 4.21 - Seções meridionais, em $X=0,75$ e após 6,75 dias, do movimento vertical, multiplicado por 10^5 , para os casos I (a) II (b) e III (c) e da função de corrente, sem o valor de referência e multiplicada por 10^{-5} , para os casos I (d), II (e) e III (f). As isolinhas em a, b e c variam de -120 a 120 mb s^{-1} , com intervalo de 20 mb s^{-1} e em d, e e f variam de -350 a 350 $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$, com intervalo de 50 $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

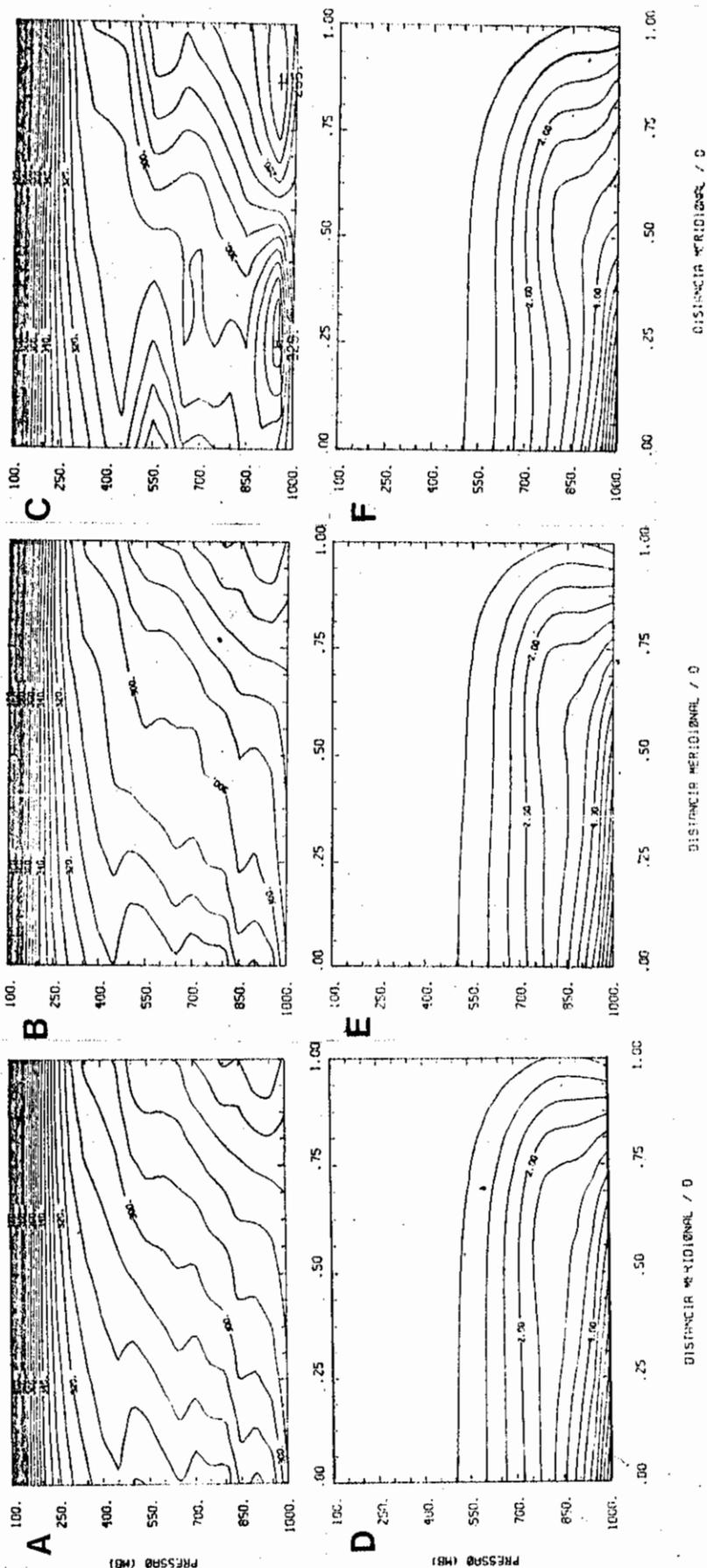


Fig. 4.22 - Seções meridionais, em $X=0,75$ e após 5,75 dias, da temperatura potencial equivalente para os casos I (a), II (b) e III (c) e da razão de mistura para os casos I (d), II (e) e III (f). As isolinhas em a, b e c variam de 265 a 430K, com intervalo de 5K, e em d, e e f variam de 0,5 a 7,5 gkg⁻¹, com intervalo de 0,5 gkg⁻¹.

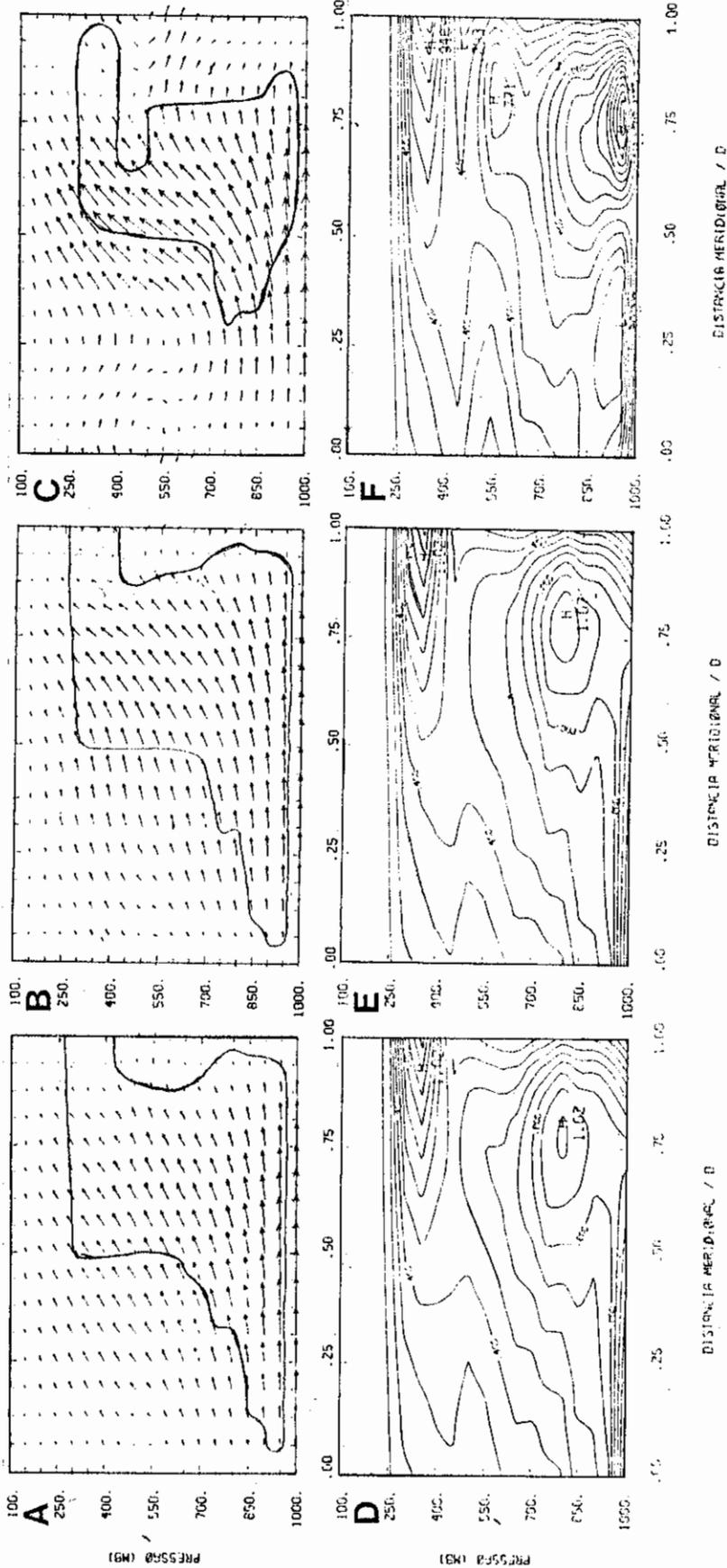


Fig. 4.23 - Seções meridionais, em $X=0,75$ e após 5,75 dias, da circulação meridional vertical e da cobertura de nuvens, para os casos I (a), II (b) e III (c) e da unidade relativa para os casos I (d), II (e) e III (f). As setas em a, b e c são igualmente escaladas e as isolinhas em d, e e f variam de 0,1 a 1,6; com intervalo de 0,1.

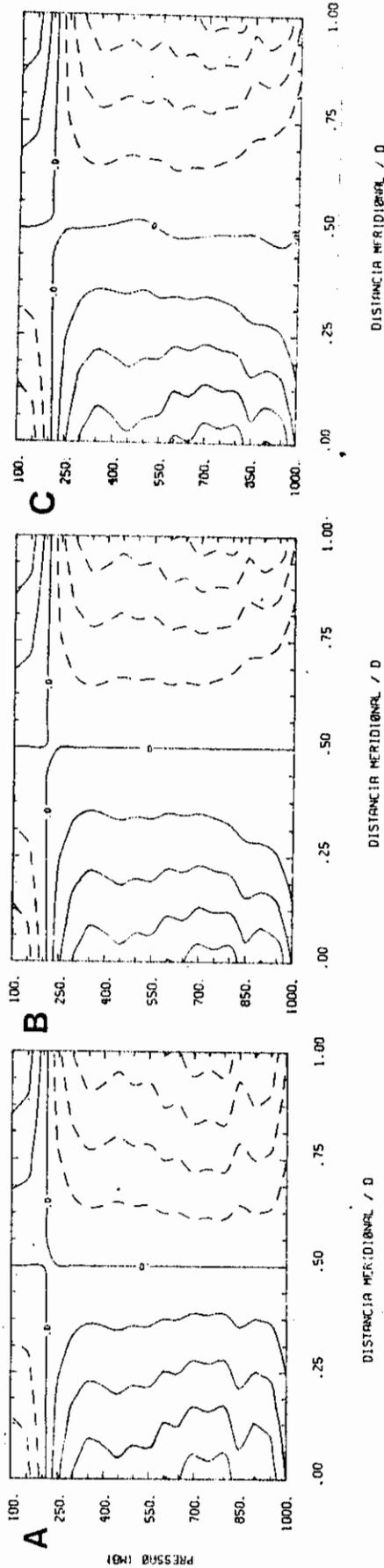


Fig. 4.24 - Seções meridionais das componentes da temperatura potencial média zonal após 6,75 dias; $\theta^{-(0)}$ - $\theta^{-(*)}$ (a); $\theta^{-(0)} - \theta^{-(*)} + \theta^{-(1)}$ (b, caso I; d, caso II); $\theta^{-(0)} - \theta^{-(*)} + \theta^{-(1)}$ + $\theta^{-(2)}$ (c, caso I; e, caso II; g, caso III). As isolinhas variam de -24 a 2K, com intervalo de 3K.

(continua)

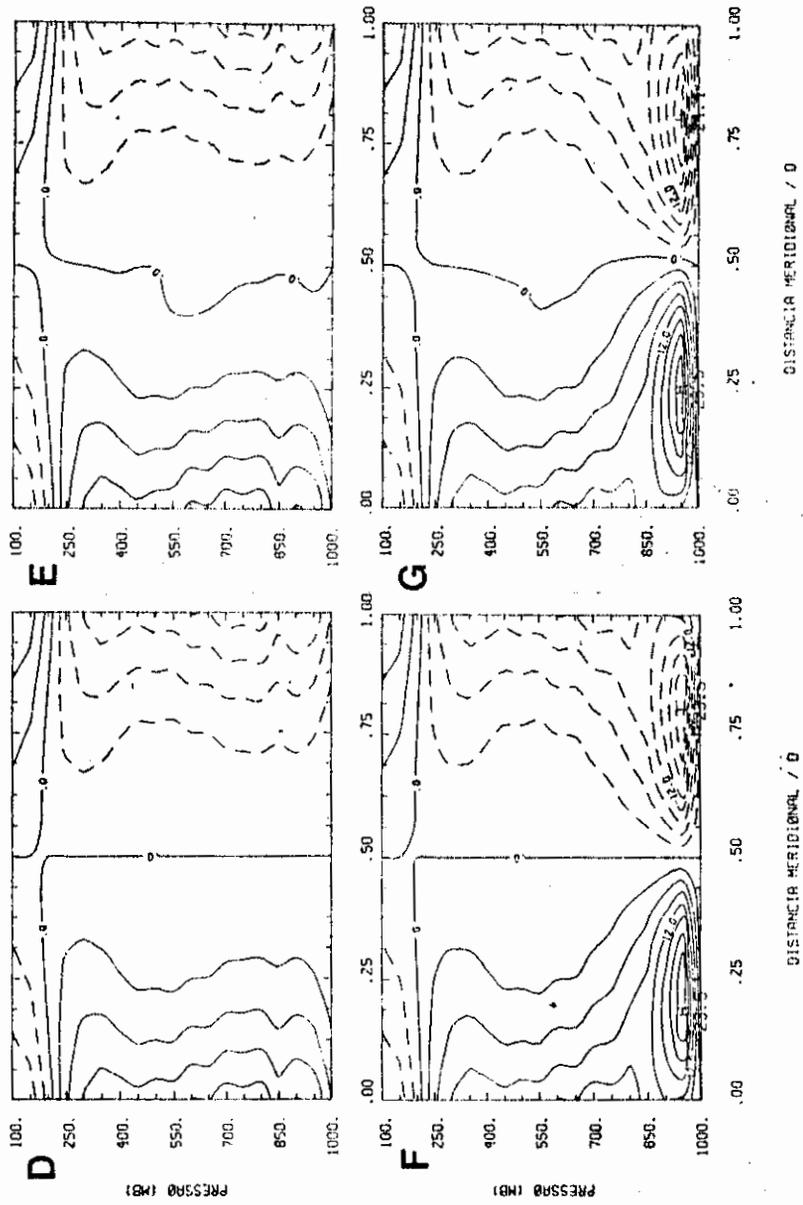


Fig. 4.24 - Conclusão

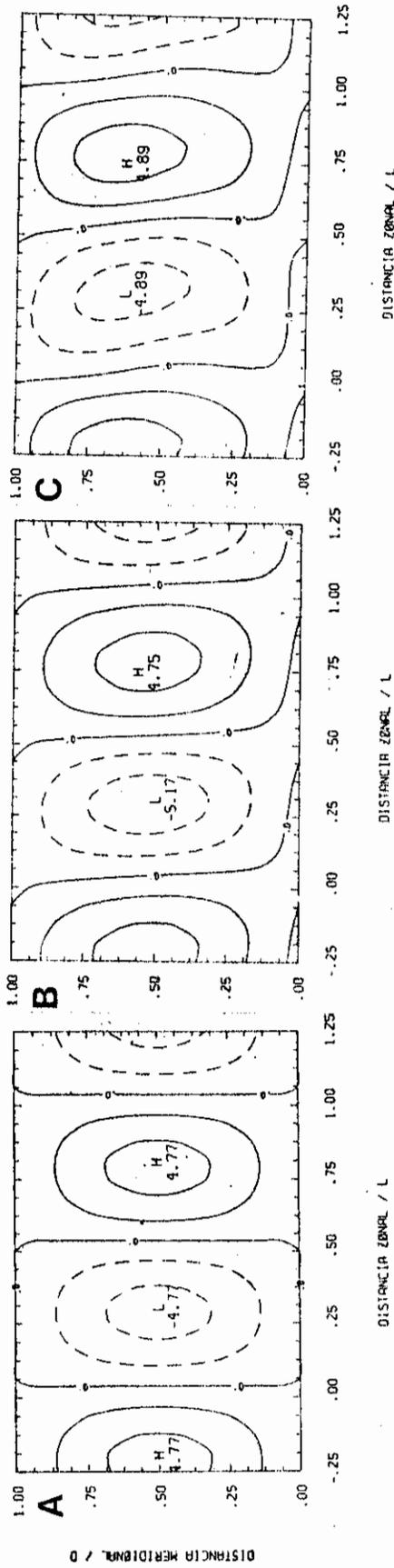


Fig. 4.25 - Seções horizontais da perturbação na temperatura potencial, em 850 mb e após 6,75 dias $\theta(1)$ (a); $\theta(1) + \theta(2)$ (b, caso I); d, caso II e f caso III); $\theta(1) + \theta(2) + \theta(3)$ (c, caso I; e, caso II e g caso III). As isolinhas variam de -10 a 10K, com intervalo de 2K.

(continua)

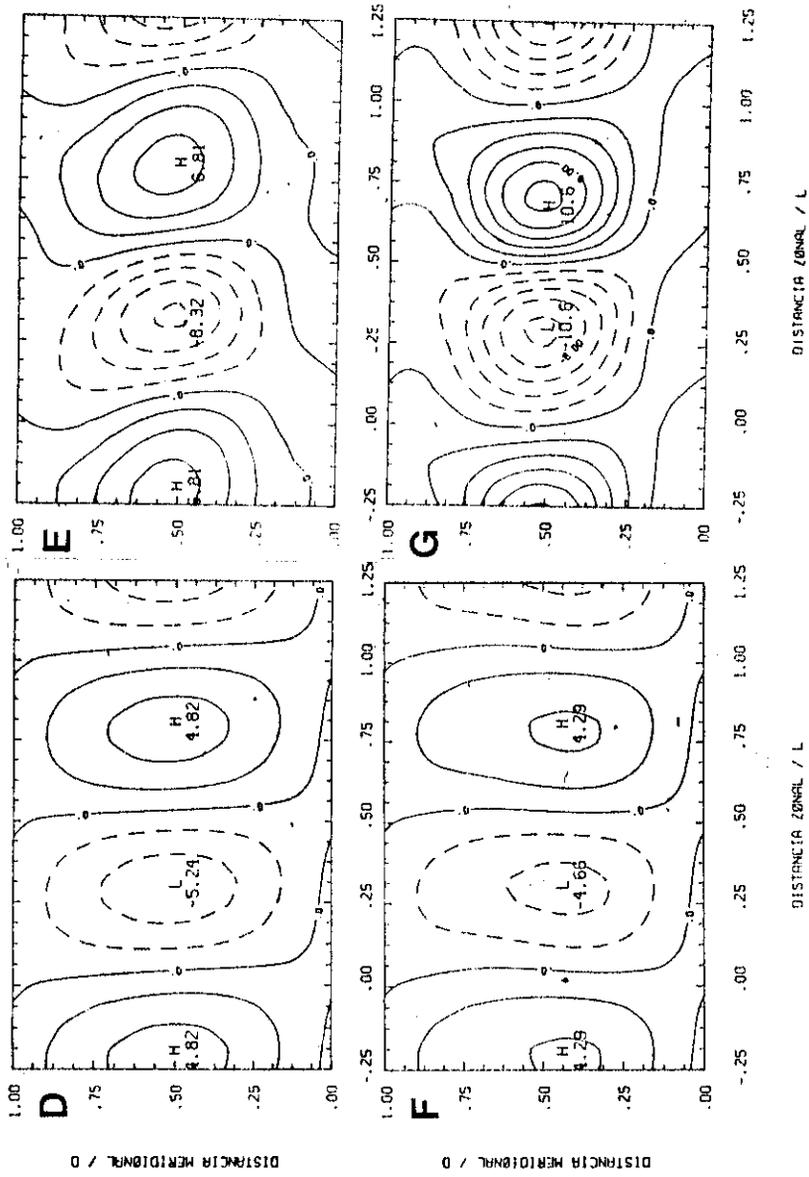


Fig. 4.25 - Conclusão

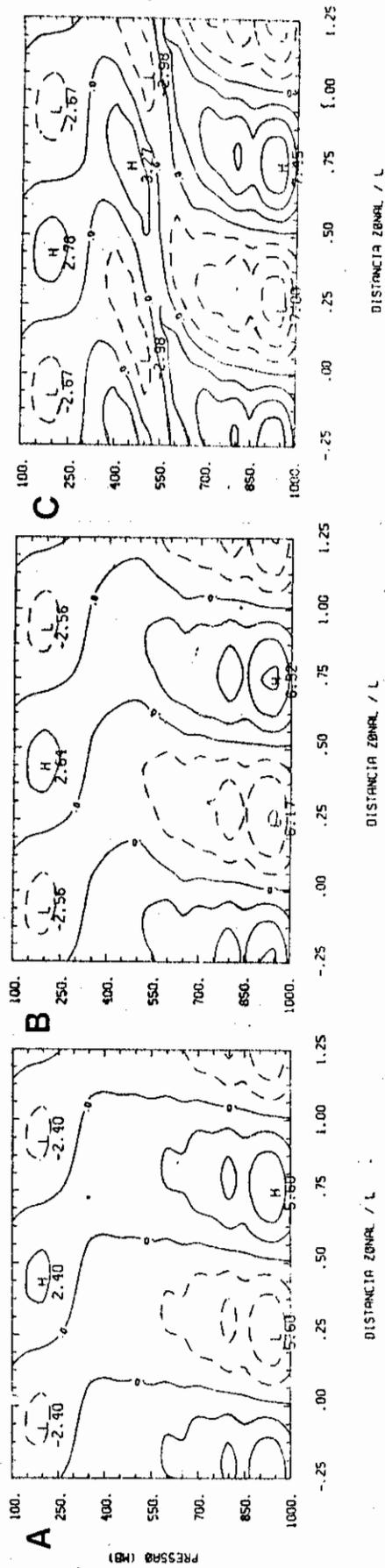


Fig. 4.26 - Seções zonais da perturbação na temperatura potencial, em $Y=0.75$ a após 6,75 dias: θ (I) (a); θ (I) + θ (2) (b, caso I; d, caso III); θ (I) + θ (2) + θ (3) (c, caso I; e, caso II e g, caso III). As isolinhas variam de -8 a 8K, com intervalo de 2K.

(continua)

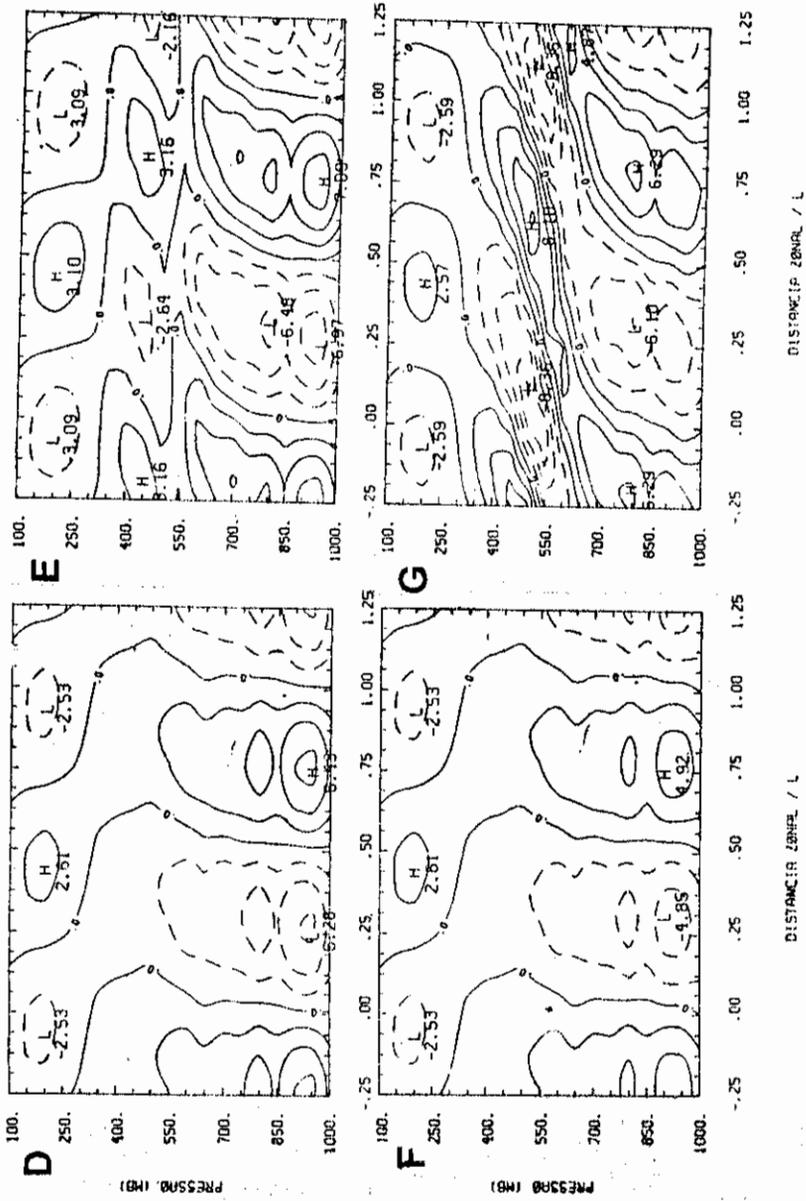


Fig. 4.26 - Conclusão

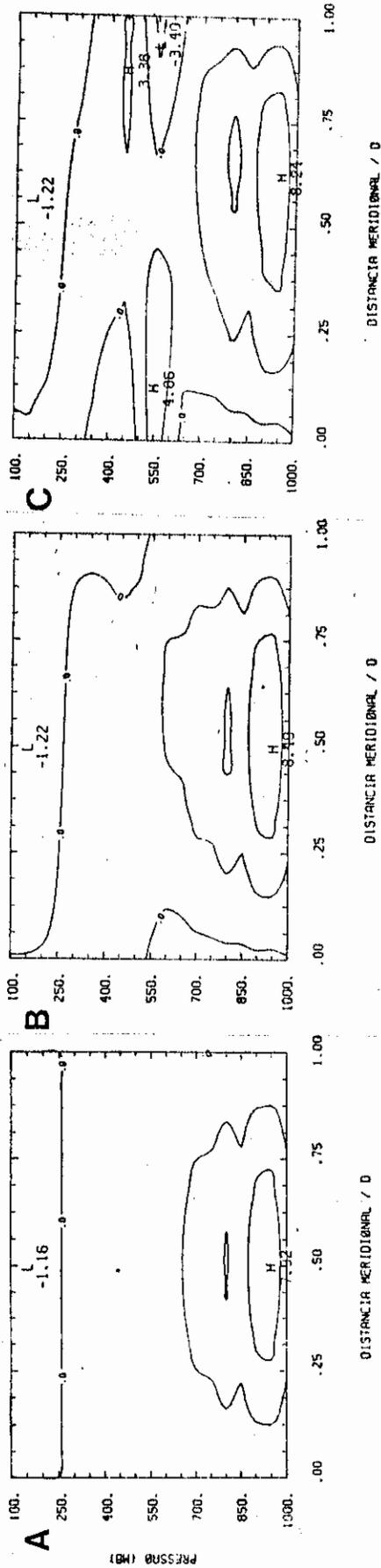


Fig. 4.27 - Seções meridionais da perturbação na temperatura potencial, em $X=0,75$ e após 6,75 dias: $\theta(1)$ (a); $\theta(1) + \theta(2)$ (b, caso I); $\theta(1) + \theta(2) + \theta(3)$ (c, caso II e e, caso III). As isolinhas variam de -6 a 24K, com intervalo de 3K.

(continua)

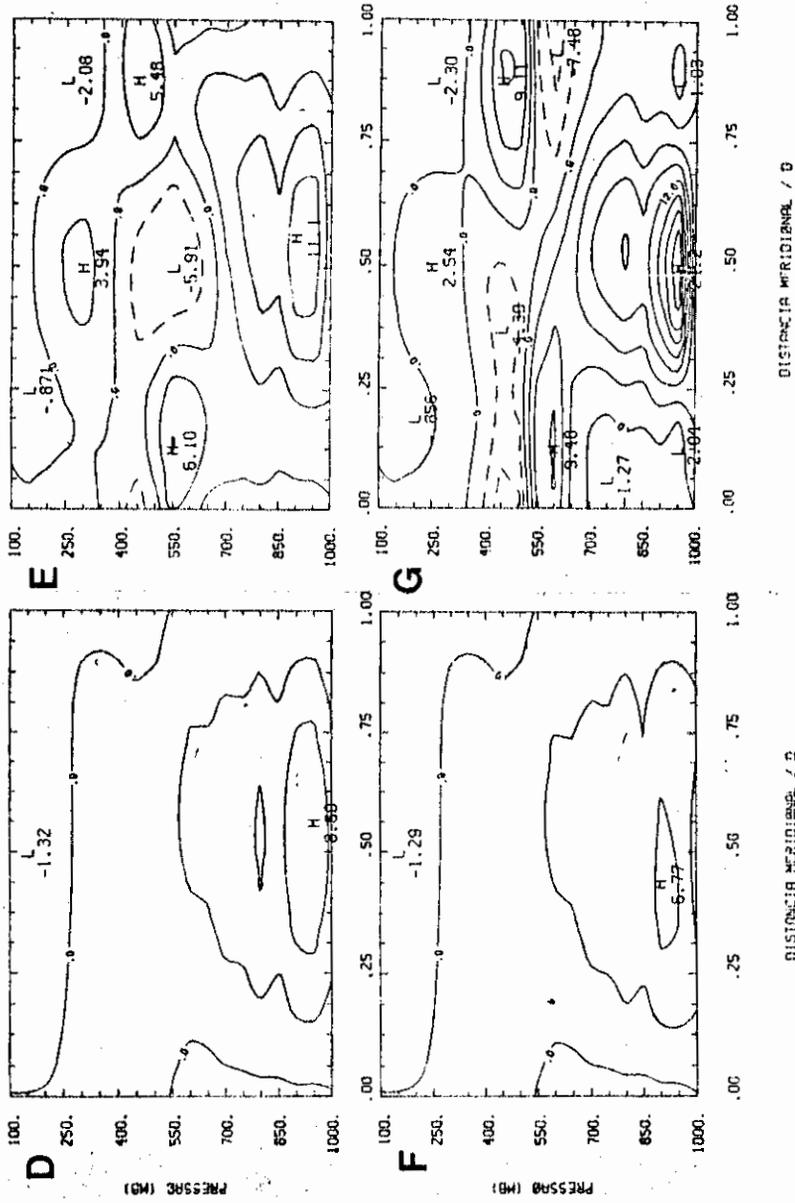


Fig. 4.27 - Conclusão

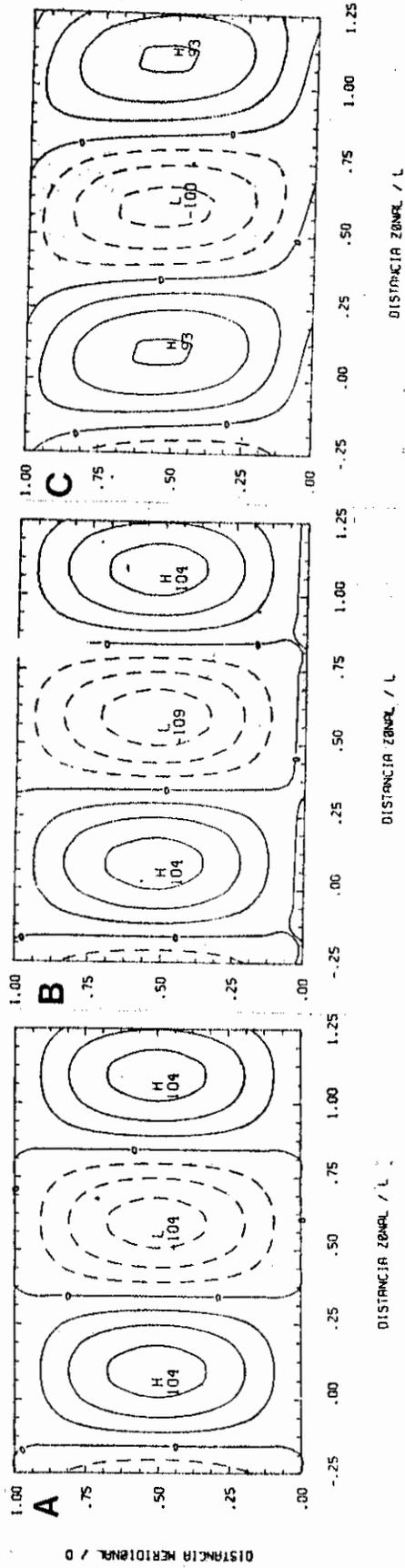


Fig. 4.28 - Seções horizontais da perturbação na função de corrente, multiplicada por 10^5 , em 350 mb e após 7,75 dias: $\psi(1)$ (a); $\psi(1) + \psi(2)$ (b, caso I; d, caso II e f, caso III); $\psi(1) + \psi(2) + \psi(3)$ (c, caso I; e, caso II e g, caso III). As isolinhas variam de -270 a $240 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, com intervalo de $30 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

(continua)

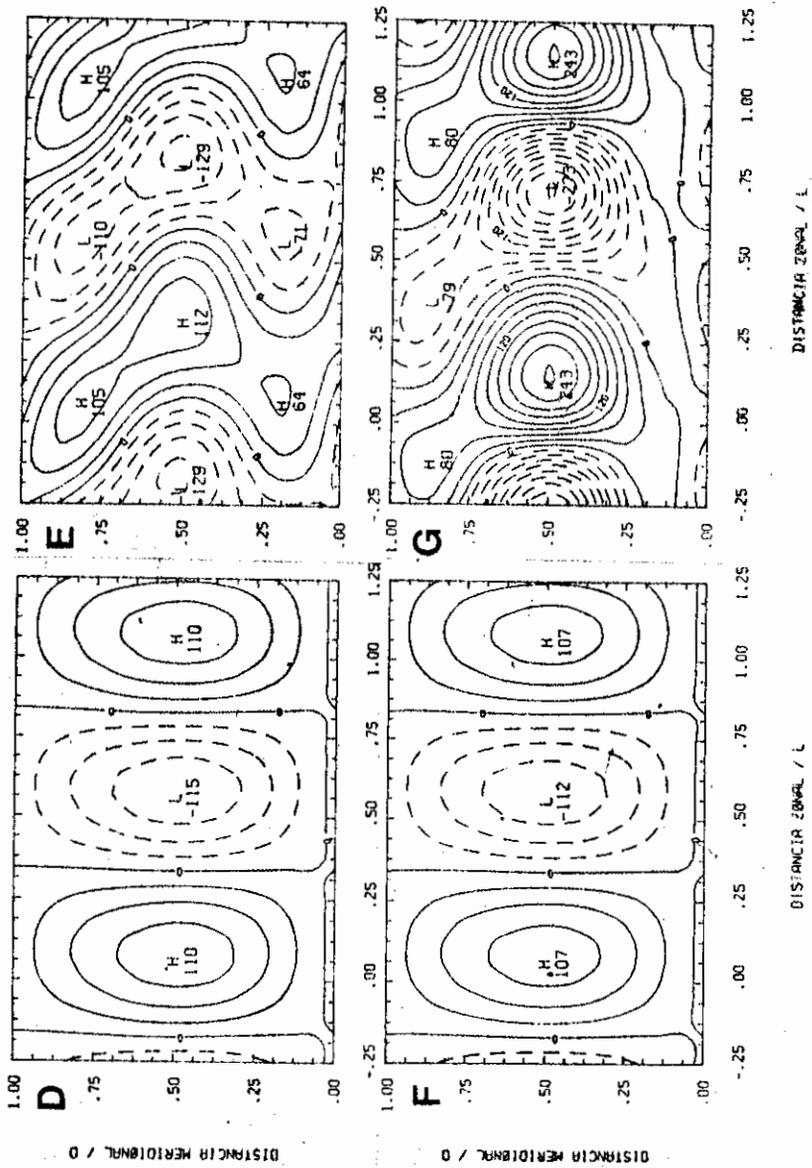


Fig. 4.28 - Conclusão

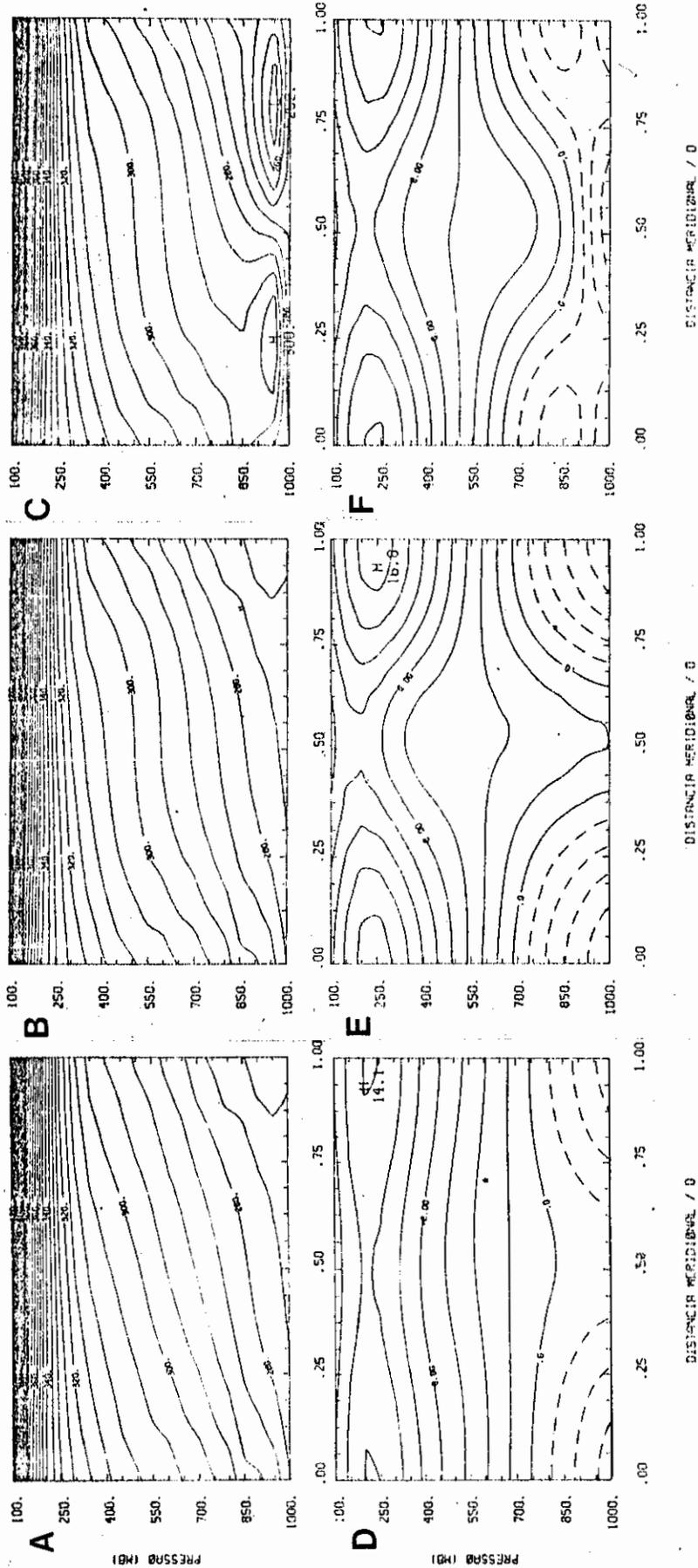


Fig. 4.29 - Temperatura potencial média zonal (a, b, c) e vento zonal médio zonal (d, e, f), após 6,75 dias para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas de $\bar{\theta}$ variam de 255 a 430K, com intervalo de 5K e as de \bar{u} variam de -8 a 16 m s⁻¹, com intervalo de 2 m s⁻¹.

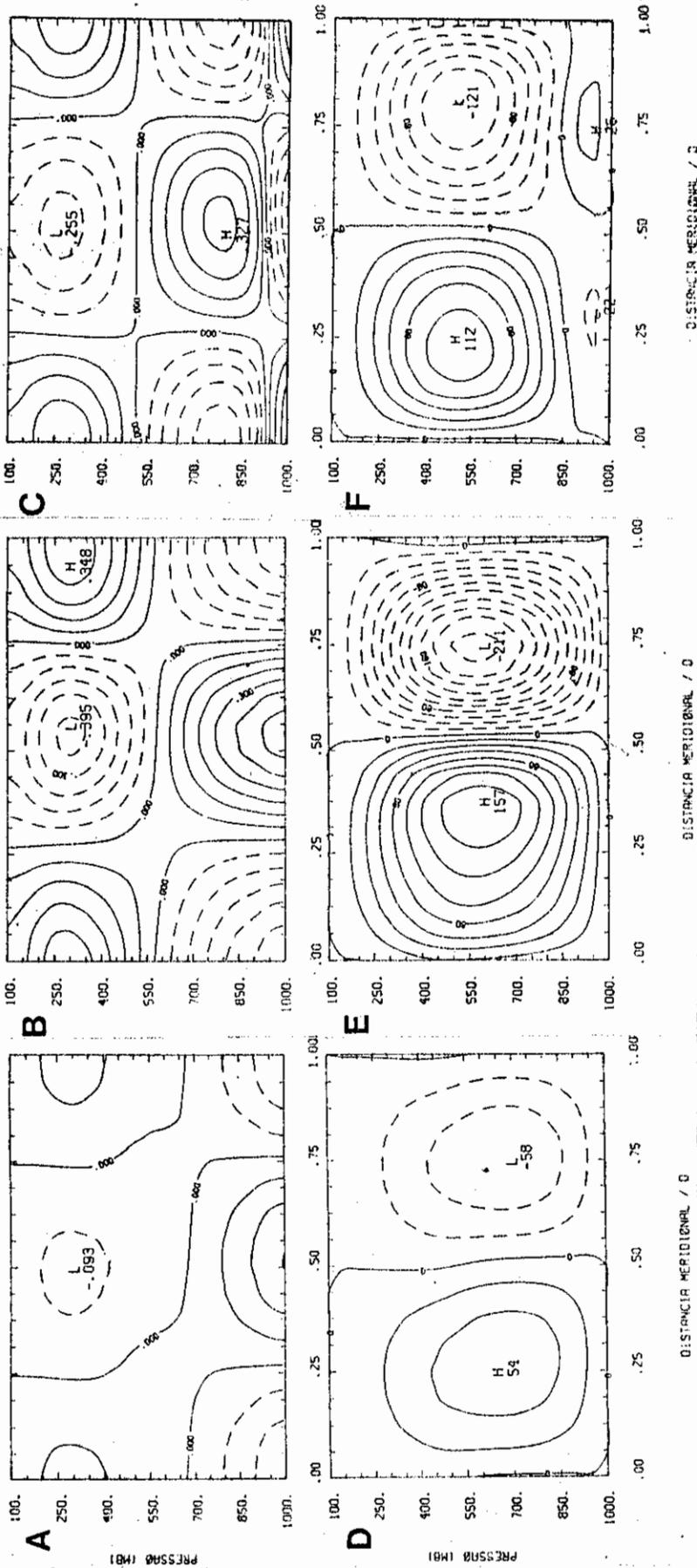


Fig. 4.30 - Velocidade meridional (\bar{v} ; a, b, c) e velocidade vertical (\bar{w} ; d, e, f), multiplicada por 10^5 , médias zonais após 6,75 dias para os casos I (a e d), II (b e e) e III (c e f). As isolinhas de \bar{v} variam de $-0,45$ a $0,45$ $m\ s^{-1}$, com intervalo de $0,075$ $m\ s^{-1}$, e as de $10^5\bar{w}$ de -200 a 140 $mb\ s^{-1}$, com intervalo de 20 $mb\ s^{-1}$.

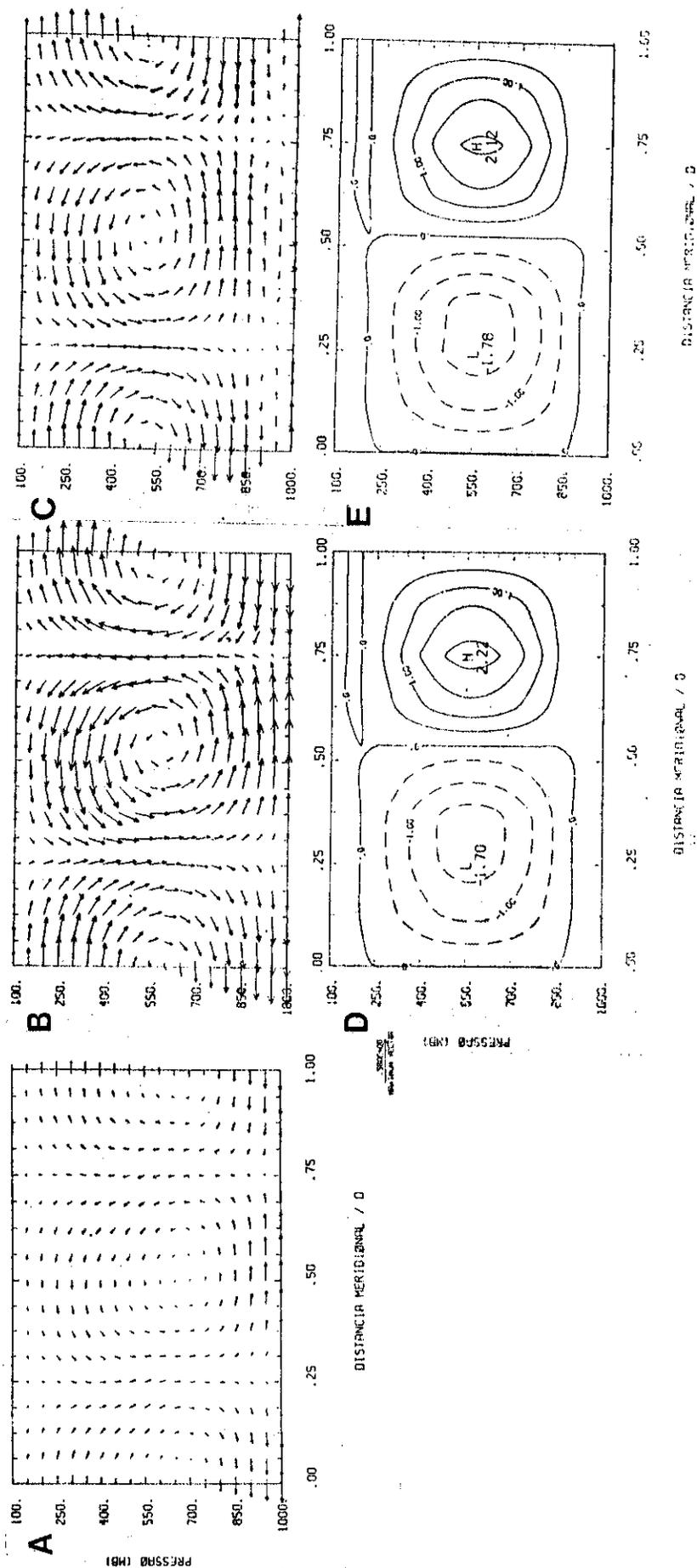


Fig. 4.31 - Circulação meridional média zonal (\bar{v} , 100W) para os casos I (a), II (b) e III (c) e liberação de calor latente para os casos II (d) e III (e). As isolinhas variam de -1,5 a 2,0K dia⁻¹, com intervalo de 0,5K dia⁻¹ e as setas são igualmente escaladas nos três casos.

CAPÍTULO 5

EFEITOS SECUNDÁRIOS E DE LIBERAÇÃO DE CALOR LATENTE NO DESENVOLVIMENTO DE PERTURBAÇÕES DE ESCALA INTERMEDIÁRIA

Há um crescente interesse no estudo de vórtices ciclônicos de ar frio de escala pequena ou subsinótica (Reed, 1979; Sardie and Warner, 1985; Carr and Millard, 1985; Reed and Blier, 1986a e b; Reed and Duncan, 1987; Businger and Hobbs, 1987; Bonatti and Rao, 1987; Wakimoto and Durkee, 1987). Os vórtices ciclônicos são separados em duas amplas categorias, correspondendo aos extremos do espectro dessas perturbações. No extremo inferior (poucas centenas de km de diâmetro) estão as baixas polares, que aparecem com uma configuração de nuvem em forma espiralada nas imagens de satélite e se formam em altas latitudes sob baixas fechadas de centro frio em 500 mb, durante impulsos ("outbreaks") das massas de ar polar (Businger and Hobbs, 1987). No extremo superior (cerca de 1000 km de diâmetro) do espectro estão as nuvens vírgula, que se desenvolvem em regiões de baroclinia intensificada na troposfera, frequentemente próximo à zonas frontais pré-existentes (Businger and Hobbs, 1987). Como o espectro de perturbações nas massas de ar frio é contínuo, não é sempre fácil separar os vórtices ciclônicos de ar frio em baixas polares ou nuvens vírgula. Nesse capítulo será analisado o extremo superior desse espectro, ou seja, as nuvens vírgula.

Na Introdução e no Capítulo 2 já foram discutidos os principais aspectos observados e teóricos das perturbações atmosféricas de escala intermediária que se formam no setor frio de uma frente fria, chegando muitas vezes a terem associadas nuvens em forma de vírgula. Browning (1986) relaciona a formação desses sistemas com a subsidência, no setor frio, da esteira transportadora fria,

que atua ao longo da frente quente aproximadamente em 700 mb; essa subsidência deve ser suficientemente afastada da frente fria de modo a formar um vórtice ciclônico independente. Esse vórtice tende a adquirir as propriedades de um sistema de escala intermediária com nuvem vírgula quando há condições favoráveis de convergência de umidade na região ciclônica em formação, em uma área relativamente quente no setor frio; a perturbação aparentemente começa a surgir no nível de 850 mb (Maria Assunção Faus da Silva Dias, comunicação pessoal), o que concorda com o surgimento de um máximo de energia cinética em baixos níveis, do ponto de vista teórico, quando se inclui a liberação de calor latente (Gall, 1976c).

No Capítulo 2 estudou-se essas perturbações do ponto de vista teórico linear, determinando-se as escalas espacial e temporal e suas estruturas verticais no estágio incipiente de geração. Sugeriu-se ser a instabilidade baroclínica úmida o mecanismo gerador dessas perturbações, isto é, o efeito da liberação de calor latente é um fator determinante principalmente das escalas e da profundidade das perturbações (Gall, 1976c). Nesse capítulo, estudar-se-á os efeitos secundários sobre o campo linear associado a essas perturbações, na sua evolução para amplitude finita, usando o modelo descrito no Capítulo 3. Antes, porém, serão analisados outros aspectos observados relevantes ao caso de abril de 1979, não descritos anteriormente.

5.1 - ASPECTOS OBSERVADOS COMPLEMENTARES

A análise teórica das perturbações de escala intermediária (Capítulo 2) está baseada naquela ocorrida sobre a América do Sul centro-sul em 14 e 15 de abril de 1979. No Capítulo 2 já são apresentadas algumas características observadas desse sistema. Para uma melhor

análise serão apresentados outros campos de interesse baseados nos dados do "National Meteorological Center" (NMC) para uma grade tropical. Deve-se ter certos cuidados quando se analisar dados em pontos de grade obtidos por análise objetiva, principalmente na escala aqui considerada pois, além da grade disponível ser de aproximadamente 5° por 5° , há o problema de sua confiabilidade em regiões onde a densidade dos dados de entrada não é muito boa. Nessas regiões corre-se o risco de se analisar o campo preliminar ("first guess", obtido do modelo de previsão), ao invés das observações. Corroborando com isso, Reed e Duncan (1987) comentam que a análise operacional do "European Center for Medium Range Weather Forecast" (ECMWF), não era capaz de resolver as baixas polares observadas em janeiro de 1983 sobre o Atlântico Norte devido tanto à baixa resolução do modelo (N 48), como à falta de dados na região de formação dessas perturbações. Entretanto, essas baixas polares do Atlântico Norte estudadas por Reed e Duncan (1987), têm escala horizontal da ordem de 500 km, enquanto que os sistemas com nuvem vírgula invertida da América do Sul centro-sul são da ordem de 1500 km. Então nessa região o quadro não parece ser tão crítico, pelo menos em 1979 que foi um ano de observações especiais, pois, embora nos dias aqui analisados não houve contribuição dos dados de satélite, a rede de observações convencionais tanto em altitude (dados de sondagens e de balão piloto), como principalmente os dados de superfície são densos o suficiente para se analisar a escala citada (Bjorheim et alii, 1981). Logo, existe confiabilidade na análise desses dados em pontos de grade pelo menos na América do Sul centro-sul.

A Figura 5.1 apresenta os campos de temperatura e vento em relação ao deslocamento do sistema ($u - 8 \text{ m s}^{-1}$, v), chamado daqui por diante de vento relativo, em 1000, 850 e 700 mb, às 12 TMG para os dias 14

(a, b, c) e 15 (d, e, f) de abril de 1979. As Figuras 5.1 a, b e c correspondem à segunda imagem dada na Figura 2.6 (estágio de desenvolvimento da perturbação, com organização da convecção) e as Figuras 5.1 d, e e f estão associadas a uma situação intermediária entre a sexta e a sétima imagens da Figura 2.6 (estágio maduro já com nuvem vírgula invertida). Sobre a região oceânica mostrada na Figura 5.1 destaca-se a propagação na direção SO-NE de uma frente fria (também pode-se identificá-la pela nebulosidade na Figura 2.6) e sobre o continente nota-se a penetração de uma língua de ar quente na região sul do Brasil e Uruguai em 1000 e 850 mb tanto no dia 14 como no dia 15 (Figuras 5.1 a e b e 5.1 d e e). Essa língua de ar quente causa uma concentração de isotermas na região nordeste da Argentina e não é notada em 700 mb (Figuras 5.1 c e f). O centro quente na região de Antofagasta, com uma associada concentração de isotermas deve ser analisada com cuidado, pois talvez esteja refletindo apenas a presença da cordilheira andina. Na região da língua de ar quente esses efeitos não tem atuação direta. O vento relativo na região da língua quente vai se tornando cada vez mais de norte com a altura na região da cauda, possivelmente advectando umidade para região da nuvem vírgula invertida, e na região da cabeça são de leste, tanto no dia 14 como no dia 15 (Figura 5.1). Esse tipo de circulação corresponde à parte da esteira transportadora fria que desce de níveis superiores e adquire uma circulação ciclônica (Browning, 1986). Essa configuração do vento relativo proporciona então a formação de uma circulação ciclônica na região à oeste da nuvem vírgula invertida e de uma circulação anticiclônica à nordeste (Figura 5.2), caracterizando a escala intermediária da perturbação. Do mesmo modo, a penetração da língua de ar quente e possivelmente úmido, mostrada na Figura 5.1, proporciona a formação de uma perturbação de escala intermediária também no campo de temperatura. No dia 14 (Figuras 5.2 a e b) começam a surgir em 1000 e 850 mb

esses centros de vorticidade ciclônica e anticiclônica de escala intermediária, que no dia 15 (Figuras 5.2 d, e e f) já estão bem definidos sobre o Uruguai, correspondendo muito bem com a posição da nuvem vírgula invertida mostrada na Figura 2.6 (sexta e sétima imagens). Note que no estágio de desenvolvimento a circulação ciclônica é confinada nos níveis inferiores, (Figuras 5.2 a, b e c) e no estágio maduro chega a atingir 700 mb (Figuras 5.2 d, e, f), porém não atinge 500 mb (campo não mostrado), evidenciando a importância da liberação de calor latente no aprofundamento da perturbação (Gall, 1976c). Além disso, no estágio de desenvolvimento há uma clara inclinação para oeste do centro de vorticidade anticiclônica de escala intermediária e no estágio maduro essa inclinação desaparece. Para complemento da análise, a Figura 5.3 mostra os campos de divergência correspondentes aos da Figura 5.1. Talvez haja erros no cálculo desses campos porém, tanto em superfície como em 850 mb (Figuras 5.3 a e b e 5.3 d e e) a sua ordem de grandeza é a mesma que a da vorticidade (Figuras 5.2 a e b e 5.3 d e e), o que concorda com os resultados de Orlanski et alii (1985) para sistemas frontais. Outra característica a se destacar dos campos de divergência é a concordância da região de convergência com a posição da língua quente em 1000 e 850 mb no estágio de desenvolvimento (Figuras 5.3 a e b). Entretanto, em 700 mb há um centro de divergência (Figura 5.3 c) sobre a região da formação de nebulosidade, sugerindo movimento vertical ascendente nessa região, com máximo abaixo de 700 mb. No estágio maduro (Figuras 5.3 d, e e f), a característica que domina todos os níveis é a presença de uma banda de convergência com inclinação NO-SE no lado equatorial em relação à nuvem vírgula invertida e um centro de divergência no lado SE, mostrando a tendência de propagação para leste do sistema como um todo.

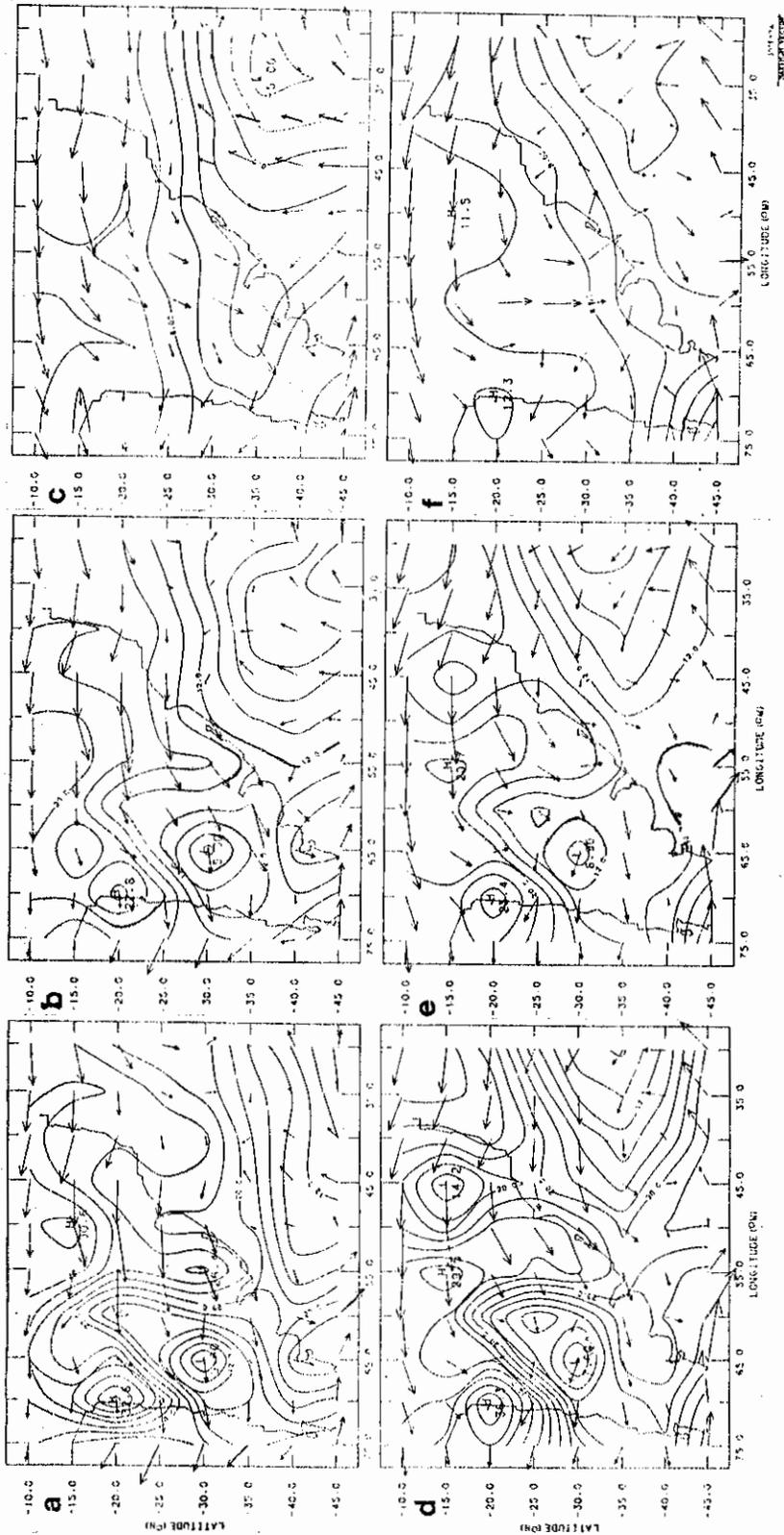


Fig. 5.1 - Campos de vento relativo e de temperatura analisados pelo NMC, para os dias 14 (a, b, c) e 15 (d, e, f) de abril de 1979, em 1000 (a, d), 850 (b, e) e 700 mb (c, f) às 12 TMG. As isolinhas variam de -4 a 36°C, com intervalo de 2°C, e a seta de referência corresponde a 30 ms⁻¹.

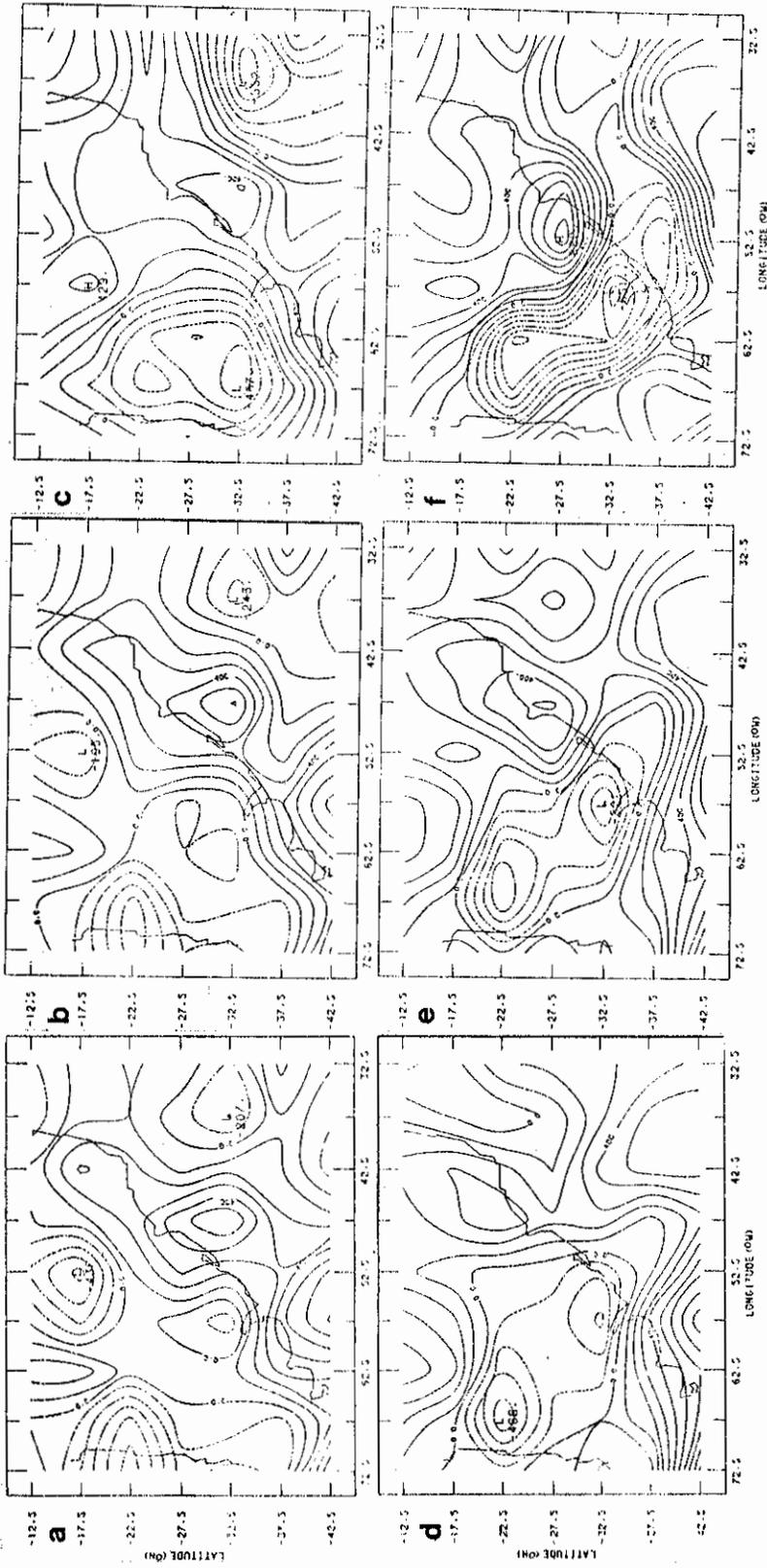


Fig. 5.2 - Vorticidade relativa (multiplicada por 10⁷) correspondentes aos campos da Figura 5.1. As isolinhas variam de -1800 a 1600 s⁻¹, com intervalo de 100 s⁻¹.

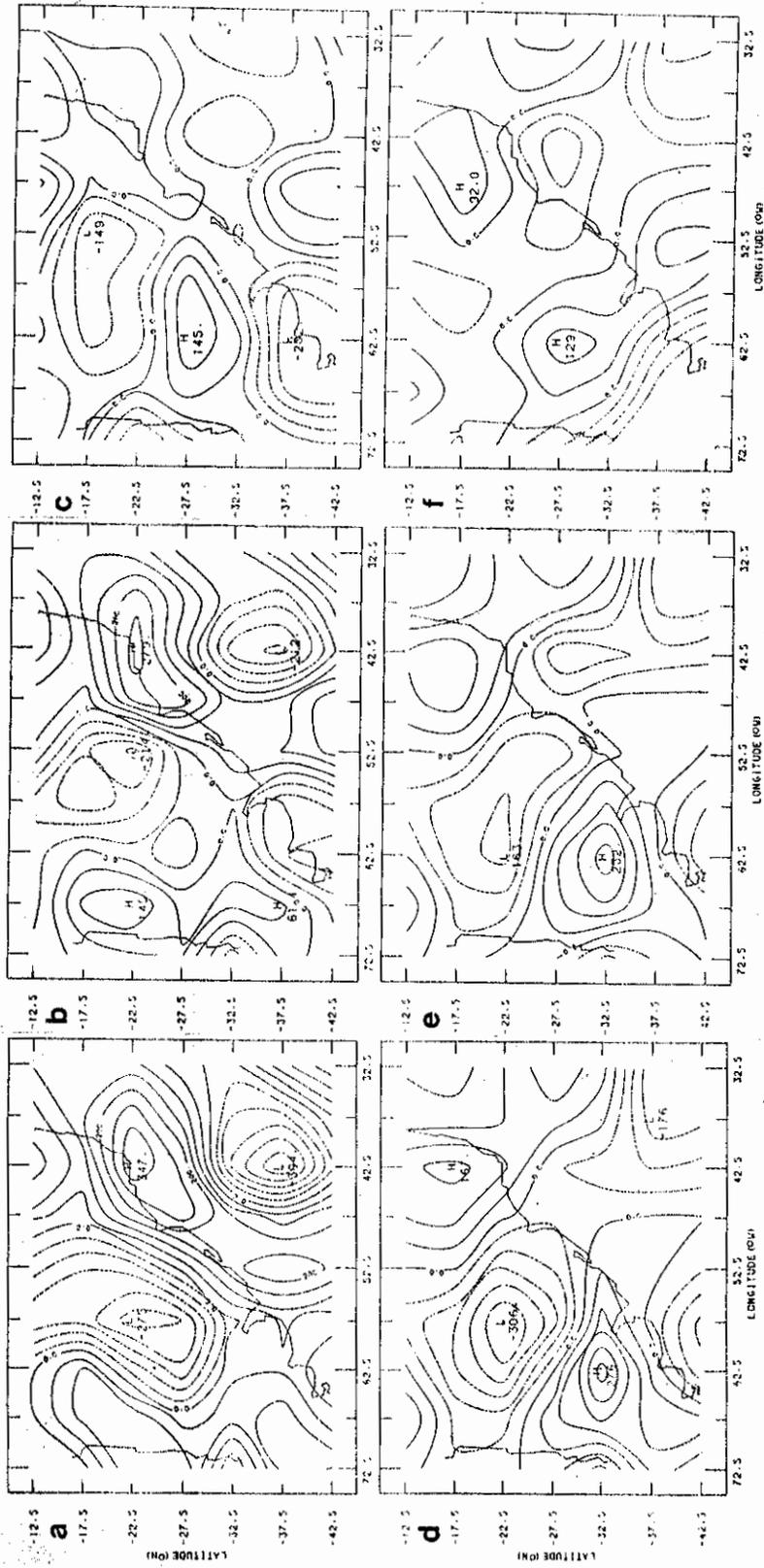


Fig. 5.3 - Divergência horizontal (multiplicada por 10^7), correspondentes aos campos da Figura 5.1. As isolinhas variam de -550 a 700 s^{-1} , com intervalo de 50 s^{-1} .

5.2 - EVOLUÇÃO PARA AMPLITUDE FINITA DOS SISTEMAS DE ESCALA INTERMEDIÁRIA

Para se analisar a evolução para amplitude finita, foi usado o mesmo estado básico dado na Figura 2.8 para o vento zonal e estabilidade estática. Na Figura 5.4 é mostrado novamente o estado básico do vento zonal, o perfil de referência da temperatura correspondente, o perfil da razão de mistura e de sua derivada meridional. Os perfis da razão de mistura e de sua derivada foram obtidos do "Monthly Climatic data for the World" correspondente ao mês de abril de 1979. A obtenção do campo linear nesse caso deve incluir além dos efeitos da liberação de calor latente, como já descrito no Capítulo 2, também a variação senoidal com y conforme o modelo dado no Capítulo 3. Usando-se os mesmos parâmetros do Capítulo 2, porém com $\epsilon = 0,4$ e incluindo a variação com y , as escalas determinadas para a onda mais instável (modo de Mak) foram as seguintes: comprimento de onda de 1770 km, velocidade de fase de $6,3 \text{ m s}^{-1}$ e taxa de crescimento de $1,21 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (tempo de multiplicação-e de 0,96 dias). As estruturas verticais são bastante semelhantes às apresentadas na Figura 2.9, mas as escalas se aproximam ainda mais das observadas que as dadas no Capítulo 2. Utilizando esse campo linear assim obtido usou-se o modelo apresentado no Capítulo 3, sem dissipação e com liberação de calor latente, obtendo-se os resultados que serão discutidos a seguir. Optou-se por apresentar as seções horizontais no nível de 800 mb por ser este próximo ao nível, do ponto de vista observacional, onde começa o desenvolvimento desse tipo de perturbação, como já ressaltado anteriormente nesse capítulo. Nas seções apresentadas a seguir, o intervalo de 0 a 1 nas direções X e Y corresponde a 1770 km.

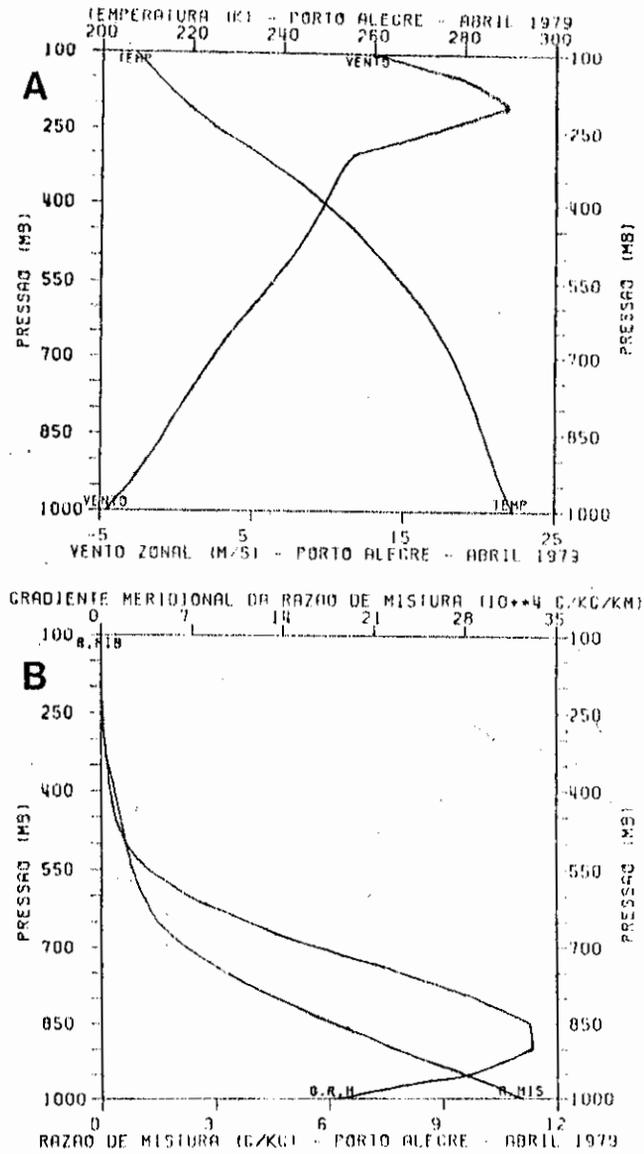


Fig. 5.4 - Campo básico sobre Porto Alegre em abril de 1979, para simulação de sistemas de escala intermediária: a) vento zonal de temperatura e b) razão de mistura e seu gradiente meridional.

A Figura 5.5 apresenta os campos de temperatura e de movimento vertical para o nível de 800 mb após 1,5; 1,75 e 2 dias, para uma perturbação inicial máxima na velocidade meridional de 5 m s^{-1} . Nota-se a concentração das isotermas em forma de U invertido e a penetração de uma língua quente evidenciando efeitos não-lineares bastante fortes (Figura 5.3 c). Essa característica é semelhante à observada dada nas Figuras 5.1 b e e. O movimento relativo dos centros quente e frio é tal que o ar frio propaga-se para leste e para norte e a língua de ar quente desloca-se de NE para SO (Figuras 5.5 a, b e c), de modo que a estrutura meridional vai se ondulando. Quanto ao movimento vertical nota-se a sua intensificação e concentração (Figura 5.5 f) na região próxima à região da frente fria de escala intermediária, sendo o movimento ascendente mais intenso. Além dos efeitos não-lineares intensos destaca-se também a evolução da região com movimento ascendente para adquirir a forma de uma vírgula (invertida). Esse campo de movimento vertical é bastante semelhante ao quase-geostrófico obtido por Carr e Millard (1985) para as nuvens vírgulas observadas sobre a região continental dos EUA (Great Plains). A aproximação e concentração dos centros de movimentos ascendente e descendente nas Figuras 5.5 d, e e f evidência a intensificação dos efeitos não-lineares pela liberação de calor latente. Essas características do movimento vertical são também semelhantes às obtidas por Mudrick (1987), através de um modelo numérico seco de equações primitivas, usando um campo inicial dado por um modelo quase-geostrófico seco de 10 camadas. Porém, para conseguir a escala desejada do fenômeno a estabilidade estática foi artificialmente reduzida nos baixos níveis, o que de certa forma é equivalente a considerar alguma forma de liberação de calor latente (Mak, 1983b).

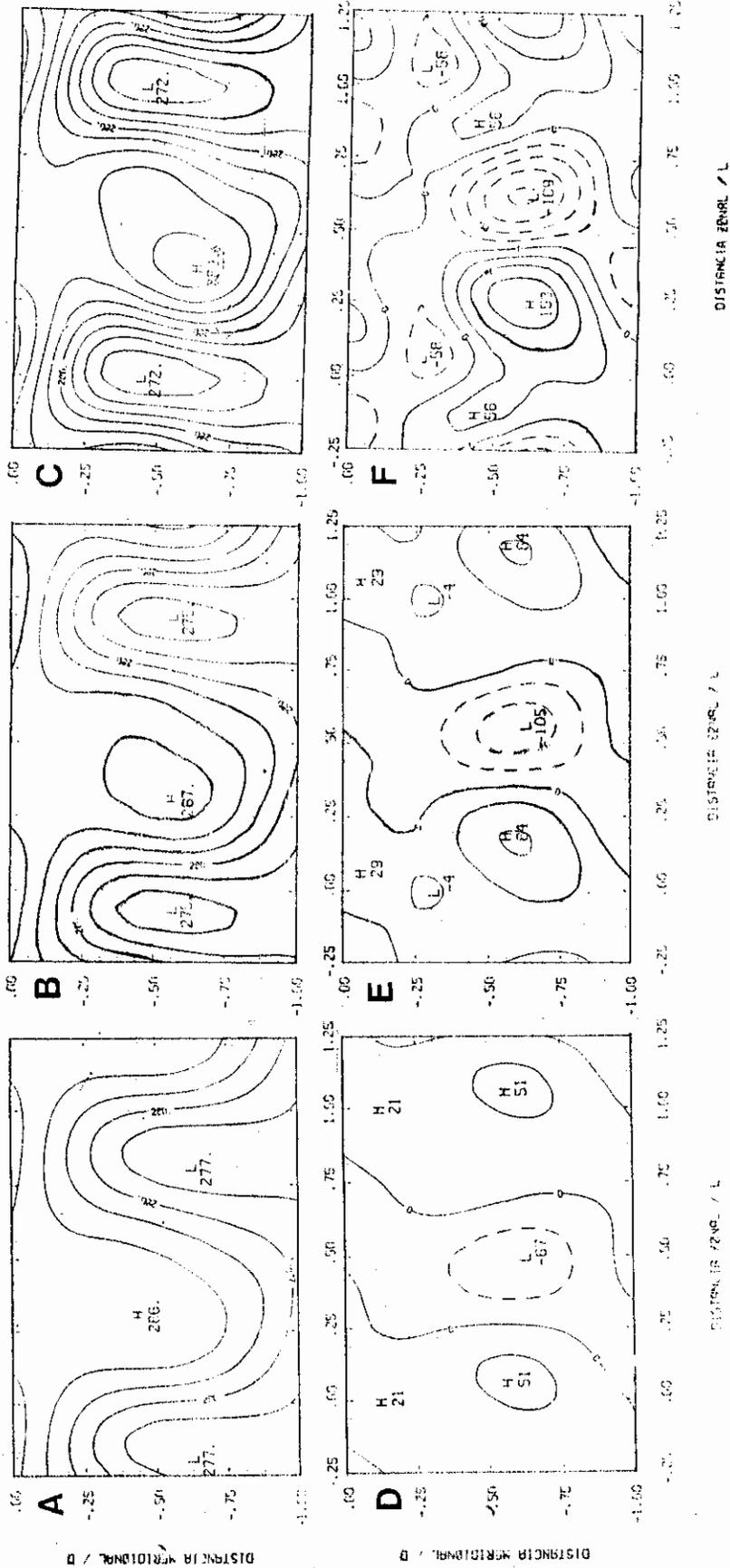


Fig. 5.5 - Temperatura (a, b, c) e velocidade vertical (d, e, f); multiplicada por 10⁴), em 800 mb após 1,5 (a, d); 1,75 (b,e) e 2 dias (c, f) para o modo de Mak. As isolinhas em a, b e c variam de 274 a 288K, com intervalo de 2K, e as em d, e e f variam de -160 a 140 mb s⁻¹, com intervalo de 40 mb s⁻¹.

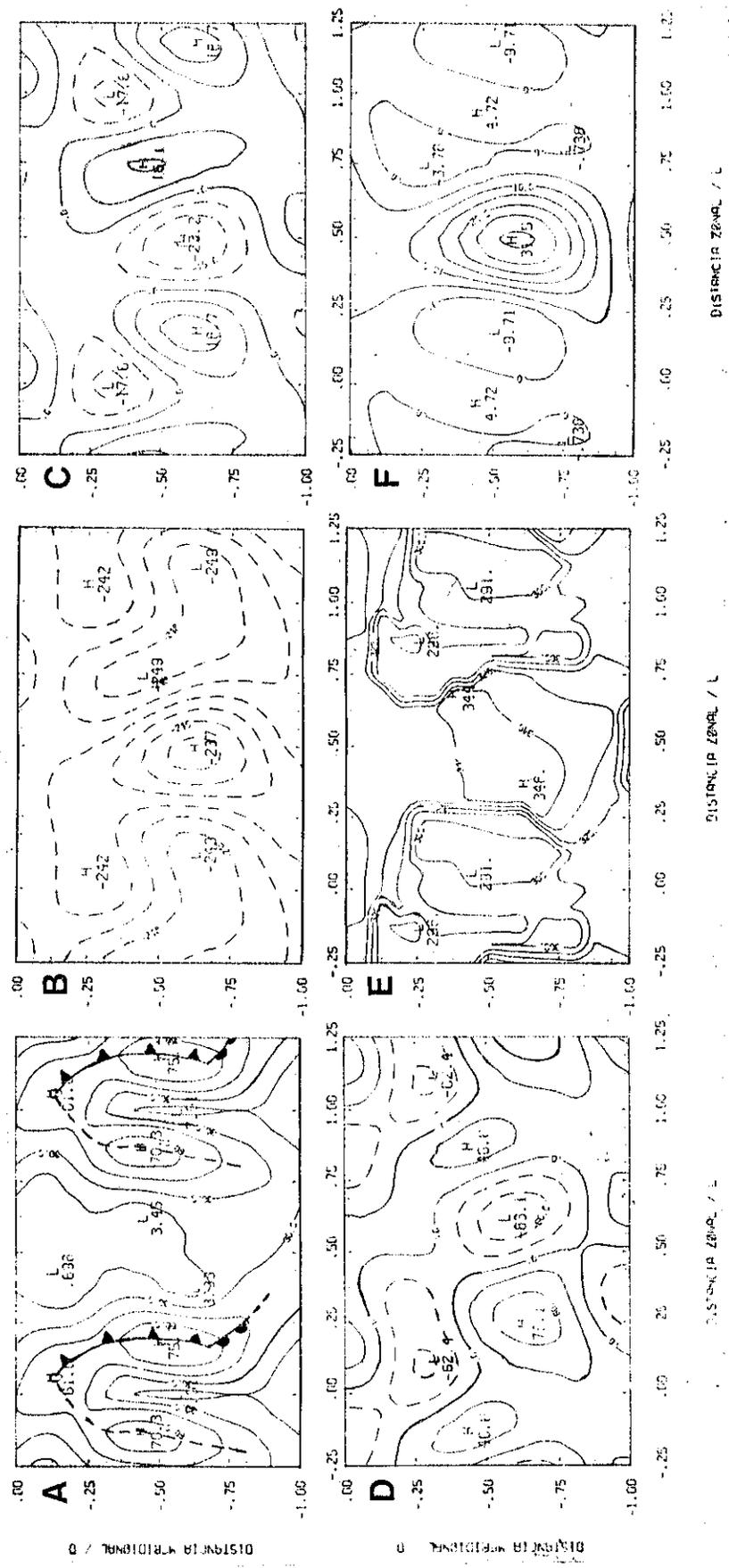
A Figura 5.6 mostra o módulo do gradiente de temperatura potencial vezes o comprimento da onda (a), a função de corrente (b), a vorticidade (c), a divergência (d) a temperatura potencial equivalente (e) e a razão de mistura (f), em 800 mb após 2 dias. A Figura 5.6 a em conexão com as Figuras 5.5 b e c permitem estabelecer a posição da frente gerada pelo sistema de escala intermediária. Nota-se uma frente fria bem definida propagando-se para norte e para leste e uma pequena frente quente propagando-se para sudoeste, em relação à frente fria. Mudrick (1987), obtem estruturas semelhantes, porém já atingindo o estágio de oclusão, o que não se obtem com o modelo aqui usado. Reed e Blier (1986a), apresentam um diagrama esquemático que possui uma região estreita com frente fria, associada com a nuvem vírgula, que vai se curvando para as extremidades, tornando-se menos definida e indicada por linhas tracejadas (Figura 12 de Reed e Blier, 1986a). A curvatura da concentração de isotermas aqui obtida é muito mais forte que a apresentada por Reed e Blier (1986a). A função de corrente apresenta uma região de baixa com forma de vírgula invertida semelhante à do movimento vertical da Figura 5.5 f, porém atrasada em relação ao movimento ascendente, ou seja, há movimento ascendente adiante da baixa e descendente atrás, em 800 mb. O campo de vorticidade ciclônica (Figura 5.6 c) está em fase com a baixa de geopotencial e a divergência (Figura 5.6 d) está em fase com o movimento ascendente. As estruturas da vorticidade e da divergência (Figuras 5.5 c e d) são semelhantes às observadas no estágio maduro da nuvem vírgula invertida (Figuras 5.2 e e 5.3 e), embora no caso observado a escala e a magnitude relativa à vorticidade da divergência sejam maiores e os dois centros de pequena escala na vorticidade não tenham tanta curvatura. Quanto à temperatura potencial equivalente (Figura 5.6 e), nota-se uma concentração das isolinhas em regiões bastante estreitas. Apesar da região da frente fria ficar muito

melhor definida, a parte indicada por tracejado muda bastante de posição, não correspondendo muito bem com o campo de temperatura mostrado na Figura 5.5 c. Porém, essa região está associada com o forte gradiente da razão de mistura (Figura 5.6 f) no lado leste da língua quente. Nota-se, também, que há um grande secamento a oeste da frente fria. Os valores negativos de razão de mistura não tem significado físico; eles são obtidos devido ao crescimento exponencial pré-fixado dos campos em estudo e devem ser interpretados como regiões bastante secas. A razão de mistura se concentra em uma região também com forma de vírgula invertida (Figura 5.6 f).

Na Figura 5.7 encontra-se o movimento relativo e a cobertura de nuvens (a, b, c), como definido no Capítulo 3, e a umidade relativa (d, e, f) em 800 mb, após 1,5; 1,75 e 2 dias. As setas estão igualmente escaladas e o vetor no canto superior direito da Figura 5.7 representa 40 m s^{-1} . Nota-se a influência dos efeitos não lineares na circulação relativa, com a formação de um vórtice ciclônico na região sudoeste da nuvem e uma circulação ciclônica a nordeste. Estas características são bastante semelhantes aos casos observados em abril de 1979 (Figura 5.1) e por Businger e Hobbs (1987) para as nuvens vírgulas sobre o oceano Pacífico, apesar da escala diferente. Há também uma clara evolução da cobertura de nuvens para uma forma de vírgula invertida, (Figuras 5.7 a, b, c) com a formação de uma cauda bem definida no lado equatorial e tendendo para uma forma espiral no lado polar. Note que o comprimento norte-sul da nuvem é cerca de 1500 km enquanto que a largura leste-oeste tem no máximo cerca de 600 km. Este certamente não é o tipo de distúrbio que Saltzman e Tang (1985) simularam. A simulação deles é, sem dúvida, da nebulosidade de um sistema frontal de escala sinótica. Para uma melhor visualização da evolução do sistema, são apresentados os correspondentes campos de

umidade relativa, que mostram também uma evolução para a forma de vírgula invertida. No início, a forma da nuvem está mais associada à forma do movimento ascendente, porém com o tempo os processos advectivos vão se tornando importantes (Carr and Millard, 1985) tornando o campo de umidade relativa mais curvado e com protuberâncias nas regiões de saída da circulação (Figuras 5.7 c e f). Este processo determina a forma final da cobertura de nuvens. A Figura 5.7 c em conexão com as Figuras 5.7 f e 5.5 c mostram claramente o movimento relativo para sul/sudeste da língua de ar quente e úmido e para norte/nordeste e norte/noroeste da língua de ar frio e seco.

A Figura 5.8 mostra a temperatura potencial equivalente para seções zonais na cabeça (a) e na cauda (b) da nuvem e uma seção meridional ao longo da nuvem (c), após 2 dias, e os correspondentes campos de razão de mistura (d, e, f). Nota-se que na cabeça da nuvem (Figuras 5.8 a e d e 5.8 c e f), onde há concentração de razão de mistura, a temperatura potencial equivalente decresce com a altura em baixos níveis, crescendo a seguir de 900 a 700 mb, voltando a decrescer até cerca de 550 mb. As regiões de decréscimo de θ_e correspondem a regiões onde há instabilidade convectiva. Na região da cauda da nuvem (Figuras 5.8 b e e 5.8 c e f), há um decréscimo lento de θ_e seguido de um forte acréscimo, ou seja a região úmida fica mais confinada em baixos níveis, sendo sobreposta por uma região bastante seca. Outro aspecto a se destacar, principalmente nas Figuras 5.8 a e b, é o confinamento, tanto na horizontal como na vertical, das regiões onde há concentração de isolinhas de θ_e .



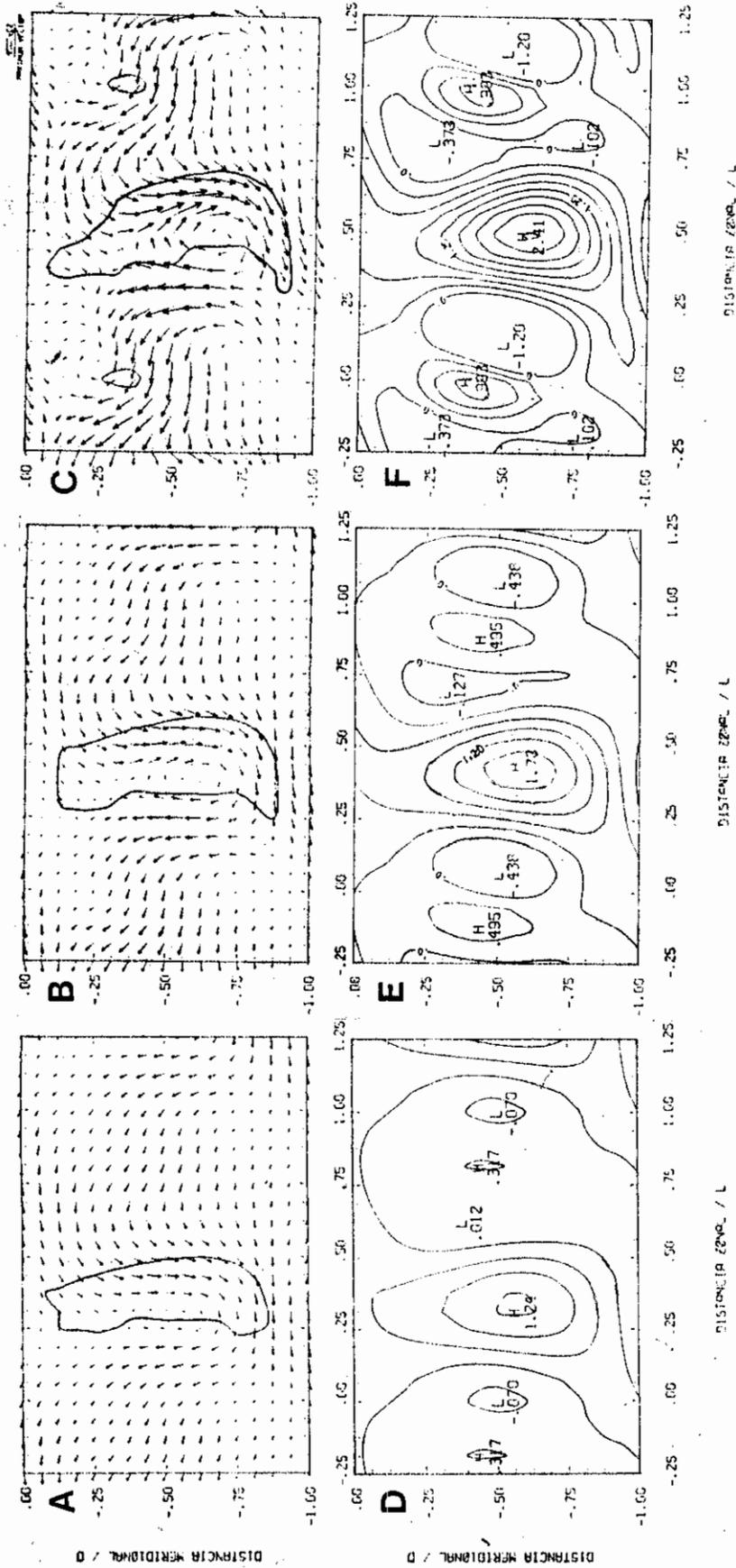


Fig. 5.7 - Seções horizontais do vento relativo e da cobertura de nuvens (a, b, c) e da umidade relativa (d, e, f) em 800 mb, após 1,5 (a, d); 1,75 (b, e) e 2 dias (c, f). As setas em a, b e c são igualmente escaladas pela dada no canto superior direito, correspondente a 40 ms^{-1} , e a linha contínua delimita a cobertura de nuvens. As isolinhas em d, e e f variam de 0 a 2,4; com intervalo de 0,3.

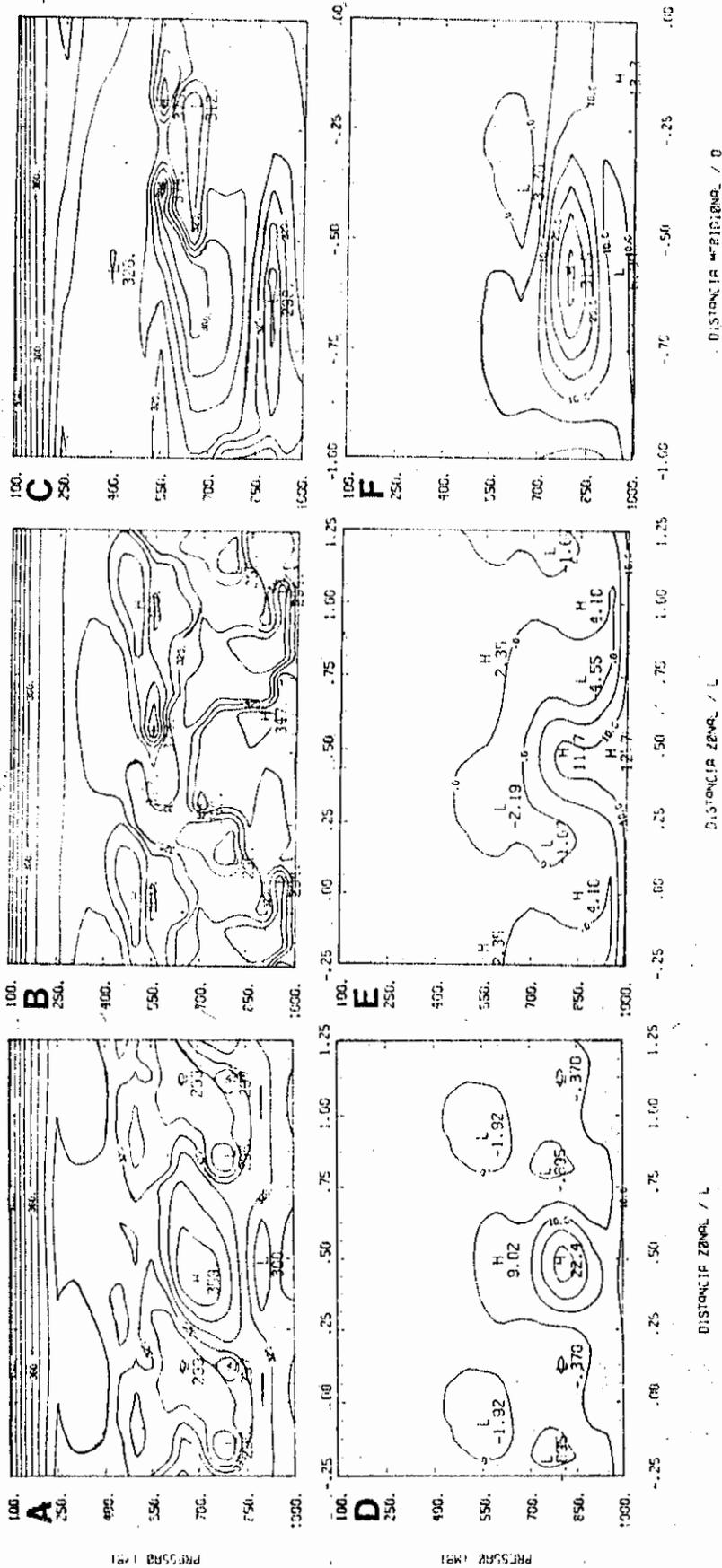


Fig. 5.8 - Seções verticais da temperatura potencial equivalente (a, b, c) e da umidade relativa (d, e, f) após 2 dias, na região da cabeça da nuvem (Y=0,75; a e d), na cauda (Y=0,25; b e e) e ao longo da nuvem (X=0,5; c e f). As isolinhas em a, b e c variam de 290 a 420K, com intervalo de 10K, e em d, e e f variam de 0 a 30 gkg⁻¹, com intervalo de 5 gkg⁻¹.

Na Figura 5.9 encontram-se as seções verticais correspondentes às da Figura 5.8 para a circulação relativa vertical, com a delimitação da cobertura de nuvens seguindo estritamente o descrito no Capítulo 3, e para a umidade relativa. Nota-se fortes movimentos subsidentes à oeste da cabeça da nuvem (Figura 5.9 a) trazendo umidade relativa de dentro para fora da nuvem (Figura 5.9 d). No lado leste da cabeça da nuvem há movimento descendente seco. No topo da cabeça da nuvem nota-se a saída de um jato causando uma espécie de bigorna (Figura 5.9 a). Na base da cabeça da nuvem nota-se a entrada de leste da circulação relativa, concentrando a umidade relativa nessa região (Figuras 5.9 a e d). Esse tipo de circulação relativa vertical também é obtida observacionalmente por Bussinger e Hobbs (1987), porém, para uma escala bem menor e encontrando movimentos verticais da ordem de alguns $m s^{-1}$, quando analisam as bandas de precipitação via radar. Na região da cauda (Figuras 5.9 b e e), o movimento relativo quase inexistente, sendo bastante vigoroso a oeste e acima, porém, em uma região bastante secas. Apesar de ser fraca, a circulação relativa converge umidade nessa região e seca todo o contorno superior da cauda da nuvem devido aos movimentos subsidentes acima da cauda.

As seções meridionais ao longo da nuvem vírgula invertida (Figuras 5.9 c e f), mostram que a cobertura de nuvens reflete exatamente a isolinha de umidade relativa de 60%, pois em toda a região onde há umidade maior que 60% o movimento é ascendente nessa seção. Na direção norte-sul destacam-se duas regiões: a cabeça da nuvem do lado polar bastante profunda atingindo cerca de 450 mb, com características de bigornas, e a da cauda do lado equatorial não ultrapassando 700 mb (Figura 5.9 c). A região da bigorna se sobrepõe à da cauda com uma região sem nuvens entre elas. Essas características são também

mostradas em um esquema feito por Bussinger e Hobbs (1987, Figura 21) baseados em observações sobre as nuvens vírgulas sobre o oceano Pacífico. Na direção vertical na região da cabeça da nuvem também se destacam duas regiões: uma em baixos níveis com umidade relativa máxima em torno de 850 mb e que se estende formando a cauda (mais rasa) da nuvem, e outra com umidade relativa máxima em torno de 550 mb que se acopla com a inferior formando a cabeça (mais profunda) da nuvem (Figuras 5.9 a e d e 5.9 c e f).

O critério estabelecido para a delimitação da cobertura de nuvens no Capítulo 3 baseado no movimento ascendente e umidade relativa maior que 60%, parece funcionar bem nas seções meridionais e na cauda da nuvem. Porém na seção zonal na cabeça da nuvem, embora a forma determinada pareça boa, no lado oeste da nuvem (Figura 5.9 a) a influência da advecção de umidade é grande e o critério baseado só na velocidade vertical não é suficiente (Carr e Millard, 1985), pelo menos a partir desse estágio de desenvolvimento. Nas regiões onde os processos advectivos de umidade são fortes e coincidem com movimento ascendente o critério funciona bem.

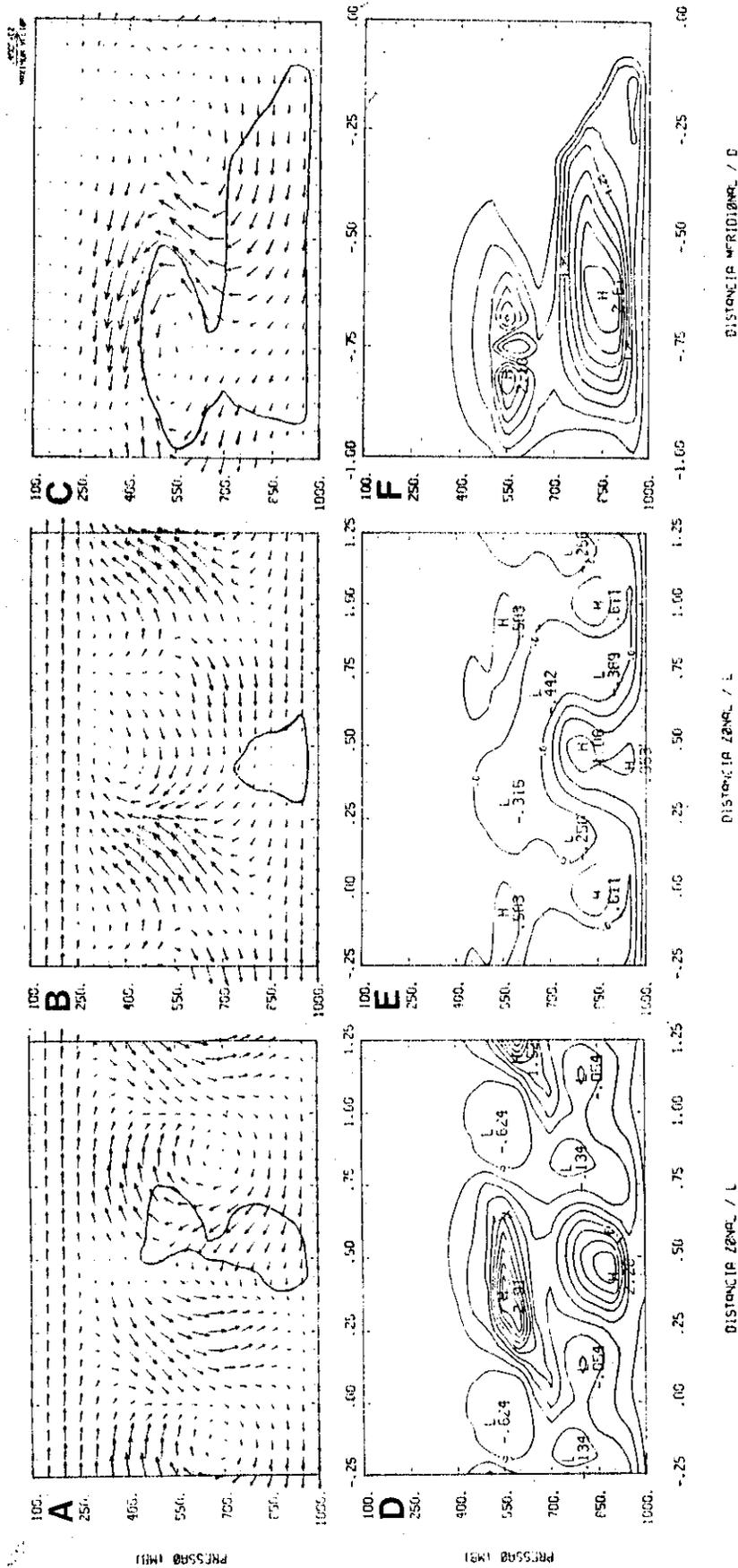


Fig. 5.9 - Seções verticais da circulação relativa zonal (a e b), da circulação meridional (c), com a delimitação da cobertura de nuvens, e da unidade relativa (d, e, f), correspondentes às seções da Figura 5.8. As isolinhas de unidade relativa variam de 0 a 2,7, com intervalo de 0,3.

CAPÍTULO 6

FORMAÇÃO DE FRENTES TÉRMICAS OCEÂNICAS E DE PERTURBAÇÕES DE MESOESCALA NO ATLÂNTICO SUL

Como citado na Introdução, nesse capítulo será analisado o mecanismo de formação das perturbações oceânicas de mesoescala (eixo da ordem de 100 a 200 km) na região de confluência das correntes das malvinas e do Brasil, e as associadas frentes térmicas oceânicas. Essas perturbações formam-se tanto na confluência próximo à costa (Legeckis and Gordon, 1982), como mostra a imagem de satélite dada na Figura 6.1 (região I em torno de 44°S, 53°W), e também mais oceano a dentro na região onde o escoamento oceânico é praticamente zonal (região II, em torno de 37°S, 41°W) para em seguida haver difluência das correntes (Roden, 1986).

Saltzman e Tang (1975b) mostraram que correntes baroclínicas oceânicas podem ser baroclinicamente instáveis e na evolução para amplitude finitas há a formação de meandros, frentes térmicas e anéis térmicos desprendidos. Ressaltaram a aplicação de seu estudo para a corrente do Golfo no Atlântico Norte. Bryden (1979), analisando o escoamento na Passagem de Drake no Atlântico Sul, verificou ser satisfeita a condição necessária para a instabilidade baroclínica nesse canal. Além disso, através de cálculos observacionais, encontrou nessa região fluxo de calor para o pólo sugerindo o ciclo clássico de conversão de energia de uma perturbação baroclinicamente instável ($\bar{E}_p \rightarrow E_p \rightarrow E_p$).

Nesse capítulo o objetivo é analisar o papel da instabilidade baroclínica na geração destas perturbações estudadas observacionalmente por Roden (1986) na região II, e o seu desenvolvimento para amplitude finita. Como

ressalta Roden (1986), e pode-se notar pela Figura 6.1, a região II é normalmente coberta por nebulosidade e torna-se difícil uma análise dessas perturbações através de imagens de satélite. Porém, durante a primavera austral de 1984, foram realizadas medidas especiais na região II que permitiram a Roden (1986) analisar a estrutura termohalina tridimensional das frentes subantárticas na área leste da retroflexão da corrente do Brasil. Esse estudo observacional dá o suporte necessário para a proposição do presente estudo.

6.1 - MUDANÇAS NO MODELO ATMOSFÉRICO PARA SUA APLICAÇÃO AO OCEANO

Saltzman e Tang (1975b) mostraram que as equações da vorticidade relativa e para a velocidade vertical, obtidas das equações de Boussinesq são adequadas para movimentos adiabáticos sem fricção no oceano, e são equivalentes às correspondentes para a atmosfera dadas no Capítulo 3, se as mudanças descritas a seguir forem introduzidas.

As coordenadas horizontais são mantidas, porém a vertical é trocada para z de modo que na superfície do oceano tem-se $z = 0$ e o limite inferior será $z = Z$, ou seja, z representa a profundidade do oceano. Portanto, o sentido de variação em z é o mesmo que em p , e nas derivadas em p das equações do Capítulo 3 basta trocar dp por dz . Com isso, para o movimento vertical no oceano (w) ser positivo quando se tem correntes ascendentes deve-se fazer

$$w = - \frac{Dz}{Dt} , \quad (6.1)$$

que é equivalente a trocar w por $-w$ nas equações do Capítulo 3, e as condições de contorno permanecem as mesmas ($w = 0$ em $z = 0$ e $z = Z$).

A equação de balanço (Equação 3.8) muda para

$$f_0 \Psi_z = \frac{p}{\rho_*}, \quad (6.2)$$

onde ρ_* é um valor constante de referência da densidade, e uma equação de estado bastante simplificada para o oceano, mas frequentemente adequada para um líquido puro onde os efeitos de compressibilidade são desprezíveis (Pedlosky, 1987), será usada:

$$\rho = \rho_* [1 - \gamma (T - T_*)], \quad (6.3)$$

onde T_* é um valor constante de referência da temperatura e γ é o coeficiente de expansão térmica do oceano ($2,5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, Saltzman and Tang, 1975b).

A hidrostática, representada pela Equação 3.9, toma-se para o oceano

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = - \frac{g}{f_0} \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right) = - \frac{g}{f_0} [1 - \gamma (T - T_*)], \quad (6.4)$$

de onde pode-se definir o perfil vertical de referência para Ψ ($\bar{\Psi}^*$) por

$$\frac{d \bar{\Psi}^*}{dz} = - \frac{g}{f_0} [1 - \gamma (\bar{T}^* - T_*)] \quad (6.5)$$

e a temperatura pode ser obtida de

$$T = \bar{T}^{(*)}(z) + \frac{f_0}{g \gamma} \frac{\partial}{\partial z} (\psi - \bar{\psi}^{(*)}) . \quad (6.6)$$

A definição da estabilidade estática σ (Equação 3.20) para o oceano deve mudar para

$$\sigma = \frac{g}{\rho_*} \frac{d \bar{\rho}^{(*)}}{dz} = - \gamma g \frac{d T^{(*)}}{dz} . \quad (6.7)$$

Com essas alterações pode-se aplicar o modelo descrito no Capítulo 3 para o oceano usando perfis observados de $\bar{u}^{(0)}$ e $\bar{T}^{(*)}$. Também são considerados para o oceano Λ_ξ , Λ_T e \dot{Q} nulos.

6.2 - ESTUDO LINEAR DA FORMAÇÃO DE PERTURBAÇÕES OCEÂNICAS DE MESO-ESCALA NA REGIÃO DE CONFLUÊNCIA DO ATLÂNTICO SUL

Utilizando perfis observados de temperatura, Roden (1986) calculou hidrostaticamente a altura dinâmica e geostroficamente o escoamento baroclínico, relativos a 4900 dbar (aproximadamente 4900 m), na região II. Para esse cálculo a equação de estado usada (EOS 80) é a dada por Gill (1982). Nessa equação a densidade é expressa em termos da temperatura e da salinidade. Então, o campo básico de escoamento aqui considerado $(\bar{u}^{(0)}(z)) =$ escoamento baroclínico zonal, calculado por Roden (1986) em 37°S e 41°W), possui os efeitos de compressibilidade e de salinidade que são desprezados na Equação 6.3, ou seja, é como se considerar esses efeitos de ordem zero. O perfil de referência de temperatura, $\bar{T}^{(*)}(z)$, e o de salinidade e de seu gradiente meridional, $\bar{S}^{(0)}$ e $\partial \bar{S}^{(0)} / \partial y$, são tomados como os observados por Roden (1986) em 37°S e 41°W. Tais campos encontram-se na Figura 6.2a e b. A estabilidade estática, obtida pela Equação 6.7, é suavizada

verticalmente com uma média de cinco pontos. No cálculo de σ não entra o efeito da salinidade, só no do escoamento zonal básico.

Com esse estado básico rodou-se o modelo linear descrito no Capítulo 3 com as modificações dadas na Seção 6.1. São consideradas aqui 18 camadas de 50 m, ou seja $Z = 900$ m. Essa profundidade é escolhida em função do perfil de referência de temperatura, pois abaixo de 900 m as variações de $\bar{T}^{(*)}$ são muito pequenas tornando a estabilidade estática, como definida pela Equação 6.7, em conjunto com a Equação 6.3, muito baixa. A curva de instabilidade ($k c_I$) e a velocidade de fase são dadas na Figura 6.2c. A onda mais instável tem uma escala de 250 km e taxa de crescimento de $5,4 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ (tempo de multiplicação-e de 21,4 dias). A velocidade de fase é de $11,1 \text{ cm s}^{-1}$ e a de grupo é de 13 cm s^{-1} . Esses parâmetros comparam muito bem com os observados, onde o eixo das perturbações é da ordem de 100 a 200 km, a velocidade de fase de 10 a 20 cm s^{-1} e o tempo de vida de algumas semanas (Roden, 1986). O ciclo de energia teórico é tal que $\bar{E}_p \rightarrow E_p \rightarrow E_C$, onde $C(\bar{E}_p, E_p) = 1,08 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$, $C(E_p, E_C) = 6,54 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$, $E_p = 0,394 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ e $E_C = 0,606 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, que representa o ciclo clássico de uma perturbação baroclínica em desenvolvimento.

Na figura 6.3 encontram-se as estruturas verticais da perturbação na função de corrente, na velocidade vertical e na temperatura, para uma perturbação máxima na velocidade meridional de 10 cm s^{-1} , valor esse razoável segundo Tabela 1 de Roden (1986). A função de corrente (Figura 6.3a) tem mínimo em torno de 550 m e máximos na superfície e no fundo e a velocidade vertical (Figura 6.3b) tem máximo em 450 m, sendo que tanto ψ como w inclinam-se para oeste em toda a profundidade. Pela fase de ψ espera-se um transporte de calor para o pólo máximo em

torno de 500 m de profundidade. A perturbação na temperatura (Figura 6.3c) tem uma estrutura vertical mais complexa, sendo que há um máximo em 500 m, um mínimo em 150 m e outro máximo na superfície. O aparente máximo no fundo surge devido à condição de contorno ($w = 0$ em $z = Z$). A fase é tal que na parte superior (de 0 a 150 m) inclina-se para leste, de 150 a 400 m para oeste, voltando a inclinar-se para leste até o fundo. A variação vertical da amplitude, coerente com a variação de fase, sugere uma certa separação nos regimes da perturbação na temperatura próxima à superfície e em profundidade. A diferença de fase entre a função de corrente e a temperatura está associada com o transporte de calor sensível para o pólo refletindo a conversão de energia potencial disponível do estado básico para energia potencial disponível da perturbação, desde que esteja entre 0° e 180° , e é máxima quando for 90° . Nota-se que em toda profundidade do domínio tal condição é satisfeita (Figuras 6.3a e c), sendo que em torno de 500 m de profundidade, a diferença de fase é cerca de 90° , mostrando que aí a conversão deve ser máxima. Quanto à diferença de fase entre a velocidade vertical e a temperatura (Figuras 6.3b e c), nota-se que em geral há ascendência de águas relativamente quentes e subsidência de águas relativamente frias, proporcionando a conversão de energia potencial disponível da perturbação em energia cinética da perturbação, pois a diferença de fase é sempre entre -90° e 90° . Quando essa diferença se anula a conversão de E_p para E_c é máxima e isso ocorre também em torno de 500 m de profundidade.



Fig. 6.1 - Imagem do satélite NOAA-5 do dia 02/04/78, 10:52 TMG, mostrando a formação de perturbações oceânicas de me soescala na região I.

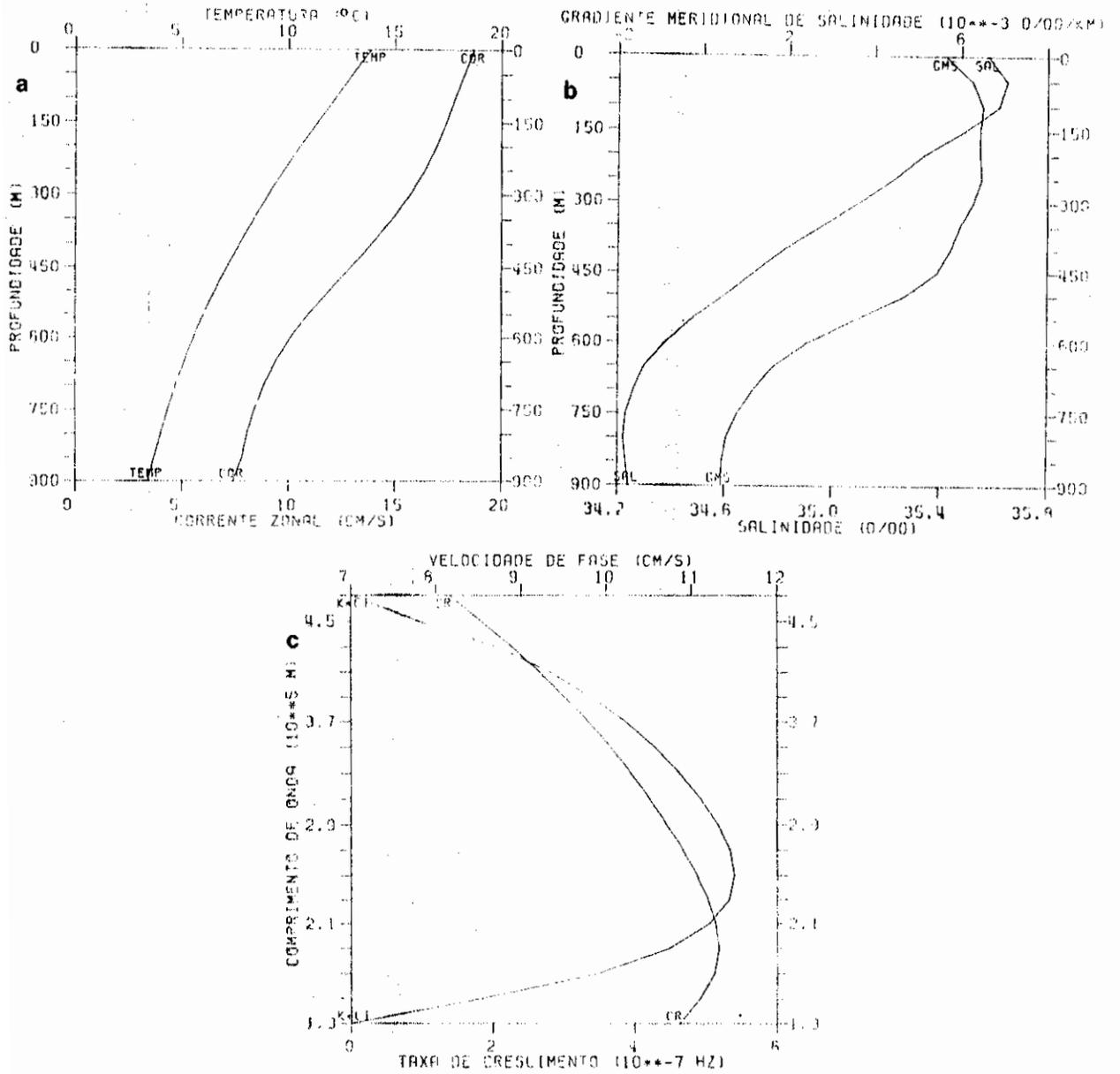


Fig. 6.2 - Estado básico para o oceano (a e b) em 37°S e 41°W, curva de instabilidade ($k\sigma_T$) e velocidade de fase das ondas instáveis (C_R).

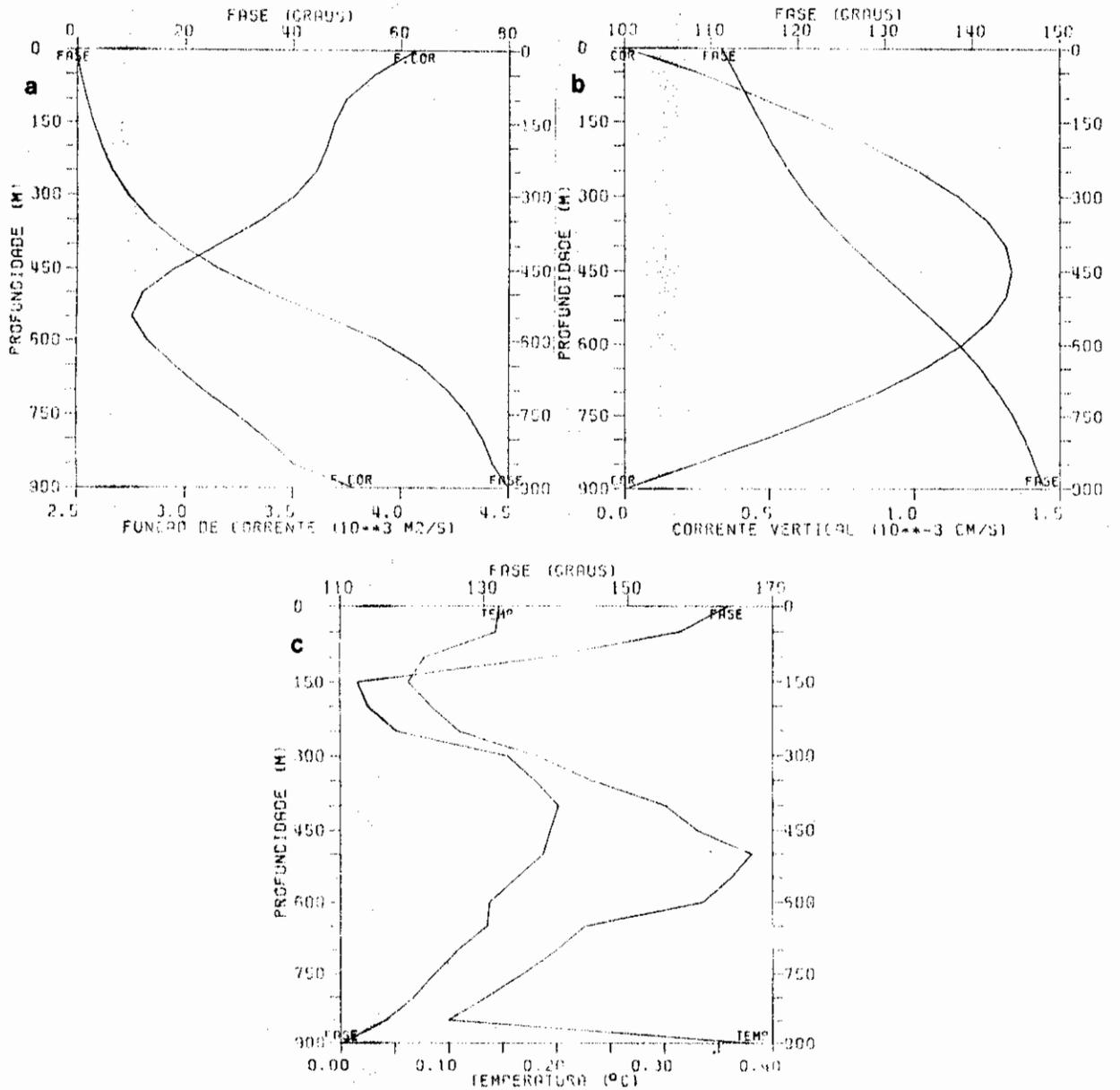


Fig. 6.3 - Estrutura vertical linear teórica das perturbações de mesoescala no oceano: a) função de corrente, b) velocidade vertical e c) temperatura.

Como a escala zonal de 250 km e a velocidade de fase de $11,1 \text{ cm s}^{-1}$ obtidas teoricamente são bastante semelhantes às observadas por Roden (1986), cerca de 200 a 400 km e $10 \text{ a } 20 \text{ cm s}^{-1}$, respectivamente, e a taxa de crescimento teórica correspondente a um tempo de multiplicação-e de 21,4 dias é coerente com o tempo de vida de várias semanas observado por Legeckis e Gordon (1982), parece ser a instabilidade baroclínica o mecanismo responsável pela geração das perturbações oceânicas de mesoescala que existem na região da confluência das correntes do Brasil e das Malvinas.

6.3 - EFEITOS SECUNDÁRIOS NA EVOLUÇÃO PARA AMPLITUDE FINITA DAS PERTURBAÇÕES DE MESOESCALA NO ATLÂNTICO SUL

Nesse item serão apresentadas seções horizontais nas profundidades de 50 m, representando as camadas superiores, e de 500 m, representando a região com maior inclinação vertical no campo de função de corrente (Figura 6.3a). São também apresentadas seções verticais em posições relevantes para a análise da estrutura tridimensional da onda.

6.3.1 - ANÁLISE EM 50 M DE PROFUNDIDADE

Na Figura 6.4 encontra-se o campo de temperatura e de escoamento na profundidade de 50 m após 20; 22,5 e 25 dias. Nota-se a formação de centros quentes no lado equatorial e centros frios no lado polar do escoamento principal. Os centros quentes mostram tendência de deslocarem-se para o pólo, enquanto que os outros frios deslocam-se para o equador, ocasionando uma concentração de isotermas em forma de S invertido (Figuras 6.4a, b e c). Essa frente térmica oceânica tem um gradiente zonal da ordem de $1^{\circ}\text{C}/80 \text{ km}$. O escoamento após 25 dias (Figura 6.4f) mostra um centro de circulação ciclônica fechada no setor

frio, tendendo a formar um anel frio desprendido. Se o escoamento e o campo térmico ficam em fase não há mais inclinação para oeste das linhas da crista e do cavado com a altura e atinge-se o estágio de saturação. Os anéis oceânicos observados possuem linhas de escoamento e isotermas concêntricas, sendo provavelmente o análogo da oclusão das ondas atmosféricas (Saltzman e Tang, 1982). No caso apresentado na Figura 6.4, não se atinge o estágio de saturação, da mesma forma que no caso atmosférico apresentado no Capítulo 5, devido a não realimentação do estado básico térmico (a estabilidade estática é mantida constante no tempo). A circulação anticiclônica no setor quente não chega a fechar até 25 dias (Figura 6.4f), e apresenta uma estrutura semelhante à formada perturbação de mesoescala mostrada na Figura 6.1. Essa circulação também é defasada com a temperatura. O escoamento mudando alternadamente de norte para sul e vice-versa mostra características semelhantes a meandros observados na corrente do Golfo (Saltzman e Tang, 1982). As configurações dos campos de temperatura e do escoamento em 50 m de profundidade após 25 dias (Figuras 6.4c e f), apresentam semelhanças razoáveis com as observações de Roden (1986) dadas, respectivamente, nas suas Figuras 8 e 13. Quanto à simulação com um modelo de duas camadas de Saltzman e Tang (1982), a diferença principal com relação à Figura 8 deles é que os campos apresentados na Figura 6.4 são obtidos simultaneamente no nível de 50 m de profundidade, enquanto que Saltzman e Tang (1982) extrapolam linearmente para a superfície a função de corrente nas profundidades de 750 e 250 m e o campo térmico é para a profundidade de 500 m.

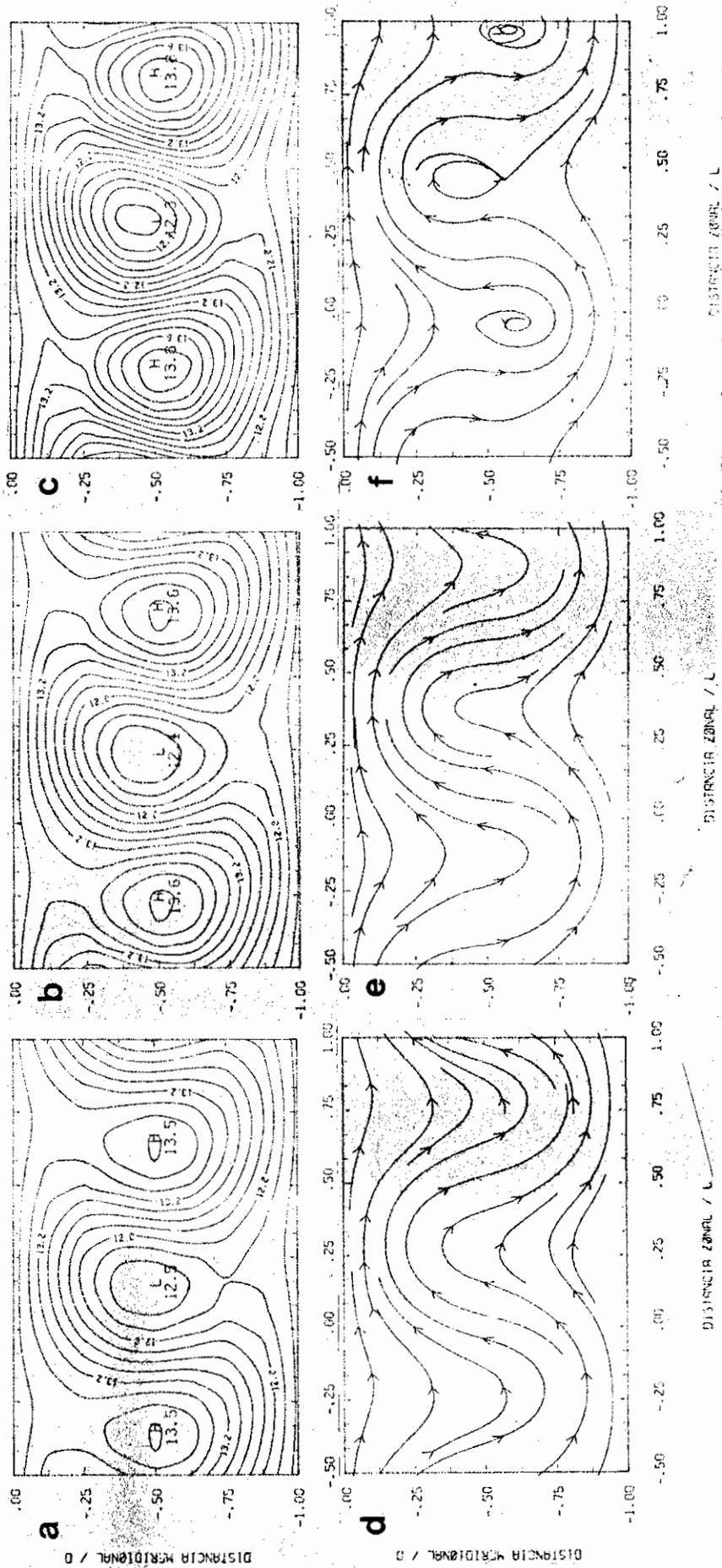


Fig. 6.4 - Campos de temperatura (a, b, c) e do escoamento (d, e e f), na profundidade de 50 m e após 20 (a, d); 22,5 (b, e) e 25 dias (c, f). As isolinhas em a, b e c variam de 12 a 14°C com intervalo de 0,1°C.

Na Figura 6.5 encontram-se os campos para a profundidade de 50 m, da função de corrente, da vorticidade, da velocidade vertical após 25 dias e da salinidade (prática) após 20 dias. A função de corrente (Figura 6.5a) mostra os dois centros de máximo e de mínimo fechados, sendo que as isolinhas correspondem bem com o escoamento da Figura 6.4f, exceto no centro de mínimo, que corresponde ao centro de circulação anticiclônica. Nesse centro, a circulação não é fechada, mostrando que aí os efeitos não-geostróficos e não-lineares são mais fortes. Pela Figura 6.5b verifica-se a existência de quatro centros de vorticidade, que podem ser associadas com a configuração do escoamento dado na Figura 6.4f. O centro de vorticidade associado ao centro de circulação fechada ciclônico é mais intenso que o centro de vorticidade associado ao centro de circulação anticiclônicos evidenciando a influência das não-linearidades. Não se nota nas Figuras 6.4f, 6.5a e b inclinações horizontais detectáveis visualmente de fase, mostrando que o transporte de momentum zonal local é desprezível nesse horário. No caso observado por Roden (1986), nota-se a existência de tais inclinações no escoamento, mostrando que o modelo não consegue simular bem o transporte horizontal de momentum no estágio maduro, aliás como era esperado, principalmente devido a não inclusão do cisalhamento horizontal da corrente básica. O movimento vertical (Figura 6.5c) apresenta efeitos não-lineares intensos, evidenciado pela estrutura complexa, com muitos centros de escala menor. Nota-se que o movimento ascendente de águas quentes é um pouco mais intenso que o movimento descendente de águas frias (veja também Figura 6.4c), sugerindo a conversão de energia potencial para cinética.

Para se analisar a Figura 6.5d é necessário antes tecer alguns comentários sobre as aproximações feitas na determinação do campo de salinidade. Foi suposto que a

salinidade possa ser considerada um constituinte passivo e inativo não havendo nem fontes nem sumidouros. Embora essa suposição não tenha suporte observacional, está coerente com a equação de estado (Equação 6.3) usada no modelo. Então, a configuração da salinidade aqui apresentada é aquela devido à redistribuição do campo básico pelas ondas baroclínicas desenvolvidas no modelo, como discutido no Capítulo 3. A razoabilidade dessa aproximação será confirmada a posteriori, através da comparação da configuração da salinidade gerada pelo modelo com as observações de Roden (1986). Como campo básico foi usado o perfil observado por Roden (1986) em torno de (41°W , 37°S), dado na Figura 6.2b. Na Figura 6.5d nota-se a concentração das isolinhas de salinidade, acompanhando o campo de temperatura (Figura 6.4a), porém, os máximos de salinidade estão mais ao sul e os mínimos de salinidade mais ao norte que os centros quentes e frios, respectivamente. Isso significa que o centro quente é mais salino que o centro frio, como é observado na região da confluência das correntes do Brasil, quente e mais salina, e das Malvinas, fria e menos salina (Roden, 1986). Além disso, a forma de pera dos centros fechados de salinidade correspondem bem com a forma da perturbação observada na Figura 6.1. A concentração das isolinhas em forma de S invertido também corresponde bem com os campos observados por Roden (1986, Figura 12).

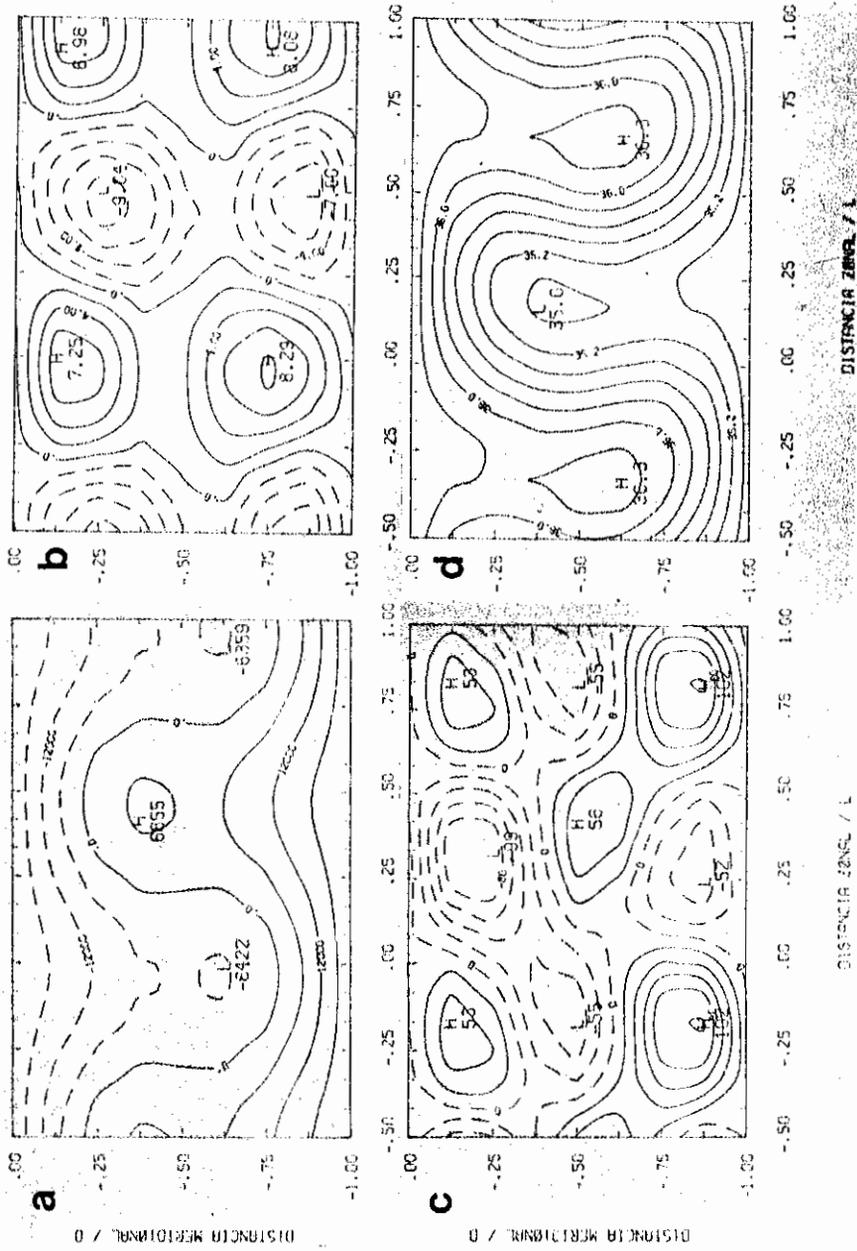


Fig. 6.5 - Campos, em $z=50$ m, da função de corrente (a, isolinhas de -18000 a 18000, intervalo de 6000 $m^2 s^{-1}$); da vorticidade, multiplicada por 10^6 (b, isolinhas de -8 a 8, intervalo de 2 s^{-1}); da velocidade vertical, multiplicada por 10^5 (c, isolinhas de -80 a 100, intervalo de 20 $cm s^{-1}$), após 25 dias; e da salinidade prática (d, isolinhas de 35 a 36,2, intervalo de 0,2 0/00), após 20 dias.

6.3.2 - ANÁLISE EM 500 M DE PROFUNDIDADE

A Figura 6.6 é a correspondente à Figura 6.4 para a profundidade de 500 m. A configuração do campo de temperatura (Figuras 6.6a, b, c) mostra o surgimento de centros frios duplos fechados após 25 dias, com estruturas mais alongadas no sentido zonal das regiões com águas quentes e frias, dando uma configuração mais zonal à frente térmica, em comparação com a profundidade de 50 m, porém a frente térmica é mais intensa (cerca de $1^{\circ}\text{C}/25\text{ km}$). Esse aumento do gradiente térmico até essas profundidades e o surgimento desses centros quentes do lado polar mais alongados estão de acordo com as observações de Roden (1986), Figuras 12 e 13), porém a quebra com a profundidade da estrutura em forma de S da concentração de isotermas entre as águas quentes e frias não é observada. Quanto ao escoamento (Figura 6.6d, e, f) não mostra centros fechados, apresentando uma circulação ondulatória com efeitos não-lineares fracos, porém nota-se inclinações horizontais na fase. A ausência de centros fechados mostra que a circulação tipo "anel" são confinadas na porção superior do oceano. Esse resultado evidencia a importância da grande resolução vertical em comparação com o modelo de duas camadas de Saltzman e Tang (1975b, 1982) na determinação da estrutura vertical da perturbação.

A Figura 6.7 mostra os campos, na profundidade de 500 m, da função de corrente, da vorticidade após 25 dias e da salinidade (prática) após 20 dias. Nota-se que a função de corrente (Figura 6.7a) representa bem o escoamento, sendo que os efeitos não-lineares aparecem através do surgimento de inclinações meridionais, também não há formação de centros fechados. Essas inclinações meridionais são bastante claras no campo de vorticidade (Figura 6.7b), que dão uma inclinação NO-SE no lado equatorial e SO-NE no lado polar. Essa configuração

implica em convergência de transporte horizontal de momentum local no centro do canal. Essas inclinações, embora menos intensas, estão na direção correta quando comparadas com as observações de Roden (1986, Figuras 8 e 9). O movimento vertical em 500 m de profundidade, dado na Figura 6.7c, apresenta características semelhantes ao de 50 m mostrando circulação térmica direta, porém é cerca de 8 vezes mais intenso. Apesar disso, comparando com os resultados de Saltzman e Tang (1975b) para a corrente do Golfo, o movimento vertical aqui é cerca de cinco vezes menor. Isso pode ser explicado devido ao cisalhamento vertical do vento zonal do estado básico usado por Saltzman e Tang (1975b) ser cerca de três vezes maior. O campo de salinidade em 500 m (Figura 6.7d), como em 50 m, tem características bem semelhantes ao campo de temperatura, apresentando o lado polar mais salino que o lado equatorial na região do centro do canal. Esse dipolo de centro quente mais salino a sudoeste de um centro frio menos salino a nordeste, relativamente, com uma concentração de isotermas e isohalinas mais intensa entre eles, também é encontrado nas observações de Roden (1986, Figura 13).

6.3.3 - SEÇÕES ZONAIS

Com a finalidade de se analisar a variação da estrutura vertical zonal com a latitude são apresentadas nas Figuras 6.8, 6.9, 6.10, e 6.11 seções zonais em $Y = -0,25$; $-0,50$ e $-0,75$, após 25 dias para a temperatura, vorticidade, circulação vertical e após 20 dias para a salinidade.

Nota-se que a temperatura (Figuras 6.8a, b e c) tem em geral inclinação para leste, com amplitude e concentração de isotermas mais intensas no centro do canal, entre 300 e 600 m de profundidade. Essa característica parece corresponder bem quando se compara com a Figura 19

de Roden (1986), a qual mostra que a região com maior concentração de isotermas fica, em geral, entre 200 e 700 m, porém com gradientes muito mais intensos. As amplitudes maiores no centro do canal e interior do oceano evidenciam a maior influência não-linear nessa região. Esse fato também sugere, como discutido na Seção 6.2, uma certa dissociação entre os regimes próximo à superfície e no interior do oceano, para a temperatura. Ou seja, há a formação de anéis térmicos na superfície e de frentes térmicas no interior do oceano. Esses anéis térmicos estão também associados à frentes termohalinas, porém a concentração das isolinhas próximo à superfície ocorre na horizontal no modelo e não também na vertical (compare as Figuras 6.8a, b e c com a Figura 6.4), como no interior do oceano.

A estrutura vertical zonal da vorticidade (Figuras 6.9a, b e c) mostram inclinações para oeste, mais intensa no interior do canal tanto à norte como à sul. Porém, no centro do canal (Figura 6.9b), verificou-se inclinação para oeste só na porção superior, sendo que na parte inferior a inclinação é para leste, sugerindo também regimes diferentes no centro e nas laterais do canal. As Figuras 6.9b e c sugerem também que o vórtice ciclônico próximo à superfície não é muito profundo, pelo menos nessa região.

Quanto à circulação vertical zonal (Figuras 6.10a, b e c) tem variação meridional bastante complexa, apresentando situações completamente diferentes nas seções apresentadas. É bom esclarecer que para a obtenção das linhas de escoamento na vertical, a velocidade vertical foi normalizada de modo que seu máximo valor ficasse igual ao máximo do vento zonal na seção considerada. Isso se faz necessário para realçar as circulações verticais a fim de uma melhor visualização. Nota-se que à norte e à sul as

estruturas verticais mais complexas são confinadas abaixo de 450 m de profundidade, enquanto que no centro do canal tem-se uma célula profunda (da superfície até cerca de 700 m) com circulação térmica direta (veja Figura 6.8b), em geral, e com centro em torno de 350 m de profundidade. Também à norte e à sul (Figuras 6.10 a e c em conexão com as Figuras 6.8a e c), embora não haja circulações fechadas, nota-se em geral águas relativamente quentes subindo e águas relativamente frias descendo. Portanto, na média zonal, há conversão de energia potencial em cinética, mostrando o caráter baroclínico da perturbação.

As estruturas verticais zonais da salinidade prática (Figuras 6.11a, b e c) mostram que em geral a salinidade decresce com a profundidade até cerca de 600 m de profundidade no lado equatorial (Figura 6.11a), com os centros de salinidade maior na parte superior correspondendo à águas relativamente quentes e o de salinidade menor, posicionando-se entre os centros quentes e na parte inferior, correspondendo à águas relativamente frias (veja também a Figura 6.8a). Essa estrutura vertical da salinidade é similar à observada por Roden (1986, Figura 19), porém com gradientes muito mais intensos. No centro do canal (Figura 6.11b) nota-se a formação de centros de salinidade alta em torno de 550 m de profundidade, correspondendo a regiões relativamente quentes (Figura 6.8b) acompanhado de centros de salinidade baixas, associados a regiões relativamente frias. Essa estrutura é confinada entre 400 e 750 m de profundidade, sendo a parte superior semelhante à estrutura do lado equatorial, já discutido, e do lado polar (Figura 6.10c). O lado polar, em geral, é bastante semelhante ao lado equatorial, com exceção de centros secundários mais salinos em torno de 550 m de profundidade. Novamente esses campos de salinidade estão em fase com a temperatura (Figura 6.8c).

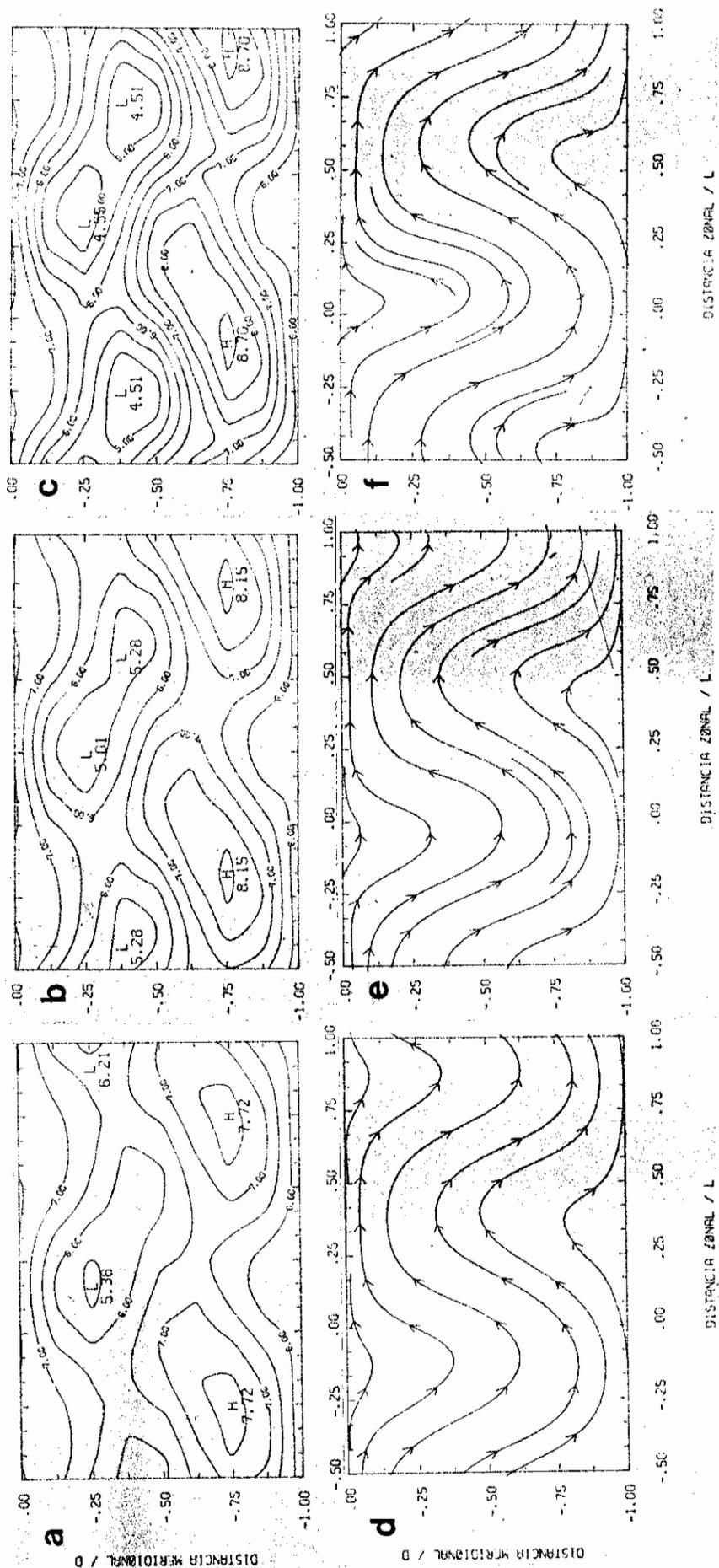


Fig. 6.6 - Campos de temperatura (a, b, c) e do escoamento (d, e, f), na profundidade de 500 m, após 20 (a, d); 22,5 (b, e) e 25 dias (c, f). As isolinhas em a, b e c variam de 5 a 8°C com intervalo de 0,5°C.

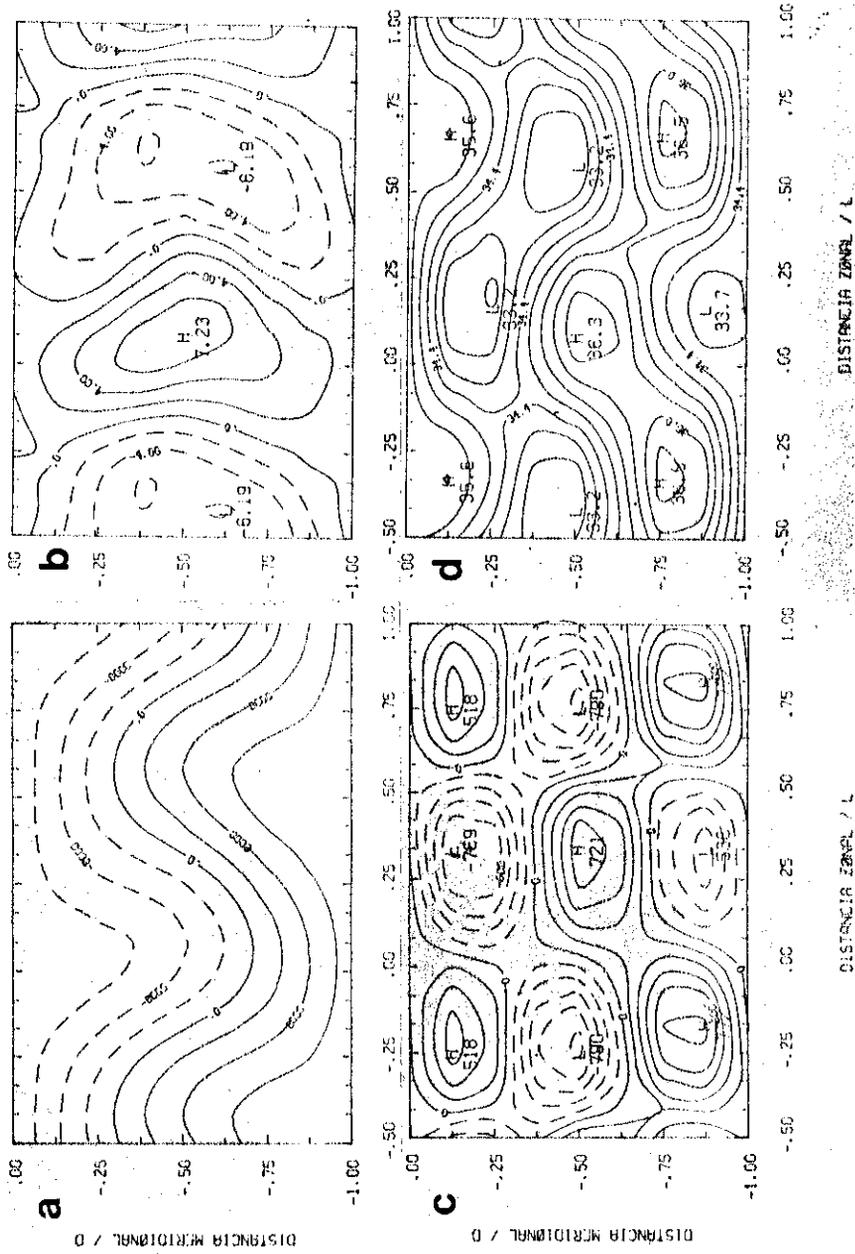


Fig. 6.7 - Campos em $z=500$ m, da função de corrente (a), isolinhas de -12000 a 12000 , intervalo de 4000 m^2 s^{-1} ; da vorticidade, multiplicada por 10^6 (b), isolinhas de -6 a 6 , intervalo de 2 s^{-1} ; da velocidade vertical, multiplicada por 10^5 (c), isolinhas de -750 a 750 , intervalo de 150 cm s^{-1} , após 25 dias; e da salinidade prática (d), isohalinas de 34 a $36,4$; intervalo de $0,4$ $0/00$, após 20 dias.

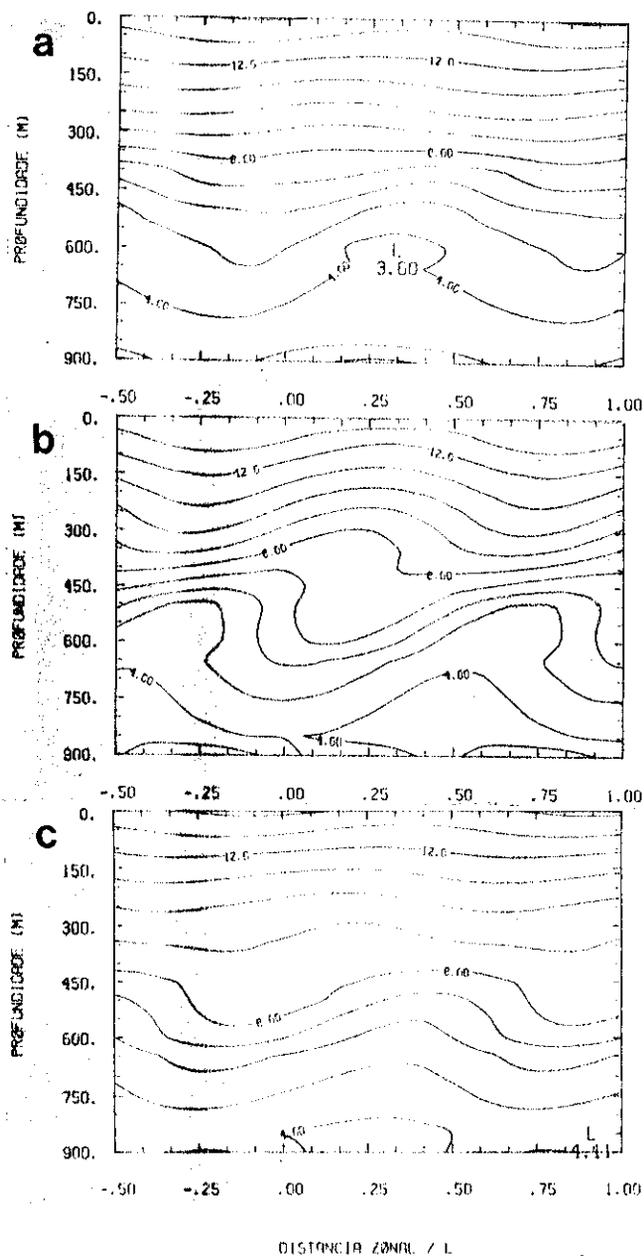


Fig. 6.8 - Seções verticais zonais da temperatura, após 25 dias, em $Y=-0,25$ (a) ; $Y=-0,5$ (b) e $Y=-0,75$ (c). As isolinhas variam de 2 a 14°C com intervalo de 1°C.

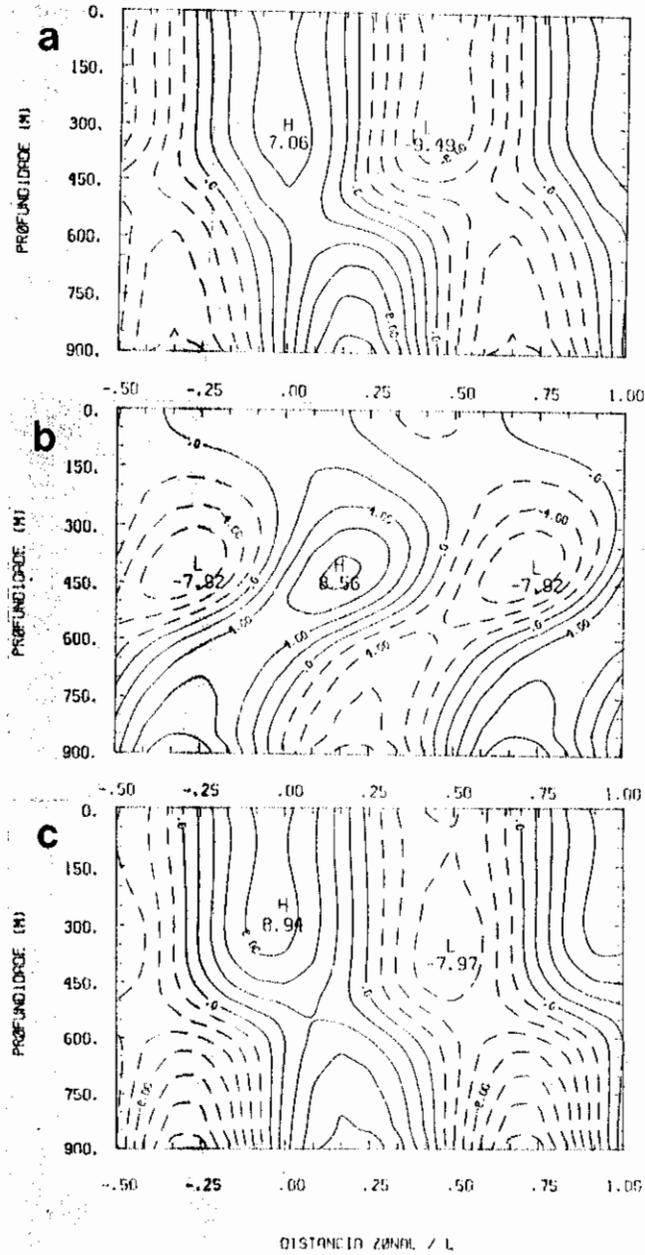


Fig. 6.9 - Seções verticais zonais da vorticidade, multiplicada por 10^6 , após 25 dias em $Y=-0,25$ (a); $Y=-0,5$ (b) e $Y=-0,75$ (c). As isolinhas variam de -14 a 12 s^{-1} , com intervalo de 2 s^{-1} .

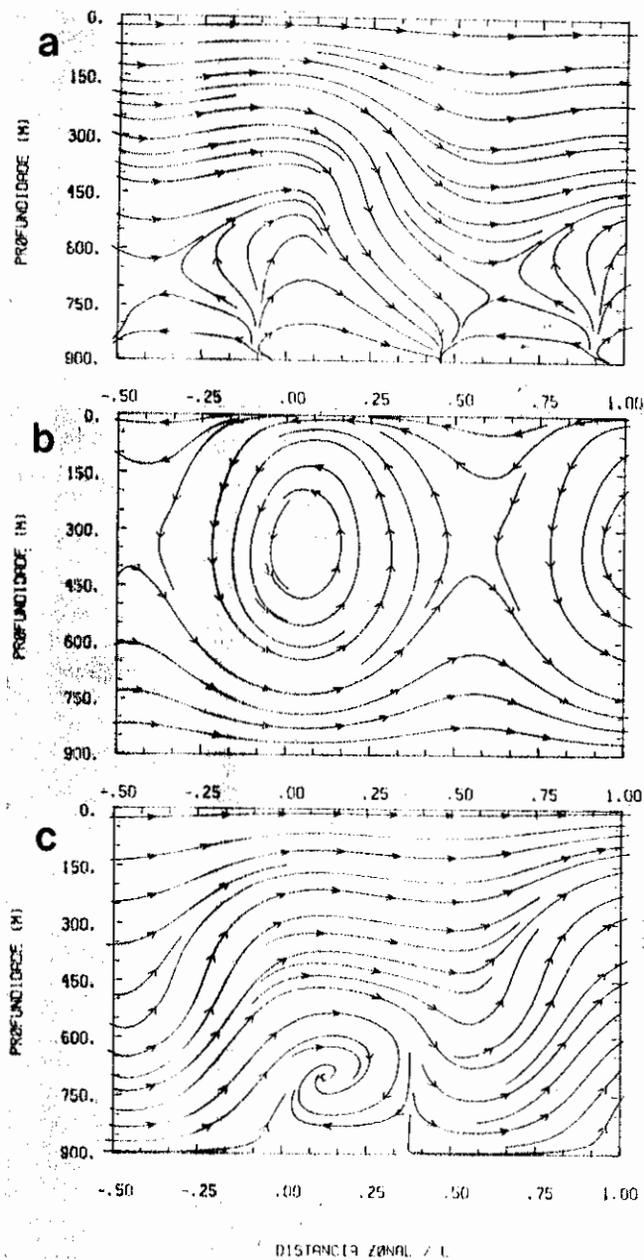


Fig. 6.10 - Seções verticais zonais do escoamento, após 25 dias, em $Y=-0,25$ (a); $Y=-0,5$ (b) e $Y=-0,75$ (c).

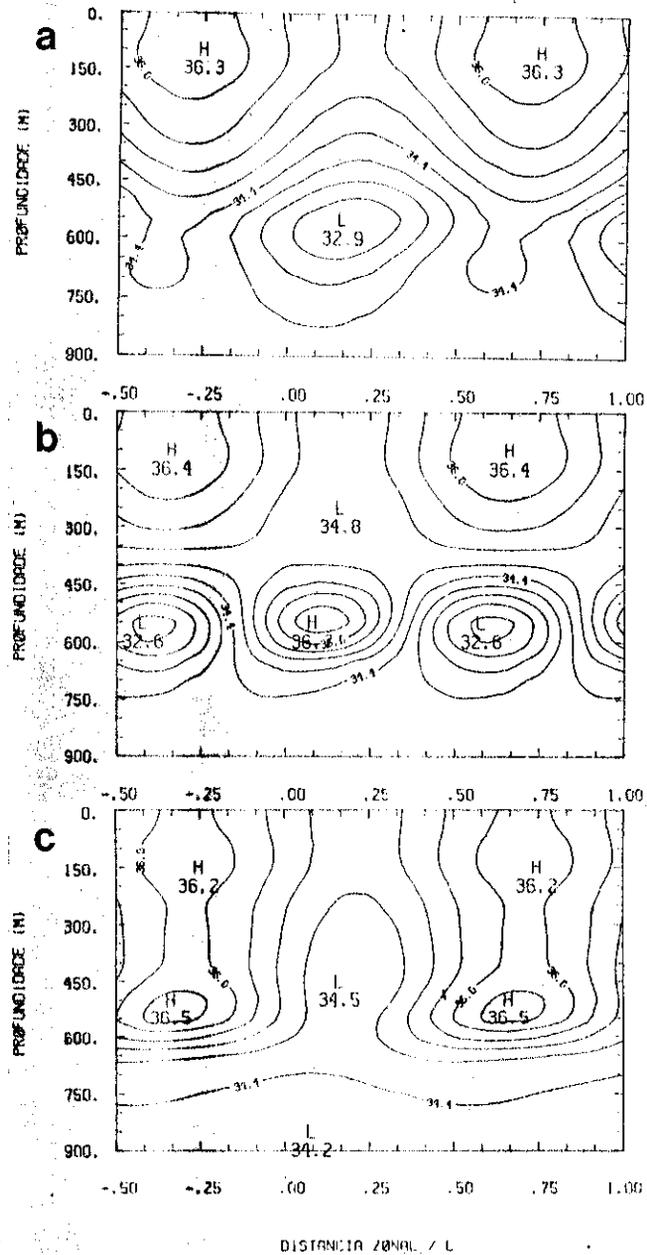


Fig. 6.11 - Seções verticais zonais da salinidade prática, após 20 dias, em $Y = -0,25$ (a); $Y = -0,5$ (b) e $Y = -0,75$ (c). As isolinhas variam de 32,4 a 36,4 ‰, com intervalo de 0,4 ‰.

6.3.4 - SEÇÕES MERIDIONAIS

Nesse item são apresentadas seções meridionais de temperatura, vorticidade e escoamento, após 25 dias e salinidade após 20 dias ao longo da frente térmica em $X=0,583$, dada na Figura 6.4c.

O campo de temperatura (Figura 6.12a) mostra uma concentração vertical de isotermas maior em torno de 500 m de profundidade e do centro do canal para o lado equatorial. Essa concentração tem uma inclinação vertical tal que o lado equatorial é mais raso que o lado polar. Essa característica também é notada nas observações de Roden (1986, Figura 18) em 40°W , porém em 42°W a inclinação é ao contrário e também tem gradientes muito mais intensos que o simulado. O campo de vorticidade (Figura 6.12b) apresenta em quase toda seção valores negativos, sendo que o centro de vorticidade ciclônica em torno de $Y=-0,25$ corresponde à estrutura vertical da circulação fechada dada na Figura 6.4f. A principal característica do escoamento norte-sul ao longo da frente térmica na superfície (Figura 6.12c) é uma circulação térmica indireta no centro do canal em torno de 450 m de profundidade. A seção meridional de salinidade (Figura 6.12d), novamente em fase com a temperatura (veja Figura 6.12a), apresenta concentrações maiores de isohalinas entre 300 m e 650 m de profundidade, alternando centros mais salinos e menos salinos. A estrutura vertical meridional da salinidade concorda razoavelmente com as observações de Roden (1986, Figura 18), porém não apresentam um centro fechado mais salino.

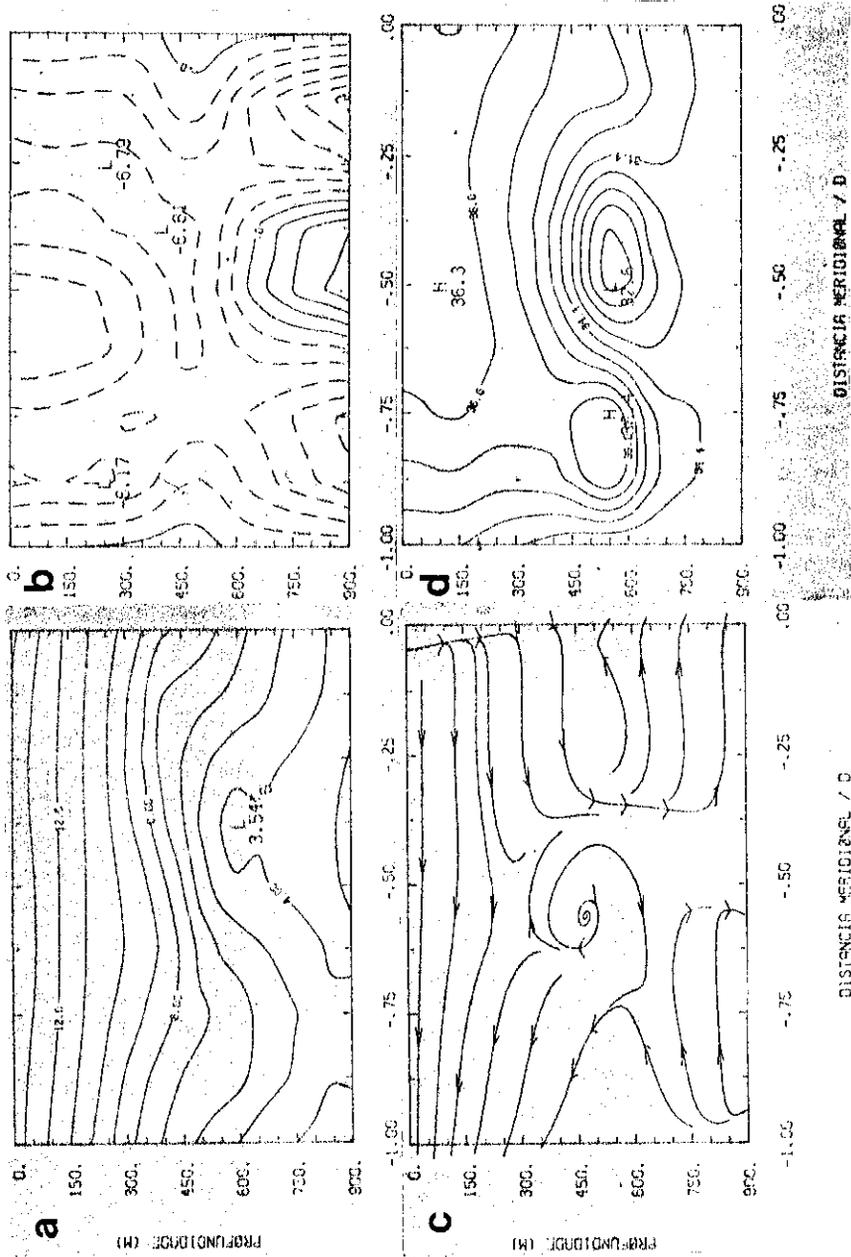


Fig. 6.12. - Estruturas verticais meridionais, em $X=0,583$; da temperatura (a, isolinhas de 3 a 14, intervalo de 1°C); da vorticidade, multiplicada por 10^6 (b, isolinhas de -12 a 6, intervalo de 2 s^{-1}); do escoamento (c), após 25 dias; e da salinidade prática (d, isolinhas de 32,8 a 36, intervalo de 0,4 0/00), após 20 dias.



CAPÍTULO 7

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Com a finalidade de se estudar os estágios incipiente e de evolução para amplitude finita de algumas perturbações baroclínicas na atmosfera e no oceano, foram desenvolvidos dois modelos: um linear quase-geostrófico e o outro não-linear de balanço. Nesses modelos a estrutura horizontal e a dependência no tempo são obtidas analiticamente, enquanto que a estrutura vertical é obtida por diferenças finitas. Isto permite a utilização de perfis básicos observados de vento (corrente no caso oceânico) e de temperatura. No caso atmosférico é também parametrizado o efeito da liberação de calor latente com uma formulação nova do tipo "wave-CISK", proposta por Mak (1982), que proporciona uma seleção da onda mais instável. Da mesma forma que no estado básico, pode-se usar perfis verticais de aquecimento bastante realistas, desde que na vertical são usadas diferenças finitas. Além disso, ainda no caso atmosférico, são também permitidas nos modelos as inclusões dos efeitos de atrito do tipo Rayleigh e de resfriamento do tipo newtoriano, com coeficientes variáveis na vertical. No caso oceânico, basta basicamente mudar a definição da estabilidade estática e a equação de estado e os mesmos modelos podem ser usados, porém não são considerados os efeitos dissipativos e nem, evidentemente, o da liberação de calor latente.

A aplicação do modelo não-linear é feita de modo que a solução linear dada pela onda mais instável é considerada de primeira ordem e os efeitos não-lineares e não-geostróficos são de ordem superior. Desse modo as não-linearidades são originadas de uma única onda. O campo total é então obtido através da soma das várias ordens consideradas, sendo o estado básico tomado como ordem zero.

No Capítulo 2, são estudadas as perturbações atmosféricas de escala intermediária que se formam no Pacífico Norte (Mullen, 1979) e as que se formam sobre a América do Sul (Bonatti and Rao, 1987), e que tem associadas nuvens com forma de vírgula (invertida no HS), sob o ponto de vista linear e incluindo o efeito da liberação de calor latente. É desenvolvido um modelo linear quase-geostrófico, sem variação meridional, com a parametrização de Mak (1982) da liberação de calor latente adaptada para o plano-beta. É também analisada a discretização vertical, concluindo-se que cerca de 20 camadas reproduzem bem os resultados analíticos de Mak (1982) no plano f. Usando estados básicos observados e perfis verticais de aquecimento realistas, as escalas horizontais e de tempo, as velocidades de fase e as estruturas verticais das perturbações citadas acima são bem reproduzidas pelo modelo linear, no estágio de geração. Isso sugere a conclusão de que a instabilidade baroclínica úmida deve ser o mecanismo responsável pela geração desses distúrbios de escala intermediária.

No Capítulo 3, é desenvolvido o modelo não-linear de balanço, incluindo na parte linear uma variação meridional senoidal. Isto implica que a fase não se propaga linearmente na direção meridional, porém há propagação de energia. O estado básico é tomado como de ordem zero, a perturbação linear quase-geostrófica mais instável é de primeira ordem, os efeitos não-lineares e não geostróficos devidos à onda mais instável são de segunda ordem, enquanto que, a divergência devido aos campos de movimento de segunda ordem, é considerada de terceira ordem, fechando as equações do modelo. O modelo segue basicamente o desenvolvimento de Saltzman e Tang (1972, 1975a), porém inclui os efeitos de liberação de calor latente e de dissipação, além de ser multinível na vertical. Além disso,

conforme Saltzman e Tang (1985), é também empregada uma equação para constituintes considerados passivos, que é essencialmente uma equação de conservação da propriedade em questão.

No Capítulo 4, emprega-se o modelo não-linear para o estudo da formação de frentes atmosféricas, utilizando como estado básico perfis de vento, de temperatura e de razão de mistura observados em latitudes médias do HN (Oort e Rasmusson, 1971). Partindo-se da solução linear mais instável inviscida e seca, segue-se para a evolução para amplitude finita não-linear, considerando-se então a dissipação (atrito de Rayleigh e resfriamento newtoniano) e a liberação de calor latente, como proposta por Mak (1982).

O modelo mostrou-se capaz de reproduzir as principais características observadas nos sistemas frontais tais como a formação em baixos níveis de sistemas com forte circulação ciclônica que se deslocam para leste e para o pólo e de sistemas com circulação anticiclônica difusa, deslocando-se para leste e para o equador. Obteve-se também, o desenvolvimento de baixas desprendidas nos altos níveis deslocando-se para o equador e para leste, com uma consequente divisão na corrente de jato. O efeito da liberação de calor latente mostrou-se muito importante no surgimento dessas estruturas em altos níveis, principalmente aquela devido à perturbação de segunda ordem na velocidade vertical. As zonas frontais obtidas foram mais intensas no nível de 950 mb, sendo que adquirem uma forma de S, que separa as massas de ar frio, que se deslocam para o equador, das massas de ar quente, que se deslocam para o pólo. As estruturas são bem melhor identificadas quando se analisa os campos de temperatura potencial equivalente. Nota-se também, o desenvolvimento de inclinações horizontais nos cavados e cristas de modo que

em geral há convergência no transporte de momentum em latitudes médias, principalmente em altos níveis. Essas inclinações são bastante intensificadas com a inclusão da liberação de calor latente. Os cavados e cristas inclinam-se sempre para oeste e, como não há realimentação para o estado básico, não chegam ao estágio barotrópico equivalente (oclusão). A inclusão da umidade ou da dissipação, em geral, provocam um aumento dos efeitos não-lineares, sendo o da dissipação mais importante em baixos níveis.

Além desses aspectos gerais, ressalta-se outros relevantes descritos a seguir. Pode-se destacar na forma de S da zona frontal uma frente quente que torna-se melhor identificada quando se inclui a perturbação de terceira ordem na temperatura, que surge através da divergência devido à perturbação de segunda ordem na temperatura.

A inclusão da dissipação tem um efeito muito forte na temperatura média zonal de primeira ordem, causando o aparecimento no campo total de uma região onde há concentração de isentropas, mais intensa em baixos níveis e alargando-se com a altura, descrita por Sanders (1955). Ainda com relação à média zonal, notou-se que o modelo é capaz de reproduzir localmente uma circulação meridional média termicamente indireta, que Phillips (1954) interpretou como sendo equivalente à célula de Ferrel.

Como foram consideradas 18 camadas na vertical, foi possível analisar as estruturas verticais dos campos, as quais mostraram bastante coerência com as observações disponíveis e com outras simulações, como citado no Capítulo 4.

Outro aspecto interessante é a análise da razão de mistura, considerada conservada, e da umidade relativa correspondente. Com essas variáveis e mais a velocidade tridimensional foi possível inferir a cobertura de nuvens associada a esses campos, de acordo com uma formulação bem simples descrita no Capítulo 3. A estrutura horizontal, com uma região com cobertura mais ampla no lado polar (cabeça) e outra menos extensa em forma de cauda no lado equatorial, fica bem definida quando se inclui a liberação de calor latente. A estrutura vertical, com dois tipos de nebulosidade sendo uma essencialmente convectiva em baixos níveis e outra mais advectiva em altos níveis (bigorna), é também relativamente bem reproduzida.

Em geral, o aumento do número de camadas (18) em relação aos trabalhos de Saltzman e Tang (1972, 1974, 1975a, 1985), permitindo a utilização de estados básicos mais próximos aos observados bem como uma melhor definição da estrutura vertical dos campos simulados. Também a inclusão de outros processos físicos como a liberação de calor latente e a dissipação, proporcionaram resultados mais realistas, com uma melhor identificação causa-efeito.

Para se estudar a evolução para amplitude finita das perturbações atmosféricas de escala intermediária, no Capítulo 5 é usado o modelo não-linear para o caso da vírgula invertida sobre a América do Sul. É surpreendente como apenas com a rede convencional de sondagens e balões piloto, que funcionou durante abril de 1979 na América do Sul (Bjorheim et alli, 1982), foi possível captar características bastante importantes desses sistemas de escala entre 1000 e 2000 km, através das análises do NMC. As características observadas mais relevantes são o confinamento na vertical até cerca de 700 mb e o deslocamento relativo de línguas de ar quente e

úmido para o pólo e de ar frio e seco para o equador, formando uma onda de escala intermediária nos campos de isotermas, acompanhado de vento relativo ao deslocamento da onda na direção polar, na região de concentração de isotermas, com curvatura anticiclônica no lado leste e equatorial e ciclônica no lado oeste e polar. Do ponto de vista de previsão, tais estruturas parecem começar em 850 mb em uma região relativamente quente no setor frio, onde há convergência de umidade. Esses aspectos observados são bem reproduzidos pelo modelo não-linear após cerca de 2 dias, inclusive as estruturas dos campos de vorticidade e de divergência. Muito interessante de se destacar é a forma de vírgula invertida da nebulosidade obtida através do campo de umidade e de movimento vertical no nível de 800 mb. Também a estrutura norte-sul da nebulosidade do modelo corresponde bem com a observada, com o lado polar (cabeça da nuvem) com convecção mais profunda e o lado equatorial (cauda) mais raso (Reed and Blier, 1986a). Portanto, esse modelo não-linear de balanço, com liberação de calor latente, consegue simular as principais características observadas desses sistemas baroclínicos de escala intermediária, com nuvem na forma de vírgula, e que ocorrem sobre a América do Sul.

O estudo observacional da formação de perturbações oceânicas de mesoescala ao longo da zona de confluência das correntes do Brasil e das Malvinas no Atlântico Sul efetuado por Roden (1986), possibilitou a sua análise do ponto de vista teórico feita no Capítulo 6. Do ponto de vista linear, as escalas horizontal e de tempo, a velocidade de fase e taxa de crescimento obtidas teoricamente se comparam bem com as observações, levando à sugestão de que tais perturbações são originadas por instabilidade baroclínica. Quando se incluem os efeitos não-lineares e não-geostróficos, obtem-se estruturas bastante semelhantes às observadas por Roden (1986), no que

diz respeito à formação de meandros no escoamento, frentes termohalinas e circulações fechadas tendendo para os anéis térmicos oceânicos, na porção superior do oceano e chegando no máximo até cerca de 400 m. No interior no oceano, em torno de 500 m de profundidade, obteve-se frentes oceânicas mais intensas, porém com estrutura mais zonal e não apresentando circulações fechadas, sugerindo haver uma separação de regimes entre as camadas mais superiores e as de profundidade intermediária, pelo menos no campo de temperatura. As configurações também apresentam semelhanças com as observações de Roden (1986). Quanto à salinidade, a suposição inicial de ser um constituinte passivo mostrou-se razoável, pois os resultados concordam bem com os campos observados. O aumento de camadas (18) na vertical em relação ao modelo de 2 camadas de Saltzman e Tang (1975b) mostrou-se não ser uma mudança trivial pois, além de permitir a análise da estrutura tridimensional dos campos em estudo, as configurações no modelo surgem em profundidades semelhantes às observadas e também possibilitam estudos de instabilidade com perfis de temperatura e corrente mais realísticos.

Como sequência natural desse trabalho destaca-se o cálculo da energética e estudos diagnósticos dos fatores ciclogênicos e frontogênicos no modelo para comparação com resultados observados. Outra proposição seria a inclusão da realimentação do estado básico térmico, como em Saltzman e Tang (1982), para se obter o ciclo de vida completo das perturbações baroclínicas tanto na atmosfera como no oceano, chegando ao estágio de saturação.

Uma extensão natural desse modelo seria a utilização das equações primitivas, de modo a eliminar os defeitos citados no Capítulo 3, partindo-se da solução linear e integrando-se no tempo com o modelo completo.

•
• •

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARAKAWA, A. Non-geostrophic effects in the baroclinic prognostic equations. Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction, Tokyo, 7-13 Nov. 1960, Meteorological Society of Japan, Mar. 1962, 161-175.
- ARAKAWA, A.; SCHUBERT, W.H. Interaction of cumulus cloud ensemble with the large-scale environment. Part I. Journal of the Atmospheric Sciences, 31(3):673-701, Apr. 1974.
- BJORHEIM, K.; JULIAN, P.; KANAMITSU, M.; KALBERG, P.; PRICE, P.; TRACTON, S.; UPPALA, S. The global weather experiment FGGE III B: Daily global analysis. Part 2 March-May 1979. Global Atmospheric Research Program (GARP), European Centre for Medium Range Forecast (ECMWF), Aug. 1981.
- BONATTI, J.P.; RAO, V.B. Moist baroclinic instability in the development of North Pacific and South American intermediate-scale disturbances. Journal of the Atmospheric Sciences, 44(18):2657-2667, Sept. 1987.
- BROWNING, K.A. Conceptual models of precipitation systems. Weather and Forecasting, 1(1,2):23-41, June 1986.
- BRYDEN, L.H. Poleward heat flux and conversion of available potential energy in Drake passage. Journal of Marine Research, 37(1):1-22, Feb. 1979.
- BURGER, A.P. On the non-existence of critical wavelengths in a continuous baroclinic stability problem. Journal of the Atmospheric Sciences, 19(1):31-38, Jan. 1962.

BUSSINGER, S., HOBBS, P.V. Meso-scale structure of two comma cloud systems over the Pacific Ocean. Monthly Weather Review, 115(9):1908-1928, Sept. 1987.

CARLETON, A.M. A synoptic climatology of satellite-observed extratropical cyclone activity for the Southern Hemisphere winter. Archives for Meteorology, Geophysics, and Bioclimatology, 27B(4):265-279, 1979.

CARLETON, A.M. Monthly variability of satellite-derived cyclonic activity for the Southern Hemisphere winter. Journal of Climatology, 1(1):21-38, Jan-Mar. 1981.

CARLETON, A.M. Satellite climatological aspects of the "polar lows" and "instant occlusion". Tellus, 37A(5):433-450, Oct. 1985.

CARR, F.H.; MILLARD, J.P. A composite study of comma clouds and their association with severe weather over the Great Plains. Monthly Weather Review, 113(3):370-387, March 1985.

CHANG, C.-P. Vertical structure of tropical waves maintained by internally induced cumulus heating. Journal of the Atmospheric Sciences, 33(5):729-739, May 1976.

CHANG, C.-P.; WILLIAMS, R.T. On the short-wave cutoff of CISK. Journal of the Atmospheric Sciences, 31(3):830-833, Apr. 1974.

CHARNEY, J.G. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. Journal of Meteorology, 4(5):135-162, Oct. 1947.

- CHARNEY, J.G. The use of the primitive equations of motions in numerical prediction. Tellus, 7(1):22-26, Feb. 1955.
- CHARNEY, J.G.; STERN, M.E. On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. Journal of the Atmospheric Sciences, 19(3):159-172, March 1962.
- CHO, H.R. Comments on Mak's closure for CISK in geostrophic systems. Journal of the Atmospheric Sciences, 43(4):312-316, Feb. 1986.
- CHU, P.-S.; HASTENRATH, S. Atlas of upper-air circulation over tropical South America. Madison, Department of Meteorology, University of Wisconsin, May, 1982.
- DUNCAN, C.N. A numerical investigation of polar lows. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 103(436):255-267, Apr. 1977.
- EADY, E.T. Long waves and cyclone waves. Tellus, 1(3):33-52, Aug. 1949.
- GALL, R. A comparison of linear baroclinic instability theory with the eddy statistics of a general circulation model. Journal of the Atmospheric Sciences, 33(3):349-373, Mar. 1976a.
- GALL, R. Structural changes of growing baroclinic waves. Journal of the Atmospheric Sciences, 33(3):374-390, Mar. 1976b.
- GALL, R. The effects of released latent heat in growing baroclinic waves. Journal of the Atmospheric Sciences, 33(9):1686-1701, Sep. 1976c.

GEISLER, J.E. A linear model of the Walker circulation. Journal of the Atmospheric Sciences, 38(7):1390-1400, July 1981.

GEISLER, J.E.; GARCIA, R.R. Baroclinic instability at long wavelengths on a beta-plane. Journal of the Atmospheric Sciences, 34(2):311-321, Feb. 1977.

GILL, A.E. Atmospheric-ocean dynamics. New York, Academic, 1982

GREEN, J.S.A. A problem in baroclinic instability. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 86(368):237-251, Apr. 1960.

HAYASHI, V. A theory of large-scale equatorial waves generated by condensation heat and accelerating the zonal wind. Journal of the Meteorological Society of Japan, 48II(3):140-160, June 1970.

HELD, I.M. The vertical scale of an unstable baroclinic wave and its importance for eddy heat flux parameterization. Journal of the Atmospheric Sciences, 35(4):572-576, Apr. 1978.

HESS, S.L. Introduction to theoretical meteorology. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1959.

HOLTON, J.R. An introduction to dynamic meteorology. New York, Academic Press, 2^o ed., 1979.

- HOSKINS, B.J. Modelling of the transient eddies and their feedback on the mean flow. In: Hoskins, B.J.; Pearce, R., ed. Large-scale dynamical processes in the atmosphere. London, Academic, 1983.
- KEYSER, D.; ANTHES, R.A. Comments on "Frontogenesis in a moist semigeostrophic model". Journal of the Atmospheric Sciences, 43(10):1051-1054, May 1986.
- KRISHNAMURTY, T.N. ; MOXIM, W.J. On parametrization of convective and nonconvective latent heat release. Journal of Applied Meteorology, 10(1):3-13, Feb. 1971.
- KUNG, E.C. Note on design of an optimized computation scheme for kinematic vertical motion fields. Monthly Weather Review, 101(9):685-690, Sept. 1973.
- KUO, H.-L. Three-dimensional disturbances in a baroclinic zonal current. Journal of Meteorology, 9(4):260-278, Aug. 1952.
- KUO, H.-L. Vorticity transfer as related to the development of the general circulation. Journal of Meteorology, 8(5):307-315, Oct. 1951.
- LEGECKIS, R.; GORDON, A.L. Satellite observations of the Brazil and Falkland currents 1975 to 1976 and 1978. Deep-Sea Research, 29(3A):375-401, Mar. 1982.
- LEWIS, W. Forecasting 700 mb dewpoint depression by a 3-dimensional trajectory technique. Monthly Weather Review, 85(9):297-301, Sept. 1957.

- LORENZ, E.N. Energy and numerical weather prediction. Tellus, 12(4):364-373, Nov. 1960.
- MAK, M. An inquiry on the nature of CISK. Part I. Tellus, 33(6):531-537, Dec. 1981.
- MAK, M. On the moist quasi-geostrophic baroclinic instability. Journal of the Atmospheric Sciences, 39(9): 2028-2037, Sept. 1982.
- MAK, M. On moist quasi-geostrophic barotropic instability. Journal of the Atmospheric Sciences, 40(10):2349-2367, Oct. 1983a.
- MAK, M. On moist quasi-geostrophic baroclinic instability in a general model. Scientia Sinica, 26B(8):850-864, Aug. 1983b.
- MAK, M. Reply. Journal of the Atmospheric Sciences, 43(4): 317-318, Feb. 1986.
- MAK, M.; BANNON, P.R. Frontogenesis in a moist semigeostrophic model. Journal of the Atmospheric Sciences, 41(24):3485-3500, Dec. 1984.
- MAK, M.; BANNON, P.R. Reply. Journal of the Atmospheric Sciences, 43(10):1055, May 1986.
- MANSFIELD, D.A. Polar lows: the development of baroclinic disturbances in cold air outbreaks. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 100(426):541-554, Oct. 1974.

- MILES, J.W. A note on Charney's model of zonal-wind instability. Journal of the Atmospheric Sciences, 21(7): 451-452, Jul. 1964.
- MOORTHI, S.; ARAKAWA, A. Baroclinic instability with cumulus heating. Journal of the Atmospheric Sciences, 42(19):2007-2031, Oct. 1985.
- MUDRICK, S.E. Numerical simulation of polar lows and comma clouds using simple dry models. Monthly Weather Review, 115(12):2890-2903, Dec. 1987
- MULLEN, S.L. An investigation of small synoptic-scale cyclones in polar air streams. Monthly Weather Review, 107(12):1636-1647, Dec. 1979
- MULLEN, S.L. Cyclone development in polar air streams over the wintertime continent. Monthly Weather Review, 110(11):1664-1676, Nov. 1982.
- MULLEN, S.L. Explosive cyclogenesis associated with cyclones in polar air streams. Monthly Weather Review, 111(8):1537-1553. Aug. 1983.
- MURRAY, F.W. On the computation of saturation vapor pressure. Journal of Applied Meteorology, 6(1):203-204, Feb. 1967.
- NITTA, T. On the development of the relatively small-scale cyclone due to the realease of latent heat of condensation. Journal of the Meteorological Society of Japan, 42(4):260-276, Aug. 1964.

- OORT, A.H.; RASMUSSEN, E.M. Atmospheric circulation statistics. NOAA Prof. Pap. 5, 1971. 323 pp (Disponível através do Gov. Printing Office, Stock N° 0317-0045, C55.25.5).
- ORLANSKI, I.; ROSS, B.; POLINSKY, L.; SHAGINAW, R. Advances in the theory of atmospheric fronts. Advances in Geophysics, 28B:223-252, 1985.
- PALMÉN, E.; NEWTON, C.V. Atmospheric circulation systems. New York, Academic Press, 1969.
- PEDLOSKY, J. Geophysical fluid dynamics. New York, Springer-Verlag, 2nd Ed., 1987.
- PHILLIPS, N.A. Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-layer quasi-geostrophic model. Tellus, 6:273-286, 1954.
- RASMUSSEN, E. An investigation of polar low with spiral cloud structure. Journal of the Atmospheric Sciences, 38(8):1785-1792, Aug. 1981.
- RASMUSSEN, E. The polar low as CISK-phenomenon. Report N° 6, Department of Theoretical Meteorology, University of Copenhagen, 1977. 76 pp (Disponível pela NOAA, Library and Information Services Division, Rockville, MD20023).
- RASMUSSEN, E. The polar low as an extratropical CISK mechanism. Quarterly Journal of The Royal Meteorological Society, 105(445):531-543, Jan. 1979.
- REED, R.J. Cyclogenesis in polar air streams. Monthly Weather Review, 107(1):38-52, Jan. 1979.

- REED, R.J.; BLIER, W. A case study of comma cloud development in the eastern Pacific. Monthly Weather Review, 114(9):1681-1695, Sept. 1986a.
- REED, R.J.; BLIER, W. A further study of comma cloud development in the eastern Pacific. Monthly Weather Review, 114(9):1696-1708, Sept. 1986b.
- REED, R.J.; DUNCAN, C.N. Baroclinic instability as a mechanism for the serial development of polar lows: a case study. Tellus, 39A(4):376-384, Aug. 1987.
- RODEN, G.I. Termohaline fronts and baroclinic flow in the Argentine Basin during the austral Spring of 1984. Journal of Geophysical Research, 91(C4):5075-5093, Apr. 1986.
- SALTZMAN, B., TANG, C.-M. Analytical study of the evolution of an amplifying baroclinic wave. Part I. Journal of the Atmospheric Sciences, 29(4):427-444, Apr. 1972.
- SALTZMAN, B.; TANG, C.-M. Analytical study of the evolution of an amplifying baroclinic wave. Part II. Vertical motions and transport properties. Journal of the Atmospheric Sciences, 32(2):243-259, Feb. 1975a.
- SALTZMAN, B.; TANG, C.-M. A review of some analytical studies of finite amplitude baroclinic waves, including a new algorithm for the saturation effects of static stability and baroclinicity variations. Journal of the Meteorological Society of Japan, 60(1):1-14, Feb. 1982.

- SALTZMAN, B.; TANG, C.-M. Formation of meanders, fronts, and cutoff thermal pools in a baroclinic ocean current. Journal of Physical Oceanography, 5(1):86-92, Jan. 1975b.
- SALTZMAN, B.; TANG, C.-M. Mid-tropospheric frontogenesis in an amplifying baroclinic wave. Journal of the Atmospheric Sciences, 102(4):835-839, Apr. 1974.
- SALTZMAN, B.; TANG, C.-M. The effect of finite-amplitude baroclinic waves on passive, low-level, atmospheric constituents, with applications to comma cloud evolution. Tellus, 37A(1):41-55, Jan. 1985.
- SANDERS, F. An investigation of the structure and dynamics of an intense surface frontal zone. Journal of Meteorology, 12(6):542-552, Dec. 1955.
- SANDERS, F.; GYAKUM, J.R. Synoptic-dynamic climatology of the "bomb". Monthly Weather Review, 108(10):1589-1606, Oct. 1980.
- SARDIE, J.M.; WARNER, T.T. A numerical study of the development mechanisms of polar lows. Tellus, 37A(5):460-477, Oct. 1985.
- SARDIE, J.M.; WARNER, T.T. On the mechanism of the development of polar lows. Journal of the Atmospheric Sciences, 40(4):869-881, Apr. 1983.
- SATYAMURTY, P.; RAO, V.B.; MOURA, A.D. Subsynoptic scale baroclinic instability. Journal of the Atmospheric Sciences, 39(5):1052-1061, May 1982.

- SAWYER, J.S. The vertical circulation at meteorological fronts and its relation to frontogenesis. Proceedings of the Royal Society of London, 234(A):346-362, 1956. Apud Palmén e Newton (1969).
- SMAGORINSKY, J. On the dynamical prediction of large-scale condensation by numerical methods. Geophysical Monographs, 5, American Geophysical Union, 71-78, 1960. Apud Saltzman e Tang (1985).
- STALEY, D.O.; GALL, R.L. On the wanelength of maximum baroclinic instability. Journal of the Atmospheric Sciences, 34(11):1679-1688, Nov. 1977.
- STARR, V.P. An essay on the general circulation of the Earth's atmosphere. Journal of Meteorology, 5(1):39-48, Feb. 1948.
- STRUNGE-PEDERSEN, T.; RASMUSSEN, E. On the cutoff problem in linear CISK models. Tellus, 37A(5):394-402, Oct. 1985.
- VALLIS, G.K. A statistical-dynamical climate model with a simple hydrological cycle. Tellus, 34(3):211-227, June 1982.
- WAKIMOTO, R.N.; DURKEE, K.R. A case of two mesoscale eddies: an oceanic versus a continental comma cloud. Monthly Weather Review, 115(10):2202-2213, Oct. 1987.
- WANG, B. The nature of CISK in a generalized continuous model. Journal of the Atmospheric Sciences, 44(10):1411-1426, May 1987.

•
• •

APÊNDICE A

INSTABILIDADE BAROCLÍNICA NO SISTEMA QUASE-GEOSTRÓFICO

A finalidade desse apêndice é tentar estabelecer as condições para haver instabilidade baroclínica em uma corrente básica zonal de oeste dos pontos de vista analítico e numérico, seguindo essencialmente Charney e Stern (1962). Para tanto, primeiramente será estabelecido o sistema quase-geostrófico na ausência de fontes e sumidouros.

A equação da energia termodinâmica em coordenadas (x, y, p, t) é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{p}{R} \sigma \omega = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde a estabilidade estática é dada por

$$\sigma = - \frac{1}{\rho \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{R}{p^2} \left(\frac{RT}{C_p} - \frac{\partial T}{\partial \ln p} \right). \quad (\text{A.2})$$

A aproximação hidrostática pode ser escrita como:

$$T = - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \ln p}, \quad (\text{A.3})$$

a qual pode ser usada na Equação A.1 para se obter

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega = 0. \quad (\text{A.4})$$

A equação da vorticidade quase-geostrófica em um plano-beta de latitudes médias pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_g + u_g \frac{\partial}{\partial x} \xi_g + v_g \frac{\partial}{\partial y} \xi_g + \beta v_g + f_0 \delta = 0, \quad (\text{A.5})$$

onde a vorticidade quase-geostrófica é dada pela equação de balanço apropriada para latitudes médias.

$$\xi_g = \nabla^2 \left(\frac{\phi}{f_0} \right) = \nabla^2 \psi, \quad (\text{A.6})$$

de onde o vento geostrófico pode ser escrito como

$$u_g = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{A.7})$$

e

$$v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{A.8})$$

A divergência horizontal está relacionada com o movimento vertical através da equação da continuidade

$$\delta = - \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (\text{A.9})$$

Se a advecção de temperatura for aproximada pela advecção feita pelo vento geostrófico, pode-se obter o sistema quase-geostrófico dado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \frac{\sigma}{f_0} \omega = 0, \quad (\text{A.10})$$

para a equação da energia termodinâmica, e

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (\text{A.11})$$

para a equação da vorticidade quase-geostrófica.

A estabilidade estática neste modelo deve ser função apenas da pressão para haver consistência energética (Lorenz, 1960).

As Equações A.10 e A.11 formam um sistema nas variáveis Ψ e ω e o acoplamento entre a dinâmica (Equação A.11) e a termodinâmica (Equação A.10) é feita pelo movimento vertical. Pode-se eliminar a variável Ψ entre essas equações obtendo-se uma equação diagnóstica para ω , conhecida como equação-ômega quase-geostrófica, a qual é dada por

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} = - \frac{2f_0}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial p} \right] \\ + \frac{\beta f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial p}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Pode-se, também, eliminar ω entre as Equações A.10 e A.11 obtendo-se a equação da vorticidade potencial quase-geostrófica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 \Psi + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) \right] - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla^2 \Psi + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) \right] \\ + \left\{ \beta + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nabla^2 \Psi + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) \right] \right\} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para o estudo da instabilidade baroclínica será procedida a linearização das Equações A.10 a A.12, supondo-se a seguinte forma das variáveis dependentes:

$$\Psi = \bar{\Psi}^{(*)}(p) - U(p) y + \Psi'(x, y, p, t) \quad (\text{A.14})$$

e

$$\omega = \omega'(x, y, p, t) , \quad (\text{A.15})$$

onde $\bar{\Psi}^{(*)}(p)$ é um valor de referência para Ψ e $U(p)$ é o vento zonal do estado básico.

Usando as Equações A.14 e A.15, encontra-se as seguintes expressões após a linearização

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) - \frac{dU}{dp} \frac{\partial \Psi'}{\partial x} + \frac{\sigma}{f_0} \omega' = 0 , \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi' + U \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi' + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0 , \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla^2 \omega' + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega'}{\partial p^2} = \frac{2f_0}{\sigma} \frac{dU}{dp} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi' + \frac{\beta f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial p} \quad (\text{A.18})$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 \Psi' + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) \right] + U \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla^2 \Psi' + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Psi'}{\partial p} \right) \right] \\ & + \left[\beta - f_0^2 \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{dU}{dp} \right) \right] \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = 0 , \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

para as equações da energia termodinâmica, da vorticidade, omega e da vorticidade potencial, respectivamente.

Para se obter soluções pelo método dos modos normais, pode-se supor que as perturbações tenham a seguinte forma de onda

$$\Psi' = \text{Re} \{ \hat{\Psi}(p) \text{ sen } \lambda y \exp [ik(x-ct)] \} \quad (\text{A.20})$$

e

$$\omega' = \text{Re}\{ \hat{\omega}(p) \text{ sen } \ell y \exp [ik(x-ct)] \} , \quad (\text{A.21})$$

pois os coeficientes das Equações A.16 a A.19 são funções apenas da pressão.

Substituindo as Equações A.20 e A.21 em A.16 a A.19 obtém-se

$$(c - U) \frac{d \hat{\psi}}{dp} + \frac{dU}{dp} \hat{\psi} - \frac{\sigma}{f_0} \hat{W} = 0 , \quad (\text{A.22})$$

$$(c - U) \mu^2 \hat{\psi} + \beta \hat{\psi} - f_0 \frac{d \hat{W}}{dp} = 0 , \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{d^2 \hat{W}}{dp^2} - \mu^2 \hat{W} = \frac{\beta f_0}{\sigma} \frac{d \hat{\psi}}{dp} - 2 \mu^2 \frac{f_0}{\sigma} \frac{dU}{dp} \hat{\psi} \quad (\text{A.24})$$

e

$$(c - U) \left[f_0^2 \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d \hat{\psi}}{dp} \right) - \mu^2 \hat{\psi} \right] - \left[\beta - f_0^2 \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{dU}{dp} \right) \right] \hat{\psi} = 0 , \quad (\text{A.25})$$

onde $W = \omega / ik$ e $\mu^2 = k^2 + \ell^2$. Note que as Equações 2.8, 2.9, 2.12 e 2.19 são as formas em diferenças finitas consistentes das Equações A.23, A.22, A.24 e A.25, respectivamente, desprezando-se fontes e sumidouros e fazendo-se $\mu^2 = k^2$ (equivalente a tirar a variação com y das perturbações nas Equações A.20 e A.21). Então, pode-se generalizar os resultados do Apêndice B para o caso de perturbações com variação senoidal com a latitude apenas trocando-se k^2 por μ^2 .

Com a condição de contorno de velocidade vertical nula ou

$$\hat{W} = 0 \quad (\text{A.26})$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$, obtém-se pela Equação A.22

$$(c - U) \frac{d \hat{\Psi}}{dp} + \frac{dU}{dp} \hat{\Psi} = 0 \quad (\text{A.27})$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$, que corresponde à Equação 2.20 em diferenças finitas consistentes.

Através da Equação A.25, com as condições de contorno dadas na Equação A.27, pode-se obter critérios integrais para a instabilidade do estado básico na presença de perturbações. Para tanto, multiplica-se a Equação A.25 por $(U-c)^* \hat{\Psi}^*$ e integra-se entre p_s e p_t , onde "*" significa complexo conjugado, obtendo-se

$$\int_{p_t}^{p_s} \left[\frac{|\hat{\Psi}|^2 (U-c_R)}{|U-c|^2} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{f_o^2}{\sigma} \left| \frac{d \hat{\Psi}}{dp} \right|^2 - \mu^2 |\hat{\Psi}|^2 \right] dp + \left\{ \frac{f_o^2}{\sigma} \frac{|\hat{\Psi}|^2 (U-c_R)}{|U-c|^2} \frac{dU}{dp} \right\}_{p_s} - \left\{ \frac{f_o^2}{\sigma} \frac{|\hat{\Psi}|^2 (U-c_R)}{|U-c|^2} \frac{dU}{dp} \right\}_{p_t} = 0, \quad (\text{A.28})$$

para a parte real, e

$$c_I \left[\int_{p_t}^{p_s} \frac{|\hat{\Psi}|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial Q}{\partial y} dp + \left\{ \frac{f_o^2}{\sigma} \frac{|\hat{\Psi}|^2}{|U-c|^2} \frac{dU}{dp} \right\}_{p_s} \right]$$

$$- \left[\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{|\hat{\psi}|^2}{|U-c|^2} \frac{dU}{dp} \right]_{p_t} = 0, \quad (\text{A.29})$$

para a parte imaginária, onde $|(\)|$ representa o módulo e

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \beta - f_0^2 \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{dU}{dp} \right), \quad (\text{A.30})$$

com Q representando a vorticidade potencial absoluta do estado básico

$$Q = f_0 + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial p} \right). \quad (\text{A.31})$$

A Equação A.28 está associada à restrições na energia total da perturbação, enquanto a Equação A.29 à restrições na existência de perturbações instáveis. Pela Equação A.29 conclui-se que, para se ter c_I não nulo (onda instável se $c_I > 0$) é necessário que o termo entre colchetes seja nulo. Isso implica na existência de duas maneiras independentes de se ter instabilidade:

- a- na ausência de cisalhamento do vento zonal do estado básico nos contornos e com $\partial Q / \partial y$ mudando de sinal no interior do fluido para que se tenha a possibilidade de integral nula - esse caso é conhecido como instabilidade interna;
- b- na presença de cisalhamento do vento zonal do estado básico nos contornos e com $\partial Q / \partial y$ nulo ou com um único sinal no interior do fluido - esse caso é conhecido como instabilidade de contorno.

Do ponto de vista do modelo em diferenças finitas pode-se mostrar, usando a Equação 2.19, que

$$\begin{aligned}
 & [\beta - \lambda^2_{2} (U_3 - U_1)] \frac{|\hat{\psi}_1|^2}{|U_1 - c|^2} \\
 & + \sum_{j=2}^{J-1} \{ [\beta - \lambda^2_{2j} (U_{2j+1} - U_{2j-1}) + \lambda^2_{2j-2} (U_{2j-1} - U_{2j-3})] \frac{|\hat{\psi}_{2j-1}|^2}{|U_{2j-1} - c|^2} \} + [\beta + \lambda^2_{2J-2} (U_{2J-1} - U_{2J-3})] \frac{|\hat{\psi}_{2J-1}|^2}{|U_{2J-1} - c|^2} = 0 , \tag{A.32}
 \end{aligned}$$

representa o termo entre chaves da Eq. A.29 em diferenças finitas consistentes. Pode-se notar que tal representação é equivalente a considerar dU/dp nulo nos contornos na discretização da Eq. A.29, ou seja, do ponto de vista do modelo em diferenças finitas tudo se passa como se só existisse instabilidade interna.

APÊNDICE B

MODELO LINEAR DE DUAS CAMADAS

Quando se considera a atmosfera representada por duas camadas de massa igual pode-se simplificar as Equações de 2.18 a 2.21 e resolver analiticamente o problema de autovalor-autovetor. Nesse caso $J=2$ e a equação da vorticidade quase geostrófica torna-se

$$[(c-U_1) k^2 + \beta] \hat{\Psi}_1 - \frac{f_0}{p} \hat{W}_2 = 0 \quad (\text{B.1a})$$

e

$$[(c-U_3) k^2 + \beta] \hat{\Psi}_3 + \frac{f_0}{p} \hat{W}_2 = 0 \quad (\text{B.1b})$$

para as camadas superior e inferior, respectivamente.

Nesse caso, a taxa de aquecimento pode existir somente na interface das duas camadas e sua amplitude é dada por:

$$\hat{Q}_2 = \frac{i k \varepsilon h_2 C_p f_0}{(k^2 + 2 \lambda^2_2) \sigma_2 \Delta p} [(\beta - 2k^2 U_T) \hat{\Psi}_1 - (\beta + 2k^2 U_T) \hat{\Psi}_3], \quad (\text{B.2})$$

onde $U_T = (U_1 - U_3)/2$ representa o cisalhamento vertical do vento zonal do estado básico.

Usando a Equação B.2 na equação da energia termodinâmica (Equação 2.9 para $j = 1$) para o nível da interface obtem-se

$$- \left[(c-U_3) - \frac{(\beta - 2k^2 U_T)}{2(k^2 + 2 \lambda^2_2)} \right] \hat{\Psi}_1 + \left[(c-U_1) - \frac{(\beta + 2k^2 U_T)}{2(k^2 + 2 \lambda^2_2)} \right] \hat{\Psi}_3$$

$$-\frac{\sigma_2 \Delta p}{f_0} \hat{w}_2 = 0, \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\varepsilon_2 = \frac{R h_2 \varepsilon}{P_2 \sigma_2} = \frac{R \varepsilon}{P_S} \frac{H_2}{\sigma_2}.$$

As Equações B.1 e B.3 formam um problema de autovalor-autovetor cuja equação característica é quadrática em c . Essa relação de dispersão é dada por

$$c = \frac{(c_1 + c_2)}{2} \pm \frac{1}{2} \left[(c_1 - c_2)^2 - 4 U_T^2 (1 - 2 \xi) \right]^{1/2} =$$

$$U_m + \gamma \pm \delta_0^{1/2}, \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\xi = \frac{\mu^2}{(1 + \mu^2)} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{1 + \mu^2} \right),$$

$$\mu^2 = \frac{k^2}{2 \lambda^2_2},$$

$$c_1 = U_m - \frac{\beta}{k^2},$$

$$c_2 = U_m - \frac{\beta \xi}{k^2},$$

$$\gamma = - \frac{\beta}{2 k^2} (1 + \xi),$$

$$\delta_o = \frac{\beta}{4 k^4} (1 - \xi)^2 - U_T^2 (1 - 2 \xi)$$

e

$$U_m = \frac{(U_1 + U_3)}{2} .$$

Se $\epsilon_2 = 0$ obtém-se a formulação clássica para o caso de Phillips (1954) e Holton (1979). Analisando os casos assintóticos para ondas curtas ($k \rightarrow \infty$), encontra-se $c = U_1$ ou $c = U_3$ e para ondas ultralongas ($k \rightarrow 0$) obtém-se $|c|$ muito grande, porém real. Então, a chance de se ter instabilidade (c complexo ou $\delta_o < 0$) é para ondas de escala intermediária, ou seja, existem cortes inferior e superior para as ondas instáveis no modelo de duas camadas com o efeito do termo beta.

Pode-se obter a curva de neutralidade para o qual o escoamento é marginalmente estável fazendo $\delta_o = 0$ e encontrando-se

$$\tilde{U}_T = \frac{2 \lambda^2 U_T}{\beta} = \frac{2 + (2 + \epsilon_2) \mu^2}{4 \mu^2 (1 + \mu^2) (1 + \epsilon_2 \mu^2 - \mu^4)^{1/2}} . \quad (B.5)$$

Desde que U_T deve ser real, os valores de μ que satisfazem esta equação são tais que

$$0 \leq \mu^2 \leq [\epsilon_2 + (4 + \epsilon_2)^{1/2}] / 2 . \quad (B.6)$$

Então, existe uma onda de corte inferior para qualquer $|U_T|$. Há, também, um ponto de mínimo no espaço μ^2 versus \tilde{U}_T para a curva dada pela Equação B.5. Esse ponto estabelece o cisalhamento mínimo necessário para a instabilidade nesse modelo. Este ponto é obtido fazendo $d\tilde{U}_T / d\mu^2 = 0$, o que dá o seguinte polinômio

$$(8+4 \varepsilon_2) \mu^8 + (16-4 \varepsilon_2-3 \varepsilon_2^2) \mu^6 + (4-14 \varepsilon_2- \varepsilon_2^2) \mu^4 - (8+6 \varepsilon_2) \mu^2 - 4 = 0 \quad . \quad (B.7)$$

A Figura B.1 mostra as curvas neutras para $\varepsilon = 0; 0,5$ e 1 . A região das ondas instáveis está contida acima das curvas. Pode-se notar que para \hat{U}_T maior que um certo valor mínimo, $\hat{U}_{T \min}$, há cortes para ondas curtas e longas, mesmo para ε não nulo. Além disso $\hat{U}_{T \min}$ e a onda curta de corte decresce com o acréscimo de ε ; a onda longa de corte também decresce com o aumento de ε devido ao efeito de β na expressão para δ_0 , o qual torna-se mais positivo para ondas longas e ε grande.

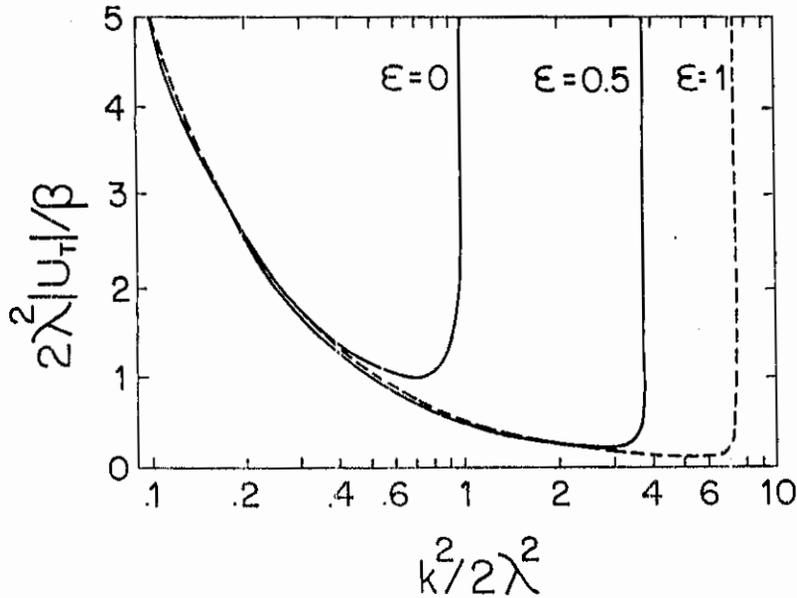


Fig. B.1 - Curvas de estabilidade marginal para o modelo de duas camadas, modificadas pela liberação de calor latente (usou-se β à 45° de latitude e $\lambda = 10^{-6} \text{ m}^{-1}$).

Para efeito de comparação com os resultados de Mak (1982), será analisado a seguir o caso do plano-f ($\beta = 0$). A Equação B.4 torna-se

$$c = U_m + \frac{|U_T|}{(1 + \mu^2)} (\mu^4 - 2 \varepsilon_2 \mu^2 - 1)^{1/2}, \quad (\text{B.8})$$

de onde os modos instáveis satisfazem a seguinte relação

$$0 \leq \mu^2 \leq \varepsilon_2 + (1 + \varepsilon_2^2)^{1/2}, \quad (\text{B.9})$$

a qual dá apenas uma onda curta de corte. À medida que ε cresce, o comprimento da onda curta de corte decresce e a sua taxa de crescimento aumenta. Mak (1982) mostrou que a taxa de crescimento aumenta para valores relativamente pequenos de ε para, então, diminuir para valores relativamente grandes (veja Figura 2.4.b). O modelo de duas camadas, entretanto, não reproduz esta característica.

A onda mais instável pode ser obtida fazendo-se $d(k c_T)/dk = 0$, obtendo-se

$$\mu^6 + 3 \mu^4 + (1 - 4 \varepsilon_2) \mu^2 - 1 = 0. \quad (\text{B.10})$$

A Tabela B.1 mostra a onda de corte inferior (L_C), a onda mais instável (L_m), a sua taxa de crescimento (γ_T) para o modelo de duas camadas no plano-f. Os valores entre parênteses são obtidos através de interpolação na Figura 1 de Mak (1982). O modelo de duas camadas tende a superestimar a taxa de crescimento e subestimar a onda de corte inferior e a onda mais instável para ε não nulo. Nota-se que mesmo usando um modelo de duas camadas esta parametrização de liberação de calor latente seleciona uma onda mais instável e tem uma onda de corte inferior.

TABELA B.1

ONDA DE CORTE INFERIOR (L_C), COMPRIMENTO DA ONDA MAIS INSTÁVEL (L_m) E SUA TAXA DE CRESCIMENTO (ν_I) EM FUNÇÃO DA INTENSIDADE DE AQUECIMENTO (ϵ), PARA O MODELO DE DUAS CAMADAS NO PLANO-f COM $|U_T| = 8,8 \text{ m s}^{-1}$. OS RESULTADOS ANALÍTICOS DE MAK (1982) ESTÃO ENTRE PARÊNTESES.

ϵ (K mb^{-1})	L_C (10^6 m)	L_m (10^6 m)	ν_I (10^{-5} s^{-1})
0,0	4,44 (4,4)	6,90 (6,8)	0,52 (0,6)
0,4	1,83 (2,2)	3,04 (3,8)	1,72 (1,2)
0,8	1,31 (1,6)	2,39 (2,8)	2,79 (1,8)
1,5	0,96 (0,99)	2,07 (2,3)	3,77 (2,5)

Para o caso barotrópico ($U_T = 0$) no plano-beta obtem-se duas velocidades de fase reais, isto é, duas soluções neutras dadas por

$$c_1 = U_m - \frac{\beta}{k^2} \quad (\text{B.11a})$$

e

$$c_2 = U_m - \frac{\beta}{(k^2 + 2 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2})} \left[1 - \frac{\epsilon_2}{2(1 + \mu^2)} \right], \quad (\text{B.11b})$$

onde c_1 representa a onda de Rossby barotrópica não-divergente e c_2 a onda de Rossby baroclínica interna. Note que c_2 é acelerada pelo aquecimento.

É importante salientar que a Equação B.11 mostra que a parametrização de Mak (1982) é baroclinicamente estável para todas as ondas se o

cisalhamento vertical do vento zonal do estado básico é nulo, mesmo em um plano-beta. (No caso do plano-f barotrópico, não há aquecimento com a parametrização de Mak (1982) - veja Equações 2.12 e B.2). No caso de modelos com parametrização do tipo "wave-CISK" para o aquecimento, existe instabilidade mesmo na ausência desse cisalhamento (Hayashi, 1970). A fonte de energia para o crescimento das ondas é o calor latente de condensação.

•
• •

APÊNDICE C

RESULTADOS PUBLICADOS

Encontra-se anexa uma cópia do artigo intitulado "Moist baroclinic instability in the development of North Pacific and South American intermediate scale disturbances", por J.P. Bonatti e V. B. Rao, publicado no "Journal of the Atmospheric Sciences", volume 44, número 18, páginas de 2657 a 2667, em 15 de setembro de 1987.

Os resultados apresentados no artigo a seguir encontram-se também no Capítulo 2.

Moist Baroclinic Instability in the Development of North Pacific and South American Intermediate-Scale Disturbances

JOSÉ PAULO BONATTI AND V. BRAHMANANDA RAO

Instituto de Pesquisas Espaciais, Ministério da Ciência e Tecnologia, 12201—São José dos Campos, São Paulo, Brazil

(Manuscript received 22 August 1986, in final form 17 March 1987)

ABSTRACT

The Mak parameterization of latent heat release is discussed using a finite difference version of a quasi-geostrophic β -plane model. It is found that his analytical results can be well reproduced with 20-layer vertical resolution. This finite difference version can be used for the study of baroclinic instability of observed (arbitrary) zonal wind and static stability vertical profiles with more realistic heating. This model with Chang profiles of heating is applied to the North Pacific oceanic polar air cyclones studied by Mullen and to an intermediate-scale (inverted) comma cloud system observed over central South America. The principal features of these disturbances are reproduced by the model. Thus, the generation mechanism of polar cyclones and comma cloud disturbances seems to be the baroclinic instability modified by the latent heat release.

1. Introduction

Several recent observational and theoretical studies discussed the mechanism of the development of intermediate-scale cyclonic disturbances in polar airstreams. These disturbances seem to have wavelengths around 1000–2000 km. Reed (1979) and Mullen (1979, 1982, 1983) studied the observed characteristics of these disturbances and the background environment in which they form. Reed (1979) found that the polar cyclones form over the oceans in winter and their formation is preceded by the development of a region of enhanced convection. These cyclonic disturbances seem to be associated with comma-shaped cloud patterns. Mullen (1979), using 22 cases of the occurrence of North Pacific comma clouds, constructed the composite structure of zonal wind and temperature at the genesis and mature stages. Mullen (1982) noted that polar cyclones, very similar to those over oceans, can form over continents in wintertime. Some of the cyclones form with explosive deepening. Mullen (1983) presented examples of these cases. Using satellite imagery, Carleton (1985) confirmed the existence of polar lows in the North Atlantic and North Pacific.

In the case of the Southern Hemisphere, lack of conventional synoptic data prevented a detailed study of intermediate-scale disturbances in the higher latitudes. However, satellite imagery shows the existence of a rich variety of cloud vortices in the Southern Hemisphere. In some cases the clouds organize into vortices or cyclones over the South American continent. Carleton (1979, 1981) noted in some regions the occurrence of inverted comma clouds associated with cyclogenesis. One such region is the southeastern part of South America. Examination of satellite imagery for one year

(April 1979–March 1980) showed that the intermediate-scale disturbances, which form over this region, have a slight preference for the transition seasons. Also, they produce copious amounts of rainfall over South Brazil and Uruguay regions.

In regards to the mechanisms for the development of polar cyclones, baroclinic instability and the liberation of latent heat of condensation seem to be basic. Mansfield (1974) and Duncan (1977) suggested dry baroclinic instability, while Rasmussen (1979, 1981) proposed conditional instability of the second kind (CISK) as the mechanisms of formation. Reed (1979) and Mullen (1979) proposed both baroclinic instability and CISK as possible mechanisms.

Sardie and Warner (1983) used a three-layer quasi-geostrophic model to discuss the mechanism for development of polar lows. They distinguished two types of polar lows: those which form in the Pacific around 40°N and those which form in the Atlantic farther north around 60°N. They concluded that moist baroclinity is important for the Pacific polar lows, while moist baroclinity, together with CISK, is necessary to generate Atlantic polar lows. However, in what they call moist baroclinity, the heating is expressed in terms of large-scale uplift such that the heating term can be included with the adiabatic term (static stability times ω). Then the effect of heating would be to reduce the static stability. Additional heating can reduce static stability sufficiently, leading to a preferred mode of very small scale disturbance. This is a conceptually inconsistent result (Mak, 1983a). Further, small static stability makes the quasi-geostrophic assumption invalid. Thus, one has to resort to some type of CISK parameterization to explain the development of intermediate-scale disturbances, at least those associated with heavy

rainfall and cumulus clouds. In a recent study, Sardie and Warner (1985) performed numerical experiments and interpreted the results in the light of their earlier study. The problems of low resolution models such as the one used by Sardie and Warner (1983) to study baroclinic instability were discussed by Staley and Gall (1977). Satyamurty et al. (1982) pointed out the importance of high-resolution models for the study of intermediate-scale baroclinic instability.

Recently Mak (1981, 1982) discussed the problems of earlier wave-CISK formulations and developed a new wave-CISK parameterization. Briefly, the cooperative interaction between cumulus convection and a large-scale perturbation leading to unstable growth of the large-scale system is termed CISK. Heating due to the cumulus clouds is parameterized in terms of the large-scale variables. There are basically two types of CISK parameterizations. In the first type, low-level convergence of moisture is produced by the boundary layer frictional inflow. This is called Ekman-CISK. In the second type, the low-level convergence is taken to be the convergence associated with the wave itself. This is called wave-CISK. A major undesirable aspect of the usual wave-CISK is that it makes the disturbance of shortest possible length scale, the most unstable (e.g., Hayashi, 1970). Some Ekman-CISK models seem to be devoid of this problem (Chang and Williams, 1974; Strunge-Pedersen and Rasmussen, 1985). The underlying principles of Mak parameterization are concisely given in Mak (1986; see Cho, 1986, also). It seems that condensational heating alone is not likely to lead to spontaneous growth of disturbances. For CISK to be effective it could be linked to additional generation mechanisms such as baroclinic instability. In the conventional wave-CISK all the moisture convergence as calculated in large-scale models is channeled back to the feedback process. This parameterization is known to have the aforementioned problem of lack of scale selection. In the Mak parameterization, however, only the dynamically induced quasi-balanced secondary circulation is responsible for moisture convergence. Mak parameterized the heating involved in the joint interaction in terms of the vertical velocity induced at a low level where most moisture is concentrated. The vertical velocity is related to the vorticity field and is given by the dynamical part of the quasi-geostrophic omega equation. For further details see Mak (1982) and the formulation in its section 2. In this paper, Mak makes an elegant mathematical analysis of moist baroclinic instability. However, his analysis is based on the assumption of a constant static stability and a linear variation of zonal wind in the vertical. Thus, his analytical model is unsuitable for observed cases. In the present study we developed a high-resolution finite difference version of a quasi-geostrophic model with Mak parameterization. The finite difference model is applied to observed cases of North Pacific and South American intermediate-scale disturbances. The development of

the finite difference model is presented in section 2. The results for the composite data of Mullen (1979) and for a case of inverted comma cloud disturbance in South Brazil are given in section 3.

2. The finite-difference multilevel model

A normal-mode quasi-geostrophic finite-difference multilevel model is developed in this section. The vertical grid is given in Fig. 1. Heat of condensation is parameterized using Mak's (1982) scheme. The vorticity equation is applied at odd levels and the thermodynamic equation at even levels. The vertical boundary conditions are vanishing vertical p -velocities (ω) at the bottom (p_s) and at the top (p_t) levels.

The variables are defined as

$$\psi_{2j-1}(x, y, t) = -U_{2j-1}y + \psi'_{2j-1}(x, t) \tag{1}$$

$$\omega_{2j}(x, y, t) = \omega'_{2j}(x, t) \tag{2}$$

$$Q'_{2j}(x, y, t) = Q'_{2j}(x, t), \tag{3}$$

where $j = 1$ to J , the number of layers; ψ is the streamfunction, ϕ/f_0 , in which ϕ is the geopotential field and f_0 the constant Coriolis parameter; U_{2j-1} is the basic-state zonal wind varying only with pressure; x, y, p, t are, respectively, zonal distance, meridional distance, pressure level and time; the heating rate Q is given by (Mak, 1982)

$$Q'_{2j}(x, t) = -\epsilon C_p h_{2j} \omega'_a(x, p_b, t), \tag{4}$$

where ϵ (K mb^{-1}) is an arbitrary constant, C_p is the specific heat at constant pressure, h_{2j} defines the vertical structure of the heat source and $\omega'_a(x, p_b, t)$ is the baroclinically induced ω at p_b . The moisture is considered to be uniformly distributed in a layer between the surface and p_b . This means that p_b is the cloud-base level

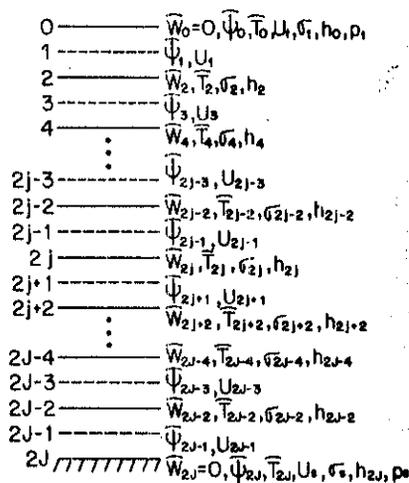


FIG. 1. Vertical grid with staggered disposition of the variables of J layers.

and is taken to be about 900 mb. The moisture supply to the condensation is assumed to be proportional to $-\omega'_a(x, p_b, t)$ and to the specific humidity of this layer. The heating intensity parameter ϵ implicitly depends on water vapor content of the moist layer.

To apply the normal mode approach we assume wave solutions for the perturbations of the form

$$\psi'_{2j-1}(x, t) = \text{Re}\{\hat{\psi}_{2j-1} \exp[ik(x-ct)]\} \quad (5)$$

$$\omega'_{2j}(x, t) = \text{Re}\{\hat{\omega}_{2j} \exp[ik(x-ct)]\} \quad (6)$$

$$\hat{Q}'_{2j}(x, t) = \text{Re}\{\hat{Q}_{2j} \exp[ik(x-ct)]\}, \quad (7)$$

where $k = 2\pi/L$, L is the zonal wavelength, $c = c_R + ic_i$, c_R the phase velocity and $\nu_j = kc_i$ the growth rate; $\text{Re}\{\}$ denotes the real part, and the variables with carets denote the amplitude. Note that the perturbations are independent of latitude.

The resulting linear equation for the multilevel model on a β -plane, after eliminating ω from the quasi-geostrophic vorticity equation using the thermodynamic equation, is

$$(\beta - k^2 U_1 - \lambda_2^2 U_3) \hat{\psi}_1 + (\lambda_2^2 U_1) \hat{\psi}_3 - \epsilon_0 \lambda_2^2 H_2 \hat{W}_b = c[-(k^2 + \lambda_2^2) \hat{\psi}_1 + \lambda_2^2 \hat{\psi}_3], \quad \text{for } j=1, \quad (8a)$$

$$(\lambda_{2j-2}^2 U_{2j-1}) \hat{\psi}_{2j-3} + (\beta - \lambda_{2j-2}^2 U_{2j-3} - k^2 U_{2j-1} - \lambda_{2j}^2 U_{2j+1}) \hat{\psi}_{2j-1} + (\lambda_{2j}^2 U_{2j-1}) \hat{\psi}_{2j+1} - \epsilon_0 (\lambda_{2j}^2 H_{2j} - \lambda_{2j-2}^2 H_{2j-2}) \hat{W}_b = c[\lambda_{2j-2}^2 \hat{\psi}_{2j-3} - (k^2 + \lambda_{2j-2}^2 + \lambda_{2j}^2) \hat{\psi}_{2j-1} + \lambda_{2j}^2 \hat{\psi}_{2j+1}], \quad \text{for } j=2 \text{ to } J-1, \quad (8b)$$

$$(\lambda_{2J-2}^2 U_{2J-1}) \hat{\psi}_{2J-3} + (\beta - \lambda_{2J-2}^2 U_{2J-3} - k^2 U_{2J-1}) \hat{\psi}_{2J-1} + \epsilon_0 \lambda_{2J-2}^2 H_{2J-2} \hat{W}_b = c[\lambda_{2J-2}^2 \hat{\psi}_{2J-3} - (k^2 + \lambda_{2J-2}^2) \hat{\psi}_{2J-1}], \quad \text{for } j=J, \quad (8c)$$

where

$$\Delta p = (p_s - p_i)/J,$$

$$H_{2j} = h_{2j} p_s / p_{2j},$$

$$\lambda_{2j}^2 = f_0^2 / \sigma_{2j} (\Delta p)^2,$$

in which σ_{2j} is the static stability,

$$\epsilon_0 = R \epsilon \Delta p / f_0 p_s,$$

for R the gas constant,

$$\hat{W}_b = \hat{\omega}_a(p_b) / ik,$$

and β is the variation of the Coriolis parameter. Note that in Mak (1982) β is identically zero.

The amplitude of the vertical p -velocity is given by

$$\hat{W}_{2j} = \lambda_{2j}^2 \frac{\Delta p}{f_0} [(c - U_{2j-1}) \hat{\psi}_{2j+1} - (c - U_{2j+1}) \hat{\psi}_{2j-1}] + \frac{R \epsilon H_{2j}}{p_s \sigma_{2j}} \hat{W}_b, \quad (9)$$

where $\hat{W}_{2j} = \hat{\omega}_{2j} / ik$. The \hat{W}_b "velocity" is obtained using the quasi-geostrophic omega equation without the heating term as follows:

$$\lambda_{2j}^2 \hat{W}_{a_{2j-2}} - (k^2 + 2\lambda_{2j}^2) \hat{W}_{a_{2j}} + \lambda_{2j}^2 \hat{W}_{a_{2j+2}} = \lambda_{2j}^2 \frac{\Delta p}{f_0} \{-[\beta + k^2(U_{2j+1} - U_{2j-1})] \hat{\psi}_{2j-1} + [\beta - k^2(U_{2j+1} - U_{2j-1})] \hat{\psi}_{2j+1}\}, \quad (10)$$

for $j = 1, J$ and with $\hat{W}_{a_0} = \hat{W}_{a_{2J}} = 0$. We need only $\hat{W}_b = \hat{W}_{a_{2b}}$. We can write (10) in matrix form as

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_a = \mathbf{B} \psi, \quad (11)$$

where

$$\mathbf{W}_a = [\hat{W}_{a_2}, \hat{W}_{a_4}, \dots, \hat{W}_{a_{2j}}, \dots, \hat{W}_{a_{2j-4}}, \hat{W}_{a_{2j-2}}]^T,$$

$$\psi = [\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_3, \dots, \hat{\psi}_{2j-1}, \dots, \hat{\psi}_{2j-3}, \hat{\psi}_{2j-1}]^T,$$

and the matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} are easily constructed. Since $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ we can write

$$\mathbf{W}_a = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \psi, \quad (12)$$

where \mathbf{A}^{-1} is the inverse matrix of \mathbf{A} . Note that the j_b line of the matrix $(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$ are the coefficients of $\hat{\psi}_{2j-1}$ that allow writing \hat{W}_b as function of $\hat{\psi}_{2j-1}$.

Then (8) forms an eigenvalue-eigenvector problem with c as the eigenvalue and ψ as the eigenvector.

Using the boundary conditions for the vertical p -velocity ($\hat{W}_0 = \hat{W}_{2J} = 0$), we obtain the boundary conditions in finite differences for the streamfunction given by

$$\hat{\psi}_0 = \frac{(c - U_1)}{(c - U_1)} \hat{\psi}_1, \quad (13a)$$

$$\hat{\psi}_{2J} = \frac{(c - U_s)}{(c - U_{2J-1})} \hat{\psi}_{2J-1}, \quad (13b)$$

at the top and bottom of the model, respectively. Note that the finite difference model version easily includes the β -effect.

a. Energetics

The energy relationships can be obtained from the quasi-geostrophic vorticity equation and from the quasi-geostrophic thermodynamic energy equation. They are given by

$$\frac{dK}{dt} = (P, K), \tag{14}$$

$$\frac{dP}{dt} = (\bar{P}, P) - (P, K) + G, \tag{15}$$

where K is the eddy kinetic energy, P the eddy available potential energy, \bar{P} the basic state available potential energy, G the generation of P by the heating term and (A, B) means the conversion from A to B , if positive. The terms in (14) and (15) are volume integrated quantities on (x, y, p) system over one wavelength and are given by

$$K = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle,$$

$$P = \frac{f_0^2}{2} \left\langle \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial p} \right)^2 \right\rangle,$$

$$(P, K) = f_0 \left\langle \omega' \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right\rangle,$$

$$(\bar{P}, P) = f_0^2 \left\langle \frac{1}{\sigma} \frac{dU}{dp} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right\rangle,$$

$$G = \frac{-Rf_0}{C_p} \left\langle \frac{\dot{Q}'}{p\sigma} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right\rangle,$$

where

$$\langle \langle \rangle \rangle = \frac{1}{(p_s - p_t)} \int_{p_t}^{p_s} \left[\frac{1}{L} \int_0^L (\) dx \right] dp.$$

Note that the conversion between the eddy kinetic energy and basic state kinetic energy is not included. This process is not considered in the present study.

b. Comparison of the finite-difference solutions with the analytical solutions of Mak

With the analytical f -plane ($\beta = 0$) model, Mak (1982) obtained baroclinic instability characteristics of a basic state with constant static stability ($0.04 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ mb}^{-2}$) and linear (with pressure) zonal wind profiles. The vertical structure of the rate of heating is also linear with pressure and is bounded between 900 and 400 mb. At the top of the model the pressure is 150 mb, where the zonal wind is 30 m s^{-1} , and the surface pressure is 1000 mb, where the zonal wind is zero. The Coriolis parameter is assumed to be 10^{-4} s^{-1} . Using these characteristics, we ran our finite difference model varying the number of layers (J).

Figure 2 shows the variation of the growth rate with the wavelength for $\epsilon = 0.8$ and $J = 10, 14$ and 20 , and the vertical structure of the streamfunction of the most unstable wave for $\epsilon = 1$ and $J = 20$ and 30 . We note in Fig. 2a a quick convergence of the growth rate from 10 to 20 layers with the scales of the most unstable wave and the short-wave cutoff practically unchanged. In Figs. 2b and 2c we see that there is practically no

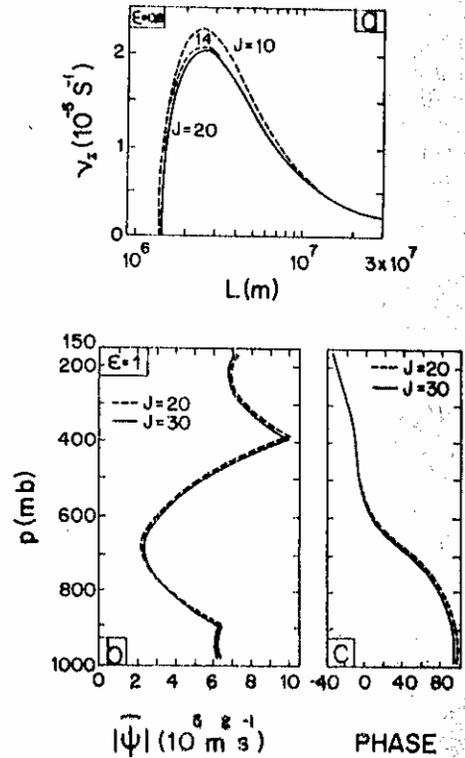


FIG. 2. (a) Growth rate as function of the wavelength for $\epsilon = 0.8$, $J = 10, 14$ and 20 ; (b) vertical structure of the streamfunction of the most unstable wave; and (c) its phase for $\epsilon = 1$, $J = 20$ and 30 .

difference in the vertical structure of the most unstable wave with 20 or 30 layers.

Figure 3 shows the vertical structure of the streamfunction of the most unstable wave for $\epsilon = 0$ and 0.4 and $J = 20$. Comparing these figures with Fig. 4 of Mak (1982), we note that they are almost identical. Figure 4 shows the variation of the growth rate with the wavelength for different intensities of heating and also the variation of the spatial and temporal scales of the most unstable wave with the intensity of heating. Again the agreement with Figs. 1 and 3 of Mak (1982) is notable. From Fig. 4b we see that the variation of the growth rate and the wavelength of the most unstable wave is not monotonic.

Table 1 presents a comparison with Mak's (1982) analytical results for the short-wave cutoff, the wavelength of the most unstable wave, its growth rate and its phase velocity for $\epsilon = 1$ and for different resolutions of the finite difference model. We see that for low vertical resolution L_c and L_m are underestimated and ν_i and c_R are overestimated. Nevertheless, there is rapid convergence with higher resolutions. Mak's (1982) values are interpolated from his Fig. 3.

We choose a vertical resolution of 20 (or 18 in some cases) layers in light of the results of this subsection

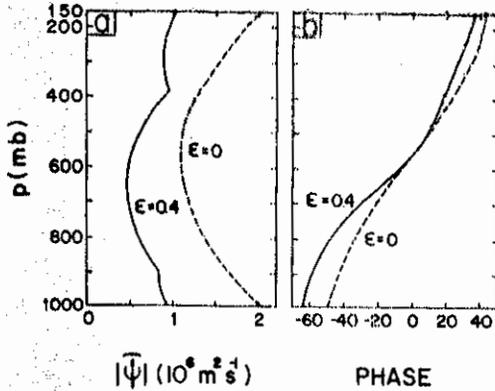


FIG. 3. Vertical structure of the streamfunction of (a) the most unstable wave and (b) its phase for $\epsilon = 0$ and 0.4 and $J = 20$.

and also due to computational time limitations. Essentially similar results are obtained by Mak (1983b). In section 3 we apply a finite difference model to the observed cases of North Pacific and South American intermediate-scale disturbances.

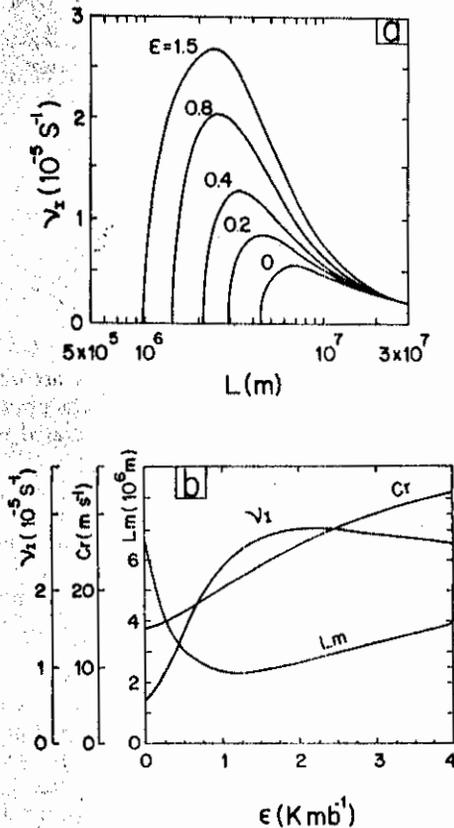


FIG. 4. (a) Variation of the growth rate with the wavelength for $\epsilon = 0, 0.2, 0.4, 0.8$ and 1.5 and $J = 20$, and (b) the variation with the intensity of heating of the growth rate, the phase velocity and the wavelength of the most unstable wave for $J = 20$.

TABLE 1. Short-wave cutoff (L_c), wavelength of the most unstable wave (L_m), its growth rate (ν_i) and phase velocity (C_R) obtained analytically by Mak (1982) and in the finite-difference model.

$\epsilon = 1$	Model layers				
	Mak	2	10	20	30
L_c (10^6 m)	1.3	1.17	1.24	1.26	1.28
L_m (10^6 m)	2.4	2.22	2.37	2.41	2.43
ν_i (10^{-5} s $^{-1}$)	2.1	3.25	2.53	2.29	2.19
C_R (m s $^{-1}$)	19.2	17.7	20.9	20.2	19.9

3. Application of the multilevel model to observed cases

Mak's (1982) analytical study was elegant and lucid. However, from the application point of view the finite difference version is more useful. To obtain analytical solutions, Mak (1982) used the Heaviside function as the vertical heating profile (M profile), but this linear distribution with jumps is not quite realistic. With the finite difference version, one can use observed vertical profiles of zonal wind and static stability as well as more realistic profiles of heating. To test the sensitivity of Mak's (1982) parameterization with other kinds of heating profiles, we ran the 18-layer finite-difference version f -plane model with his basic state and Chang's (1976) heating profiles (C profile) for various ϵ , although they are more appropriate for tropical region. The results are given in Fig. 5. We used three different C heating profiles (Fig. 5d); maximum being at low (750 mb, CL profile), middle (650 mb, CM profile) and high (500 mb, CH profile) levels. The C profiles are given by

$$h(p) = h_0 p e^{-\alpha p'} \sin \pi p', \quad (16)$$

where $p' = (p - p_b)/(p_* - p_b)$, p_* is the top of the heating layer, α is a decay constant and h_0 is found making the value of the vertical integral of $h(p)$ the same as that for M profile.

For low heating intensities ($\epsilon < 1$) the zonal scale of the most unstable wave (Fig. 5a) and its growth rate (Fig. 5b) have little variations for the C profiles. On the other hand, for greater ϵ the scale decreases and the growth rate increases as the level of maximum heating is lowered. The phase velocity (Fig. 5c) decreases with the lowering of the level of maximum heating for all ϵ . Comparing these results with the M profile results, we note that the zonal scale is less and the growth rate higher for the C profiles and the phase velocity is similar to the M profile for all small ϵ . For greater ϵ the zonal scale is almost the same as with the CL profile case and the growth rate is between the CL and CM profile cases. The phase velocity tends to the CL profile case for medium ϵ and to the CM profile case for greater ϵ .

These sensitivity tests show that Mak's parameterization scheme can be used successfully with Chang's

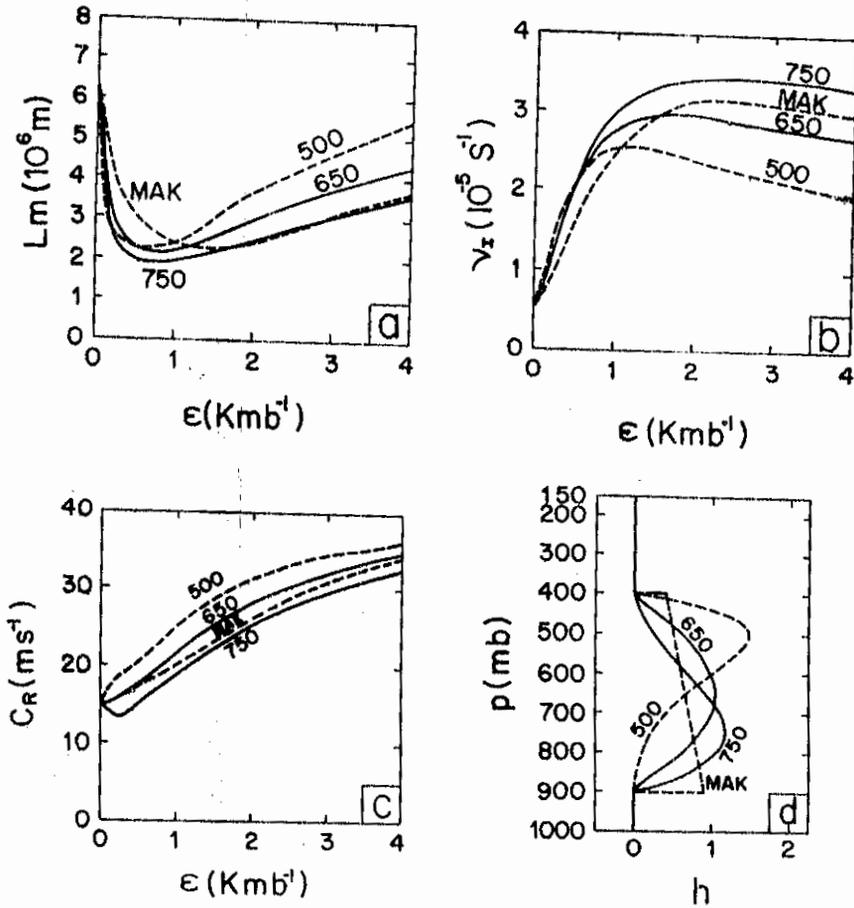


FIG. 5. Comparison among the zonal wavelengths of (a) the most unstable wave, (b) its growth rates and (c) its phase velocities using selected vertical heating profiles (d).

(1976) vertical profiles of heating (which are more realistic) because in all cases the variations of the analyzed quantities with ϵ are systematic. For small ϵ the results are somewhat insensitive.

We will now use the finite difference model, with C profiles for Mak's (1982) parameterization scheme, to examine if the incipient stage of observed intermediate-scale systems have the baroclinic instability modified by the latent heat release as the generation mechanism.

a. Intermediate-scale disturbances of North Pacific

As commented in the Introduction, Mullen (1979) studied cyclones of intermediate scale that are observed near the polar jet stream, namely, comma clouds. Mullen (1979) analyzed 22 cases in the North Pacific Ocean. He composed vertical-meridional cross sections of observed zonal wind and temperature for the genesis and mature stages. At the genesis stage these disturbances have a mean localization at 39°N , 173°E during the analyzed period (winters of 1975/76 and 1976/77).

They have a mean phase velocity of 19.5 m s^{-1} and a horizontal scale of about 2000 km. They are deep in the vertical and have high amplitudes in the upper layers. Some of these disturbances are associated with a comma cloud oriented north-south.

Using the zonal wind and the temperature given in Fig. 2 of Mullen (1979) for the genesis stage and a C profile for $\alpha = 0.1$ we analyzed the baroclinic instability characteristics. The computed static stability is smoothed by a 5-point vertical average. We ran the β -plane model for various values of ϵ . The dependency of the instability characteristics on ϵ are in general agreement with those discussed earlier in this section. However, the results show better agreement with the observations for $\epsilon = 0.1$. At this stage it is not possible to explain why the agreement is better with $\epsilon = 0.1$. Further observational studies are necessary to quantify the vertical structure of heat of condensation in the North Pacific disturbances. The results are given in Fig. 6. Figure 6a shows the growth rate for the dry ($\epsilon = 0$) and moist ($\epsilon \neq 0$) cases. We plot the M profile case for comparison. The dry case selects two horizontal

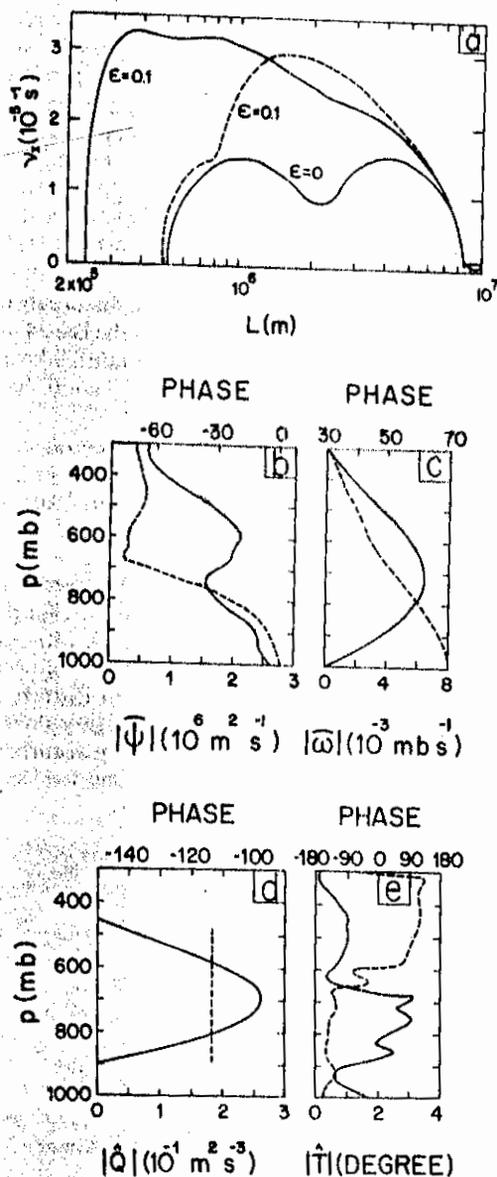


FIG. 6. Baroclinic instability of Mullen's (1979) intermediate-scale disturbances: (a) growth rates without release of latent heat ($\epsilon = 0$), with heating given by C profile ($\epsilon = 0.1$, $\alpha = 0.1$, broken line) and with M profile ($\epsilon = 0.1$, continuous line); (b) the vertical structure of the streamfunction for the most unstable wave of the C profile case, (c) its vertical velocity, (d) the C profile used and (e) the vertical structure of the temperature. The broken lines in (b), (c), (d) and (e) are the phases and the continuous lines the amplitudes.

scales: one around 1000 km and the other around 4250 km. Unlike the observed case, the first one has shallow vertical structure and the second scale is too large. The selection in the M profile case is not clear and has a tendency to generate very short waves (around 375 km). The selection in the C-profile case is better identified around 1600 km. Figures 6b-e show the vertical struc-

ture of the most unstable wave (1600 km). The streamfunction amplitude is deep showing significant values until 300 mb and has double maxima, one at the surface and the other around 600 mb. This result agrees with that of Gall (1976). He also found a double maxima in the vertical structure of the kinetic energy when the effect of release of latent heat was included. If surface drag is introduced the maximum will probably be found at a higher level. The streamfunction phase shows that the baroclinic region is below 650 mb. The vertical velocity amplitude (Fig. 6c) has a maximum around 700 mb and the temperature shows large amplitudes only below 650 mb. The phase difference between vertical velocity and temperature suggests a negative correlation between these variables indicating a baroclinically unstable conversion of eddy available potential energy into eddy kinetic energy. The vertical structure of the heating is given in Fig. 6d and is similar to those used by Sardie and Warner (1985) to model the North Pacific polar lows. It has a maximum around 500 mb of about 22.5 K day^{-1} . Note that the magnitude of amplitudes in Fig. 6 are arbitrary and are obtained by fixing the heating rate. Although the heating rate of 22.5 K day^{-1} is somewhat high, it may not be unusual to find this much heating in rapidly developing oceanic cyclones. Further, note that this heating rate is given at 500 mb such that the vertically averaged heating could be much less than this amount.

The first column of Table 2 gives the scales and energetic properties (normalized such that the total eddy energy is 1) of the most unstable wave for the Northern Hemisphere (NH) C profile case. The phase velocity (C_R) of 26.4 m s^{-1} compares well with the observed velocity of 19.3 m s^{-1} . If we calculate the group velocity (C_g) which is 22.7 m s^{-1} we can see that the agreement is better with the observed velocity. From Mullen's (1979) study it is not possible to evaluate the growth rate. The value given in Table 2, 2.97 s^{-1} (e -folding time around 9.5 hours), seems to be reasonable in view of the rapid growth and short life period of these disturbances.

The theoretical characteristics of the energetics of these disturbances at the incipient stage show that K is about twice as much as P . The generation of P by

TABLE 2. Scales and energy characteristics of the baroclinically unstable observed intermediate-scale disturbances.

	NH	SH
L_m (km)	1600	2000
C_R (m s^{-1})	26.4	3.9
ν_r (10^{-5} s^{-1})	2.97	0.98
C_g (m s^{-1})	22.7	4.4
K ($\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$)	0.658	0.696
P ($\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$)	0.342	0.304
(P, K) ($10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$)	3.90	1.36
(\bar{P}, P) ($10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$)	2.36	0.31
G ($10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$)	3.56	1.64

heating is larger than the conversion from \bar{P} , showing the importance of the latent heat release in its formation.

Thus, it seems that the baroclinic instability modified by the latent heat release could be the generation mechanism of the North Pacific intermediate-scale disturbances studied by Mullen (1979), since the principal features of these disturbances are captured by the model results.

b. The (inverted) comma cloud disturbance of South Brazil

Synoptic experience shows that intermediate-scale disturbances form over the surroundings of Paraguay, North Argentina, Uruguay and South Brazil during the intermediate seasons. These disturbances have horizontal spatial scales of the order of 1500 km, propagate eastward with variable velocities and dissipate in about two days. They have relatively warm centers at and near the surface and are not associated with troughs in the upper layers.

Figure 7 shows a typical example of a local development of an intermediate-scale disturbance that takes the shape of an inverted comma cloud. The development of this disturbance initiated at about 0900 UTC, 14 April 1979, and the dissipation took place around 2100 UTC 15 April 1979. The estimated horizontal

scale is about 1500 km and its phase velocity relative to the earth is around 8 m s^{-1} . Figure 8 gives the surface pressure chart for 15 April 1979 showing a relatively warm low that does not persist in the upper atmosphere. Figure 9a shows a time-height cross section of the observed wind over Porto Alegre (31°S , 51°W) from 13 to 17 April 1979. We can see a propagating wave at the level of 700 mb and a double vertical maxima in the wind (at 700 and 200 mb) at 1200 UTC 15 April 1979. This double maximum suggests that the latent heat release is important for the disturbance development (Gall, 1976). The rainfall of the last 24 hours over Porto Alegre is also shown. The rainfall begins a few hours before passage of the low and continues for 30 hours totaling 65 mm.

Regarding the possible mechanisms responsible for the generation of these disturbances, two processes come to mind: lee cyclogenesis and moist baroclinic instability. Although we selected the case of intermediate-scale disturbances with comma clouds over South America for a quantitative study, we observed similar disturbances in the satellite imagery over the southeast Pacific and South Atlantic oceans. Lack of conventional data precludes a detailed description of oceanic disturbances. A careful examination of disturbances with comma clouds using satellite imagery does not suggest a preference for the lee side. Since disturbances with comma clouds form on the east and west side of

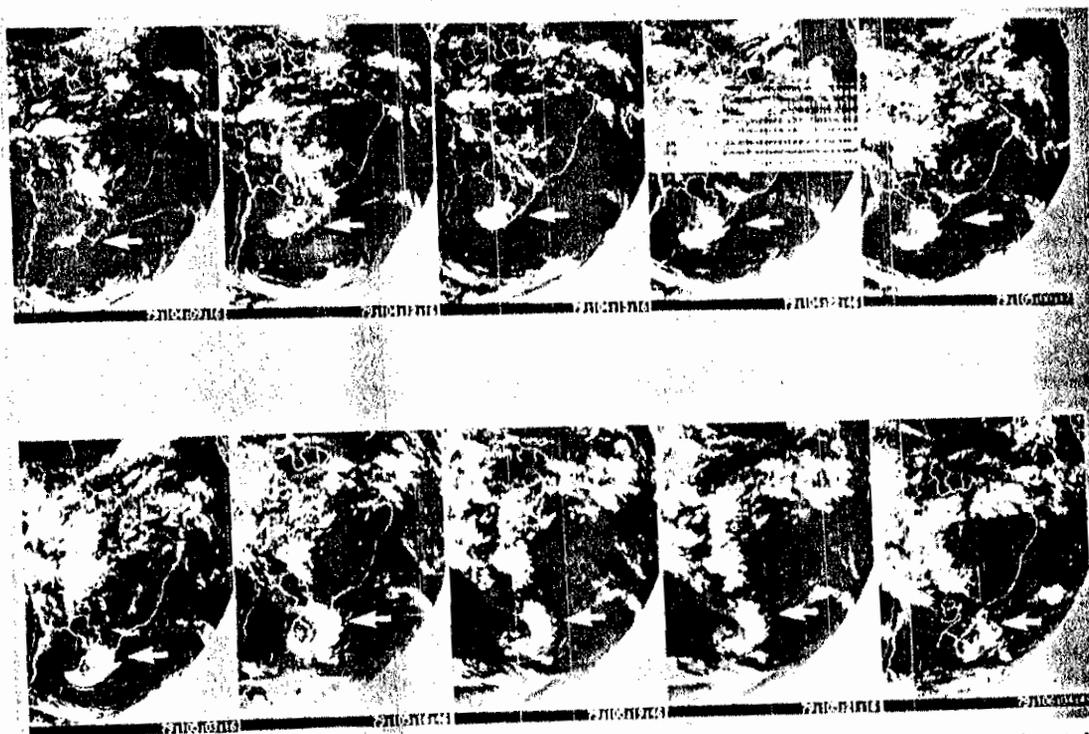


FIG. 7. Sequence of infrared images (GOES West Satellite) for 14 and 15 April 1979, showing the formation of an (inverted) comma cloud over the northeast of Argentina, Uruguay and extreme south of Brazil (around 35°S).

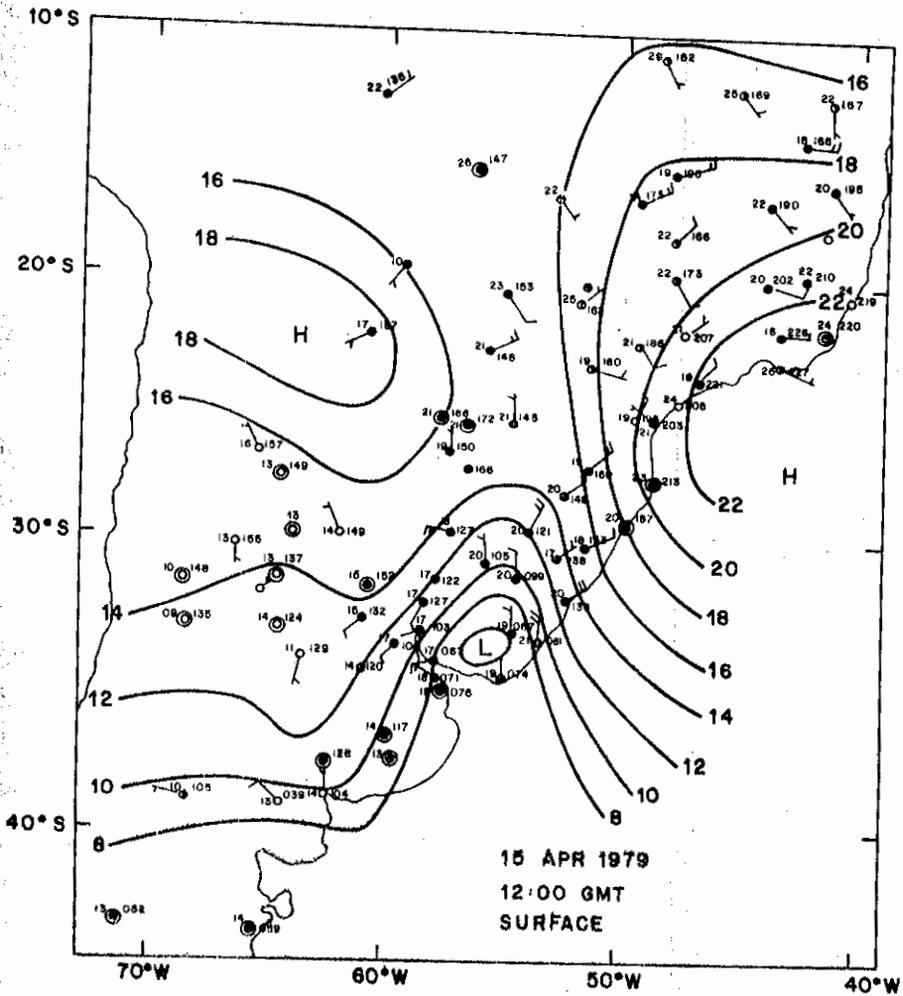


FIG. 8. Surface chart for 1200 UTC 15 April 1979 (analyzed by P. Satyamurty).

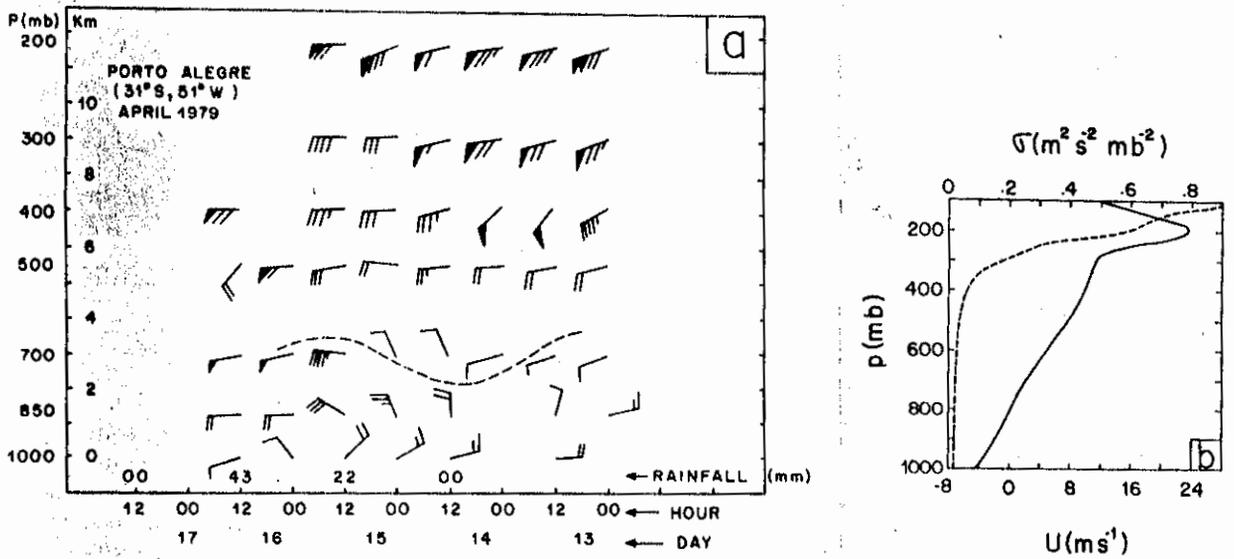


FIG. 9. (a) Vertical cross section with time of the observed wind for 13 to 17 April 1979 over Porto Alegre. The rainfall of the last 24 hours is given in millimeters. Also shown is the propagation of a wave (dashed line) at 700 mb level. (b) Monthly mean zonal wind (continuous line) and static stability (broken line) for April 1979 over Porto Alegre.

the continent, the mechanism for generation of continental and oceanic disturbances might be similar. Pending a detailed comparative study of oceanic and continental disturbances, it seems reasonable to think that moist baroclinic instability is a common mechanism of generation. Since the aforementioned continental disturbance is of intermediate scale and since it is associated with copious amounts of rainfall, the heat of condensation seems to be important. We apply the finite difference model developed earlier for this case.

Figure 9b gives the monthly mean zonal wind and the computed static stability (smoothed by a 5-point vertical average filter) for April 1979 over Porto Alegre. The data are taken from Chu and Hastenrath (1982). With these profiles we analyzed the baroclinic instability modified by the liberation of latent heat using the C profile and 18-layer β -plane model discussed in section 2. The results are given in Fig. 10.

The model was run for various ϵ , and results that show better agreement with observations are presented. Figure 10a describes the growth rate for the dry case ($\epsilon = 0$), for a C-profile case ($\epsilon = 0.2, \alpha = -2$) and for an M-profile case ($\epsilon = 0.4$). There is no clear selection for the dry case and the M-profile case selected two waves: ~ 600 km and ~ 1850 km. The vertical structure of the 600 km, M profile wave is confined below 850 mb and the 1850 km M profile wave has the vertical structure of the streamfunction similar to the C profile case. However, the vertical heating structure with maximum at 900 mb is quite unrealistic for these disturbances (Silva Dias, personal communication). The C-profile case selects a scale around 2000 km. The streamfunction amplitude and phase for the C profile are given in Fig. 10b. It has a double vertical maximum similar to the one noted earlier for North Pacific disturbances and the baroclinic region is confined between 800 and 650 mb evidenced by the large westward tilt of the streamfunction phase. The double vertical maximum in the streamfunction implies the same structure for the kinetic energy as in Gall (1976), which agrees with the double jet in Fig. 9a. If the surface drag is included, the lower maximum would be better defined.

Figure 10c shows the vertical structure of the vertical velocity and its phase. There is a maximum around 700 mb and a westward tilt in almost the entire atmosphere. The C profile of heating is given in Fig. 10d and shows a maximum (about 26.5 K day^{-1}) around 720 mb. Again, the heating rate seems to be high but may not be inappropriate for disturbances with a high precipitation rate noted earlier. The temperature amplitude is shown in Fig. 10e. There are two maxima, one around 750 mb and the other around 300 mb. The phase difference between temperature and vertical velocity reveals a negative correlation between these variables implying a baroclinically unstable conversion of eddy available potential energy into eddy kinetic energy.

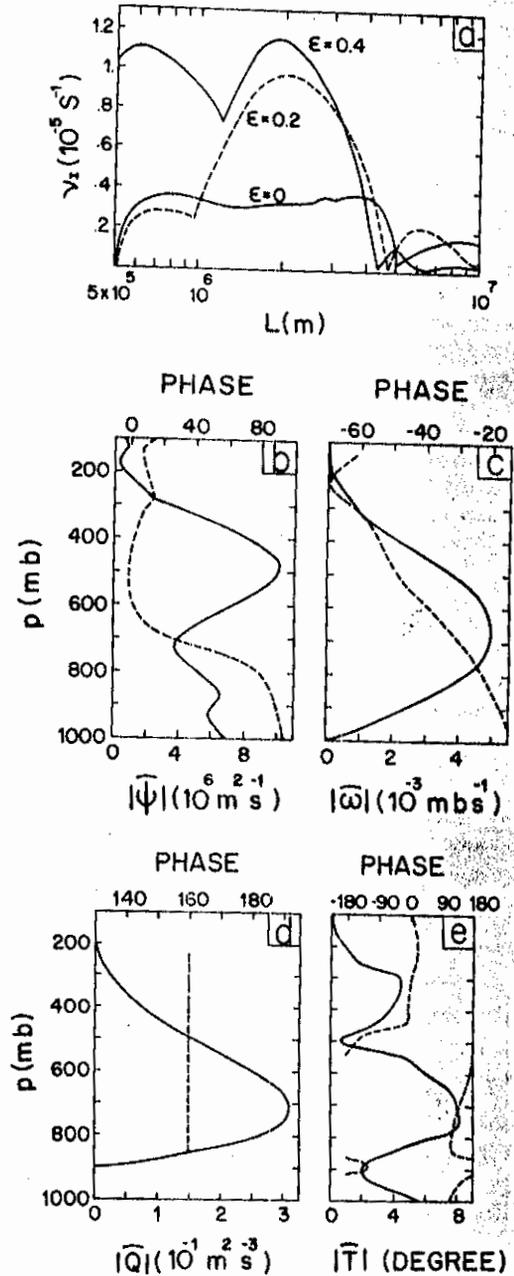


FIG. 10. As in Fig. 6 except for the central South America comma cloud disturbance, $\epsilon = 0.2$ and $\alpha = 2$ for the C profile and $\epsilon = 0.4$ for the M profile.

The second column of Table 2 gives the scales and energy characteristics (normalized such that the total eddy energy is 1) of the most unstable wave for the Southern Hemisphere (SH) C-profile case. The phase velocity of 3.9 m s^{-1} is reasonable in comparison with the observed value of about 8.0 m s^{-1} , while the group

velocity of 4.4 m s^{-1} approaches the observed velocity. The growth rate of 0.98 s^{-1} (e -folding time around 28.3 hours) seems to be reasonable since the life cycle of the intermediate-scale observed disturbance is around 2 days.

The theoretical energetics of the SH intermediate-scale disturbance show that K is twice P , while the generation of P by latent heat release is much higher than (\bar{P} , P). This confirms that the latent heat release seems to be important in the development of such disturbances. Thus, the baroclinic instability modified by the liberation of latent heat seems to be the generation mechanism of the South Brazil intermediate-scale inverted comma cloud disturbances.

4. Summary and conclusions

The role of moist baroclinic instability in the development of intermediate-scale disturbances is discussed, using Mak's (1982) parameterization of heat of condensation. A multilevel finite difference version of Mak's analytical model is developed. Our analysis showed that with about 20 layers in the vertical the finite difference model reproduces the analytical results well. A finite difference model is necessary to study the instability characteristics of the observed profile of zonal wind, static stability and heating which cannot be approximated by analytical formulation.

The multilevel β -plane model is applied to North Pacific cyclonic disturbances (Mullen, 1979) and to (inverted) comma cloud disturbances of central South America occurring in the transition seasons. The principal characteristics such as horizontal scale, time scale, phase velocity and vertical structure are well reproduced by the model. Thus the baroclinic instability modified by the heat of condensation seems to be a possible mechanism for the generation of these disturbances.

Acknowledgments. Thanks are due to Dr. P. Satyamurty for reviewing the manuscript and for the observations (Figs. 7, 8 and 9a). This paper forms part of the Ph.D. thesis of the first author. Thanks are also due to the reviewers and Professor Mankin Mak for their helpful comments and suggestions and to Ms. Nilda C. A. M. Silva for typing the manuscript.

REFERENCES

- Carleton, A. M., 1979: A synoptic climatology of satellite-observed extratropical cyclone activity for the Southern Hemisphere winter. *Arch. Meteor. Geophys. Bioklim.* **27B**, 265-279.
- , 1981: Monthly variability of satellite-derived cyclonic activity for the Southern Hemisphere winter. *J. Climatol.*, **1**, 21-38.
- , 1985: Satellite climatological aspects of the "polar lows" and "instant occlusion". *Tellus*, **37A**, 433-450.
- Chang, C.-P., 1976: Vertical structure of tropical waves maintained by internally induced cumulus heating. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 729-739.
- , and R. T. Williams, 1974: On the short-wave cutoff of CISK. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 830-833.
- Cho, H. R., 1986: Comments on Mak's closure for CISK in geostrophic systems. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 312-316.
- Chu, P.-S., and S. Hastenrath, 1982: *Atlas of Upper Air Circulation over Tropical South America*. Dept. of Meteorology, University of Wisconsin-Madison, 237 pp.
- Duncan, C. N., 1977: A numerical investigation of polar lows. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **103**, 255-267.
- Gall, R., 1976: The effects of released latent heat in growing baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1686-1701.
- Hayashi, V., 1970: A theory of large-scale equatorial waves generated by condensation heat and accelerating the zonal wind. *J. Meteor. Soc. Japan*, **48**, 140-160.
- Mak, M., 1981: An inquiry on the nature of CISK. Part I. *Tellus*, **33**, 531-537.
- , 1982: On moist quasi-geostrophic baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 2028-2037.
- , 1983a: On moist quasi-geostrophic barotropic instability. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 2349-2367.
- , 1983b: On moist quasi-geostrophic baroclinic instability in a general model. *Sci. Sin.*, **B26**, 850-864.
- , 1986: Reply. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 317-318.
- Mansfield, D. A., 1974: Polar lows: The development of baroclinic disturbances in cold air outbreaks. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **100**, 541-554.
- Mullen, S. L., 1979: An investigation of small synoptic-scale cyclones in polar airstreams. *Mon. Wea. Rev.*, **107**, 1636-1647.
- , 1982: Cyclone development in polar airstreams over the wintertime continent. *Mon. Wea. Rev.*, **110**, 1664-1676.
- , 1983: Explosive cyclogenesis associated with cyclones in polar airstreams. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 1537-1553.
- Phillips, N. A., 1954: Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-layer quasi-geostrophic model. *Tellus*, **6**, 273-286.
- Rasmussen, E., 1979: The polar low as an extratropical CISK mechanism. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **105**, 531-543.
- , 1981: An investigation of polar low with a spiral cloud structure. *J. Atmos. Sci.*, **38**, 1785-1792.
- Reed, R., 1979: Cyclogenesis in polar airstream. *Mon. Wea. Rev.*, **107**, 38-52.
- Sardie, J. M., and T. T. Warner, 1983: On the mechanism of the development of polar lows. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 869-881.
- , and —, 1985: A numerical study of the development mechanisms of polar lows. *Tellus*, **37A**, 460-477.
- Satyamurty, P., V. B. Rao and A. D. Moura, 1982: Subsynchronous scale baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1052-1061.
- Staley, D. O., and R. Gall, 1977: On the wavelength of maximum baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **34**, 1679-1688.
- Strunge-Pedersen, T., and E. Rasmussen, 1985: On the cutoff problem in linear CISK models. *Tellus*, **37A**, 394-402.

APÊNDICE D

DETALHES NUMÉRICOS E COEFICIENTES DAS SOLUÇÕES DE ORDEM SUPERIOR

O objetivo desse apêndice é apresentar os detalhes relevantes para a obtenção dos coeficientes das soluções apresentadas no Capítulo 3.

A solução para as perturbações quase-geostróficas de primeira ordem, $\zeta^{(1)}$, encontram-se no Capítulo 2, onde deve-se substituir k^2 por $\mu^2 = k^2 + \ell^2$. A seguir serão, então, apresentadas as soluções a partir dessa ordem.

D.1 - CAMPO ZONAL DE PRIMEIRA ORDEM

Através da substituição da Equação 3.38 nas Equações 3.36 e 3.37 e usando as Equações 3.23 e 3.24, obtem-se:

$$\frac{f_o^2}{\sigma} \frac{d^2 \tilde{\omega}_a^{(1)}}{dp^2} - 4 \ell^2 \tilde{\omega}_a^{(1)} = \frac{2f_o k \ell^3}{\sigma} \left(\psi_R \frac{d \psi_I}{dp} - \psi_I \frac{d \psi_R}{dp} \right) ; \quad (D.1)$$

$$\frac{f_o^2}{\sigma} \frac{d^2 \tilde{\omega}_d^{(1)}}{dp^2} - 4 \ell^2 \tilde{\omega}_d^{(1)} = -4 \ell^2 \frac{Re}{p_s} \frac{H}{\sigma} \tilde{\omega}_a^{(1)}(p_b) ; \quad (D.2)$$

$$\begin{aligned} a_n \frac{f_o^2}{\sigma} \frac{d^2 \tilde{\omega}_n^{(1)}}{dp^2} - a_n b_n \frac{f_o^2}{\sigma} \frac{d \tilde{\omega}_n^{(1)}}{dp} - 4 \ell^2 \tilde{\omega}_n^{(1)} = \\ a_n b_n \frac{f_o^2}{\sigma} \left(\frac{d \tilde{\omega}_a^{(1)}}{dp} + \frac{d \tilde{\omega}_d^{(1)}}{dp} \right) \\ + a_n \frac{f_o^2}{\sigma} \left(\frac{d^2 \tilde{\omega}_a^{(1)}}{dp^2} + \frac{d^2 \tilde{\omega}_d^{(1)}}{dp^2} \right) ; \end{aligned} \quad (D.3)$$

onde

$$a_{\eta} = 1 - \frac{(\Lambda_{\xi} - \Lambda_T)}{(2 v_I + \Lambda_{\xi})} ,$$

$$b_{\eta} = \frac{1}{(2 v_I + \Lambda_{\xi})} \frac{d \Lambda_{\xi}}{dp} ;$$

$$\tilde{\omega}(1) = \tilde{\omega}_a(1) + \tilde{\omega}_d(1) + \tilde{\omega}_{\eta}(1) ; \quad (D.4)$$

$$\tilde{Q}(1) = - \epsilon C_p \frac{p}{p_s} H \tilde{\omega}_a(1) (p_b) ; \quad (D.5)$$

$$\tilde{\Psi}(1) = \frac{- f_0}{4 l^2 (2 v_I + \Lambda_{\xi})} \frac{d \tilde{\omega}(1)}{dp} ; \quad (D.6)$$

$$\tilde{\chi}(1) = \frac{1}{4 l^2} \frac{d \tilde{\omega}(1)}{dp} = - \frac{(2 v_I + \Lambda_{\xi})}{f_0} \tilde{\Psi}(1) ; \quad (D.7)$$

$$\tilde{T}(1) = - \frac{p f_0}{R} \frac{d \tilde{\Psi}(1)}{dp} = \tilde{\vartheta}(1) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} , \quad (D.8)$$

para as amplitudes do campo zonal de primeira ordem da velocidade vertical, do aquecimento, da função de corrente, do potencial de velocidade e da temperatura, respectivamente.

D.2 - PERTURBAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM

D.2.1 - FUNÇÃO DE CORRENTE E TEMPERATURA

Os forçantes para a perturbação de segunda ordem na função de corrente $\Psi^{(2)}$ (Equação 3.40), são dados por

$$L_1(2) = \frac{\partial \bar{\psi}(1)}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \psi(1) - \frac{\partial^3 \bar{\psi}(1)}{\partial Y^3} \frac{\partial \psi(1)}{\partial X} , \quad (D.9)$$

$$L_2(2) = \frac{\partial \psi(1)}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \psi(1) - \frac{\partial \psi(1)}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} \nabla^2 \psi(1) - \frac{\partial \psi(1)}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \psi(1) + \frac{\partial \psi(1)}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} \nabla^2 \psi(1) , \quad (D.10)$$

e

$$N(2) = N_1(2) + N_2(2) + N_3(2) , \quad (D.11)$$

onde

$$N_1(2) = \beta \frac{\partial \chi(1)}{\partial Y} - \frac{d\bar{u}(0)}{dp} \frac{\partial \omega(1)}{\partial Y} , \quad (D.12)$$

$$N_2(2) = \frac{\partial \bar{\chi}(1)}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \nabla^2 \psi(1) + \frac{\partial^3 \bar{\psi}(1)}{\partial Y^3} \frac{\partial \chi(1)}{\partial Y} + \bar{\omega}(1) \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 \psi(1) + \frac{\partial^3 \bar{\psi}(1)}{\partial Y^2 \partial p} \omega(1) - \frac{\partial^2 \bar{\psi}(1)}{\partial Y^2} \frac{\partial \omega(1)}{\partial p} - \frac{\partial \bar{\omega}(1)}{\partial p} \nabla^2 \psi(1) + \frac{\partial \bar{\omega}(1)}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial Y \partial p} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}(1)}{\partial Y \partial p} \frac{\partial \omega(1)}{\partial Y} \quad (D.13)$$

e

$$N_3(2) = \frac{\partial \chi(1)}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \psi(1) + \frac{\partial \chi(1)}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \nabla^2 \psi(1) + \omega(1) \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 \psi(1) - \nabla^2 \psi(1) \frac{\partial \omega(1)}{\partial p} + \frac{\partial \omega(1)}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial X \partial p} + \frac{\partial \omega(1)}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial Y \partial p}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^{(1)}}{\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi^{(1)}} - \frac{\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi^{(1)}}{\omega^{(1)} \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 \psi^{(1)}} \\
 & + \frac{\nabla^2 \psi^{(1)} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial p}}{\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x \partial p}} \\
 & - \frac{\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y \partial p}}{\partial y \partial p} .
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

Usando as Equações 3.35 e 3.38 nas Equações de D.9 a D.14, obtem-se

$$L_1^{(2)} = (L_A \cos kX + L_B \sin kX) (\sin \ell y - \sin 3 \ell y) \exp(3 v_I t), \tag{D.15}$$

$$L_2^{(2)} = 0, \tag{D.16}$$

$$N_1^{(2)} = (N_A \cos kX + N_B \sin kX) \cos \ell y \exp(v_I t), \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
 N_2^{(2)} = & [(N_C \cos kX + N_D \sin kX) \cos \ell y \\
 & + (N_E \cos kX + N_F \sin kX) \cos 3 \ell y] \exp(3 v_I t), \tag{D.18}
 \end{aligned}$$

$$N_3^{(2)} = (N_G \cos 2kX + N_H \sin 2kX) (k^2 - \ell^2 \cos 2 \ell y) \exp(2 v_I t), \tag{D.19}$$

onde

$$L_A = k \ell (3 \ell^2 - k^2) \tilde{\psi}^{(1)} \psi_I, \tag{D.20}$$

$$L_B = k \ell (3 \ell^2 - k^2) \tilde{\psi}^{(1)} \psi_R, \tag{D.21}$$

$$N_A = \ell \left[\beta \chi_R + \bar{u}^{(0)} \frac{d \omega_R}{dp} - \frac{d}{dp} (\omega_R \bar{u}^{(0)}) \right], \tag{D.22}$$

$$N_B = -\ell \left[\beta \chi_I + \bar{u}^{(0)} \frac{d \omega_I}{dp} - \frac{d}{dp} (\omega_I \bar{u}^{(0)}) \right], \tag{D.23}$$

$$N_C = -\ell^2 \left(\mu^2 \tilde{\chi}^{(1)} \psi_R + 4 \ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \chi_R \right) - \frac{(k^2 - \ell^2)}{2} \frac{d}{dp} (\tilde{\omega}^{(1)} \psi_R)$$

$$- \ell^2 \frac{d}{dp} (\omega_R \tilde{\psi}^{(1)}) + k^2 \psi_R \frac{d\tilde{\omega}^{(1)}}{dp} + 3 \ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \frac{d\omega_R}{dp}, \quad (D.24)$$

$$N_D = \ell^2 (\mu^2 \tilde{\chi}^{(1)} \psi_I + 4 \ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \chi_I) + \frac{(k^2 - \ell^2)}{2} \frac{d}{dp} (\tilde{\omega}^{(1)} \psi_I) \\ + \ell^2 \frac{d}{dp} (\omega_I \tilde{\psi}^{(1)}) - k^2 \psi_I \frac{d\tilde{\omega}^{(1)}}{dp} - 3 \ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \frac{d\omega_I}{dp}, \quad (D.25)$$

$$N_E = - \ell^2 (\mu^2 \tilde{\chi}^{(1)} \psi_R + 4 \ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \chi_R) + \frac{(k^2 + 3 \ell^2)}{2} \frac{d}{dp} (\tilde{\omega}^{(1)} \psi_R) \\ + 3 \ell^2 \frac{d}{dp} (\omega_R \tilde{\psi}^{(1)}) - (k^2 + 2 \ell^2) \psi_R \frac{d\tilde{\omega}^{(1)}}{dp} - 5 \ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \frac{d\omega_R}{dp}, \quad (D.26)$$

$$N_F = \ell^2 (\mu^2 \tilde{\chi}^{(1)} \psi_I + 4 \ell^2 \chi_I) - \frac{(k^2 + 3 \ell^2)}{2} \frac{d}{dp} (\tilde{\omega}^{(1)} \psi_I) \\ - 3 \ell^2 \frac{d}{dp} (\omega_I \tilde{\psi}^{(1)}) + (k^2 + 2 \ell^2) \psi_I \frac{d\tilde{\omega}^{(1)}}{dp} + 5 \ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \frac{d\omega_I}{dp}, \quad (D.27)$$

$$N_G = - \frac{1}{2} \frac{d}{dp} (\omega_R \psi_R) + \psi_R \frac{d\omega_R}{dp} + \frac{1}{2} \frac{d}{dp} (\omega_I \psi_I) - \psi_I \frac{d\omega_I}{dp}, \quad (D.28)$$

e

$$N_H = \frac{1}{2} \frac{d}{dp} (\omega_R \psi_I) - \psi_I \frac{d\omega_R}{dp} + \frac{1}{2} \frac{d}{dp} (\omega_I \psi_R) - \psi_R \frac{d\omega_I}{dp}. \quad (D.29)$$

O forçante na condição de contorno dada pela Equação 3.42.b é dado por

$$C_{\psi}^{(2)} = (C_A \cos kX + C_B \sin kX) (\sin \ell y - \sin 3 \ell y) \exp(3 v_I t), \quad (D.30)$$

onde

$$C_A = k \ell \left(\tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d\Psi_I}{dp} - \frac{d\tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} \Psi_I \right)_{p=p_S, p_t} \quad (D.31)$$

e

$$C_B = k \ell \left(\tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d\Psi_R}{dp} - \frac{d\tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} \Psi_R \right)_{p=p_S, p_t} \quad (D.32)$$

Então, com base nas Equações de D.15 a D.19 e D.30, podem ser determinadas as amplitudes não nulas de $\Psi^{(2)}$, dado pela Equação 3.43, as quais são:

$$\Psi_{A1,1,1} = (a_1 N_B + b_1 N_A) / d_1 \quad , \quad (D.33)$$

$$\Psi_{B1,1,1} = (-a_1 N_A + b_1 N_B) / d_1 \quad , \quad (D.34)$$

$$\Psi_{A2,0,2} = (a_2 N_G + b_2 N_H) / d_2 \quad , \quad (D.35)$$

$$\Psi_{B2,0,2} = (-a_2 N_H + b_2 N_G) / d_2 \quad , \quad (D.36)$$

$$\Psi_{A2,2,2} = - (a_3 N_H + b_2 N_G) / d_3 \quad , \quad (D.37)$$

$$\Psi_{B2,2,2} = (a_1 N_G - b_2 N_H) / d_3 \quad , \quad (D.38)$$

$$\Psi_{A3,1,1} = (a_1 N_D + b_3 N_C) / d_4 \quad , \quad (D.39)$$

$$\Psi_{B3,1,1} = (-a_1 N_C + b_3 N_D) / d_4 \quad , \quad (D.40)$$

$$\Psi_{C3,1,1} = -(a_1 L_B + b_3 L_A) / d_4 \quad , \quad (D.41)$$

$$\Psi_{D3,1,1} = (a_1 L_A - b_3 L_B) / d_4 \quad , \quad (D.42)$$

$$\Psi_{A3,3,1} = (a_4 N_F + b_3 N_E) / d_5 \quad , \quad (D.43)$$

$$\Psi_{B3,3,1} = (-a_4 N_E + b_3 N_F) / d_5 \quad , \quad (D.44)$$

$$\Psi_{C3,3,1} = (a_4 L_B + b_3 L_A) / d_5 \quad , \quad (D.45)$$

$$\Psi_{D3,3,1} = (-a_4 L_A + b_3 L_B) / d_5 \quad , \quad (D.46)$$

onde

$$\begin{aligned}
 c_R' &= c_R - \bar{u}(0) \quad , \\
 a_1 &= c_R' + \beta / \mu^2 \quad , \\
 a_2 &= c_R' + \beta / 4 k^2 \quad , \\
 a_3 &= c_R' + \beta / 4 \mu^2 \quad , \\
 a_4 &= c_R' + \beta / (k^2 + 9 \ell^2) \quad , \\
 b_1 &= c_I + \Lambda_\xi / k \quad , \\
 b_2 &= c_I + \Lambda_\xi / 2 k \quad , \\
 b_3 &= 3 c_I + \Lambda_\xi / k \quad , \\
 d_1 &= \mu^2 k (a_1^2 + b_1^2) \quad , \\
 d_2 &= 8 k (a_2^2 + b_2^2) \quad , \\
 d_3 &= 8 k (a_3^2 + b_2^2) \quad , \\
 d_4 &= \mu^2 k (a_1^2 + b_3^2) \quad , \\
 d_5 &= k (k^2 + 9 \ell^2) (a_4^2 + b_3^2) \quad ;
 \end{aligned}$$

e com as seguintes condições de contorno em $p = p_S$ e $p = p_T$:

$$b_4 \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} - c_R' \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} - d_6 \Psi_{B1,1,1} = 0 \quad , \quad (D.47a)$$

$$c_R' \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} + b_4 \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} + d_6 \Psi_{A1,1,1} = 0 \quad , \quad (D.47b)$$

$$b_5 \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} - c_R' \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} - d_6 \Psi_{B2,0,2} = 0 \quad , \quad (D.48a)$$

$$c_R' \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} + b_5 \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} + d_6 \Psi_{A2,0,2} = 0 \quad , \quad (D.48b)$$

$$b_5 \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} - c_R \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} - d_6 \Psi_{B2,2,2} = 0 \quad , \quad (D.49a)$$

$$c_R \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} + b_5 \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} + d_6 \Psi_{A2,2,2} = 0 \quad , \quad (D.49b)$$

$$b_6 \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} - c_R \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} - d_6 \Psi_{B3,1,1} = 0 \quad , \quad (D.50a)$$

$$c_R \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} + b_6 \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} + d_6 \Psi_{A3,1,1} = 0 \quad , \quad (D.50b)$$

$$b_6 \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} - c_R \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} - d_6 \Psi_{D3,1,1} = \frac{C_A}{k} \quad , \quad (D.51a)$$

$$c_R \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} + b_6 \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} + d_6 \Psi_{C3,1,1} = \frac{C_B}{k} \quad , \quad (D.51b)$$

$$b_6 \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} - c_R \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} - d_6 \Psi_{B3,3,1} = 0 \quad , \quad (D.52a)$$

$$c_R \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} + b_6 \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} + d_6 \Psi_{A3,3,1} = 0 \quad , \quad (D.52b)$$

$$b_6 \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} - c_R \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} - d_6 \Psi_{D3,3,1} = -\frac{C_A}{k} \quad , \quad (D.53a)$$

$$c_R \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} + b_6 \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} + d_6 \Psi_{C3,3,1} = -\frac{C_B}{k} \quad , \quad (D.53b)$$

onde

$$b_4 = c_I + \Lambda_T / k \quad ,$$

$$b_5 = c_I + \Lambda_T / 2k \quad ,$$

$$b_6 = 3 c_I + \Lambda_T / k ,$$

e

$$d_6 = \frac{d\bar{u}^{(0)}}{dp} .$$

As amplitudes da perturbação de segunda ordem na temperatura são dados por:

$$T_{\alpha r, m, n} = - \frac{p f_0}{R} \frac{d \Psi_{\alpha} r, m, n}{dp} = \theta_{\alpha r, m, n} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} , \quad (D.54)$$

onde $\alpha = A, B, C, D$ e r, m, n correspondem aos índices dados nas Equações de D.33 a D.46.

D.2.2 - VELOCIDADE VERTICAL, AQUECIMENTO E POTENCIAL DE VELOCIDADE

Os forçantes para a perturbação de segunda ordem na velocidade vertical $\omega^{(2)}$ (Equação 3.41) são dados por:

$$\begin{aligned} F_{al}^{(2)} = & \frac{2 f_0}{\sigma} \frac{d\bar{u}^{(0)}}{dp} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi^{(2)} + \frac{\beta f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial x \partial p} \\ & + \frac{f_0}{\sigma} \nabla^2 \left\{ \frac{\partial \bar{\Psi}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial x \partial p} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}^{(1)}}{\partial y \partial p} \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial x \partial p} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial y \partial p} - \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial x \partial p} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial y \partial p} \right\} \\ & + \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ - \frac{\partial \bar{\Psi}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi^{(1)} + \frac{\partial^3 \bar{\Psi}^{(1)}}{\partial y^3} \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi^{(1)} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Psi^{(1)} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial \psi(1)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi(1) - \frac{\partial \psi(1)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi(1) \quad , \quad (D.55)$$

$$\begin{aligned} F_{a2}(2) = & \frac{f_0}{\sigma} \nabla^2 \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}(1)}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial x \partial p} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}(1)}{\partial y \partial p} \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} \right. \\ & + \frac{\partial \psi(1)}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial x \partial p} \frac{\partial \psi(2)}{\partial y} + \frac{\partial \psi(2)}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial x \partial p} \\ & - \frac{\partial \psi(1)}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial y \partial p} - \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial y \partial p} \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial y \partial p} \\ & - \frac{\partial \psi(1)}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial x \partial p} - \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial x \partial p} \frac{\partial \psi(2)}{\partial y} - \frac{\partial \psi(2)}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial x \partial p} \\ & \left. + \frac{\partial \psi(1)}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial y \partial p} + \frac{\partial^2 \psi(1)}{\partial y \partial p} \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi(2)}{\partial y \partial p} \right\} \\ & + \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ - \frac{\partial \bar{\psi}(1)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi(2) + \frac{\partial^3 \bar{\psi}(1)}{\partial y^3} \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(1)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi(2) \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi(2) \frac{\partial \psi(2)}{\partial y} - \frac{\partial \psi(2)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi(2) + \frac{\partial \psi(1)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi(2) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi(1) \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi(2) + \frac{\partial \psi(1)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi(2) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi(1) \frac{\partial \psi(2)}{\partial y} + \frac{\partial \psi(2)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi(2) - \frac{\partial \psi(1)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi(2) \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi(1) \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(2)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi(2) \right\} \quad , \quad (D.56) \end{aligned}$$

$$F_q(2) = \frac{R}{p \sigma c_p} \nabla^2 \dot{Q}(2) \quad , \quad (D.57)$$

$$F_{\Lambda}^{(2)} = \frac{f_0}{\sigma} \frac{d\Lambda_{\xi}}{dp} \nabla^2 \psi^{(2)} + \frac{f_0}{\sigma} (\Lambda_{\xi} - \Lambda_T) \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 \psi^{(2)}, \quad (D.58)$$

Para a solução desse problema a velocidade vertical será decomposta em três partes, como já enunciado pela Equação 3.23:

$$\omega^{(2)} = \omega_a^{(2)} + \omega_d^{(2)} + \omega_{\Lambda}^{(2)}, \quad (D.59)$$

de modo que

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega_a^{(2)}}{\partial p^2} + \nabla^2 \omega_a^{(2)} = F_{a1}^{(2)} + F_{a2}^{(2)}, \quad (D.60)$$

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega_d^{(2)}}{\partial p^2} + \nabla^2 \omega_d^{(2)} = F_q^{(2)} \quad (D.61)$$

e

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega_{\Lambda}^{(2)}}{\partial p^2} + \nabla^2 \omega_{\Lambda}^{(2)} = F_{\Lambda}^{(2)}, \quad (D.62)$$

onde o aquecimento, parametrizado segundo o esquema de Mak (1982), é

$$\dot{Q}^{(2)} = - \varepsilon C_p \frac{p}{p_s} H \omega_a^{(2)}(p_b), \quad (D.63)$$

e o potencial de velocidade é obtido por

$$\nabla^2 \chi^{(2)} = - \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial p}. \quad (D.64)$$

A condição de contorno para a velocidade vertical é:

$$\omega^{(2)} = 0 \quad (D.65)$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$.

Usando as Equações 3.35, 3.38 e 3.43 nas Equações D.55 e D.56, obtem-se:

$$\begin{aligned}
 F_{a1}^{(2)} = & (F_{A1,1,1}^{a1} \cos kX + F_{B1,1,1}^{a1} \sen kX) \cos \ell y \exp(\nu_I t) \\
 & + [F_{A2,0,2}^{a1} \cos 2kX + F_{B2,0,2}^{a1} \sen 2kX + (F_{A2,2,2}^{a1} \cos 2kX \\
 & + F_{B2,2,2}^{a1} \sen 2kX) \cos 2 \ell y] \exp(2 \nu_I t) + [(F_{A3,1,1}^{a1} \cos kX \\
 & + F_{B3,1,1}^{a1} \sen kX) \cos \ell y + (F_{C3,1,1}^{a1} \cos kX + F_{D3,1,1}^{a1} \sen kX) \cdot \\
 & \sen \ell y] \exp(3 \nu_I t) + [(F_{a3,3,1}^{a1} \cos kX + F_{B3,3,1}^{a1} \sen kX) \cdot \\
 & \cos 3 \ell y + (F_{C3,3,1}^{a1} \cos kX + F_{D3,3,1}^{a1} \sen kX) \cdot \\
 & \sen 3 \ell y] \exp(3 \nu_I t)
 \end{aligned} \tag{D.66}$$

e

$$\begin{aligned}
 F_{a2}^{(2)} = & (F_{A2,0,2}^{a2} \cos 2kX + F_{B2,0,2}^{a2} \sen 2kX) \exp(2 \nu_I t) \\
 & + [(F_{A3,1,1}^{a2} \cos kX + F_{B3,1,1}^{a2} \sen kX) \cos \ell y + (F_{C3,1,1}^{a2} \cos kX \\
 & + F_{D3,1,1}^{a2} \sen kX) \sen \ell y] \exp(3 \nu_I t) + [(F_{A3,3,1}^{a2} \cos kX \\
 & + F_{B3,3,1}^{a2} \sen kX) \cos 3 \ell y + (F_{C3,3,1}^{a2} \cos kX + F_{D3,3,1}^{a2} \sen kX) \cdot \\
 & \sen 3 \ell y] \exp(3 \nu_I t) + [(F_{A3,1,3}^{a2} \cos 3kX + F_{B3,1,3}^{a2} \sen 3kX) \cdot \\
 & \cos \ell y + (F_{C3,1,3}^{a2} \cos 3kX + F_{D3,1,3}^{a2} \sen 3kX) \sen \ell y] \exp(3 \nu_I t) \\
 & + (F_{A4,0,2}^{a2} \cos 2kX + F_{B4,0,2}^{a2} \sen 2kX) \exp(4 \nu_I t) + [(F_{A4,2,2}^{a2} \cdot \\
 & \cos 2kX + F_{B4,2,2}^{a2} \sen 2kX) \cos 2 \ell y + (F_{C4,2,2}^{a2} \cos 2kX \\
 & + F_{D4,2,2}^{a2} \sen 2 \ell y] \exp(4 \nu_I t) + [(F_{A4,4,2}^{a2} \cos 2kX \\
 & + F_{B4,4,2}^{a2} \sen 2kX) \cos 4 \ell y + (F_{C4,4,2}^{a2} \cos 2kX + F_{D4,4,2}^{a2} \cdot \\
 & \sen 4 \ell y] \exp(4 \nu_I t) + [(F_{C4,2,4}^{a2} \cos 4kX + F_{D4,2,4}^{a2} \sen 4kX) \cdot \\
 & \cos 2 \ell y] \exp(4 \nu_I t) + [(F_{A5,1,1}^{a2} \cos kX + F_{B5,1,1}^{a2} \sen kX) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos \ell y + (F^{a2}_{C5,1,1} \cos kX + F^{a2}_{D5,1,1} \sen kX) \sen \ell y] \exp(5 \nu_I t) \\
 & + [(F^{a2}_{A5,3,1} \cos kX + F^{a2}_{B5,3,1} \sen kX) \cos 3 \ell y + (F^{a2}_{C5,3,1} \cdot \\
 & \cos kX + F^{a2}_{D5,3,1} \sen kX) \sen 3 \ell y] \exp(5 \nu_I t) + [(F^{a2}_{A5,1,3} \cdot \\
 & \cos 3kX + F^{a2}_{B5,1,3} \sen 3kX) \cos \ell y + (F^{a2}_{C5,1,3} \cos 3kX \\
 & F^{a2}_{D5,1,3} \sen 3kX) \sen \ell y] \exp(5 \nu_I t) + (F^{a2}_{A5,3,3} \cos 3kX \\
 & + F^{a2}_{B5,3,3} \sen 3kX) \cos 3 \ell y + (F^{a2}_{C5,3,3} \cos 3kX + F^{a2}_{D5,3,3} \cdot \\
 & \sen 3kX) \sen 3 \ell y] \exp(5 \nu_I t) + [(F^{a2}_{A5,5,1} \cos kX + F^{a2}_{B5,5,1} \cdot \\
 & \sen kX) \cos 5 \ell y + (F^{a2}_{C5,5,1} \cos kX + F^{a2}_{D5,5,1} \sen kX) \sen 5 \ell y] \cdot \\
 & \exp(5 \nu_I t) + [(F^{a2}_{A5,5,3} \cos 3kX + F^{a2}_{B5,5,3} \sen 3kX) \cos 5 \ell y \\
 & + (F^{a2}_{C5,5,3} \cos 3kX + F^{a2}_{D5,5,3} \sen 3kX) \sen 5 \ell y] \exp(5 \nu_I t) \\
 & + (F^{a2}_{A6,0,2} \cos 2kX + F^{a2}_{B6,0,2} \sen 2kX) \exp(6 \nu_I t) \\
 & + [(F^{a2}_{A6,2,2} \cos 2kX + F^{a2}_{B6,2,2} \sen 2kX) \cos 2 \ell y + (F^{a2}_{C6,2,2} \cdot \\
 & \cos 2kX + F^{a2}_{D6,2,2} \sen 2kX) \sen 2 \ell y] \exp(6 \nu_I t) + [(F^{a2}_{A6,4,2} \cdot \\
 & \cos 2kX + F^{a2}_{B6,4,2} \sen 2kX) \cos 4 \ell y + (F^{a2}_{C6,4,2} \cos 2kX \\
 & + F^{a2}_{D6,4,2} \sen 2kX) \sen 4 \ell y] \exp(6 \nu_I t) \quad , \quad (D.67)
 \end{aligned}$$

onde

$$F^{a1}_{A1,1,1} = - \frac{k f_0}{\sigma} \left(2 \mu^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \quad \Psi_{B1,1,1} - \beta \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} \right) \quad , \quad (D.68)$$

$$F^{a1}_{B1,1,1} = \frac{k f_0}{\sigma} \left(2 \mu^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \quad \Psi_{A1,1,1} - \beta \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} \right) \quad , \quad (D.69)$$

$$F^{a1}_{A2,0,2} = - \frac{k f_0}{\sigma} \left(16 \kappa^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \quad \Psi_{B2,0,2} - 2 \beta \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} \right) \quad , \quad (D.70)$$

$$F_{B2,0,2}^{a1} = \frac{kf_0}{\sigma} \left(16 \kappa^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{A2,0,2} - 2\beta \frac{d\Psi_{A2,0,2}}{dp} \right), \quad (D.71)$$

$$F_{A2,2,2}^{a1} = -\frac{kf_0}{\sigma} \left(16 \mu^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{B2,2,2} - 2\beta \frac{d\Psi_{B2,2,2}}{dp} \right), \quad (D.72)$$

$$F_{B2,2,2}^{a1} = \frac{kf_0}{\sigma} \left(16 \mu^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{A2,2,2} - 2\beta \frac{d\Psi_{A2,2,2}}{dp} \right), \quad (D.73)$$

$$F_{A3,1,1}^{a1} = -\frac{kf_0}{\sigma} \left(2 \mu^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{B3,1,1} - \beta \frac{d\Psi_{B3,1,1}}{dp} \right), \quad (D.74)$$

$$F_{B3,1,1}^{a1} = \frac{kf_0}{\sigma} \left(2 \mu^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{A3,1,1} - \beta \frac{d\Psi_{A3,1,1}}{dp} \right), \quad (D.75)$$

$$F_{C3,1,1}^{a2} = -\frac{kf_0}{\sigma} \left\{ 2 \mu^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{D3,1,1} - \beta \frac{d\Psi_{D3,1,1}}{dp} + 2\ell [2\ell^2 \Psi_I^{(1)} \frac{d\Psi_I}{dp} - (k^2 - \ell^2) \frac{d\Psi_I^{(1)}}{dp} \Psi_I] \right\}, \quad (D.76)$$

$$F_{D3,1,1}^{a2} = \frac{kf_0}{\sigma} \left\{ 2 \mu^2 \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{C3,1,1} - \beta \frac{d\Psi_{C3,1,1}}{dp} - 2\ell [2\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d\Psi_R}{dp} - (k^2 - \ell^2) \frac{d\tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} \Psi_R] \right\}, \quad (D.77)$$

$$F_{A3,3,1}^{a2} = -\frac{kf_0}{\sigma} \left[2(k^2 + 9\ell^2) \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{B3,3,1} - \beta \frac{d\Psi_{B3,3,1}}{dp} \right], \quad (D.78)$$

$$F_{B3,3,1}^{a2} = \frac{kf_0}{\sigma} \left[2(k^2 + 9\ell^2) \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{A3,3,1} - \beta \frac{d\Psi_{A3,3,1}}{dp} \right], \quad (D.79)$$

$$F_{C3,3,1}^{a2} = -\frac{kf_0}{\sigma} \left[2(k^2 + 9\ell^2) \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{D3,3,1} - \beta \frac{d\Psi_{D3,3,1}}{dp} \right]$$

$$- 2 \ell [6 \ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_I}{dp} - (k^2+3 \ell^2) \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} \Psi_I] \quad , \quad (D.80)$$

$$F_{D3,3,1}^{a2} = \frac{k f_0}{\sigma} [2 (k^2+9 \ell^2) \frac{du^{(0)}}{dp} \Psi_{C3,3,1} - \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} + 2 \ell [6 \ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_R}{dp} - (k^2+3 \ell^2) \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} \Psi_R] \quad , \quad (D.81)$$

e

$$F_{A2,0,2}^{a2} = \frac{2 f_0 k^3 \ell}{\sigma} \left(\Psi_R \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} - \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_R}{dp} - \Psi_I \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} + \Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_I}{dp} \right) \quad , \quad (D.82)$$

$$F_{B2,0,2}^{a2} = \frac{2 f_0 k^3 \ell}{\sigma} \left(\Psi_R \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} - \Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_R}{dp} + \Psi_I \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} - \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_I}{dp} \right) \quad , \quad (D.83)$$

$$F_{A3,1,1}^{a2} = \frac{2 f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \Psi_{B1,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 2 \ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} + (k^2 - \ell^2) \left(\Psi_R \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} + \Psi_I \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} \right) + 2 k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_I}{dp} + \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_R}{dp} \right)] \quad , \quad (D.84)$$

$$F_{B3,1,1}^{a2} = \frac{2 f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \Psi_{A1,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 6 \ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp}$$

$$\begin{aligned}
 & + (k^2 - \ell^2) \left(\Psi_R \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} - \Psi_I \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} \right) \\
 & + 2k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_R}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_I}{dp} \right) \quad , \quad (D.85)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{C3,1,1}^{a2} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \left(\Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} - \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} \right) \\
 & - 2k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} \right)] \quad , \quad (D.86)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{D3,1,1}^{a2} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \left(\Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} - \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} \right) \\
 & + 2k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} \right)] \quad , \quad (D.87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{A3,3,1}^{a2} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 + 3\ell^2) \Psi_{B1,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 6\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) \left(\Psi_R \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} + \Psi_I \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} \right) \\
 & + 2(k^2 + 3\ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_I}{dp} + \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_R}{dp} \right)] \quad , \quad (D.88)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{B3,3,1}^{a2} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 + 3\ell^2) \Psi_{A1,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 6\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) \left(\Psi_R \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} - \Psi_I \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} \right) \\
 & + 2(k^2 + 3\ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_R}{dp} - \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_I}{dp} \right)] \quad , \quad (D.89)
 \end{aligned}$$

$$F_{C3,3,1}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [2(k^2 + 3\ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{B1,1,1}}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{A1,1,1}}{dp}) - (k^2 - 3\ell^2) (\psi_{A1,1,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} - \psi_{B1,1,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp})], \quad (D.90)$$

$$F_{D3,3,1}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [2(k^2 + 3\ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{A1,1,1}}{dp} + \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{B1,1,1}}{dp}) + (k^2 - 3\ell^2) (\psi_{A1,1,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} + \psi_{B1,1,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp})], \quad (D.91)$$

$$F_{A3,1,3}^{a2} = -\frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(3k^2 + \ell^2) (\psi_R \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp} - \psi_I \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp}) + 6k^2 (\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_I}{dp} - \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_R}{dp}) + (3k^2 - \ell^2) (\psi_R \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} - \psi_I \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp}) + 2(3k^2 + \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_I}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_R}{dp})], \quad (D.92)$$

$$F_{B3,1,3}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(3k^2 + \ell^2) (\psi_R \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp} + \psi_I \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp}) - 6k^2 (\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_R}{dp} + \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_I}{dp}) + (3k^2 - \ell^2) (\psi_R \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} + \psi_I \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp}) - 2(3k^2 + \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_R}{dp} + \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_I}{dp})], \quad (D.93)$$

$$F_{C3,1,3}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(3k^2 + \ell^2) (\psi_{A1,1,1} \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp} - \psi_{B1,1,1} \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp}) - 6k^2 (\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_{B1,1,1}}{dp} - \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_{A1,1,1}}{dp})]$$

$$\begin{aligned}
 & -(3k^2 + \ell^2) \left(\Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} + \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} \right) \\
 & + 2 \left[(3k^2 + \ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} + \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} \right) \right], \quad (D.94)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa2_{D3,1,3} &= \frac{-2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(3k^2 + \ell^2) \left(\Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} - \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} \right) \right. \\
 & \left. - 6k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} \right) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. - (3k^2 + \ell^2) \left(\Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} - \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} \right) \right. \\
 & \left. + 2 \left[(3k^2 + \ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} - \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} \right) \right] \right], \quad (D.95)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa2_{A4,0,2} &= \frac{2f_0 k^3 \ell}{\sigma} \left(8 \Psi_{B2,2,2} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - \Psi_R \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} + \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_R}{dp} \right. \\
 & + \Psi_I \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} - \Psi_{A3,1,1} \frac{d \Psi_I}{dp} + \Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} - \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} \\
 & \left. + \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} - \Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} \right), \quad (D.96)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa2_{B4,0,2} &= \frac{-2f_0 k^3 \ell}{\sigma} \left(8 \Psi_{A2,2,2} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - \Psi_R \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} + \Psi_{A3,1,1} \frac{d \Psi_R}{dp} \right. \\
 & \left. - \Psi_I \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} + \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_I}{dp} + \Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} - \Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} \right. \\
 & \left. - \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} + \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} \right), \quad (D.97)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{A4,2,2}^{a2} = & \frac{4f_0 k \ell}{\sigma} [4k^2 \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi^{(1)}}{dp} - 8 \ell^2 \Psi^{(1)} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} \\
 & - (k^2 - \ell^2) (\Psi_R \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} - \Psi_I \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp}) - (k^2 + 3 \ell^2) (\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_I}{dp} \\
 & - \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_R}{dp}) - (k^2 + 3 \ell^2) (\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp} + \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp}) \\
 & + (k^2 - \ell^2) (\Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} + \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp})] , \quad (D.98)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{B4,2,2}^{a2} = & \frac{4f_0 k \ell}{\sigma} [4k^2 \Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi^{(1)}}{dp} - 8 \ell^2 \Psi^{(1)} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} \\
 & - (k^2 - \ell^2) (\Psi_R \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} + \Psi_I \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp}) + (k^2 + 3 \ell^2) (\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_R}{dp} \\
 & + \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_I}{dp}) - (k^2 + 3 \ell^2) (\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp}) \\
 & + (k^2 - \ell^2) (\Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} - \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp})] , \quad (D.99)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{C4,2,2}^{a2} = & \frac{4f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) (\Psi_R \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} - \Psi_I \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp}) \\
 & + (k^2 + 3 \ell^2) (\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_I}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_R}{dp}) \\
 & - (k^2 + 3 \ell^2) (\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{A1,1,1}}{dp} + \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{B1,1,1}}{dp}) \\
 & + (k^2 - \ell^2) (\Psi_{A1,1,1} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} + \Psi_{B1,1,1} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp})] , \quad (D.100)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{D4,2,2}^{a2} = & \frac{4f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \left(\psi_R \frac{d\psi}{dp} C_{3,3,1} + \psi_I \frac{d\psi}{dp} D_{3,3,1} \right) \\
 & - (k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_R}{dp} + \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_I}{dp} \right) \\
 & - (k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{B1,1,1}}{dp} - \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{A1,1,1}}{dp} \right) \\
 & - (k^2 - \ell^2) \left(\psi_{A1,1,1} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp} - \psi_{B1,1,1} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} \right)], \quad (D.101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{A4,4,2}^{a2} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [8(k^2 + 2\ell^2) \psi_{B2,2,2} \frac{d\tilde{\psi}^{(1)}}{dp} - 16\ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} \\
 & + (k^2 + 2\ell^2) \left(\psi_R \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp} - \psi_I \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} \right) + (k^2 + 6\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_I}{dp} \right. \\
 & \left. - \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_R}{dp} \right) - (k^2 + 6\ell^2) \left(\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{B1,1,1}}{dp} + \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{A1,1,1}}{dp} \right) \\
 & \left. + (k^2 + 2\ell^2) \left(\psi_{A1,1,1} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp} + \psi_{B1,1,1} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} \right) \right], \quad (D.102)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{B4,4,2}^{a2} = & -\frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [8(k^2 + 2\ell^2) \psi_{A2,2,2} \frac{d\tilde{\psi}^{(1)}}{dp} - 16\ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} \\
 & + (k^2 + 2\ell^2) \left(\psi_R \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} + \psi_I \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp} \right) - (k^2 + 6\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_R}{dp} \right. \\
 & \left. + \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_I}{dp} \right) - (k^2 + 6\ell^2) \left(\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{A1,1,1}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{B1,1,1}}{dp} \right) \\
 & \left. + (k^2 + 2\ell^2) \left(\psi_{A1,1,1} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{B1,1,1} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp} \right) \right], \quad (D.103)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa2_{C4,4,2} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2+2\ell^2) (\Psi_R \frac{d\Psi_{D3,3,1}}{dp} - \Psi_I \frac{d\Psi_{C3,3,1}}{dp}) \\
 & + (k^2+6\ell^2) (\Psi_{C3,3,1} \frac{d\Psi_I}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d\Psi_R}{dp}) \\
 & + (k^2+6\ell^2) (\Psi_{A3,3,1} \frac{d\Psi_{B1,1,1}}{dp} + \Psi_{B3,3,1} \frac{d\Psi_{A1,1,1}}{dp}) \\
 & - (k^2+2\ell^2) (\Psi_{A1,1,1} \frac{d\Psi_{B3,3,1}}{dp} + \Psi_{B1,1,1} \frac{d\Psi_{A3,3,1}}{dp}) , \quad (D.104)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa2_{D4,4,2} = & - \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2+2\ell^2) (\Psi_R \frac{d\Psi_{C3,3,1}}{dp} + \Psi_I \frac{d\Psi_{D3,3,1}}{dp}) \\
 & - (k^2+6\ell^2) (\Psi_{C3,3,1} \frac{d\Psi_R}{dp} + \Psi_{D3,3,1} \frac{d\Psi_I}{dp}) \\
 & + (k^2+6\ell^2) (\Psi_{A3,3,1} \frac{d\Psi_{A1,1,1}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d\Psi_{B1,1,1}}{dp}) \\
 & - (k^2+2\ell^2) (\Psi_{A1,1,1} \frac{d\Psi_{A3,3,1}}{dp} - \Psi_{B1,1,1} \frac{d\Psi_{B3,3,1}}{dp}) , \quad (D.105)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa2_{C4,4,2} = & \frac{16f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 + 6\ell^2) (\Psi_{A2,2,2} \frac{d\Psi_{B2,0,2}}{dp} \\
 & + \Psi_{B2,2,2} \frac{d\Psi_{A2,0,2}}{dp}) - 2k^2 (\Psi_{A2,0,2} \frac{d\Psi_{B2,2,2}}{dp} \\
 & + \Psi_{B2,0,2} \frac{d\Psi_{A2,2,2}}{dp}) , \quad (D.106)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{D4,4,2}^{a2} = & - \frac{16f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 + 6 \ell^2) (\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} \\
 & - \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp}) - 2k^2 (\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} \\
 & - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp})] , \quad (D.107)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{A5,1,1}^{a2} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \Psi_{B3,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 2 \ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} \\
 & + (k^2 + 3 \ell^2) \Psi_{B3,3,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} + 2 \ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} \\
 & + (k^2 - \ell^2) (\Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} - \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp}) \\
 & - 2k^2 (\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp}) \\
 & + (k^2 - 3 \ell^2) (\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp}) \\
 & - 2(k^2 - \ell^2) (\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} - \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp})] , \quad (D.108)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{B5,1,1}^{a2} = & - \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \Psi_{A3,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 2 \ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} \\
 & + (k^2 + 3 \ell^2) \Psi_{A3,3,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} + 2 \ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} \\
 & + (k^2 - \ell^2) (\Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} + \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2k^2 (\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} + \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp}) \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) (\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} + \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp}) \\
 & + 2(k^2 - \ell^2) (\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} + \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp})] , \quad (D.109)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa^2_{C5,1,1} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \Psi_{D3,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 2\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} \\
 & - (k^2 + 3\ell^2) \Psi_{D3,3,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 2\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} \\
 & + (k^2 - \ell^2) (\Psi_{A3,1,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} - \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp}) \\
 & - 2k^2 (\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp}) \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) (\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp}) \\
 & - 2(k^2 - \ell^2) (\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} - \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp})] , \quad (D.110)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa^2_{D5,1,1} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) \Psi_{C3,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 2\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} \\
 & - (k^2 + 3\ell^2) \Psi_{C3,3,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 2\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} \\
 & + (k^2 - \ell^2) (\Psi_{A3,1,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} + \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} + \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} \right) \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} + \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} \right) \\
 & + 2(k^2 - \ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} + \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} \right) \Big] , \quad (D.111)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{A5,3,1}^{a2} &= \frac{2f_{0k\ell}}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \Psi_{B3,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 6\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} \right. \\
 & + (3k^2 - 9\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} \right) \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) \left(\Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} - \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} \right) \\
 & - 2(k^2 + 3\ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} - \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} \right) \\
 & \left. - 6k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.112)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{B5,3,1}^{a2} &= \frac{2f_{0k\ell}}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \Psi_{A3,1,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 6\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} \right. \\
 & + (3k^2 - 9\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} + \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} \right) \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) \left(\Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} + \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} \right) \\
 & + 2(k^2 + 3\ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} + \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} \right)
 \end{aligned}$$

$$+ 6k^2 (\Psi_{A2,0,2} \frac{d\Psi_{C3,3,1}}{dp} + \Psi_{B2,0,2} \frac{d\Psi_{D3,3,1}}{dp})] , \quad (D.113)$$

$$F_{C5,3,1}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2+3\ell^2) \Psi_{D3,1,1} \frac{d\Psi^{(1)}}{dp} - 6\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d\Psi_{D3,1,1}}{dp}$$

$$- (3k^2-9\ell^2) (\Psi_{A3,3,1} \frac{d\Psi_{B2,0,2}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d\Psi_{A2,0,2}}{dp})$$

$$- (k^2-3\ell^2) (\Psi_{A3,1,1} \frac{d\Psi_{B2,2,2}}{dp} - \Psi_{B3,1,1} \frac{d\Psi_{A2,2,2}}{dp})$$

$$+ 2(k^2+3\ell^2) (\Psi_{A2,2,2} \frac{d\Psi_{B3,1,1}}{dp} - \Psi_{B2,2,2} \frac{d\Psi_{A3,1,1}}{dp})$$

$$+ 6k^2 (\Psi_{A2,0,2} \frac{d\Psi_{B3,3,1}}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d\Psi_{A3,3,1}}{dp})] , \quad (D.114)$$

$$F_{D5,3,1}^{a2} = - \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2+3\ell^2) \Psi_{C3,1,1} \frac{d\tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 6\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d\Psi_{C3,1,1}}{dp}$$

$$- (3k^2-9\ell^2) (\Psi_{A3,3,1} \frac{d\Psi_{A2,0,2}}{dp} + \Psi_{B3,3,1} \frac{d\Psi_{B2,0,2}}{dp})$$

$$- (k^2-3\ell^2) (\Psi_{A3,1,1} \frac{d\Psi_{A2,2,2}}{dp} + \Psi_{B3,1,1} \frac{d\Psi_{B2,2,2}}{dp})$$

$$- 2(k^2+3\ell^2) (\Psi_{A2,2,2} \frac{d\Psi_{A3,1,1}}{dp} + \Psi_{B2,2,2} \frac{d\Psi_{B3,1,1}}{dp})$$

$$- 6k^2 (\Psi_{A2,0,2} \frac{d\Psi_{A3,3,1}}{dp} + \Psi_{B2,0,2} \frac{d\Psi_{B3,3,1}}{dp})] , \quad (D.115)$$

$$F_{A5,1,3}^{a2} = - \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(3k^2+\ell^2) (\Psi_{C3,1,1} \frac{d\Psi_{B2,0,2}}{dp} + \Psi_{D3,1,1} \frac{d\Psi_{A2,0,2}}{dp})$$

$$\begin{aligned}
 & - 6k^2 (\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_{D3,1,1}}{dp} + \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_{C3,1,1}}{dp}) \\
 & + (3k^2 - \ell^2) (\psi_{C3,1,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} + \psi_{D3,1,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp}) \\
 & - 2(3k^2 + \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{D3,1,1}}{dp} + \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{C3,1,1}}{dp}) \\
 & + 6\mu^2 (\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} + \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp}) \\
 & - 4(3k^2 - \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp} + \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp})] , \quad (D.116)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa^2_{B5,1,3} = & \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(3k^2 + \ell^2) (\psi_{C3,1,1} \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp}) \\
 & - 6k^2 (\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_{C3,1,1}}{dp} - \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_{D3,1,1}}{dp}) \\
 & + (3k^2 - \ell^2) (\psi_{C3,1,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp}) \\
 & - 2(3k^2 + \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{C3,1,1}}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{D3,1,1}}{dp}) \\
 & + 6\mu^2 (\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp}) \\
 & - 4(3k^2 - \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp})] , \quad (D.117)
 \end{aligned}$$

$$Fa^2_{C5,1,3} = - \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 - \ell^2) (\psi_{A3,1,1} \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp} - \psi_{B3,1,1} \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp})$$

$$\begin{aligned}
 & - 2k^2 \left(\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_{B3,1,1}}{dp} - \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_{A3,1,1}}{dp} \right) \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} - \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} \right) \\
 & - 2(k^2 - \ell^2) \left(\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{B3,1,1}}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{A3,1,1}}{dp} \right) \Big] , \quad (D.118)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{D5,1,3}^{a2} &= \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 - \ell^2) \left(\psi_{A3,1,1} \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp} + \psi_{B3,1,1} \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp} \right) \right. \\
 & + 2k^2 \left(\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_{A3,1,1}}{dp} + \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_{B3,1,1}}{dp} \right) \\
 & + (k^2 - 3\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} + \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} \right) \\
 & \left. + 2(k^2 - \ell^2) \left(\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} + \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.119)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{A5,3,3}^{a2} &= \frac{-18f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp} + \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp} \right) \right. \\
 & - 2k^2 \left(\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp} + \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} \right) \Big] , \quad (D.120)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{B5,3,3}^{a2} &= \frac{18f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp} \right) \right. \\
 & - 2k^2 \left(\psi_{A2,0,2} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{B2,0,2} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp} \right) \Big] , \quad (D.121)
 \end{aligned}$$

$$F_{C5,3,3}^{a2} = \frac{18f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{B2,0,2}}{dp} + \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{A2,0,2}}{dp} \right) \right.$$

$$- 2k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} + \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} \right)] , \quad (D.122)$$

$$F_{D5,3,3}^{a2} = \frac{-18f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,0,2}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,0,2}}{dp} \right) \right.$$

$$\left. - 2k^2 \left(\Psi_{A2,0,2} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} - \Psi_{B2,0,2} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.123)$$

$$F_{A5,5,1}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 15\ell^2) \Psi_{B3,3,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 10\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} \right.$$

$$\left. + 2(k^2 - 15\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} \right) \right.$$

$$\left. - 4(k^2 + 5\ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} - \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.124)$$

$$F_{B5,5,1}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 15\ell^2) \Psi_{A3,3,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 10\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} \right.$$

$$\left. + 2(k^2 - 15\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} + \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} \right) \right.$$

$$\left. + 4(k^2 + 5\ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} + \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.125)$$

$$F_{C5,5,1}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 15\ell^2) \Psi_{D3,3,1} \frac{d \tilde{\Psi}^{(1)}}{dp} - 10\ell^2 \tilde{\Psi}^{(1)} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} \right.$$

$$\left. - 2(k^2 - 15\ell^2) \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{B2,2,2}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{A2,2,2}}{dp} \right) \right.$$

$$\left. + 4(k^2 + 5\ell^2) \left(\Psi_{A2,2,2} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} - \Psi_{B2,2,2} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.126)$$

$$F_{D5,5,1}^{a2} = -\frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [(k^2 + 15 \ell^2) \psi_{C3,3,1} \frac{d\tilde{\psi}^{(1)}}{dp} - 10 \ell^2 \tilde{\psi}^{(1)} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} \\ - 2(k^2 - 15 \ell^2) (\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} + \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp}) \\ + 4(k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} + \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp})] , \quad (D.127)$$

$$F_{A5,5,3}^{a2} = \frac{-2f_0 k \ell}{\sigma} [3(k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} + \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp}) \\ + 2(3k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} + \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp})] , \quad (D.128)$$

$$F_{B5,5,3}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [3(k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp}) \\ - 2(3k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp})] , \quad (D.129)$$

$$F_{C5,5,3}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} [3(k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp} + \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp}) \\ - 2(3k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp} + \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp})] , \quad (D.130)$$

$$F_{D5,5,3}^{a2} = \frac{-2f_0 k \ell}{\sigma} [3(k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{A2,2,2}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{B2,2,2}}{dp}) \\ - 2(3k^2 + 5 \ell^2) (\psi_{A2,2,2} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp})] , \quad (D.131)$$

$$F_{A6,0,2}^{a2} = \frac{2f_0 k^3 \ell}{\sigma} [\psi_{A3,1,1} \frac{d\psi_{D3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d\psi_{A3,1,1}}{dp}]$$

$$\begin{aligned}
 & + \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} - \Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} + 3 \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} \right. \\
 & - \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} + \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} \\
 & \left. - \Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} \right)] , \quad (D.132)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa2_{B6,0,2} = & - \frac{2f_0 k^3 \ell}{\sigma} \left[\Psi_{A3,1,1} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} - \Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} \right. \\
 & - \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} + \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} + 3 \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} \right. \\
 & - \Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} \\
 & \left. \left. + \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.133)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fa2_{A6,2,2} = & \frac{4f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} + \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} \right) \right. \\
 & - (k^2 - \ell^2) \left(\Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} + \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} \right) \\
 & + (k^2 - \ell^2) \left(\Psi_{A3,1,1} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} + \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} \right) \\
 & \left. - (k^2 + 3\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} + \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.134)
 \end{aligned}$$

$$Fa2_{B6,2,2} = - \frac{4f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{C3,1,1}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{D3,1,1}}{dp} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - (k^2 - \ell^2) \left(\psi_{C3,1,1} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp} \right) \\
 & + (k^2 - \ell^2) \left(\psi_{A3,1,1} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{B3,1,1} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp} \right) \\
 & - (k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{A3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{B3,1,1}}{dp} \right) \Big] , \quad (D.135)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{C6,2,2}^{a2} &= \frac{4f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{D3,1,1}}{dp} + \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{C3,1,1}}{dp} \right) \right. \\
 & - (k^2 - \ell^2) \left(\psi_{C3,1,1} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp} + \psi_{D3,1,1} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} \right) \\
 & - (k^2 - \ell^2) \left(\psi_{A3,1,1} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp} + \psi_{B3,1,1} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} \right) \\
 & \left. + (k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{B3,1,1}}{dp} + \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{A3,1,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.136)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{D6,2,2}^{a2} &= - \frac{4f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{C3,3,1} \frac{d\psi_{C3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d\psi_{D3,1,1}}{dp} \right) \right. \\
 & - (k^2 - \ell^2) \left(\psi_{C3,1,1} \frac{d\psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d\psi_{D3,3,1}}{dp} \right) \\
 & - (k^2 - \ell^2) \left(\psi_{A3,1,1} \frac{d\psi_{A3,3,1}}{dp} - \psi_{B3,1,1} \frac{d\psi_{B3,3,1}}{dp} \right) \\
 & \left. + (k^2 + 3\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{A3,1,1}}{dp} - \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{B3,1,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.137)
 \end{aligned}$$

$$F_{A6,4,2}^{a2} = - \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2 + 6\ell^2) \left(\psi_{A3,3,1} \frac{d\psi_{D3,1,1}}{dp} + \psi_{B3,3,1} \frac{d\psi_{C3,1,1}}{dp} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - (k^2+2\ell^2) \left(\Psi_{C3,1,1} \frac{d\Psi_{B3,3,1}}{dp} + \Psi_{D3,1,1} \frac{d\Psi_{A3,3,1}}{dp} \right) \\
 & - (k^2+2\ell^2) \left(\Psi_{A3,1,1} \frac{d\Psi_{D3,3,1}}{dp} + \Psi_{B3,1,1} \frac{d\Psi_{C3,3,1}}{dp} \right) \\
 & + (k^2+6\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d\Psi_{B3,1,1}}{dp} + \Psi_{D3,3,1} \frac{d\Psi_{A3,1,1}}{dp} \right)] , \quad (D.138)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{B6,4,2}^{a2} &= \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2+6\ell^2) \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d\Psi_{C3,1,1}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d\Psi_{D3,1,1}}{dp} \right) \right. \\
 & - (k^2+2\ell^2) \left(\Psi_{C3,1,1} \frac{d\Psi_{A3,3,1}}{dp} - \Psi_{D3,1,1} \frac{d\Psi_{B3,3,1}}{dp} \right) \\
 & - (k^2+2\ell^2) \left(\Psi_{A3,1,1} \frac{d\Psi_{C3,3,1}}{dp} - \Psi_{B3,1,1} \frac{d\Psi_{D3,3,1}}{dp} \right) \\
 & \left. + (k^2+6\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d\Psi_{A3,1,1}}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d\Psi_{B3,1,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.139)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{C6,4,2}^{a2} &= - \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2+6\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d\Psi_{D3,1,1}}{dp} + \Psi_{D3,3,1} \frac{d\Psi_{C3,1,1}}{dp} \right) \right. \\
 & - (k^2+2\ell^2) \left(\Psi_{C3,1,1} \frac{d\Psi_{D3,3,1}}{dp} + \Psi_{D3,1,1} \frac{d\Psi_{C3,3,1}}{dp} \right) \\
 & + (k^2+2\ell^2) \left(\Psi_{A3,1,1} \frac{d\Psi_{B3,3,1}}{dp} + \Psi_{B3,1,1} \frac{d\Psi_{A3,3,1}}{dp} \right) \\
 & \left. - (k^2+6\ell^2) \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d\Psi_{B3,1,1}}{dp} + \Psi_{B3,3,1} \frac{d\Psi_{A3,1,1}}{dp} \right) \right] , \quad (D.140)
 \end{aligned}$$

$$F_{D6,4,2}^{a2} = \frac{2f_0 k \ell}{\sigma} \left[(k^2+6\ell^2) \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d\Psi_{C3,1,1}}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d\Psi_{D3,1,1}}{dp} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - (k^2 + 2 \ell^2) \left(\Psi_{C3,1,1} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} - \Psi_{D3,1,1} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} \right) \\
 & + (k^2 + 2 \ell^2) \left(\Psi_{A3,1,1} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} - \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} \right) \\
 & - (k^2 + 6 \ell^2) \left(\Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{A3,1,1}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} \right) \Big] , \quad (D.141)
 \end{aligned}$$

Logo, usando a Equação 3.43 para $\omega_a^{(2)}$ e as Equações D.66 e D.67, a Equação D.60 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{d^2 W_{\alpha r, m, n}^a}{dp^2} - [(nk)^2 + (m \ell)^2] W_{\alpha r, m, n}^a = \\
 F_{\alpha r, m, n}^{a1} + F_{\alpha r, m, n}^{a2} , \quad (D.142)
 \end{aligned}$$

onde $W_{\alpha r, m, n}^a$ são as amplitudes de $\omega_a^{(2)}$, $\alpha = A, B, C, D$ e r, m, n podem assumir os valores dados pelos índices nas Equações D.66 e D.67.

As amplitudes do aquecimento devido a $\omega_a^{(2)}$ são dadas por:

$$\dot{Q}_{\alpha r, m, n} = - \epsilon C_p \frac{p}{p_s} H W_{\alpha r, m, n}^a(p_b) , \quad (D.143)$$

e os coeficientes do forçante $F_q^{(2)}$ por:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha r, m, n}^q &= \frac{R}{p \sigma C_p} [(nk)^2 + (m \ell)^2] \dot{Q}_{\alpha r, m, n} \\
 &= - \frac{R \epsilon}{p_s} \frac{H}{\sigma} W_{\alpha r, m, n}^a(p_b) . \quad (D.144)
 \end{aligned}$$

Pode-se, então, escrever a equação para as amplitudes de $\omega_d^{(2)}$ como:

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{d^2 W_{\alpha r, m, n}^d}{dp^2} - [(nk)^2 + (m \ell)^2] W_{\alpha r, m, n}^d = F_{\alpha r, m, n}^d . \quad (D.145)$$

A parte da velocidade vertical devida ao atrito é obtida calculando os coeficientes do forçante $F_{\Lambda}^{(2)}$ e usando as amplitudes de $\Psi^{(2)}$ dadas nas Equações de D.33 a D.46. Tais coeficientes são dados por:

$$F_{\alpha r, m, n}^{\Lambda} = - \frac{f_0}{\sigma} [(nk)^2 + (m \ell)^2] .$$

$$\left[\frac{d \Lambda_{\xi}}{dp} \Psi_{\alpha r, m, n} + (\Lambda_{\xi} - \Lambda_T) \frac{d \Psi_{\alpha r, m, n}}{dp} \right] , \quad (D.146)$$

e a equação para as amplitudes de $\omega_{\Lambda}^{(2)}$ por

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{d^2 W_{\alpha r, m, n}^{\Lambda}}{dp^2} - [(nk)^2 + (m \ell)^2] W_{\alpha r, m, n}^{\Lambda} = F_{\alpha r, m, n}^{\Lambda} . \quad (D.147)$$

Para se obter as amplitudes de $\omega^{(2)}$ e de $\chi^{(2)}$ basta fazer

$$W_{\alpha r, m, n} = W_{\alpha r, m, n}^a + W_{\alpha r, m, n}^d + W_{\alpha r, m, n}^{\Lambda} , \quad (D.148)$$

e

$$X_{\alpha r, m, n} = \frac{1}{[(nk)^2 + (m \ell)^2]} \frac{dW_{\alpha r, m, n}}{dp} , \quad (D.149)$$

respectivamente.

D.3 - CAMPO ZONAL DE SEGUNDA ORDEM

Os forçantes para os campos zonais de segunda ordem em $\bar{\omega}^{(2)}$ (Equação 3.44) e $\bar{\psi}^{(2)}$ (Equação 3.45) são dados, respectivamente, por:

$$\bar{F}_a^{(2)} = \frac{f_0}{\sigma} \nabla^2 \bar{M}^{(2)} - \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \bar{L}^{(2)}}{\partial p}, \quad (D.150)$$

$$\bar{F}_q^{(2)} = - \frac{R}{p \sigma c_p} \frac{\partial^2 \bar{Q}^{(2)}}{\partial Y^2}, \quad (D.151)$$

$$\bar{F}_\Lambda^{(2)} = \frac{f_0}{\sigma} \frac{d \Lambda_\xi}{dp} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^{(2)}}{\partial Y^2} + \frac{f_0}{\sigma} (\Lambda_\xi - \Lambda_T) \frac{\partial^3 \bar{\psi}^{(2)}}{\partial Y^2 \partial p}, \quad (D.152)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}^{(2)} = & \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^{(1)} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial Y} \\ & + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi^{(2)} + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Y} \nabla^2 \psi^{(2)} \\ & - \frac{\partial}{\partial Y} \nabla^2 \psi^{(1)} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Y} \nabla^2 \psi^{(2)} \end{aligned} \quad (D.153)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{M}^{(2)} = & \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x \partial p} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial Y} \\ & + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial x \partial p} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial Y \partial p} \\ & - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial Y \partial p} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial Y \partial p} \end{aligned} \quad (D.154)$$

Usando as Equações 3.35 e 3.43 nas Equações D.154 e D.153 e D.150 obtem-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{M}(2) = & (\bar{M}_{A2,2} \cos 2 \ell y + \bar{M}_{B2,2} \operatorname{sen} 2 \ell y) \exp(2 v_I t) \\ & + (\bar{M}_{A4,2} \cos 2 \ell y + \bar{M}_{B4,2} \operatorname{sen} 2 \ell y + \bar{M}_{A4,4} \cos 4 \ell y \\ & + \bar{M}_{B4,4} \operatorname{sen} 4 \ell y) \exp(4 v_I t) + (\bar{M}_{A6,2} \cos 2 \ell y \\ & + \bar{M}_{B6,2} \operatorname{sen} 2 \ell y + \bar{M}_{A6,4} \cos 4 \ell y + \bar{M}_{B6,4} \operatorname{sen} 4 \ell y \\ & + \bar{M}_{A6,6} \cos 6 \ell y + \bar{M}_{B6,6} \operatorname{sen} 6 \ell y) \exp(6 v_I t) , \quad (D.155) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}(2) = & (\bar{L}_{a4,2} \cos 2 \ell y + \bar{L}_{B4,2} \operatorname{sen} 2 \ell y + \bar{L}_{A4,4} \cos 4 \ell y \\ & + \bar{L}_{B4,4} \operatorname{sen} 4 \ell y) \exp(4 v_I t) + (\bar{L}_{A6,2} \cos 2 \ell y \\ & + \bar{L}_{B6,2} \operatorname{sen} 2 \ell y + \bar{L}_{A6,4} \cos 4 \ell y \\ & + \bar{L}_{b6,4} \operatorname{sen} 4 \ell y) \exp(6 v_I t) \quad (D.156) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{F}_a(2) = & (\bar{F}_{A2,2}^a \cos 2 \ell y + \bar{F}_{B2,2}^a \operatorname{sen} 2 \ell y) \exp(2 v_I t) \\ & + (\bar{F}_{A4,2}^a \cos 2 \ell y + \bar{F}_{B4,2}^a \operatorname{sen} 2 \ell y + \bar{F}_{A4,4}^a \cos 4 \ell y \\ & + \bar{F}_{B4,4}^a \operatorname{sen} 4 \ell y) \exp(4 v_I t) + (\bar{F}_{A6,2}^a \cos 2 \ell y \\ & + \bar{F}_{B6,2}^a \operatorname{sen} 2 \ell y + \bar{F}_{A6,4}^a \cos 4 \ell y + \bar{F}_{B6,4}^a \operatorname{sen} 4 \ell y \\ & + \bar{F}_{A6,6}^a \cos 6 \ell y + \bar{F}_{B6,6}^a \operatorname{sen} 6 \ell y) \exp(6 v_I t) , \quad (D.157) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{M}_{A2,2} = & \frac{k \ell}{2} \left(\psi_R \frac{d \psi_{B1,1,1}}{dp} - \psi_{B1,1,1} \frac{d \psi_R}{dp} + \psi_I \frac{d \psi_{A1,1,1}}{dp} \right. \\ & \left. - \psi_{A1,1,1} \frac{d \psi_I}{dp} \right) , \quad (D.158) \end{aligned}$$

$$- M_{B2,2} = \frac{k \ell}{2} \left(\psi_{A1,1,1} \frac{d \psi_{B1,1,1}}{dp} - \psi_{B1,1,1} \frac{d \psi_{A1,1,1}}{dp} \right), \quad (D.159)$$

$$\begin{aligned} - M_{A4,2} = & \frac{k \ell}{2} \left(\psi_R \frac{d \psi_{B3,1,1}}{dp} - \psi_{B3,1,1} \frac{d \psi_R}{dp} - \psi_R \frac{d \psi_{B3,3,1}}{dp} \right. \\ & + \psi_{B3,3,1} \frac{d \psi_R}{dp} + \psi_I \frac{d \psi_{A3,1,1}}{dp} - \psi_{A3,1,1} \frac{d \psi_I}{dp} - \psi_I \frac{d \psi_{A3,3,1}}{dp} \\ & + \psi_{A3,3,1} \frac{d \psi_I}{dp} + \psi_{A1,1,1} \frac{d \psi_{D3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d \psi_{A1,1,1}}{dp} \\ & - \psi_{B1,1,1} \frac{d \psi_{C3,1,1}}{dp} + \psi_{C3,1,1} \frac{d \psi_{B1,1,1}}{dp} + \psi_{A1,1,1} \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} \\ & - \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_{A1,1,1}}{dp} - \psi_{B1,1,1} \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} \\ & \left. + \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_{B1,1,1}}{dp} \right), \quad (D.160) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - M_{B4,2} = & \frac{k \ell}{2} \left[\psi_R \frac{d \psi_{D3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d \psi_R}{dp} + \psi_I \frac{d \psi_{C3,1,1}}{dp} \right. \\ & - \psi_{C3,1,1} \frac{d \psi_I}{dp} - \psi_R \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} + \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_R}{dp} - \psi_I \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} \\ & + \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_I}{dp} - \psi_{A1,1,1} \frac{d \psi_{B3,1,1}}{dp} + \psi_{B3,1,1} \frac{d \psi_{A1,1,1}}{dp} \\ & + \psi_{B1,1,1} \frac{d \psi_{A3,1,1}}{dp} - \psi_{A3,1,1} \frac{d \psi_{B1,1,1}}{dp} - \psi_{A1,1,1} \frac{d \psi_{B3,3,1}}{dp} \\ & \left. + \psi_{B3,3,1} \frac{d \psi_{A1,1,1}}{dp} + \psi_{B1,1,1} \frac{d \psi_{A3,3,1}}{dp} - \psi_{A3,3,1} \frac{d \psi_{B1,1,1}}{dp} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \left(\psi_{A2,0,2} \frac{d \psi_{B2,2,2}}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d \psi_{A2,0,2}}{dp} \right. \\
 & \left. - \psi_{B2,0,2} \frac{d \psi_{A2,2,2}}{dp} + \psi_{A2,2,2} \frac{d \psi_{B2,0,2}}{dp} \right) , \quad (D.161)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{A4,4} = k \ell & \left(\psi_R \frac{d \psi_{B3,3,1}}{dp} - \psi_{B3,3,1} \frac{d \psi_R}{dp} + \psi_I \frac{d \psi_{A3,3,1}}{dp} \right. \\
 & - \psi_{A3,3,1} \frac{d \psi_I}{dp} + \psi_{A1,1,1} \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_{A1,1,1}}{dp} \\
 & \left. - \psi_{B1,1,1} \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} + \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_{B1,1,1}}{dp} \right) , \quad (D.162)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{B4,4} = k \ell & \left[\psi_R \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_R}{dp} + \psi_I \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} \right. \\
 & - \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_I}{dp} - \psi_{A1,1,1} \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} + \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_{A1,1,1}}{dp} \\
 & + \psi_{B1,1,1} \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_{B1,1,1}}{dp} \\
 & \left. - 2 \left(\psi_{A2,2,2} \frac{d \psi_{B2,2,2}}{dp} - \psi_{B2,2,2} \frac{d \psi_{A2,2,2}}{dp} \right) \right] , \quad (D.163)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{A6,2} = \frac{k \ell}{2} & \left(\psi_{C3,1,1} \frac{d \psi_{B3,1,1}}{dp} - \psi_{B3,1,1} \frac{d \psi_{C3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d \psi_{A3,1,1}}{dp} \right. \\
 & + \psi_{A3,1,1} \frac{d \psi_{D3,1,1}}{dp} - \psi_{C3,1,1} \frac{d \psi_{B3,3,1}}{dp} + \psi_{B3,3,1} \frac{d \psi_{C3,1,1}}{dp} \\
 & \left. + \psi_{D3,1,1} \frac{d \psi_{A3,3,1}}{dp} - \psi_{A3,3,1} \frac{d \psi_{D3,1,1}}{dp} + \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_{B3,1,1}}{dp} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \psi_{B3,1,1} \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_{A3,1,1}}{dp} \\
 & + \psi_{A3,1,1} \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} , \quad (D.164)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{B6,2} = & \frac{k \ell}{2} \left(\psi_{C3,1,1} \frac{d \psi_{D3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d \psi_{C3,1,1}}{dp} - \psi_{C3,1,1} \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} \right. \\
 & + \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_{C3,1,1}}{dp} + \psi_{D3,1,1} \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} - \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_{D3,1,1}}{dp} \\
 & - \psi_{A3,1,1} \frac{d \psi_{B3,1,1}}{dp} + \psi_{B3,1,1} \frac{d \psi_{A3,1,1}}{dp} - \psi_{A3,1,1} \frac{d \psi_{B3,3,1}}{dp} \\
 & + \psi_{B3,3,1} \frac{d \psi_{A3,1,1}}{dp} + \psi_{B3,1,1} \frac{d \psi_{A3,3,1}}{dp} \\
 & \left. - \psi_{A3,3,1} \frac{d \psi_{B3,1,1}}{dp} \right) , \quad (D.165)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{A6,4} = & k \ell \left(\psi_{C3,1,1} \frac{d \psi_{B3,3,1}}{dp} - \psi_{B3,3,1} \frac{d \psi_{C3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d \psi_{A3,3,1}}{dp} \right. \\
 & + \psi_{A3,3,1} \frac{d \psi_{D3,1,1}}{dp} + \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_{B3,1,1}}{dp} - \psi_{B3,1,1} \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} \\
 & \left. - \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_{A3,1,1}}{dp} + \psi_{A3,1,1} \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} \right) , \quad (D.166)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{B6,4} = & k \ell \left(\psi_{C3,1,1} \frac{d \psi_{D3,3,1}}{dp} - \psi_{D3,3,1} \frac{d \psi_{C3,1,1}}{dp} - \psi_{D3,1,1} \frac{d \psi_{C3,3,1}}{dp} \right. \\
 & + \psi_{C3,3,1} \frac{d \psi_{D3,1,1}}{dp} - \psi_{A3,1,1} \frac{d \psi_{B3,3,1}}{dp} + \psi_{B3,3,1} \frac{d \psi_{A3,1,1}}{dp}
 \end{aligned}$$

$$+ \Psi_{B3,1,1} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} - \Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{B3,1,1}}{dp} , \quad (D.167)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{A6,6} = & \frac{3k \ell}{2} \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} - \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} \right. \\ & \left. - \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} + \Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} \right) , \quad (D.168) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{B6,6} = & \frac{3k \ell}{2} \left(\Psi_{C3,3,1} \frac{d \Psi_{D3,3,1}}{dp} - \Psi_{D3,3,1} \frac{d \Psi_{C3,3,1}}{dp} \right. \\ & \left. - \Psi_{A3,3,1} \frac{d \Psi_{B3,3,1}}{dp} + \Psi_{B3,3,1} \frac{d \Psi_{A3,3,1}}{dp} \right) , \quad (D.169) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{A4,2} = & 4k \ell^3 \left(\Psi_R \Psi_{B3,3,1} + \Psi_I \Psi_{A3,3,1} \right. \\ & \left. - \Psi_{A1,1,1} \Psi_{D3,3,1} + \Psi_{B1,1,1} \Psi_{C3,3,1} \right) , \quad (D.170) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{B4,2} = & 2k \ell^3 [2(\Psi_R \Psi_{D3,3,1} + \Psi_I \Psi_{C3,3,1} + \Psi_{A1,1,1} \Psi_{B3,3,1} \\ & - \Psi_{B1,1,1} \Psi_{A3,3,1}) + \Psi_{A2,0,2} \Psi_{B2,2,2} - \Psi_{B2,0,2} \Psi_{A2,2,2}] , \quad (D.171) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{A4,4} = & -8k \ell^3 \left(\Psi_R \Psi_{B3,3,1} + \Psi_I \Psi_{A3,3,1} \right. \\ & \left. + \Psi_{A1,1,1} \Psi_{D3,3,1} - \Psi_{B1,1,1} \Psi_{C3,3,1} \right) , \quad (D.172) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{B4,4} = & -8k \ell^3 \left(\Psi_R \Psi_{D3,3,1} + \Psi_I \Psi_{C3,3,1} \right. \\ & \left. - \Psi_{A1,1,1} \Psi_{B3,3,1} + \Psi_{B1,1,1} \Psi_{A3,3,1} \right) , \quad (D.173) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{A6,2} = & 4k \ell^3 \left(\Psi_{C3,1,1} \Psi_{B3,3,1} - \Psi_{D3,1,1} \Psi_{A3,3,1} \right. \\ & \left. + \Psi_{C3,3,1} \Psi_{B3,1,1} - \Psi_{D3,3,1} \Psi_{A3,1,1} \right) , \quad (D.174) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{B6,2} = & 4k \ell^3 \left(\Psi_{A3,1,1} \Psi_{B3,3,1} - \Psi_{B3,1,1} \Psi_{A3,3,1} \right. \\ & \left. + \Psi_{C3,1,1} \Psi_{D3,3,1} - \Psi_{D3,1,1} \Psi_{C3,3,1} \right) , \quad (D.175) \end{aligned}$$

$$\bar{L}_{A6,4} = -8k \ell^3 \left(\Psi_{C3,1,1} \Psi_{B3,3,1} - \Psi_{D3,1,1} \Psi_{A3,3,1} \right)$$

$$- \Psi_{C3,3,1} \Psi_{B3,1,1} + \Psi_{D3,3,1} \Psi_{A3,1,1} \quad , \quad (D.176)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{B6,4} = 8k \ell^3 & (\Psi_{A3,1,1} \Psi_{B3,3,1} - \Psi_{B3,1,1} \Psi_{A3,3,1} \\ & - \Psi_{C3,1,1} \Psi_{D3,3,1} + \Psi_{D3,1,1} \Psi_{C3,3,1}) \quad , \quad (D.177) \end{aligned}$$

e

$$\bar{F}_{\alpha}^a r,m = - \frac{f_o}{\sigma} \left[(m \ell)^2 \bar{M}_{\alpha} r,m + \frac{d \bar{L}_{\alpha} r,m}{dp} \right] \quad , \quad (D.178)$$

com $\alpha = A, B$.

Usando as Equações 3.23, 3.44 e 3.47 pode-se escrever:

$$\frac{f_o^2}{\sigma} \frac{d^2 \tilde{\omega}^{(2)} a_{\alpha} r,m}{dp^2} - (m \ell)^2 \tilde{\omega}^{(2)} a_{\alpha} r,m = \bar{F}_{\alpha}^a r,m \quad , \quad (D.179)$$

onde $\alpha = A, B$. Os coeficientes do aquecimento são, então, dados por:

$$\tilde{Q}^{(2)}_{\alpha} r,m = - \epsilon C_p \frac{p}{p_s} H \tilde{\omega}^{(2)} a_{\alpha} r,m \quad , \quad (D.180)$$

de onde, usando a Equação D.151, obtém-se os coeficientes de $\bar{F}_q^{(2)}$:

$$\bar{F}_q^a r,m = - (m \ell)^2 \frac{R \epsilon}{p_s} \frac{H}{\sigma} \tilde{\omega}^{(2)} a_{\alpha} r,m \quad . \quad (D.181)$$

Pode-se, então, obter os coeficientes de $\bar{\omega}_d^{(2)}$ através da equação:

$$\frac{f_o^2}{\sigma} \frac{d^2 \tilde{\omega}^{(2)} d_{\alpha} r,m}{dp^2} - (m \ell)^2 \tilde{\omega}^{(2)} d_{\alpha} r,m = \bar{F}_q^d r,m \quad . \quad (D.182)$$

Conhecidos $\tilde{\omega}^{(2)} a_{\alpha r, m}$, $\tilde{\omega}^{(2)} d_{\alpha r, m}$ e $\bar{L}_{\alpha r, m}$ pode-se obter os coeficientes de $\bar{F}_{\Lambda}^{(2)}$, os quais são dados por:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\alpha r, m}^{-\Lambda} = a_r^{\Lambda} \frac{f_0}{\sigma} \left[f_0 \frac{d^2}{dp^2} (\tilde{\omega}^{(2)} a_{\alpha r, m} + \tilde{\omega}^{(2)} d_{\alpha r, m}) + \frac{d}{dp} \bar{L}_{\alpha r, m} \right] \\ + b_r^{\Lambda} (1 - a_r^{\Lambda}) \frac{f_0}{\sigma} \left[f_0 \frac{d}{dp} (\tilde{\omega}^{(2)} a_{\alpha r, m} + \tilde{\omega}^{(2)} d_{\alpha r, m}) \right. \\ \left. + \bar{L}_{\alpha r, m} \right], \end{aligned} \quad (D.183)$$

onde

$$a_r^{\Lambda} = \frac{(\Lambda_{\xi} - \Lambda_T)}{(r \nu_I + \Lambda_{\xi})}$$

e

$$b_r^{\Lambda} = \frac{1}{(r \nu_I + \Lambda_{\xi})} \frac{d \Lambda_{\xi}}{dp};$$

de onde obtém-se os coeficientes de $\bar{\omega}_{\Lambda}^{(2)}$ através de:

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{d^2 \tilde{\omega}^{(2)\Lambda}}{dp^2} \alpha_{r, m} - (m \ell)^2 \tilde{\omega}^{(2)\Lambda} \alpha_{r, m} = \bar{F}_{\alpha r, m}^{-\Lambda}. \quad (D.184)$$

Os coeficientes de $\bar{\omega}^{(2)}$ são dados por:

$$\tilde{\omega}^{(2)} \alpha_{r, m} = \tilde{\omega}^{(2)} a_{\alpha r, m} + \tilde{\omega}^{(2)} d_{\alpha r, m} + \tilde{\omega}^{(2)\Lambda} \alpha_{r, m}, \quad (D.185)$$

e os coeficientes de $\bar{\Psi}^{(2)}$ são, então, obtidos de:

$$\bar{\Psi}^{(2)} \alpha_{r, m} = \frac{-1}{(m \ell)^2 (r \nu_I + \Lambda_{\xi})} \left(f_0 \frac{d \tilde{\omega}^{(2)} \alpha_{r, m}}{dp} + \bar{L}_{\alpha r, m} \right). \quad (D.186)$$

Os coeficientes da temperatura $\bar{T}^{(2)}$ e do potencial de velocidade $\bar{\chi}^{(2)}$ são dados, respectivamente, por:

$$T_{\alpha r, m}^{(2)} = - \frac{p f_0}{R} \frac{d \bar{\psi}^{(2)}}{dp} \alpha r, m = \bar{\vartheta}^{(2)} \alpha r, m \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \quad (D.187)$$

e

$$\bar{\chi}^{(2)} \alpha r, m = \frac{1}{(m \ell)^2} \frac{d \bar{\omega}^{(2)}}{dp} \alpha r, m . \quad (D.188)$$

D.4 - PERTURBAÇÃO DE TERCEIRA ORDEM

A divergência/convergência associada a $\omega^{(2)}$ gera uma perturbação de terceira ordem no campo da função de corrente dada pela Equação 3.48. Como $\omega^{(2)}$ tem a mesma forma dada pela Equação 3.43, pode-se escrever a Equação 3.48 como:

$$\left(\frac{r}{n} c_{I+} + \frac{\Lambda_{\xi}}{nk} \right) Z_{\alpha r, m, n} - \left(c_{R'} + \frac{\beta}{\mu_{n, m}^2} \right) Z_{\beta r, m, n} = \frac{-f_0}{nk \mu_{n, m}^2} \frac{d W_{\alpha r, m, n}}{dp} , \quad (D.189)$$

e

$$\left(c_{R'} + \frac{\beta}{\mu_{n, m}^2} \right) Z_{\alpha r, m, n} + \left(\frac{r}{n} c_{I+} + \frac{\Lambda_{\xi}}{nk} \right) Z_{\beta r, m, n} = \frac{-f_0}{nk \mu_{n, m}^2} \frac{d W_{\alpha r, m, n}}{dp} , \quad (D.190)$$

onde

$$\mu_{n, m}^2 = (nk)^2 + (m \ell)^2 , \quad (D.191)$$

os índices α e β (o coeficiente β é df/dy) representam A, C e B, D, respectivamente, e $Z_{\alpha r,m,n}$, $Z_{\beta r,m,n}$ são os coeficientes de $\Psi^{(3)}$, os quais são facilmente obtidos pelas Equações D.189 e D.190.

A condição de contorno dada na Equação 3.49 se transforma em:

$$\left(\frac{r}{n} c_I + \frac{\Lambda_T}{nk} \right) \frac{d Z_{\alpha r,m,n}}{dp} - c_R' \frac{d Z_{\beta r,m,n}}{dp} - \frac{d u^{(0)}}{dp} Z_{\beta r,m,n} = 0 \quad (D.192)$$

e

$$c_R' \frac{d Z_{\alpha r,m,n}}{dp} - \left(\frac{r}{n} c_I + \frac{\Lambda_T}{nk} \right) \frac{d Z_{\beta r,m,n}}{dp} - \frac{d u^{(0)}}{dp} Z_{\alpha r,m,n} = 0 \quad , \quad (D.193)$$

em $p = p_s$ e $p = p_t$.

A essa perturbação de terceira ordem $\Psi^{(3)}$ corresponde uma perturbação na temperatura, $T^{(3)}$, cujos coeficientes são dados por:

$$T_{\alpha r,m,n} = - \frac{p f_0}{R} \frac{d Z_{\alpha r,m,n}}{dp} = \theta_{\alpha r,m,n} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \quad , \quad (D.194)$$

onde $\alpha = A, B, C, D$.

D.5 - INCLUSÃO DE CONSTITUINTES PASSIVOS

A obtenção dos coeficientes de q dados pelas Equações 3.54, 3.56, e 3.58 se faz pela substituição dessas nas Equações 3.55, 3.57 e 3.59, respectivamente, além de se usar as expressões correspondentes para u , v e ω , que promovem a redistribuição do campo básico de q . A seguir serão apresentadas as expressões desses coeficientes.

Os coeficientes da perturbação de primeira ordem em q são dados por:

$$q_R = \frac{a A + b B}{a^2 + b^2} , \quad (D.195)$$

e

$$q_I = \frac{a B - b A}{a^2 + b^2} , \quad (D.196)$$

onde

$$a = c_R - \bar{u}^{(0)} , \quad (D.197)$$

$$b = c_I , \quad (D.198)$$

$$A = \psi_R \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} + \frac{1}{k} \frac{d}{dp} (\omega_I \bar{q}^{(0)}) - \frac{\bar{q}^{(0)}}{k} \frac{d\omega_I}{dp} \quad (D.199)$$

e

$$B = \psi_I \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} - \frac{1}{k} \frac{d}{dp} (\omega_R \bar{q}^{(0)}) + \frac{\bar{q}^{(0)}}{k} \frac{d\omega_R}{dp} . \quad (D.200)$$

Os coeficientes do campo zonal de primeira ordem de q são dados por:

$$\tilde{q}_O(1) = - \frac{1}{8 \nu_I} \frac{d}{dp} (\omega_R q_R + \omega_I q_I) \quad , \quad (D.201)$$

$$\tilde{q}_A(1) = - \frac{\ell}{\nu_I} \chi(1) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} - q_O(1) \quad (D.202)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{q}_B(1) = & - \frac{1}{2 \nu_I} \frac{d}{dp} (\tilde{\omega}(1) \bar{q}^{(0)}) + \frac{\bar{q}^{(0)}}{2 \nu_I} \frac{d \tilde{\omega}(1)}{dp} \\ & + \frac{\ell}{4 c_I} (\Psi_I q_R - \Psi_R q_I) \quad . \quad (D.203) \end{aligned}$$

Os coeficientes da perturbação de segunda ordem em q são dados por:

$$q_{\alpha r, m, n} = \frac{a M_{\alpha r, m, n} + b_{\alpha r, m, n} N_{\alpha r, m, n}}{a^2 + b_{\alpha r, m, n}^2} \quad , \quad (D.204)$$

e

$$q_{\beta r, m, n} = \frac{-a N_{\alpha r, m, n} + b_{\alpha r, m, n} M_{\alpha r, m, n}}{a^2 + b_{\alpha r, m, n}^2} \quad , \quad (D.205)$$

onde os índices α e β correspondem a A e B ou C e D, a é na Equação D.197, e os termos cujos índices não aparecem a seguir são nulos:

$$b_{A1,1,1} = b_{C1,1,1} = b_{A2,0,2} = b_{A2,2,2} = b_{C2,2,2} = c_I \quad , \quad (D.206)$$

$$b_{A3,1,1} = b_{C3,1,1} = b_{A3,3,1} = b_{C3,3,1} = 3 c_I \quad , \quad (D.207)$$

$$M_{A1,1,1} = \left(\frac{\ell}{k} \chi_I + \Psi_{A1,1,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} - \frac{1}{k} \frac{d}{dp} (\bar{q}^{(0)}) w_{B1,1,1}$$

$$+ \frac{\bar{q}^{(0)}}{k} \frac{d}{dp} W_{B1,1,1} \quad , \quad (D.208)$$

$$N_{A1,1,1} = - \left(\frac{\ell}{k} \chi_R^+ \Psi_{B1,1,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} - \frac{1}{k} \frac{d}{dp} (\bar{q}^{(0)} W_{A1,1,1}) + \frac{\bar{q}^{(0)}}{k} \frac{d}{dp} W_{A1,1,1} \quad , \quad (D.209)$$

$$M_{C1,1,1} = \frac{\ell}{k} \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} X_{B1,1,1} \quad , \quad (D.210)$$

$$N_{C1,1,1} = \frac{\ell}{k} \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} X_{A1,1,1} \quad , \quad (D.211)$$

$$M_{A2,0,2} = - \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} \Psi_{B2,0,2} - \frac{1}{2k} \frac{d}{dp} (\bar{q}^{(0)} W_{A2,0,2}) + \frac{\bar{q}^{(0)}}{2k} \frac{d}{dp} W_{A2,0,2} + \frac{(k^2 - \ell^2)}{8k} (\chi_R q_{R^-} - \chi_I q_I) - \frac{1}{8k} \left[\frac{d}{dp} (\omega_R q_{R^-} - \omega_I q_I) - q_R \frac{d \omega_R}{dp} + q_I \frac{d \omega_I}{dp} \right] \quad , \quad (D.212)$$

$$N_{A2,0,2} = \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} \Psi_{A2,0,2} - \frac{1}{2k} \frac{d}{dp} (\bar{q}^{(0)} W_{B2,0,2}) + \frac{\bar{q}^{(0)}}{2k} \frac{d}{dp} W_{B2,0,2} - \frac{(k^2 - \ell^2)}{8k} (\chi_R q_{I^+} - \chi_I q_R) + \frac{1}{8k} \left[\frac{d}{dp} (\omega_R q_{I^+} + \omega_I q_R) - q_R \frac{d \omega_I}{dp} - q_I \frac{d \omega_R}{dp} \right] \quad , \quad (D.213)$$

$$\begin{aligned}
 M_{A2,2,2} = & \frac{\partial \bar{q}(0)}{\partial y} \psi_{B2,2,2} - \frac{1}{2k} \frac{d}{dp} (\bar{q}(0) W_{A2,2,2}) + \frac{\bar{q}(0)}{2k} \frac{d}{dp} W_{A2,2,2} \\
 & - \frac{\mu^2}{8k} (\chi_R q_R - \chi_I q_I) + \frac{1}{8k} \frac{d}{dp} (\omega_R q_R - \omega_I q_I) \\
 & - q_R \frac{d \omega_R}{dp} + q_I \frac{d \omega_I}{dp} \quad , \quad (D.214)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{A2,2,2} = & \frac{\partial \bar{q}(0)}{\partial y} \psi_{A2,2,2} - \frac{1}{2k} \frac{d}{dp} (\bar{q}(0) W_{B2,2,2}) + \frac{\bar{q}(0)}{2k} \frac{d}{dp} W_{B2,2,2} \\
 & + \frac{\mu^2}{8k} (\chi_R q_I + \chi_I q_R) - \frac{1}{8k} \frac{d}{dp} (\omega_R q_I + \omega_I q_R) \\
 & - q_R \frac{d \omega_I}{dp} - q_I \frac{d \omega_R}{dp} \quad , \quad (D.215)
 \end{aligned}$$

$$M_{C2,2,2} = \frac{\ell}{k} \frac{\partial \bar{q}(0)}{\partial y} X_{B2,2,2} \quad , \quad (D.216)$$

$$N_{C2,2,2} = \frac{\ell}{k} \frac{\partial \bar{q}(0)}{\partial y} X_{A2,2,2} \quad , \quad (D.217)$$

$$\begin{aligned}
 M_{A3,1,1} = & \left(\frac{\ell}{k} X_{C3,1,1} + B_{3,1,1} \right) \frac{\partial \bar{q}(0)}{\partial y} - \frac{\ell^2}{k} (\chi_R \tilde{q}_B^{(1)} + \tilde{\chi}^{(1)} q_R) \\
 & - \ell \tilde{q}_A^{(1)} \psi_I - \frac{1}{2k} \frac{d}{dp} [(2\bar{q}(0) W_{A3,1,1} + \tilde{q}_B^{(1)} \omega_R + q_R \tilde{\omega}^{(1)}) \\
 & - 2 \bar{q}(0) \frac{d}{dp} W_{A3,1,1} - \tilde{q}_B^{(1)} \frac{d \omega_R}{dp} - q_R \frac{d \tilde{\omega}^{(1)}}{dp}] \quad , \quad (D.218)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{A3,1,1} = & - \left(\frac{\ell}{k} X_{D3,1,1} + \Psi_{A3,1,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} + \frac{\ell^2}{k} (\chi_I \tilde{q}_B^{(1)} + \tilde{\chi}^{(1)} q_I) \\
 & - \ell \tilde{q}_A^{(1)} \Psi_R - \frac{1}{2k} \left[\frac{d}{dp} (2\bar{q}^{(0)} W_{B3,1,1} - \tilde{q}_B^{(1)} \omega_I - q_I \tilde{\omega}^{(1)}) \right. \\
 & \left. - 2 \bar{q}^{(0)} \frac{d}{dp} W_{B3,1,1} + \tilde{q}_B^{(1)} \frac{d \omega_I}{dp} + q_I \frac{d \tilde{\omega}^{(1)}}{dp} \right] , \quad (D.219)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{C3,1,1} = & \left(\frac{\ell}{k} X_{A3,1,1} - \Psi_{D3,1,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} + \frac{\ell^2}{k} \chi_R \tilde{q}_A^{(1)} \\
 & + \ell (\tilde{\Psi}^{(1)} q_I - \Psi_I \tilde{q}_B^{(1)}) - \frac{1}{2k} \left[\frac{d}{dp} (2\bar{q}^{(0)} W_{C3,1,1} + 2\tilde{q}_0^{(1)} \omega_R \right. \\
 & \left. - \tilde{q}_A^{(1)} \omega_R) - 2 \bar{q}^{(0)} \frac{d}{dp} W_{C3,1,1} - (2\tilde{q}_0^{(1)} - \tilde{q}_A^{(1)}) \frac{d \omega_R}{dp} \right] , \quad (D.220)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{C3,1,1} = & \left(\frac{\ell}{k} X_{B3,1,1} + \Psi_{C3,1,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} - \frac{\ell^2}{k} \chi_I \tilde{q}_A^{(1)} \\
 & + \ell (\tilde{\Psi}^{(1)} q_R - \Psi_R q_B^{(1)}) - \frac{1}{2k} \left[\frac{d}{dp} (2\bar{q}^{(0)} W_{D3,1,1} + 2\tilde{q}_0^{(1)} \omega_I \right. \\
 & \left. - \tilde{q}_A^{(1)} \omega_I) - 2 \bar{q}^{(0)} \frac{d}{dp} W_{D3,1,1} - (2\tilde{q}_0^{(1)} - \tilde{q}_A^{(1)}) \frac{d \omega_I}{dp} \right] , \quad (D.221)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{A3,3,1} = & - \left(\frac{3\ell}{k} X_{C3,3,1} + \Psi_{B3,3,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial y} - \frac{\ell^2}{k} (\chi_R \tilde{q}_B^{(1)} + \tilde{\chi}^{(1)} q_R) \\
 & + \ell \tilde{q}_A^{(1)} \Psi_I - \frac{1}{2k} \left[\frac{d}{dp} (2\bar{q}^{(0)} W_{A3,3,1} - \tilde{q}_B^{(1)} \omega_R - q_R \tilde{\omega}^{(1)}) \right. \\
 & \left. - 2 \bar{q}^{(0)} \frac{d}{dp} W_{A3,3,1} + \tilde{q}_B^{(1)} \frac{d \omega_R}{dp} + q_R \frac{d \tilde{\omega}^{(1)}}{dp} \right] , \quad (D.222)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{A3,3,1} = & \left(\frac{3 \ell}{k} X_{D3,3,1}^- \Psi_{A3,3,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial Y} + \frac{\ell^2}{k} (X_I \tilde{q}_B^{(1)} + \chi^{(1)} q_I) \\
 & + \ell \tilde{q}_A^{(1)} \Psi_R - \frac{1}{2k} \left[\frac{d}{dp} (2\bar{q}^{(0)}) W_{B3,3,1} + \tilde{q}_B^{(1)} \omega_I + q_I \tilde{\omega}^{(1)} \right] \\
 & - 2 \bar{q}^{(0)} \left[\frac{d}{dp} W_{B3,3,1} - \tilde{q}_B^{(1)} \frac{d \omega_I}{dp} - q_I \frac{d \tilde{\omega}^{(1)}}{dp} \right] , \quad (D.223)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{C3,3,1} = & \left(\frac{3 \ell}{k} X_{A3,3,1}^- \Psi_{D3,3,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial Y} + \frac{\ell^2}{k} X_R \tilde{q}_A^{(1)} \\
 & - \ell (\tilde{\psi}^{(1)} q_I^- \Psi_I \tilde{q}_B^{(1)}) - \frac{1}{2k} \left[\frac{d}{dp} (2\bar{q}^{(0)}) W_{C3,3,1} + \tilde{q}_A^{(1)} \omega_R \right] \\
 & - 2 \bar{q}^{(0)} \left[\frac{d}{dp} W_{C3,3,1} - \tilde{q}_A^{(1)} \frac{d \omega_R}{dp} \right] , \quad (D.224)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 N_{C3,3,1} = & \left(\frac{3 \ell}{k} X_{B3,3,1}^+ \Psi_{C3,3,1} \right) \frac{\partial \bar{q}^{(0)}}{\partial Y} - \frac{\ell^2}{k} X_I \tilde{q}_A^{(1)} \\
 & - \ell (\tilde{\psi}^{(1)} q_R^- \Psi_R \tilde{q}_B^{(1)}) - \frac{1}{2k} \left[\frac{d}{dp} (2\bar{q}^{(0)}) W_{D3,3,1} - \tilde{q}_A^{(1)} \omega_I \right] \\
 & - 2 \bar{q}^{(0)} \left[\frac{d}{dp} W_{D3,3,1} + \tilde{q}_A^{(1)} \frac{d \omega_I}{dp} \right] , \quad (D.225)
 \end{aligned}$$

onde $X_{\alpha r, m, n}$ são as amplitudes de $\chi^{(2)}$. Note que nas Equações D.204 e D.205 quando $\alpha = A$, tem-se $\beta = B$ e quando $\alpha = C$, $\beta = D$.