

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**INPE-8311-TDI/768**

**CÁLCULO DO RUÍDO DE UMA ANTENA ESFÉRICA PARA  
ONDAS GRAVITACIONAIS ACOPLADA A TRANSDUTORES  
PARAMÉTRICOS**

Luiz Alberto de Andrade

Dissertação de Mestrado em Astrofísica, orientada pelos Drs. Odylio Denys de Aguiar e  
Carlos Frajuca, aprovada em 12 de março de 1999.

INPE  
São José dos Campos  
2001

523.03

ANDRADE, L. A.

Cálculo do Ruído de uma antena esférica para ondas gravitacionais acoplada a transdutores paramétricos / L. A. Andrade. – São José dos Campos: INPE, 1999.

103p. –(INPE-8311-TDI/768).

1.Ruído aleatório. 2.Ruído branco. 3.Ruído eletrônico.  
4.Antenas de ondas gravitacionais. 5.Transdutor. 6.Amplificadores paramétricos. I.Título.

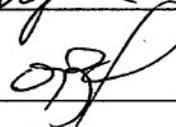
Aprovado pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Mestre** em **Astrofísica**.

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza

  
\_\_\_\_\_

Presidente

Dr. Odylio Denys de Aguiar

  
\_\_\_\_\_

Orientador

Dr. Walter Ferreira Velloso Júnior

  
\_\_\_\_\_

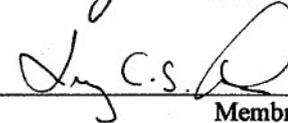
Membro da Banca  
Convidado

Dr. Rubens de Melo Marinho Júnior

  
\_\_\_\_\_

Membro da Banca  
Convidado

Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes

  
\_\_\_\_\_

Membro da Banca  
Convidado

Candidato (a) : Luiz Alberto de Andrade

São José dos Campos, 12 de março de 1999.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Odylio pela amizade e por ter me iniciado nesta aventura pioneira de detectar ondas gravitacionais. Também por ter proporcionado várias discussões e sugestões sem as quais seria impossível realizar este trabalho.

Ao Carlos pela orientação no âmbito computacional que mesmo estando distante sempre esteve solícito via INTERNET, a qual foi decisiva na elaboração deste trabalho.

Aos docentes da divisão de Astrofísica, os quais foram imprescindíveis na minha formação.

Aos colegas do projeto Gráviton que compartilham comigo esta excitante aventura de tentar detectar ondas gravitacionais.

Aos meus pais, Benedito e Ana, os quais sempre me incentivaram durante a realização dos meus estudos.

Aos meus irmãos que sempre me apoiaram e torceram por mim.

Aos meus amigos, Edson Leonel, Luiz Darcy.

À todos companheiros da área científica, os quais temos um objetivo comum em construir um país melhor.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo apoio financeiro.

À divisão de Astrofísica do INPE pelo uso de seus laboratórios e computadores.

## **RESUMO**

O propósito deste trabalho é modelar uma antena de ondas gravitacionais esférica com transdutores paramétricos de dois modos acoplados à sua superfície sob condições ótimas. São apresentados modelos para diversas configurações de detectores de ondas gravitacionais, e a partir deles é construído um modelo computacional para uma antena de ondas gravitacionais esférica acoplada a seis transdutores paramétricos de dois modos. A sensibilidade da antena é estudada por simulação computacional. Algumas das características da antena são fixadas e as demais são variadas buscando-se uma maximização da sensibilidade.

# **CALCULATION OF THE NOISE OF A GRAVITATIONAL WAVE SPHERICAL ANTENNA COUPLED TO PARAMETRIC TRANSDUCERS**

## **ABSTRACT**

The purpose of this work is to model a gravitational wave spherical antenna coupled to parametric transducers under optimum conditions. We present here models for various configurations of gravitational wave detectors, and from them we build a computational model for a gravitational waves spherical antenna coupled to six two-mode parametric transducers. The sensitivity of the spherical antenna is studied by computational simulation. Some basic characteristics of the antenna are fixed, while others are changed to maximize the sensitivity.

## SUMÁRIO

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
<b>CAPÍTULO 2 - ONDAS GRAVITACIONAIS E DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS .....</b>	<b>19</b>
2.1-Ondas Gravitacionais .....	19
2.2-Detectores de Ondas Gravitacionais .....	25
2.2.1-Detectores Interferométricos .....	25
2.2.2-Detectores do Tipo Massa Ressonante.....	26
2.2.2.1-Sensibilidade da Antena.....	27
2.2.2.2-Uma Breve História da Tentativa de Detecção das Ondas Gravitacionais .....	29
<b>CAPÍTULO 3- DETECTOR DE ONDAS GRAVITACIONAIS ESFÉRICO E TRANSDUTOR PARAMÉTRICO.....</b>	<b>31</b>
3.1-Detector de Ondas Gravitacionais Esférico .....	31
3.1.1-Vantagens da Antena esférica .....	31
3.2-Transdutor Paramétrico .....	34
3.2.1-Vantagens do Transdutores Paramétricos .....	35
3.2.2-As Equações de Manley-Rowe .....	36
3.2.3- O Transdutor da Universidade de Western Austrália.....	38
3.2.4-Ruídos do transdutor da UWA .....	39
3.2.4.1- Componentes de ruídos de banda estreita do transdutor da UWA.....	40
3.2.4.2- Componentes de ruídos de banda larga do transdutor da UWA .....	41

**CAPÍTULO 4- MODELOS PARA DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS**  
..... 43

4.1- Modelo de uma Antena de Ondas Gravitacionais do Tipo Barra Ressonante Acoplada a um Transdutor Passivo.....43

4.2- Modelo de uma Antena Acoplada a um Transdutor Paramétrico de um modo .....46

4.2.1- Modelo de uma Antena de 2 Modos com Transdutor Paramétrico com Bomba com pequeno Offset.....50

4.2.2- Modelo de uma Antena de Dois Modos com Transdutor Paramétrico em Bomba com Offset Arbitrário .....52

4.2.3- Acoplamento Eletromecânico .....55

**CAPÍTULO 5- MODELO DE UMA ANTENA ESFÉRICA PARA ONDAS GRAVITACIONAIS ACOPLADA A TRANSDUTORS PARAMÉTRICOS DE DOIS MODOS**..... 59

5.1- Equações de Movimento da Esfera .....59

5.2- Equações de Movimento da Esfera com Seis Transdutores de Dois Modos .....62

5.3- Sistema de Multimodos.....66

5.4- Simulação da Antena Esférica.....67

5.5 – Resultados da simulação.....69

**CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES** .....77

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** .....79

**APÊNDICE A - BACK ACTION EVASION** .....85

<b>APÊNDICE B – SQUIDS.....</b>	<b>89</b>
<b>APÊNDICE C - CÁLCULO DA TRANFORMADA DE FOURIER.....</b>	<b>91</b>
<b>APÊNDICE D - DIAGRAMA DE BLOCO DO PROGRAMA .....</b>	<b>93</b>
<b>APÊNDICE E PROGRAMA DA SIMULAÇÃO DO DETECTOR ESFÉRICO.....</b>	<b>95</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1- Interação da onda gravitacional com a matéria.....	22
2.2 - Decaimento do período orbital do pulsar binário PSR1914-16 .....	24
3.1- Os cinco modos normais de vibração da esfera.....	32
3.2- modelo simplificado de uma antena com um transdutor paramétrico .....	34
3.3- Diagrama esquemático do transdutor da UWA.....	38
3.4- Seção reta do transdutor da UWA.....	39
4.1- Modelo de um detector de três modos com SQUID DC.....	43
4.2- Modelo de um detector de dois modos com um transdutor paramétrico .....	46
4.3- Componentes do acoplamento eletromecânico .....	56
5.1- Ressonador mecânico de dois modos sob a superfície de uma esfera .....	63
5.2 - Distribuição dos seis ressonadores na superfície da buckybola.....	65
5.3 - Modelo de um sistema de três modos .....	66
5.4 - Modelo de um detector de três modos com um transdutor paramétrico .....	67
5.5a– Gráfico da sensibilidade espectral de deformações da esfera.....	72
5.5b– Gráficos da sensibilidade espectral de deformações da esfera.....	73
5.5c– Gráficos da sensibilidade espectral de deformações da esfera .....	74
A1- Caixas de erro, no plano complexo, para os três tipos de medições de um oscilador harmônico .....	87
A2- Caixa de erro para uma medição de “back action evading” .....	87
B1- Esquema de um SQUID DC.....	89

## LISTA DE TABELAS

2.1- Fontes de ondas gravitacionais.....	24
2.2- Sensibilidade dos três detectores de segunda geração .....	26
5.1 - Parâmetros fixos das massas ressonantes.....	70
5.2- Parâmetros de saída fornecidos pelos programas.....	70
5.3- Resultados dos cálculos da sensibilidade, fixando a potência da bomba.....	75
5.4- Resultados dos cálculos da sensibilidade, variando o $Q_e$ .....	76

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é realizar o cálculo da sensibilidade de uma antena de ondas gravitacionais esférica de dimensões reduzidas - “o detector SCHENBERG”. O detector SCHENBERG foi projetado para operar na faixa de frequência de 3,9 - 4,3 kHz, para ter razoável chance de observar, entre outros eventos, os sinais impulsivos de instabilidades de estrelas de nêutrons com alta rotação dentro de nossa galáxia.

Este sistema consiste de uma antena esférica de 800 kg e 60 cm de diâmetro feita de CuAl (94%-6%), e seis transdutores paramétricos de dois modos, do tipo cavidade reentrante, acoplados à sua superfície, sendo a massa do ressonador intermediário igual a 0,41 kg e a do terceiro ressonador igual a 0.001 kg.

O cálculo da sensibilidade do sistema acima será feito através de um programa construído no aplicativo MatLab [1], para simular a antena esférica, para ondas gravitacionais, acoplada a transdutores paramétricos. O sistema será analisado e investigado numericamente e as possíveis otimizações do sistema serão feitas. O programa fornecerá os cálculos da temperatura de ruído, ruídos parciais (serial eletrônico, “back action” e ruído Browniano das massas ressonantes) e o ruído total do sistema, fornecendo assim a sensibilidade espectral da antena.

Na simulação a ser construída serão utilizados valores realistas para os parâmetros de entrada do modelo. Algumas das características da antena são fixadas e as demais são variadas, buscando-se uma maximização da sensibilidade. O critério de escolha dos parâmetros fixos são os utilizados no detector tipo barra ressonante da “University of Western Australia” (UWA), que se encontra em operação.

No Capítulo 2 é apresentada a dedução da equação da onda gravitacional a partir das equações de campo da Teoria da Relatividade Geral (TRG) de Einstein. É também

apresentado os aspectos fundamentais das ondas gravitacionais e as técnicas fundamentais de detecção das mesmas.

No Capítulo 3, um detector de ondas gravitacionais esférico é descrito detalhadamente, mostrando as vantagens e desvantagens em construir um detector deste tipo. Será também apresentado um estudo detalhado de transdutores paramétricos do tipo cavidade reentrante da UWA, o mesmo será utilizado no modelo que será descrito no Capítulo 5.

No Capítulo 4 faremos uma exposição sobre vários modelos para diversas configurações de detectores de ondas gravitacionais, com o intuito de fornecer subsídios teóricos, a partir dos quais será construído um modelo computacional para uma antena de ondas gravitacionais esférica acoplada a seis transdutores paramétricos de dois modos.

No Capítulo 5 será construído um modelo completo para uma antena de onda gravitacionais esférica acoplada a seis transdutores paramétricos do tipo cavidade reentrante de dois modos. Ainda neste capítulo é feita uma análise teórica dos resultados obtidos na simulação computacional.

As conclusões do trabalho são apresentadas no Capítulo 6.

## CAPÍTULO 2

### ONDAS GRAVITACIONAIS E DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS

#### 2.1 Ondas Gravitacionais

Ondas gravitacionais são perturbações da métrica do espaço-tempo provocadas pela aceleração relativa entre massas quando estas causam uma variação do momento quadrupolar. Estas ondas foram previstas teoricamente por Einstein (1916) como uma solução radiativa para as equações da sua Teoria da Relatividade Geral (TRG) [2],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

nas quais,

$R_{\mu\nu}$  representa a curvatura do espaço-tempo ( tensor de Ricci)

$T_{\mu\nu}$  é o tensor matéria-energia

$g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo

$R$  é o escalar de curvatura

$G$  é constante universal da gravitação

$c$  é a velocidade de propagação da luz no vácuo

No vácuo, o tensor matéria-energia se anula ( $T_{\mu\nu} = 0$ , ausência de matéria). Dessa forma a equação (2.1) torna-se:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2)$$

na qual,  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein.

Para campos fracos o tensor métrico pode ser definido como:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowsky,  $h_{\mu\nu} \ll 1$  é uma perturbação da métrica e corresponde à amplitude da onda gravitacional,

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_x \\ 0 & 0 & h_x & -h_+ \end{bmatrix}.$$

Definindo ;

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (\text{Gauge de Lorentz})$$

e substituindo na equação (1.2) teremos:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.3}$$

na qual  $\square \equiv \left( \frac{-1\partial^2}{c^2\partial t^2} + \nabla^2 \right)$  é o operador d'Alambertiano.

A equação (1.4) admite uma solução da seguinte forma:  $\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik(z-ct)}$ . Esta solução representa uma onda monocromática propagando-se ao longo da direção  $\mathbf{z}$  à velocidade da luz  $c$ , com frequência  $\omega = kc$ , transportando energia e momento. O tensor  $h_{\mu\nu}$ , escrito na forma canônica acima, o qual representa os dois estados de polarização da onda, é definido em termos das duas amplitudes de polarização,

$$h_+ \equiv h_{xx} = -h_{yy} \tag{2.4a}$$

$$h_x \equiv h_{xy} = h_{yx} \tag{2.4b}$$

as quais nós chamaremos de polarização mais (+) e xis ( $x$ ). Elas possuem divergência nula (gauge de Lorentz), não têm traço e são transversas à direção de propagação da onda.

A energia carregada por uma onda gravitacional pode ser obtida a partir da fórmula quadripolar, derivada por Einstein em 1918. Einstein obteve uma solução tipo potencial retardado para a Equação (2.3). Fazendo uma expansão multipolar da solução a distâncias suficientemente grandes, comparadas à dimensão da fonte, obtemos o termo de dipolo nulo (devido à lei da conservação do momento linear e à não existência de massas negativas).

O primeiro termo não nulo é o de quadrupolo, portanto, a potência da radiação gravitacional é dada por [3],

$$W = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left( \ddot{I}_{jk} \right)^2 \quad (2.5)$$

onde,  $\ddot{I}_{jk}$  é a terceira derivada temporal do momento quadripolar.

ou seja, ondas gravitacionais são irradiadas sempre que a terceira derivada temporal do momento de quadrupolo de uma fonte material é diferente de zero.

Fazendo uma analogia entre as radiações gravitacional e eletromagnética, nota-se que o fator  $c^5$  do denominador da expressão da irradiação quadripolar, comparado ao fator  $c^3$  do termo de emissão dipolar eletromagnética, explica a pequena amplitude das ondas gravitacionais. Portanto, espera-se que apenas eventos catastróficos no universo, envolvendo objetos de grande massa ou com grande velocidades ou raios da ordem  $2GM/c^2$  (raio de Schwarzschild), produzam ondas detectáveis.

A Figura 2.1 mostra o efeito em um anel de massas teste a partir de uma onda polarizada propagando-se na direção  $z$ . A onda comprime o anel em uma direção, e o expande na outra. As duas polarizações são equivalentes, exceto por uma rotação de  $45^\circ$  em torno do eixo de propagação.

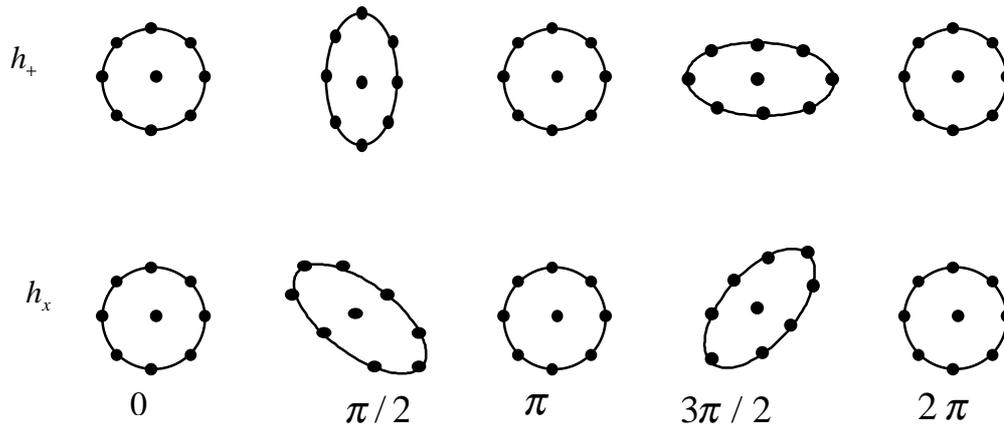


Fig. 2.1- A distorção de um anel de partículas teste durante um ciclo de uma onda propagando-se na direção z. O efeito de ambas polarizações lineares é mostrado.

Ondas gravitacionais a partir de fontes astrofísicas podem ser divididas em três classes: impulsivas, periódicas e estocásticas. Impulsivas são emissões que duram um curto intervalo de tempo, apenas uns poucos ciclos.

Fontes potenciais de ondas impulsivas incluem: o colapso de uma estrela resultando em uma estrela de nêutrons ou um buraco negro, coalescência de binárias compactas e a queda de estrelas, ou pequenos buracos negros, em buracos negros massivos.

Fontes de ondas periódicas incluem: estrelas de nêutrons em rotação e estrelas em sistemas binários. Sinais estocásticos poderiam se originar de ondas gravitacionais primordiais ou a partir da superposição da radiação de sinais periódicos.

Sinais impulsivos são os mais prováveis de terem grandes amplitudes em altas frequências, portanto, elas são os maiores candidatos à detecção por detectores de massa ressonante. A relação sinal ruído de um sinal impulsivo no detector é dado por [4,5,6],

$$\frac{S}{N} = \frac{h_c}{h_n} = \sqrt{2 \int_0^{\infty} \frac{|h_c(f)|^2}{S_n(f)} df} \quad (2.6)$$

nas quais  $h_n$  é a amplitude de ruído total do detector,  $h_c$  é a amplitude adimensional do sinal,  $S_n$  é a densidade de potência espectral de ruído.

$h_c$  é definido em termos da energia total  $\Delta E_{OG}$  irradiada [4]:

$$h_c \cong 2.7 \times 10^{-20} \left( \frac{\Delta E_{OG}}{M_S c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 \text{ kHz}}{f_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{10 \text{ Mpc}}{r_0} \right), \quad (2.7)$$

nas quais:  $f_c$  é a frequência característica da onda,  $M_S$  é a massa do Sol,  $r_0$  é distância até a fonte. A Equação 2.7 é uma forma conveniente de expressar a intensidade de uma onda em relação à distância estimada ao aglomerado de Virgem (10 Mpc), onde muitas fontes de ondas gravitacionais impulsivas devem existir [7].

Sinais impulsivos detectáveis deverão originar-se de eventos violentos. Um candidato é o colapso gravitacional de uma estrela de grande massa para formar uma estrela de nêutrons ou buraco negro. A intensidade de emissão depende do grau de não esfericidade e não axi-simetria no colapso e também da velocidade do colapso. O impulso de ondas gravitacionais cobrirá uma grande largura de banda em frequência. A taxa de ocorrência de supernovas é em torno de um evento a cada 40 anos em nossa galáxia a várias por ano no aglomerado de Virgem.

Uma outra fonte de ondas gravitacionais é a coalescência de binárias compactas. Estas são sistemas binários próximos contendo estrelas de nêutrons ou buracos negros. O pulsar binário PSR1913+16 mostrado na Figura 2.2 é um exemplo deste sistema. Este pulsar binário é uma fonte de sinal periódico (de baixíssimas frequências e intensidade). Próximo à sua coalescência, daqui a  $3.5 \times 10^8$  anos, este pulsar gerará um pulso de alta intensidade.

O pulsar binário PSR1913+16 vem sendo observado desde 1975 [8], o mesmo está espiralando a uma taxa de decaimento do período orbital consistente com as previsões da TRG, para a emissão de ondas gravitacionais.

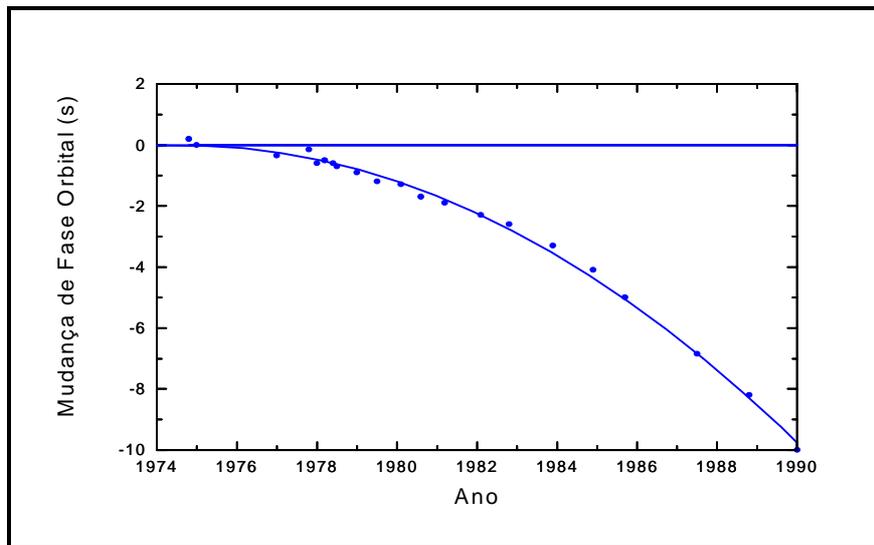


Fig. 2.2 - Mudança de fase orbital do pulsar binário PSR1913+16

FONTE: Taylor (1989)

A tabela 2.1 mostra as principais fontes astrofísicas, suas frequências, distâncias a serem observadas para obter-se pelo menos três eventos por ano e a amplitude esperada da onda ao chegar à Terra.

TABELA 2.1 POSSÍVEIS FONTES DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Fontes	Frequência (Hz)	Distância (pc)	Amplitude (m)
Binárias	$10^{-4}$	10	$10^{-20}$
Novas	$10^{-2} \sim 1$	500	$10^{-22}$
Pulsar do Carangueijo	60	2	$< 10^{-24}$
Coalescência de binárias	$10 \sim 10^3$	100	$10^{-21}$
Queda de estrelas em B N de $10M_s$	$10^{-4}$	10	$10^{-21}$
Supernovas	$10^2 \sim 10^4$	10	$< 10^{-18}$
Colapso Gravitacional de uma estrela de $10^4 M_s$	$10^{-1}$	$3 \times 10^9$	$< 10^{-19}$

FONTE: Thorne (1987)

## **2.2 Detectores de Ondas Gravitacionais**

A detecção de ondas gravitacionais será provavelmente um dos fatos mais importantes da pesquisa física nas próximas décadas. Confirmada a detecção das ondas gravitacionais a partir de fontes astrofísicas, teremos à nossa disposição uma nova astronomia, abrindo uma nova janela para observarmos o universo e permitindo uma investigação direta da força gravitacional sob condições extremas.

No presente momento as duas técnicas mais importantes na detecção de ondas gravitacionais são os detectores interferométricos, que se baseiam na característica ondulatória das ondas gravitacionais, e do tipo massa ressonante, que se baseiam na característica corpuscular, do quantum das ondas gravitacionais (grávitons). Este último será descrito sucintamente neste trabalho.

### **2.2.1 Detectores Interferométricos**

Esta técnica utiliza um interferômetro laser, cujos braços não rígidos são definidos por duas massas suspensas separadas por uma grande distância com um espelho sobre cada uma. Um laser de alta potência incide sobre um divisor de feixe, que o divide em dois, os quais percorrem os braços ortogonais do interferômetro, refletem nos espelhos suspensos e, ao se reencontrarem produzem um padrão de interferência sobre um foto-detector.

Neste tipo de detector, os caminhos ópticos são ajustados de tal maneira que ocorra uma interferência destrutiva nas franjas produzidas pelo laser, produzindo um mínimo sobre o foto-detector. Quando a onda atinge a antena com direção e polarizações favoráveis, os comprimentos dos braços variam, produzindo uma diferença de fase proporcional à amplitude da onda, alterando o padrão de interferência sobre o detector. Essa alteração no padrão de interferência corresponde à onda gravitacional. Deste modo, as acelerações diferenciais nas direções definidas pelos braços do interferômetros são monitoradas diretamente. A sensibilidade destes é diretamente proporcional à potência do laser e ao comprimento dos braços do interferômetro

## 2.2.2 Detectores do Tipo Massa Ressonante

Detectores de Ondas Gravitacionais do tipo massa ressonante consistem em antenas com grandes massas, cujas oscilações produzidas pelas ondas gravitacionais são monitoradas por transdutores eletromecânicos.

Quando uma onda gravitacional encontra uma massa ressonante ela produz deformações na mesma. As ligações elétricas que unem os átomos da estrutura cristalina da massa absorvem energia neste processo (dos grávitons) e a transformam em energia mecânica de vibração (fônons). Ressonadores mecânicos secundários são utilizados para aumentar a amplitude de vibração, os quais terão seus deslocamentos monitorados pelos transdutores eletromecânicos. A largura de banda de um detector do tipo massa ressonante, propriamente projetado, é determinada pelo tempo de transferência de energia da antena para o ressonador secundário, e por este motivo o detector ressonante não é um detector com banda estreita, mas depende do seu projeto.

Os detectores ressonantes mais sensíveis no presente, tal como os mostrados na tabela 2.2, são sensíveis o bastante para detectar um colapso gravitacional em nossa galáxia, se a energia convertida em ondas gravitacionais for um por cento da massa solar. Entretanto, precisamos olhar pelo menos 3 ordens de magnitude além em distância, alcançando o aglomerado galáctico de Virgem, para termos uma taxa de vários eventos por ano. Isto requer melhorar a resolução da energia do detector em 6 ordens de magnitude.

TABELA 2.2: SENSIBILIDADE DOS TRÊS DETECTORES DE SEGUNDA GERAÇÃO EM OPERAÇÃO

Detector/Tipo de Transdutor	Localização da antena	Temp. de ruído	Sensib.	banda
Allegro (Ind. 1-modo)	Louisiana State University (LSU) <b>BR, EUA</b>	$\approx 5\text{mK}$	$\approx 6 \times 10^{-19}$	897~920 (~23 Hz)
Explorer (Cap. de 1-modo)	Genebra, Suíça, operado pela Univ. de Roma	$\approx 10\text{mK}$	$\approx 8 \times 10^{-19}$	906~922 (~16 Hz)
Niobe (Paramétrico microondas 1-modo)	University of Western Australia, Perth, Austrália	$\approx 2\text{mk}$	$\approx 7 \times 10^{-19}$	688~711 (~23 Hz)

As técnicas empregadas na construção dos detectores de massa ressonante criogênicos atuais contribuíram para um abaixamento da temperatura de ruído,  $T_n$ , até aproximadamente  $\sim 1\text{mK}$ . Outras melhorias tecnológicas vão empurrar a sensibilidade para o limite quântico ( $T_n \sim 0.5 \times 10^{-8} \text{ K}$ ). Existem ainda outros meios para melhorar a sensibilidade das antenas de massa ressonante que são independentes da temperatura de ruído, os quais serão discutidos a seguir.

### 2.2.2.1 Sensibilidade da Antena

Ondas gravitacionais produzem acelerações no espaço-tempo que vão causar tensões de compressão e distensão na antena. Estas tensões provocam mudanças na amplitude vibracional da antena. É esta mudança no estado da antena que tentamos detectar.

A sensibilidade de uma antena pode ser melhorada de várias maneiras:

- podemos aumentar a energia absorvida das ondas gravitacionais, aumentando a seção de choque da antena, isto é, aumentando a massa da mesma.
- construindo muitas antenas, cada qual ajustada em diferentes direções, deste modo fontes de várias direções e polarizações estarão na parte mais sensível de pelo menos uma antena ou construindo uma antena igualmente sensível em todas as direções e polarizações, isto é, construindo uma antena esférica.
- podemos abaixar a temperatura de ruído (nível de excitação a partir de fontes não gravitacionais) da antena.

Merkowitz e Johnson [9] propuseram uma antena esferoidal chamada TIGA (Truncated Icosaedrum Gravitational Wave Antenna), que possui os dois primeiros requisitos em um único instrumento. Foi demonstrado por Merkowitz que uma antena esferoidal é em torno de 56 vezes mais sensível em energia do que uma antena do tipo barra com a mesma temperatura de ruído  $T_n$  [10].

Existem muitas fontes não gravitacionais que podem excitar as ressonâncias do detector. A maioria destas fontes podem ser vibrações externas, tal como ruídos sísmicos ou ambientais. Para eliminar estes ruídos é necessário um sofisticado sistema de isolamento vibracional.

Ruídos térmicos também contribuirão para o ruído total<sup>1</sup> do sistema. A energia térmica é proporcional à temperatura do detector. Portanto, se resfriarmos a antena a temperaturas baixíssimas, abaixaríamos o ruído térmico. Este ruído depende também do tempo de relaxação da massa ressonante. Usando um material com alto Q mecânico (figura de mérito) a transferência de calor entre o banho térmico e o modo de oscilação de interesse será muito mais lento. Se nós mantivermos o tempo de integração de nossas observações pequeno, o que é o caso quando se considera sinais impulsivos, o efeito de ruídos térmicos podem ser minimizados.

Uma outra fonte de ruído vem a partir do movimento dos sensores. Este tipo de ruído é dividido em dois tipos: ruído serial eletrônico e ruído de “back action”. O primeiro é constituído pelo ruído elétrico dos transdutores somado aos ruídos dos circuitos eletrônicos dos amplificadores (vide seção 3.2.4.1). Este ruído é de banda larga e não representa uma excitação na antena. O ruído de série pode ser minimizado, reduzindo-se os ruídos dos amplificadores (vide seção 3.2.4.2). O segundo é o efeito mecânico causado na antena pela ação reversa do ruído eletrônico do transdutor sobre a antena. Neste caso, existem técnicas, chamadas “back action evasion” que o minimizam [11] (para melhores esclarecimentos ver apêndice A).

Uma outra maneira de melhorar a relação sinal ruído é aumentar o fator de acoplamento,  $\beta$ , do sistema (do transdutor com a antena). Este fator é a quantidade de energia mecânica convertida em sinal elétrico pelo transdutor sem aumentar o ruído serial.

---

<sup>1</sup> Ruído total é a soma de todas as densidades espectrais de ruído, ou seja é a soma da densidade espectral de ruído térmico, densidade espectral de ruído de “back action”, densidade espectral de ruído serial eletrônico e densidade espectral de ruído de fase da bomba.

Aumentando o acoplamento aumentaremos a quantidade de energia transferida da antena para o transdutor (vide seção 3.2.4).

### **2.2.2.2 Uma Breve História da Tentativa de Detecção das Ondas Gravitacionais**

O pioneiro na tentativa de detecção de ondas gravitacionais foi Joseph Weber, há aproximadamente 30 anos. Ele propôs usar vários cristais piezoelétricos ligados em série, colocados na forma de um cinturão na região central da antena, para tentar detectar oscilações destas produzidas pelas ondas gravitacionais [12].

Em 1965 Weber construiu a primeira antena de ondas gravitacionais do tipo massa ressonante [13]; a mesma consistia de uma barra cilíndrica de alumínio com 1,5 toneladas operando a temperatura ambiente e isolada vibracionalmente em uma câmara de vácuo. A deformação nos cristais piezoelétricos foi usada para monitorar o modo de vibração fundamental da barra.

Desde a época de Weber os detectores tiveram sua sensibilidade melhorada consideravelmente. Passaram a ser resfriados à temperaturas criogênicas, a eletrônica passou a ser mais sofisticada e começaram a usar amplificadores mecânicos. Um segundo ressonador mecânico sintonizado na frequência da antena e acoplado a ela aumentava a amplitude do movimento, pela relação das massas entre os dois ressonadores. Finalmente, a vibração deste último é transformada em sinal elétrico que pode ser amplificado e gravado em fita magnética.

Esse segundo ressonador constitui o segundo modo ressonante da antena e tem como função, além de amplificar a amplitude de vibração, também aumentar a banda de frequência de detecção [14,15] que é dada pela equação,

$$\Delta f \approx 2f_0\sqrt{\mu} \quad (\mu < 1) \quad (2.8)$$

na qual  $f_0$  é a frequência do modo e  $\mu$  é a razão entre a massa de um modo de vibração e o seguinte. Para aumentar ainda mais essa banda de detecção um outro ressonador pode ser introduzido em série com os outros dois, o que permite aproximar da unidade a razão entre as massas. Numa análise teórica, Price [16] mostrou que a largura da banda aumenta rapidamente para o número de modos indo de um até três mas há um pequeno incremento se o número de modos for aumentado acima de três.

Antenas de segunda geração alcançaram sensibilidade maior em energia dez mil vezes do que as de primeira geração. As sensibilidades reportadas por três diferentes grupos estão relacionadas na Tabela 2.2 [17,18,19]. Atualmente existe um intercâmbio entre os principais grupos, que colocam disponíveis as listas de eventos dos seus respectivos detectores para que eventos coincidentes sejam encontrados e analisados.

A terceira geração de antenas está em desenvolvimento. Seu objetivo é atingir temperaturas ultra baixas (da ordem de 50mK) usando refrigeradores de diluição. Este tipo de antena está em desenvolvimento na Itália, em Frascati e Legnaro [20]. A meta é atingir uma amplitude adimensional  $h = 10^{-20}$ .

Tendo introduzido neste capítulo os aspectos fundamentais sobre as ondas gravitacionais e as técnicas fundamentais de detecção das mesmas, passamos a descrever detalhadamente, no Capítulo 2, um detector de ondas gravitacionais esférico, mostrando as vantagens e desvantagens de construir um detector deste tipo. É ainda apresentado um estudo detalhado de transdutores paramétricos bem como o seu princípio de funcionamento. Também é apresentado um estudo sucinto do transdutor paramétrico tipo cavidade reentrante da University of Western Australia (UWA), o qual será utilizado na construção do modelo descrito do Capítulo 5.

## CAPÍTULO 3

### DETECTOR DE ONDAS GRAVITACIONAIS ESFÉRICO TRANSDUTORES PARAMÉTRICOS

#### 3.1 Detector de Ondas Gravitacionais

Como visto anteriormente uma esfera é uma forma muito natural para uma antena de um detector de ondas gravitacionais do tipo massa ressonante. O primeiro a propor a construção de uma antena esférica foi Forward [21], no início da década de 70. Este tipo de antena voltou a ser estudada por Wagoner e Paik [22]. Recentemente ela voltou a ser estudada por Merkowitz e Johnson [9,10]. Estes sugeriram a configuração TIGA que utiliza uma antena que tem o formato de um icosaedro truncado (32 faces, 20 hexágonais e 12 pentágonais), usualmente denominada buckybola.

Um detector esférico de ondas gravitacionais consiste de um sólido esférico, cujas oscilações produzidas pelas ondas gravitacionais será sempre uma superposição dos seus cinco modos quadrupolares degenerados, e seis transdutores eletromecânicos que monitorarão os modos normais da esfera. A transformação do sinal mecânico em elétrico pode ser através de um transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante (vide seção 3.2.3).

#### 3.1.1 Vantagens da Antena Esférica

- Uma antena esférica tem um número de propriedades inerentes que dão a esta uma vantagem sobre outros tipos de detectores. Uma esfera tem cinco modos quadrupolares degenerados, conforme mostrado na Figura 2.1. Cada modo livre age como uma antena separada, orientada em uma direção ou polarização diferente. Estes modos podem ser associados às 5 funções esférico-harmônicas de  $\ell = 2$ . Portanto, uma esfera pode ser imaginada como 5 detectores em um único instrumento. O monitoramento destes modos, permite-nos aproveitar as vantagens deste tipo de

detector em relação aos atuais detectores barra e os interferômetros laser convencionais:

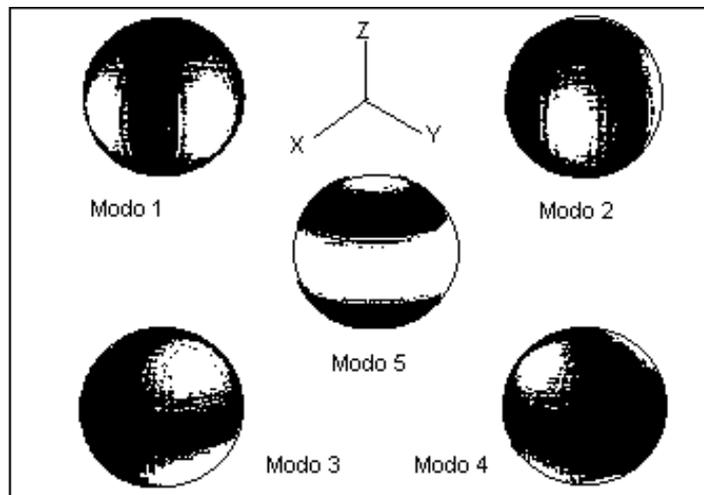


Fig. 3.1 - Os cinco modos de vibração da esfera. As regiões claras representa regiões com grande movimento radial e as regiões escuras representam as regiões com nenhum ou muito pouco movimento radial.

- Uma esfera tem uma massa muito maior que uma barra equivalente (barra com mesma frequência ressonante). Uma maior massa implica uma maior seção de choque, deste modo obtendo uma melhoria na sensibilidade da antena.
- Um detector esférico, propriamente projetado, tem a propriedade de ser onidirecional ou seja, ele é igualmente sensível a ondas gravitacionais vindas de qualquer direção do espaço. Ele também é capaz de determinar a polarização de ondas monocromáticas.
- A sensibilidade da antena é independente da polarização da onda gravitacional. Sempre se pode reconstruir a direção da onda e sua intensidade independentemente de sua polarização. Uma única antena esférica é suficiente para determinar a direção de origem de uma onda gravitacional. A vibração da antena pode ser decomposta nos cinco modos do sistema de laboratório e assim se pode resolver o problema inverso obtendo-se a direção da onda [23]. Cálculos feitos por Zhou indicam que um detector esférico pode determinar a direção da fonte com uma precisão melhor que um

conjunto de interferômetros laser alinhados de forma a serem sensíveis a todas as direções [24].

- Duas antenas esféricas situadas nas proximidades uma da outra, podem ser usadas para detectar radiação gravitacional estocástica [25].
- Existe uma vasta experiência adquirida em detectores de massa ressonante através de vários grupos.
- Um único detector esférico pode ser usado para testar se as características tensoriais das ondas gravitacionais estão de acordo com a Teoria da Relatividade Geral. Para testar as características escalares das ondas gravitacionais e testar outras teorias de gravitação, seria necessário medir, numa mesma antena, o primeiro modo monopolar fundamental ( $n = 1, \ell = 0$ ) e os primeiros modos quadrupolares excitados ( $n = 1, \ell = 2$ ) de uma onda confirmada [26].
- Os interferômetros laser não serão capazes de responder sobre a quantização das ondas gravitacionais. Os detectores esféricos serão capazes disto, ou seja, da descoberta de grávitons.

Com todas estas vantagens, porque as antenas esféricas não foram construídas antes? Primeiro, os quatro modos extras que se acoplam fortemente a uma onda gravitacional somam um conjunto de complexidade ao sistema. Segundo, uma esfera não é um detector prático. Ressonadores mecânicos deverão ser conectados à esfera para registrar todas as informações sobre os modos que interagem fortemente com as ondas gravitacionais. Estes ressonadores acoplarão aos modos resultantes da esfera mais 10 modos. Estas complicações e outros problemas práticos (tal como isolamento vibracional) desencorajou pesquisadores a tentar construir um detector de ondas gravitacionais esféricos de imediato.

### 3.2 Transdutor Paramétrico

Um transdutor paramétrico é um transdutor “bombeado” com sinal AC, que utiliza a variação de um parâmetro do circuito que relaciona uma variável mecânica com uma variável elétrica de forma não linear. Este tipo de transdutor é diferente de transdutores passivos, pois requer uma bomba<sup>2\*</sup> externa e tem um ganho de potência intrínseco. O ganho de potência é obtido pela conversão do sinal da antena para uma frequência muito maior.

A operação básica de um transdutor é mostrada na Figura 3.2. Vibrações da antena modulam a frequência ressonante de um circuito ressonante de grande  $Q_e$ , o qual, por sua vez, modula o sinal da bomba incidente, produzindo “sidebands” [27]. A modulação da bomba é amplificada usando parte do sinal original da bomba como referência. Todos transdutores paramétricos em desenvolvimento operam modulando a capacitância de um circuito de  $Q_e$  grande, e geralmente têm uma cavidade reentrante ou uma cavidade capacitivamente carregada coaxial ou toroidal.

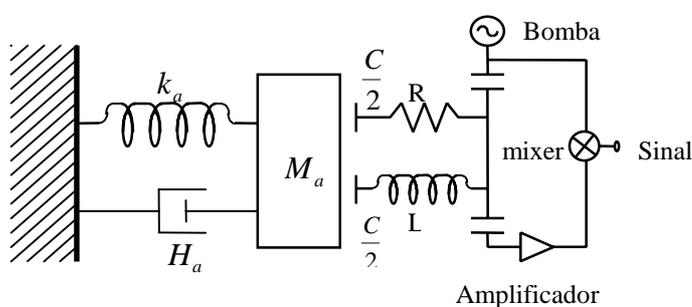


Fig. 3.2 - Modelo simplificado de uma antena do tipo massa ressonante com um transdutor paramétrico.

Na Figura 3.2,  $M_a$  é a massa efetiva da antena. Os parâmetros  $k_a = M_a \omega_a^2$  e  $H_a = M_a \omega_a / Q_a$  são constante de mola e fator de amortecimento da massa efetiva da

<sup>2\*</sup> Uma “bomba” é um sinal AC, injetado no circuito para polarizá-lo ativamente.

antena respectivamente. Os parâmetros do transdutor  $C, L$  e  $R$  são determinados pela geometria do transdutor, frequência ressonante e  $Q_e$ .

### 3.2.1 Vantagens dos Transdutores Paramétricos

Transdutores paramétricos tem várias vantagens sobre transdutores passivos.

- O transdutor paramétrico tem um grande coeficiente de acoplamento eletromecânico obtido devido à ação paramétrica.
- A frequência de operação pode ser escolhida para dar uma performance ótima utilizando melhores bombas e amplificadores. Transdutores passivos, são restritos a utilizar amplificadores os quais operam na mesma frequência da antena.
- Transdutores passivos amortecem resistivamente a antena, diminuindo o seu  $Q$ , e aumentando a contribuição do movimento browniano. Por outro lado, os transdutores paramétricos “colddamp<sup>3</sup>” reativamente a antena e degradam apenas levemente a razão do modo de temperatura para o  $Q$  acústico (desde que se garanta que a temperatura de ruído do transdutor seja suficientemente pequena).

Uma vantagem, a qual talvez seja a mais importante, é que transdutores paramétricos são auto calibrados, isto é, a sensibilidade da antena pode ser determinada sem a necessidade de um transdutor para uma calibração auxiliar. Uma desvantagem do transdutor paramétrico é o uso de uma bomba externa. O sinal da bomba deverá ter níveis de ruídos de amplitude e fase baixíssimos. A solução deste problema requer o desenvolvimento de novas fontes de frequências sem interferências. O requerimento na pureza da bomba pode ser contornado pelo uso de um par de transdutores balanceados. Um outro problema é

---

<sup>3</sup> \* “Cold damping” é um fenômeno produzido numa transdutância paramétrica. O ruído elétrico é reduzido, em torno da frequência do modo mecânico, em razão deste modo estar em baixa temperatura termodinâmica. Ou seja, o fato do modo mecânico estar resfriado causa, através do efeito paramétrico do transdutor, uma redução no ruído elétrico em torno da frequência daquele modo mecânico.

que os amplificadores de baixo ruído disponíveis no mercado na faixa de microondas saturam facilmente. Deste modo, o sinal da bomba ou portadora deve ser suprimido antes de ser amplificado.

### 3.2.2 As Equações de Manley-Rowe

A operação básica de um transdutor paramétrico é descrita pelas equações de Manley-Rowe [28]. Estas equações relacionam a potência em diferentes frequências em uma reatância não-linear sem perdas.

Se dois sinais com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , respectivamente, são aplicados a uma reatância não linear, então a conversão em frequência pela reatância produzirá sinais em todos os harmônicos inteiros  $\pm |m\omega_1 + n\omega_2|$ . Usando  $P_{m,n}$  para denotar a potência média fluindo na reatância nestas frequências, as equações de Manley-Rowe podem ser escritas na forma:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{mP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0. \quad (3.1b)$$

Considere uma “sideband” (banda lateral) dupla “upconverter” onde a potência é restrita a fluir em  $\omega_1 = \omega_a$  (frequência da antena),  $\omega_2 = \omega_p$  (frequência da bomba),  $\omega_2 + \omega_1 = \omega_+$  e  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_-$  pelo uso de filtros (circuito ressonante de alto  $Q$  por exemplo). Denotando  $P_{1,0} = P_a$ ,  $P_{0,1} = P_p$ ,  $P_{1,1} = P_+$  e  $P_{-1,1} = P_-$ , as equações (3.1) podem ser escritas na forma:

$$\frac{P_a}{\omega_a} + \frac{P_+}{\omega_+} - \frac{P_-}{\omega_-} = 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{P_p}{\omega_p} + \frac{P_+}{\omega_+} + \frac{P_-}{\omega_-} = 0 \quad (3.2b)$$

A partir da equação (3.2a) podemos ver que:

- Se  $P_+ / \omega_+ > P_- / \omega_-$  então  $P_a / \omega_a < 0$ . Isto é, se mais potência é extraída pela sideband mais baixa do que pela mais alta, então a potência líquida é injetada na antena. Isto pode produzir instabilidade paramétrica na qual o transdutor faz a antena oscilar se a potência injetada na antena excede as perdas acústicas. Este caso corresponde a frequência da bomba acima da ressonância elétrica.
- Se  $P_+ / \omega_+ < P_- / \omega_-$  então  $P_a / \omega_a > 0$ . Isto é, a potência é absorvida a partir da antena se a frequência da bomba está abaixo da ressonância. Nesta configuração a antena é “cold-damped”.
- O ganho de potência do transdutor,  $G_t$ , é dado por:

$$G_t = -(P_+ + P_-) / P_a, \quad (3.3)$$

o qual pode ser expressado em termos da potência nas sidebands:

$$G_t \approx \left( \frac{\omega_p}{\omega_a} \right) \left( \frac{P_+ \omega_- + P_- \omega_+}{P_+ \omega_- - P_- \omega_+} \right) \text{ se } \omega_p \gg \omega_a \quad (3.4)$$

Existem vários casos de interesse. Se a frequência da bomba está centrada na resposta do circuito ressonante então  $P_+ = P_-$  e  $G_t \approx -(\omega_p / \omega_a)^2$ . Se a frequência da bomba não está suficientemente próxima do centro de ressonância, entretanto, então

$$G_t \approx \left( \frac{\omega_p}{\omega_a} \right) \left( \frac{P_+ + P_-}{P_+ - P_-} \right), \quad (3.5)$$

Neste caso Se  $P_+ / \omega_+ = P_- / \omega_-$  não existe vazão de potência líquida para ou da antena e o ganho tende para o infinito. Entretanto, isto é uma característica do modelo e pode ser remediado incluindo as “sideband” de segunda ordem nas equações (3.2).

### 3.2.3 O Transdutor da Universidade de Western Austrália

A Figura 3.3 mostra um diagrama esquemático da antena utilizada na Universidade de Western Austrália (UWA). A antena consiste de uma barra de nióbio supercondutor de 1,5 toneladas, a qual é soldada um “beding flap” ressonante no modo longitudinal fundamental da barra e um transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante operando na frequência de microondas.

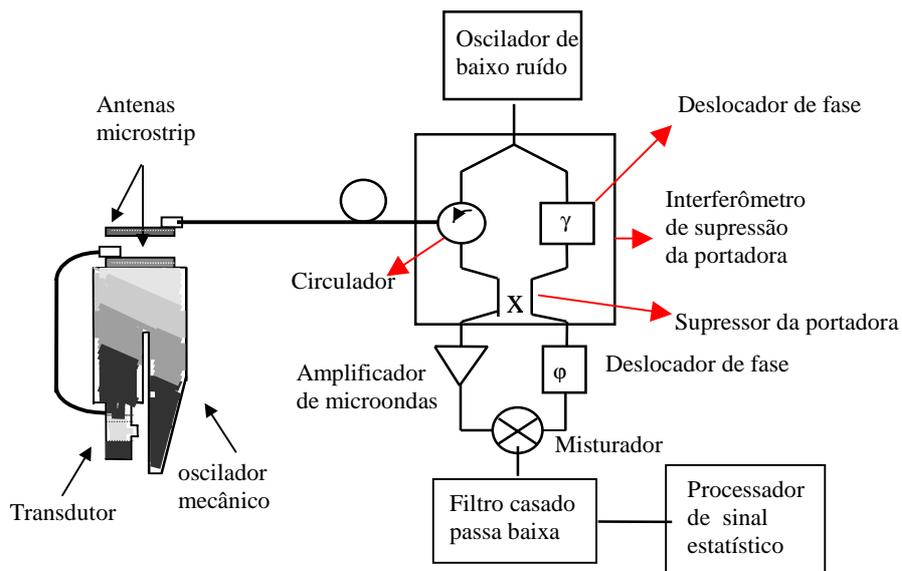


Fig. 3.3 - Diagrama esquemático de um transdutor, com ressonador feito com o dielétrico safira, utilizado pela UWA.

O transdutor é mostrado em mais detalhes na Figura 3.4. A cavidade reentrante consiste de duas regiões. A região central forma uma cavidade ressonante. A frequência ressonante da mesma é determinada pela indutância do fio central na cavidade coaxial e a capacitância entre o fim do fio e o “beding flap”. O fio central é esticado aproximadamente 0.05 mm, devido a tensões mecânicas, ultrapassa o topo da cavidade.

Portanto o mesmo deverá ter as extremidades levemente arredondadas para impedir que descargas elétricas prematuras aconteçam. A distância entre o fim do fio e a antena é de aproximadamente 12  $\mu\text{m}$ . O tamanho exato do espaçamento pode ser determinado, para uma dada frequência ressonante, usando a fórmula derivada por Fijisawa (1958). A distância efetiva  $x_0$  é dada por  $C_0(dC_0 / dx_{os})^{-1} \approx 15\mu\text{m}$ .

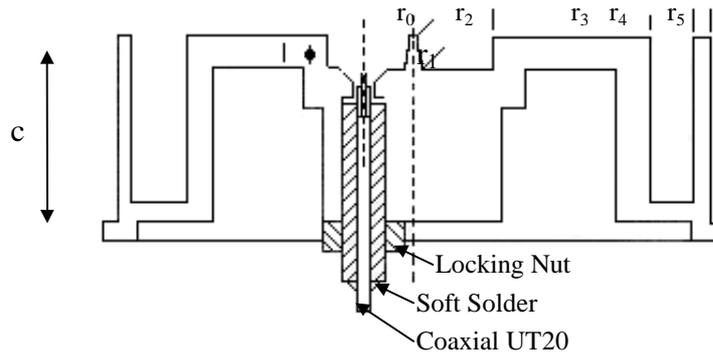


Fig. 3.4 - Seção reta do transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante da UWA.

FONTE: Veith (1987).

Desde que a cavidade reentrante é soldada na antena, e sua frequência ressonante não é facilmente sintonizável. A bomba deverá ser sintonizável e ainda ter níveis baixíssimos de ruído de amplitude e de fase. Para melhorar isso foi desenvolvido uma cavidade sintonizável de safira supercondutora carregada (T-SLOSC) com fonte de microondas. O T-SLOSC consiste de uma cavidade de nióbio, a qual é carregada com uma mola tipo cogumelo de safira e um disco fino de safira que pode ser movido para sintonizar a frequência ressonante da cavidade. Por causa da grande constante dielétrica e da baixa perda tangencial elétrica da safira, ressonadores de safira estão sendo utilizados com bastante sucesso pois possibilitam obter  $Q_s$  mecânicos muito altos.

### 3.2.4 Ruídos do Transdutor da UWA

Nesta seção são apresentados as expressões matemáticas dos principais tipos de ruído do transdutor paramétrico tipo cavidade reentrante da UWA. Os ruídos são divididos da seguinte forma [29]: ruídos de banda estreita e ruídos de banda larga.

### 3.2.4.1 Componentes de Ruídos de Banda Estreita do Transdutor da UWA

As componentes de ruídos de banda estreita podem ser caracterizadas pela densidade espectral das forças que excitam os sistemas ressonantes. Para um sistema paramétrico, as duas maiores componentes de ruído são devidas às flutuações provenientes do efeito de “back action” da componente de amplitude modulada da densidade espectral de ruído eletrônico,  $S_{am}$  da bomba, e as flutuações Nyquist devido à temperatura finita e  $Q$  acústico do sistema ressonante.

Assumindo que o transdutor elétrico possui as impedâncias de entrada casadas com as flutuações das forças incidentes na massa ressonante, temos que o ruído de “back action” é dado por:

$$S_{ba}(f) = \frac{P_{inc}^2}{2\Omega_0^2} \left( \frac{2Q_e}{f_0} \frac{df}{dx} \right)^2 S_{am} [N^2 / Hz], \quad (3.6)$$

nas quais:  $P_{inc}$  é a potência da bomba incidente na cavidade,  $df / dx$  é a taxa de mudança da frequência ressonante do transdutor em relação ao deslocamento,  $f_0$  é a frequência da bomba,  $\Omega_0 = 2\pi f_0$  e  $S_{am}$  é a componente de amplitude modulada da densidade espectral de ruído eletrônico.

O ruído de Nyquist nas massas ressonantes é dado por:

$$S_{Nyqi}(f) = 4k_B m_i \omega_i \frac{T}{Q_i} [N^2 / Hz], \quad (3.7)$$

nas quais:  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $m_i, \omega_i$  são a n-ésima massa e frequência ressonante respectivamente e  $Q_i$  é a figura de mérito da n-ésima massa ressonante.

### 3.2.4.2 Componentes de Ruídos de Banda Larga do Transdutor da UWA

As componentes de Ruído de Banda Larga podem ser caracterizadas pela densidade espectral do deslocamento referente ao movimento do n-ésimo elemento sentido pelo transdutor. As duas maiores flutuações deste ruído vem a partir das flutuações de fase da bomba e da temperatura de ruído do primeiro amplificador de microondas no sistema de leitura,  $T_{amp}(f)$ .

A potência do sinal nas “sidebands” é proporcional a  $P_{inc} Q_e^2 (df/dx)^2$ , o que significa que o ruído serial eletrônico total devido à temperatura de ruído efetiva do sistemas de leitura é proporcional ao inverso desta quantidade. Para um transdutor com a impedância de entrada casada com as flutuações das forças incidentes na massa ressonante, esta quantidade é dada por:

$$S_s(f) = \frac{T_{amp}(f)k_B}{P_{inc}} \left( \frac{2Q_e}{f_0} \frac{df}{dx} \right)^{-2} [m^2 / Hz], \quad (3.8)$$

nas quais:  $T_{amp}(f)$  é a temperatura de ruído do primeiro amplificador de microondas no sistema de leitura,  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $P_{inc}$  é a potência da bomba incidente na cavidade,  $Q_e$  é o fator de qualidade elétrico da cavidade do transdutor,  $f_0$  é a frequência elétrica do transdutor e  $df/dx$  é a taxa de mudança da frequência ressonante do transdutor em relação ao deslocamento.

Deste modo, aumentando a  $P_{inc}$  e  $Q_e(df/dx)$  o ruído de banda larga devido a  $S_s$  será reduzido às custas de um aumento no ruído de banda estreita devido ao efeito de “back action” causado por  $S_{am}$ . Além do mais a componente de fase modulada da densidade espectral de ruído eletrônico,  $S_{pm}$  (ruído de fase) soma-se ao ruído de banda larga. Contudo, esta componente de ruído de banda larga é independente de  $P_{inc}$ , porque a razão

do sinal das “sidebands” para a potência de ruído refletida permanece constante. Esta razão é dada por:

$$S_x(f) = \left( \frac{df}{dx} \right)^{-2} f^2 S_{pm}(f) [m^2 Hz], \quad (3.9)$$

onde  $df / dx$  é a taxa de mudança da frequência ressonante do transdutor em relação ao deslocamento e  $S_{pm}(f)$  é a componente de fase modulada da densidade espectral de ruído eletrônico.

Este ruído  $S_x(f)$  pode ser reduzido apenas aumentando  $(df / dx)$  ou reduzindo  $S_{pm}$ .

Após descrevermos detalhadamente neste capítulo o princípio de operação de um detector de ondas gravitacionais e um transdutor paramétrico, analisado suas vantagens e desvantagens, apresentaremos no Capítulo 4 vários modelos para detectores de ondas gravitacionais, a partir dos quais é construído um modelo completo para uma antena de onda gravitacionais esférica acoplada a seis transdutores paramétricos do tipo cavidade reentrante de dois modos.

## CAPÍTULO 4

### MODELOS PARA DETECTORES DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Neste Capítulo faremos uma exposição sobre dois modelos para detectores de ondas gravitacionais do tipo barra ressonante. Primeiro é mostrado um modelo de detector de onda gravitacional do tipo barra ressonante de três modos, o mesmo utiliza um transdutor passivo. Depois é mostrado um modelo de detector de onda gravitacional do tipo barra ressonante de dois modos com um transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante utilizado na UWA.

#### 4.1- Modelo de uma Antena de Ondas Gravitacionais do Tipo Barra Ressonante Acoplada a um Transdutor Passivo

Nesta seção, é mostrado um modelo de detector de onda gravitacional do tipo barra ressonante de três modos desenvolvido por Solomonson [30]. O sistema é modelado como composto de três osciladores harmônicos acoplados [31]. A Figura 4.1 ilustra este modelo com um “transdutor indutivo supercondutivo” e um amplificador SQUID dc (Superconducting Quantum Interface Device, ver apêndice B).

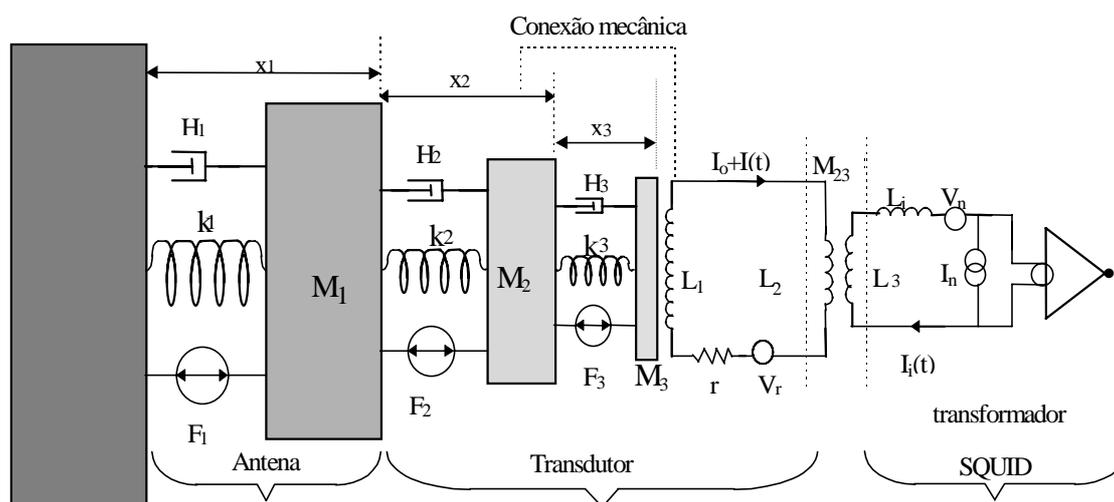


Fig. 4.1 - Modelo de um detector de ondas gravitacionais do tipo massa ressonante para uma barra, com três modos e o SQUID dc.

FONTE: Ziniu Geng (1994).

O modelo Michelson e Taber do detector inclui a massa da antena, um transdutor indutivo e um amplificador SQUID [32].

O transformador é utilizado para casar a impedância entre a bobina coletora do transdutor e a bobina de entrada do SQUID.

Quando todas as fontes de ruído gaussiano estão incluídas, as equações de movimento para o detector são as seguintes:

$$M_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) + H_1 \dot{\mathbf{x}}_1(t) + K_1 \mathbf{x}_1(t) - H_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) - K_2 \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{F}_1(t) - \mathbf{F}_2(t) + \mathbf{F}_e^{OG}(t) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} M_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) + H_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) + K_2 \mathbf{x}_2(t) - H_3 \dot{\mathbf{x}}_3(t) - K_3 \mathbf{x}_3(t) + M_2 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) - \alpha I_0 I(t) \\ = \mathbf{F}_2(t) - \mathbf{F}_3(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$M_3 \ddot{\mathbf{x}}_3(t) + H_3 \dot{\mathbf{x}}_3(t) + K_3 \mathbf{x}_3(t) + M_3 [\ddot{\mathbf{x}}_1(t) + \ddot{\mathbf{x}}_2(t)] + \alpha I_0 I(t) = \mathbf{F}_3(t) \quad (4.3)$$

$$-\alpha I_0 \dot{\mathbf{x}}_3(t) + (L_1 + L_2) \dot{I}(t) + rI(t) + M_{23} \dot{I}_i(t) = V_r(t) \quad (4.4)$$

$$M_{23} \dot{I}(t) + (L_3 + L_i) \dot{I}_i(t) = V_n, \quad (4.5)$$

Nas quais;  $M_1$  representa a massa efetiva da antena,  $M_2$  a massa efetiva intermediária e  $M_3$  representa a massa efetiva do segundo ressonador.  $K_i = M_i \omega_i^2$  e  $H_i = M_i \omega_i / Q_i$  ( $i=1,2,3$ ) são as constante de mola e amortecimento das massas efetivas respectivamente, onde  $\omega_i$  é a frequência angular intrínseca e  $Q_i$  o fator de qualidade mecânico de cada oscilador.  $F_i$  são as forças de Langevin dos geradores de ruído associados com os coeficientes de dissipação  $H_i$  dadas por  $F_i = 4k_b T \frac{m_i \omega_i}{Q_i}$ , onde  $k_b$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura física,  $Q_i$  é a figura de mérito,  $m_i$  é a massa,  $\omega_i$  é a frequência de cada massa ressonante do sistema.  $F_s$  representa a força do sinal aplicada à antena e  $\alpha$  é o parâmetro de modulação da indutância dado por:

$$\alpha = L_1 / d \quad (4.6)$$

nas quais  $d$  é a distância de equilíbrio entre a bobina coletora e o diafragma de  $M_3$  e  $I_0$  é a super-corrente DC armazenada na malha  $L_1 - L_2$ .

A super-corrente  $I_0$  dc produz uma constante de mola magnética adicional, a mesma age em paralelo com  $K_3$  como é mostrado nas equações (4.3) e (4.4), e mudam a frequência ressonante de  $M_3$ .  $I(t)$  é o sinal Ac gerado na malha  $L_1 - L_2$ . A única força que afeta o movimento dinâmico do detector é a força magnética  $\alpha I_0 I$  [33].  $I_i(t)$  é a corrente na malha  $L_3 - L_i$ .  $L_1$  é a indutância da bobina coletora do transdutor.  $L_2$  e  $L_3$  são as indutâncias primárias e secundárias do transformador respectivamente,  $M_{23}$  é a indutância mutua do transformador.  $r$  representa perdas devidas a corrente elétrica AC,  $I(t)$  nos supercondutores e  $V_r$  é a voltagem associada ao ruído do gerador.

O SQUID dc é modelado como um amplificador de corrente linear com um SQUID de indutância de entrada  $L_i$  [34]. O ruído da corrente de entrada  $I_n$  determina o nível de ruído branco do SQUID.  $V_n$  é o “back action” ou voltagem de ruído na entrada do SQUID.

Após aplicar a transformada de Fourier às equações (4.1)-(4.5), as mesmas podem ser expressas na forma matricial como:

$$\bar{V} \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ X_3(\omega) \\ I(\omega) \\ I_i(\omega) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ V_r(\omega) \\ V_n(\omega) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Estas equações foram resolvidas, em 1989, por Norbert Solomonson, utilizando um programa escrito no aplicativo Mat-Lab [1]. O programa fornece o gráfico da sensibilidade espectral de deformações e a temperatura de ruído do detector.

## 4.2 Modelo de uma Antena acoplada a um Transdutor Paramétrico de um Modo

Esta seção mostra um modelo de detector de onda gravitacional do tipo barra ressonante de dois modos desenvolvido por Michael Tobar [35]. O sistema é modelado como composto de dois osciladores harmônicos acoplados. A Figura 4.2 ilustra este modelo com um transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante utilizado na UWA.

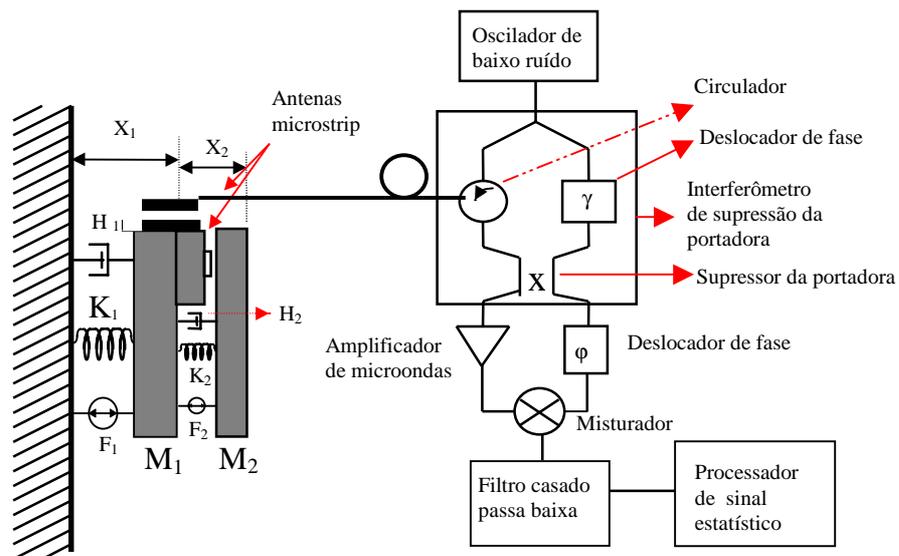


Fig. 4.2 - Modelo completo de um detector de ondas gravitacionais do tipo barra ressonante de dois modos, acoplado a um transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante.

Neste tipo de detector o sinal de uma bomba de baixo ruído, de 10 GHz de frequência, é injetado em um circulator, que o envia para a cavidade reentrante do transdutor através de antenas “microstrips”. As vibrações da barra, provocadas pelas ondas gravitacionais, modulam a frequência ressonante do transdutor, o qual, por sua vez, modula o sinal da bomba incidente, produzindo “sidebands”. As “sidebands” e o sinal da portadora (bomba) vão, então, para o circulator, e deste para o supressor da portadora. O sinal da bomba ou portadora é suprimido para evitar que o mesmo sature o amplificador de microondas.

Após supressão da frequência da portadora, restam apenas as frequências “idler”. Estas são amplificadas pelo amplificador de microondas para aumentar as suas intensidades. As frequências idler puras são misturadas com a frequência da bomba, após a amplificação. A fase da bomba é ajustada para a obtenção do máximo sinal na saída do filtro passa baixa. Este filtra o sinal da bomba e outros de alta frequência. Apenas o sinal elétrico na frequência do oscilador mecânico sobrevive. Este sinal é analisado, em busca da presença de ondas gravitacionais.

Sem a influência do transdutor, e fazendo  $x_3 = \dot{x}_1$  e  $x_4 = \dot{x}_2$ , as equações de movimento dos osciladores harmônicos acoplados do sistema acima podem ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 - \frac{m_2}{m_1}\omega_2^2 & \frac{m_2}{m_1}\omega_2^2 & -\frac{2}{\tau_1} - \frac{2m_2}{\tau_2 m_1} & \frac{2m_2}{\tau_2 m_1} \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 & \frac{2}{\tau_2} & -\frac{2}{\tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

nas quais:  $m_1$  representa a massa efetiva da antena,  $m_2$  a massa efetiva do transdutor.  $K_i = M_i \omega_i^2$  e  $H_i = M_i \omega_i / Q_i$  ( $i=1,2$ ) são as constante de mola e amortecimento das massas efetivas respectivamente, onde  $\omega_i = (K_i / m_i)^{1/2}$  é a frequência angular intrínseca e  $Q_i$  o fator de qualidade mecânico de cada oscilador.  $F_1$  e  $F_2$  são as forças que atuam nas massas  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente.

A equação característica da equação (4.8) é dada por:

$$\begin{aligned} S^4 + S^3 \left[ \frac{2}{\tau_1} + \frac{2}{\tau_2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \right] + S^2 \left[ \omega_1^2 + \omega_2^2 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) + \frac{4}{\tau_1 \tau_2} \right] + \\ S \left( \frac{2\omega_1^2}{\tau_2} + \frac{2\omega_2^2}{\tau_1} \right) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

A equação característica para os 2 sistemas independentes de segunda ordem com frequências  $\omega_+$  e  $\omega_-$ , e amplitudes das constantes de decaimento de tempo é dada por:

$$S^4 + S^3 \left( \frac{2}{\tau_+} + \frac{2}{\tau_-} \right) + S^2 \left( \omega_+^2 + \omega_-^2 + \frac{4}{\tau_+ \tau_-} \right) + S \left( \frac{2\omega_+^2}{\tau_-} + \frac{2\omega_-^2}{\tau_+} \right) + \omega_+^2 \omega_-^2 = 0 \quad (4.10)$$

Equacionando os coeficientes de (4.9) e (4.10) obtemos as seguintes relações entre os parâmetros acoplados e não acoplados:

$$\omega_+^2 \omega_-^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 = \omega_0^4 \quad (4.11)$$

Nas quais  $\omega_+$  é a autofrequência do modo +,  $\omega_-$  é a autofrequência do modo -,  $\omega_1$  é a frequência ressonante da antena,  $\omega_2$  é a frequência ressonante do transdutor e  $\omega_0$  é o produto entre as frequências.

$$\omega_+^2 + \omega_-^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) + \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{1}{Q_+ Q_-} \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{2\omega_+^2}{\tau_-} + \frac{2\omega_-^2}{\tau_+} = \frac{2\omega_1^2}{\tau_2} + \frac{2\omega_2^2}{\tau_1} \quad (4.13)$$

$$\frac{2}{\tau_+} + \frac{2}{\tau_-} = \frac{2}{\tau_1} + \frac{2}{\tau_2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right). \quad (4.14)$$

Se  $Q_1$  e  $Q_2$  são muito maiores que a unidade e (4.11) e (4.12) são o produto e a soma respectivamente do polinômio abaixo em  $\omega^2$ :

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ \omega_1^2 + \omega_2^2 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \right] + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0. \quad (4.15)$$

Soluções analíticas para o parâmetro de dessintonia e massa efetiva secundária podem ser obtidas.

$$\omega_{1,2} = \omega_0(1 + \delta/2)^{\pm 1}. \quad (4.16)$$

A partir de (4.17) e (4.18) temos:

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_0^2 \left[ z \pm (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.17)$$

Na qual

$$z = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 [1 + m_2/m_1]}{2\omega_1\omega_2} = \frac{(1 + \delta/2)^2}{2} + \frac{1 + (m_2/m_1)}{2(1 + \delta/2)^2}. \quad (4.18)$$

A diferença de frequência entre os 2 modos normais é determinado por  $m_2/m_1$  e  $\delta$ . O termo  $m_2/m_1$  determina a diferença devido ao acoplamento inercial entre a barra e massa secundária,  $\delta$  determina a componente devido a dessintonia.

Combinando (4.13) e (4.14), e resolvendo para as amplitudes de constantes de decaimento de tempo em termos dos parâmetros dos modos normais temos:

$$\frac{1}{\tau_1} = \left\{ \frac{1}{\tau_+ \omega_+} [\omega_+ (1 + \delta/2)^2 - \omega_- (1 + m_2/m_1)] + \frac{1}{\tau_- \omega_-} [\omega_- (1 + \delta/2)^2 - \omega_+ (1 + m_2/m_1)] \right\} \times \left[ (1 + \delta/2)^2 - (1 + \delta/2)^{-2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \right]^{-1} \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \left\{ \frac{1}{\tau_+ \omega_+} [\omega_- - \omega_+ (1 + \delta/2)^{-2}] + \frac{1}{\tau_- \omega_-} [\omega_+ - \omega_- (1 + \delta/2)^{-2}] \right\} \times \left[ (1 + \delta/2)^2 - (1 + \delta/2)^{-2} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \right]^{-1} \quad (4.20)$$

#### 4.2.1 Modelo de uma Antena de 2 Modos com Transdutor Paramétrico com Bomba com Pequeno “Offset”.

A adição do transdutor paramétrico modifica a matriz  $A$  e deste modo a sua função de transferência, mudando o valor  $Q$  do modo normal e frequência ressonante da barra. Neste sistema de 2 modos, a tendência do transdutor paramétrico é em mudar a frequência ressonante do segundo ressonador desde que este tenha uma massa efetiva e constante de mola muito menores que os da antena.

Para pequenas perturbações nas frequências do modo normal, pode se assumir :

$$\omega_{\pm L} - \omega_{\pm} = \left. \frac{d\omega_{\pm}}{d\omega_2} (\omega_{2L} - \omega_2) \right|_{\omega_1 = \text{constante}} \quad (4.21)$$

$\omega_{\pm L}$  são as frequências ressonantes dos modos normais carregados e  $\omega_{2L}$  é a frequência ressonante da massa secundária carregada. Para bombas com “offset” menor que a largura de banda do transdutor [36]:

$$\omega_{2L} \approx \omega_2 \left( 1 + \beta_0 Q_e \frac{\delta \Omega}{\Omega_0} \right) \quad (4.22)$$

$\beta_0$  é o acoplamento eletromecânico com a massa secundária do transdutor com a bomba no centro de ressonância ( $\delta \Omega = 0$ ).  $Q_e$  é o  $Q$  elétrico do transdutor acoplado,  $\Omega_0$  é a frequência ressonante do transdutor e  $\delta \Omega$  é o “offset” da frequência da bomba a partir da ressonância do transdutor. Combinando (4.21) e (4.22), podemos mostrar que para pequenos “offset” da ressonância,

$$K_{\pm} = \frac{d\omega_{\pm}}{d(\delta \Omega / \Omega_0)} \approx \frac{\omega_{\pm L} - \omega_{\pm}}{\delta \Omega / \Omega_0} = (Q_e \beta_0 \omega_2) \left. \frac{d\omega_{\pm}}{d\omega_2} \right|_{\omega_1 = \text{constante}} \quad (4.23)$$

Diferenciando implicitamente, a equação (4.17) em relação a  $\omega_2$ , e substituindo na equação acima, o parâmetro de dessintonia pode ser expressado como:

$$(1 + \delta / 2)^2 = \frac{\omega_+}{\omega_-} \left( \frac{1}{1 + \beta_r} \right) + \left( \frac{\beta_r}{1 + \beta_r} \right); \quad \beta_r = \left( \frac{K_+ \omega_-}{K_- \omega_+} \right). \quad (4.24)$$

Combinando (4.17) e (4.24), a razão entre as massa pode ser expressada como:

$$\frac{m_2}{m_1} = \beta_r \left( \frac{\omega_+^2 - \omega_-^2}{(1 + \beta_r) \omega_+ \omega_-} \right)^2. \quad (4.25)$$

Substituindo (4.24) em  $d\omega_{\pm} / d\omega_2$  e este termo em (4.23), o acoplamento eletromecânico total torna-se;

$$\beta_0 = \frac{K_+}{Q_e \omega_+} + \frac{K_-}{Q_e \omega_-} = \beta_{0+} + \beta_{0-} \quad (4.26)$$

Onde  $\beta_{0\pm}$  são, respectivamente, os acoplamentos eletromecânicos para os modos  $\omega_{\pm}$  com a bomba no centro de ressonância. Deste modo  $\beta_r = \beta_{0+} / \beta_{0-}$  é a razão dos acoplamentos eletromecânico.

Se a sintonia das duas massas são exatas, isto é  $\delta = 0$ , a partir de (4.26) temos:

$$\beta_{0+} + \frac{\omega_+}{\omega_-} \beta_{0-} \Big|_{\delta=0}. \quad (4.27)$$

Neste caso o desdobramento da frequência será exclusivamente devido a razão entre as massas. O modo com desdobramento positivo tem um acoplamento levemente maior e o mesmo esta associado a um pequeno abaixamento do valor do  $Q$ .

O modo + terá um pouco mais do automodo da massa secundária associado com ele.

O modo - terá um pouco mais do automodo da barra ressonante associado com ele.

#### 4.2.2 Modelo de uma Antena de Dois Modos com Transdutor Paramétrico em Bomba com “offset” Arbitrário

O efeito de um transdutor paramétrico em uma barra ressonante é descrito por uma matriz de espalhamento. A mesma é incorporada à impedância de entrada da barra ressonante com o transdutor. A impedância de entrada varia como uma função do “offset” da bomba e provoca mudanças nas frequências ressonantes e no valor do  $Q$  acústico do sistema ressonante. A Figura 4.2 mostra um diagrama esquemático de uma barra ressonante interagindo com um transdutor paramétrico. A matriz de espalhamento que descreve este sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} b_{PM}(\omega_{\pm}) \\ f(\omega_{\pm}) \\ b_{AM}(\omega_{\pm}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pp\pm} & S_{pu\pm} & S_{pa\pm} \\ S_{fp\pm} & Z_{in\pm} & S_{fa\pm} \\ S_{ap\pm} & S_{au\pm} & S_{aa\pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{PM}(\omega_{\pm}) \\ u(\omega_{\pm}) \\ a_{AM}(\omega_{\pm}) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Nas Quais,  $a$  é o sinal incidente ( $W^{1/2}$ ),  $b$  é o sinal refletido ( $W^{1/2}$ ),  $u$  é a velocidade de entrada no transdutor e  $f$  é a força no transdutor.

O sinal é analisado em termos das componentes do observável de quadratura de amplitude modulada, AM e fase modulada, PM [37]. Este método inclui conversões AM para PM e vice versa. As componentes de espalhamento do transdutor para cada modo normal são definidas como:

$S_{pa\pm}$  é a razão de PM refletida, convertida a partir de PM incidente quando  $u = 0$

e  $a_{PM} = 0$

$S_{ap\pm}$  é a razão de AM refletida, convertida a partir de PM incidente quando  $u = 0$   
e  $a_{AM} = 0$

$S_{aa\pm}$  é a razão de AM refletida por AM incidente quando  $u = 0$  e  $a_{PM} = 0$

$S_{pp\pm}$  é a razão de PM refletida por PM incidente quando  $u = 0$  e  $a_{AM} = 0$

$S_{pu\pm}$  é o parâmetro de espalhamento da transdutância em PM

$S_{au\pm}$  é o parâmetro de espalhamento da transdutância em AM

$S_{fp\pm}$  é o parâmetro de espalhamento reverso da transdutância em PM

$S_{fa\pm}$  é o parâmetro de espalhamento Reverso da transdutância em AM

$Z_{in\pm} = f / u$  é a impedância de entrada

Definindo  $Z_m$  como a impedância mecânica de entrada do transdutor em ( $s^{-1}$ ) temos,

$$Z_m = Z_{m+} + Z_{m-} \quad e \quad Z_{m\pm} = Z_{in\pm} / m_2$$

A equação de movimento (4.8) é então modificada para,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 - \frac{m_2}{m_1}\omega_2^2 & \frac{m_2}{m_1}\omega_2^2 & -\frac{2}{\tau_1} - \frac{2m_2}{\tau_2 m_1} & \frac{2m_2}{\tau_2 m_1} \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 & \frac{2}{\tau_2} & -\frac{2}{\tau_2} + Z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

A impedância de entrada é dada por:

$$\text{Re}(Zm_{\pm}) = A \cdot \left( \frac{1}{(2Q_e \delta_{u\pm})^2 + 1} - \frac{1}{(2Q_e \delta_{L\pm})^2 + 1} \right) \quad (4.30a)$$

$$\text{Im}(Zm_{\pm}) = -A \cdot \left( \frac{2Q_e \delta_{u\pm}}{(2Q_e \delta_{u\pm})^2 + 1} + \frac{2Q_e \delta_{L\pm}}{(2Q_e \delta_{L\pm})^2 + 1} \right) \quad (4.30b)$$

Nas quais;

$$\delta = \frac{\delta\Omega}{\Omega_0}, \quad \delta_{u\pm} = \frac{\delta\Omega + \omega_{\pm}}{\Omega_0}, \quad \delta_{L\pm} = \frac{\delta\Omega - \omega_{\pm}}{\Omega_0} \quad \text{e} \quad A = \frac{\beta_{0\pm}(\omega_2^2 / \omega_{\pm})(1 + 4Q_e^2 \omega_{\pm}^2 / \Omega_0^2)}{2(1 + 4Q_e^2 \delta^2)}.$$

A impedância de entrada é substituída em (4.31) e as frequências dos modos normais são calculadas a partir de sua equação característica. Para pequenos acoplamentos eletromecânicos o comportamento do modo acoplado pode ser ignorado e os modos normais podem ser tratados independentemente, para este caso as frequências do modo normal carregado e o valor de  $Q$  podem ser expressado como:

$$\omega_{\pm L} \approx \omega_{\pm} \left( 1 - \frac{\text{Im}(Zm_{\pm})}{\omega_{\pm}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.31a)$$

$$Q_{\pm L}^{-1} \approx Q_{\pm}^{-1} + \frac{\text{Re}(Zm_{\pm})}{\omega_{\pm}} \quad (4.31b)$$

Diferenciando (4.31a,b) em relação a  $\delta$  e assumindo que as modulações das frequências dos modos normais são pequenas comparadas com metade da largura de banda do transdutor, os pontos de sintonia para a frequência do modo normal e  $Q$  característico, respectivamente, ocorrem em:

$$\delta\Omega_{fp} = \pm \frac{\Delta\Omega_{hbw}}{\sqrt{3}} \quad (4.32a)$$

$$\delta\Omega_{Op} = \pm \frac{\Delta\Omega_{hbw}}{\sqrt{5}}. \quad (4.32b)$$

Este resultado é geral para qualquer sistema constituído de uma barra ressonante e um transdutor paramétrico.

### 4.2.3 Acoplamento Eletromecânico

Se a bomba não está no centro de ressonância, o acoplamento é reduzido relativo ao centro de ressonância do mesmo. O acoplamento deverá ser calculado como uma função do offset da frequência [38], dependendo apenas da transdutância direta na seguinte forma:

$$\beta_{\pm} = \frac{Esb}{Esa}, \quad (4.33)$$

nas quais:  $Esb$  é a energia do sinal nas “side bands” devido ao modo ressonante  $\pm$  e  $Esa$  é a energia do sinal na antena.

Em termos dos parâmetros elétricos da cavidade do transdutor, o acoplamento eletromecânico total é dado por:

$$\beta = \frac{2\beta_e P_{inc}}{(1+\beta_e)m_2\omega_2^2\Omega_0} \left( \frac{2Q_e df}{f_0 dx} \right)^2 \left( \frac{1}{1+4Q_e^2\delta^2} \right) \left( \frac{1}{1+4Q_e^2\delta_U^2} + \frac{1}{1+4Q_e^2\delta_L^2} \right), \quad (4.34)$$

nas quais:  $\beta_e$  é o acoplamento elétrico da cavidade,  $P_{inc}$  é a potência da bomba incidente na cavidade,  $df/dx$  é a taxa de mudança da frequência ressonante do transdutor em relação ao deslocamento,  $f_0 = \Omega_0 / 2\pi$ ,  $\delta_U = (\delta\Omega + \omega_m) / \Omega_0$  e  $\delta_L = (\delta\Omega - \omega_m) / \Omega_0$ , na qual  $\omega_m$  é a frequência modulada da barra ressonante.

A partir de (4.34) o acoplamento com a bomba no centro de ressonância é:

$$\beta_0 = \frac{4\beta_e P_{inc}}{(1 + \beta_e)m_2\omega_2^2\Omega_0} \left( \frac{2Q_{fac} df}{f_0 dx} \right)^2, \quad (4.35)$$

com,

$$Q_{fac}^2 = \left( \frac{Q_e^2}{1 + 4Q_e^2\omega_m^2 / \Omega_0^2} \right). \quad (4.36)$$

A partir de (4.35), vemos que o acoplamento eletromecânico é proporcional à potência incidente.

A Figura 4.3 ilustra as componentes do acoplamentos eletromecânicos como uma função do offset na frequência da bomba para ( $P_{inc} \approx 77\mu W$ ,  $\beta_0 \approx 6,4 \times 10^{-3}$ ).

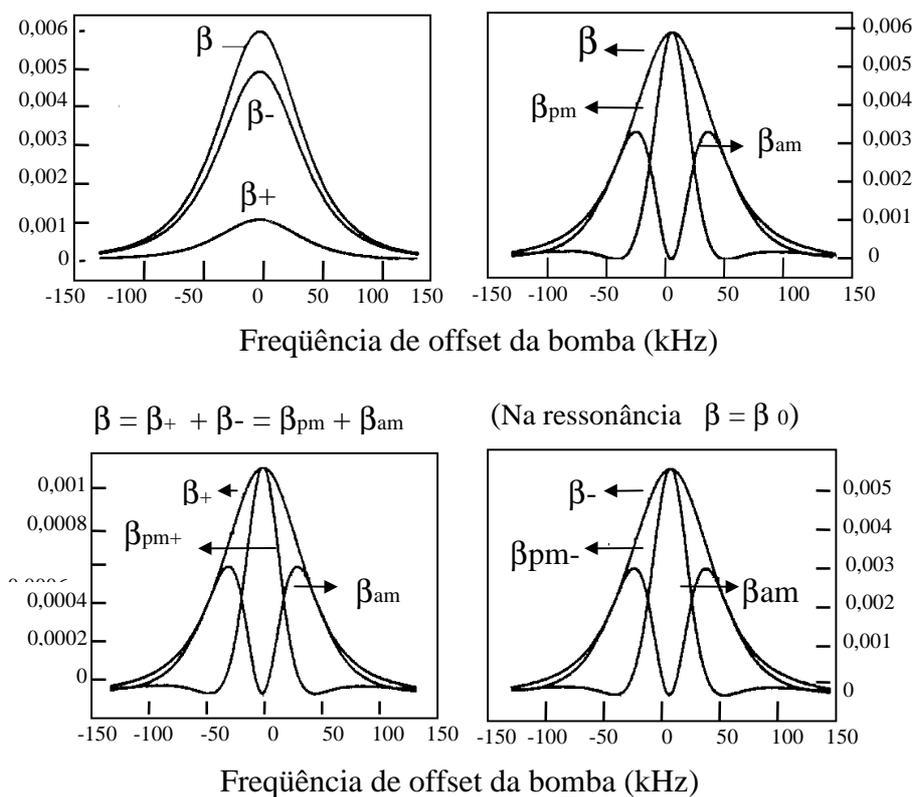


Fig. 4.3 - Componentes do acoplamento eletromecânico como uma função da frequência de “offset” da bomba, com  $P_{inc} \approx 77\mu W$  e  $\beta_0 \approx 6,4 \times 10^{-3}$ .

FONTE: Michael Tobar (1993).

O acoplamento total é quebrado em 4 componentes. Primeiro este é quebrado em duas componentes associadas com os modos normais + e -, relacionando  $\beta_0$  com  $\beta_{0\pm}$  via (4.26) e substituindo  $\omega_m$  por  $\omega_{\pm}$ . Definindo as componentes do acoplamento eletromecânico que são proporcionais aos parâmetros de espalhamento da transdutância direta  $S_{pu\pm}$  e  $S_{au\pm}$ , respectivamente, as componentes do acoplamento podem ser quebradas em componentes de quadratura PM e AM. As quatro componentes são dadas por:

$$\beta_{PM\pm} = \beta_{0\pm} F_{PM\pm} \quad (4.37a)$$

$$\beta_{AM\pm} = \beta_{0\pm} F_{AM\pm} \quad (4.37b)$$

Após termos apresentados vários modelos para detectores de ondas gravitacionais neste capítulo, com o intuito de fornecer subsídios teóricos para o capítulo seguinte, no Capítulo 5 será construído um modelo completo para uma antena de ondas gravitacionais esférica acoplada a seis transdutores paramétricos do tipo cavidade reentrante de dois modos. Ainda no Capítulo 5 é feita uma análise teórica dos resultados obtidos na simulação computacional.

## CAPÍTULO 5

### MODELO DE UMA ANTENA ESFÉRICA PARA ONDAS GRAVITACIONAIS ACOPLADA A TRANSDUTORES PARAMÉTRICOS DE DOIS MODOS

Neste capítulo, um detector de ondas Gravitacionais tipo massa ressonante esférico com 6 transdutores paramétricos de dois modos é modelado a partir de um modelo de detector do tipo barra ressonante acoplado a um transdutor de dois modo.

#### 5.1 Equações de Movimento da Esfera

Forças agindo num corpo sólido causam deformações que são descritas pelo vetor de deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ . As equações de movimento de um corpo elástico isotrópico são

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \sum \mathbf{F}. \quad (5.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $\lambda$  e  $\mu$  são os coeficientes de Lamé que contém a rigidez do material e  $\sum \mathbf{F}$  representa a densidade de forças externas agindo sobre a esfera. As forças externas agindo serão as seguintes: a força da onda gravitacional,  $\mathbf{F}^{OG}$ , dada pela equação (5.2); a força de reação dos ressonadores fixados na superfície da esfera; as forças de ruído, que incluem: o ruído serial, o ruído de “back action” e o ruído Browniano da esfera e dos transdutores.

$$\mathbf{F}_i^{OG}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 h_{ij}(t)}{\partial t^2} x^j. \quad (5.2)$$

A força gravitacional pode ser obtida de um potencial dado por:

$$\mathbf{F}_i^{OG}(\mathbf{x},t) = \nabla_i \ddot{\phi}(\mathbf{x},t) = \nabla \left( \sum_{j,k=1}^3 \frac{1}{4} \rho x_j \ddot{h}_{ik}(t) x_k \right) \quad (5.3)$$

A solução da equação (5.1) pode ser calculada pelo método de expansão em autofunções. Fazendo uma separação de variáveis no vetor deslocamento

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{m=1}^5 a_m(t) \boldsymbol{\varphi}_m(x_i), \quad (5.4)$$

as autofunções  $\boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{x}_i)$  são as soluções independentes do tempo de um oscilador harmônico com a autofrequência  $\omega_m$ , e podem ser calculadas resolvendo-se

$$-\rho\omega_m^2 \boldsymbol{\varphi}_m = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_m) + \mu\nabla^2 \boldsymbol{\varphi}_m, \quad (5.5)$$

com a condição de contorno que a resultante das forças agindo na superfície da esfera se anulem na direção normal à superfície. O coeficiente  $a_m(t)$  é a amplitude do modo dependente do tempo. As autofunções obedecem a condição de ortogonalidade

$$\int_V \boldsymbol{\varphi}_m(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(x) d^3x = N_m \delta_{mn}, \quad (5.6)$$

onde a constante  $N_m = \frac{4}{3}\pi R^3$ , ou seja, o volume da esfera, e  $\int_V$  representa a integral sobre o volume da esfera.

Utilizando a relação de ortogonalidade acima para eliminar os somatórios, encontra-se a seguinte solução para cada amplitude:

$$\ddot{a}_m(t) + \omega_m^2 a_m(t) = \frac{1}{\rho N_m} \int_V \boldsymbol{\varphi}_m(x) \cdot \sum \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (5.7)$$

Considera-se agora uma esfera perfeitamente homogênea e isotrópica, sem forças agindo sobre ela.

Suas autofunções já foram deduzidas há muito tempo [39]. Aqui mostraremos apenas os resultados.

As autofunções da esfera podem ser escritas em termos dos harmônicos esféricos  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ . Olhando a integral na equação (5.7), podemos verificar prontamente que apenas os modos de paridade ímpar (quando considerada a interação com as ondas gravitacionais) apresentam amplitudes diferentes de zero. Para uma esfera de raio  $R$  as autofunções são:

$$\varphi_{\ell m} = [\alpha \ell(r) \hat{r} + \beta \ell(r) R \nabla] Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad \ell \text{ par.} \quad (5.8)$$

As autofunções radiais  $\alpha \ell(r)$  e  $\beta \ell(r)$  determinam o movimento nas direções radial e tangencial respectivamente. Quando  $\ell = 2$ , as equações fornecem as equações dos cinco modos quadrupolares que interagem fortemente com a onda gravitacional, todos degenerados e com frequência  $\omega_0$ . Portanto, no resto destas discussões só será considerado  $\ell = 2$ ; o  $\ell$  da notação será omitido no restante deste trabalho. As autofunções  $\alpha(r)$  e  $\beta(r)$  são dadas por:

$$\alpha(r) = cR \frac{\partial}{\partial r} j_2(qr) + 6dR \frac{1}{r} j_2(kr) \quad (5.9a)$$

e

$$\beta(r) = c j_2(qr) + d \frac{\partial}{\partial r} [r j_2(kr)] \quad (5.9b)$$

onde,  $j_2$  é a função de Bessel esférica de ordem 2,  $c$  e  $d$  dependem da razão de Poisson e seus valores podem ser encontrados em tabelas [40],  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{k}$  são os vetores de onda

longitudinal e transversal. Os mesmos são dados por  $q^2 = \frac{\rho \omega_0^2}{\lambda + 2\mu}$  e  $k^2 = \rho \omega_0^2 \mu$ ,

respectivamente. As condições de contorno,

$$c \frac{d}{dr} \left[ \frac{j_2(qr)}{r} \right] + d \left[ \frac{5}{r^2} - \frac{k^2}{2} - \frac{d}{r dr} \right] j_2(kr) \Big|_{r=R} = 0, \quad (5.10a)$$

e

$$c \left[ \frac{6}{r^2} - \frac{k^2}{2} - \frac{2d}{rdr} \right] j_2(qr) + 6d \frac{d}{dr} \left[ \frac{j_2(qr)}{r} \right] j_2(kr) \Big|_{r=R} = 0 \quad (5.10b)$$

determinam a frequência  $\omega_0$  que depende da razão de Poisson. O efeito da onda gravitacional sobre o modo  $m$  da esfera,  $F_m^{OG}$ , é calculado através da equação (5.7), com

$$F_m^{OG} \equiv \int_{V_0} \varnothing_m \mathbf{F}^{OG} d^3x. \quad (5.11)$$

Resolvendo as integrais, utilizando as equações (5.3) e (5.8), obtém-se

$$F_m^{OG} = \sqrt{\frac{4\delta}{15}} \hat{r} \dot{h}_m(t) R^4 [c j_2(qR) + 3d j_2(kR)] \quad (5.12a)$$

$$F_m^{OG} = \frac{1}{2} \ddot{h}_m(t) m_e \div R \quad (5.12b)$$

na qual  $m_e$  é a massa da esfera,  $\chi R$  é o raio efetivo da esfera (onde  $\chi R$  depende fracamente da razão da Poisson e tem um valor médio para os sólidos comuns de aproximadamente 0,6), e  $\ddot{h}_m(t)$  é a derivada da amplitude adimensional da onda.

## 5.2 Equações de Movimento da Esfera com Seis Transdutores de Dois Modos

Cada par de ressonadores, que constitui um transdutor, é definido pelo índice  $i$  e designando sua posição por  $\mathbf{x}_i$ , os deslocamentos radiais,  $\mathbf{z}_i$ , na superfície da esfera sob cada transdutor são dados por:

$$\mathbf{z}_i(\mathbf{x}_i t) = \hat{\mathbf{z}}_i \cdot \sum_{m=1}^5 a_m(t) \varnothing_m(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ ou } 6, \quad (5.13)$$

onde  $a_m(t)$  é a contribuição dos modos normais para o sinal de entrada no transdutor e  $\varnothing_m(\mathbf{x}_i)$  autofunções fundamentais do movimento quadrupolar da esfera.

Estes ressonadores mecânicos dos transdutores são sintonizados na mesma frequência da antena. O movimento da superfície da antena excita os modos ressonadores do transdutor. Cada modo ressonador do par do transdutor  $i$  é construído para obedecer a equação de movimento do oscilador harmônico simples unidirecional [41]. A equação de movimento dos ressonadores é:

$$M_{r1}[\ddot{q}_{1i}(x_i, t) + \ddot{z}_i(x_i, t)] = H_1 \dot{q}_{1i}(x_i, t) - H_2 \dot{q}_{2i}(x_i, t) - k_1 q_{1i}(x_i, t) + k_2 q_{2i}(x_i, t) + F_i^N(x_i, t), \quad (5.14)$$

$$M_{r2}[\ddot{q}_{2i}(x_i, t) + \ddot{q}_{1i}(x_i, t) + \ddot{z}_i(x_i, t)] = H_2 \dot{q}_{2i}(x_i, t) - k_2 q_{2i}(x_i, t) + F_i^N(x_i, t), \quad (5.15)$$

neste caso  $q_{1i}$  é o deslocamento relativo à superfície da esfera,  $q_{1i} + z_i$  é o deslocamento inercial do primeiro ressonador,  $q_{2i}$  é o deslocamento relativo à superfície do primeiro ressonador e  $q_{2i} + q_{1i} + z_i$  é o deslocamento inercial do segundo ressonador. Assume-se que todos os seis pares de ressonadores são idênticos com massas, respectivamente,  $M_1$  e  $M_2$  e constantes de mola  $k_2$  e  $k_3$ ; todos tendo a mesma frequência da antena  $\frac{k_1}{M_{r1}} = \frac{k_2}{M_{r2}} = \omega_0^2$ .  $F_{i1}^N$  e  $F_{i2}^N$  são as forças de ruído atuando nos ressonadores.

Um esquema desse sistema unidirecional é mostrado na Figura 5.1.

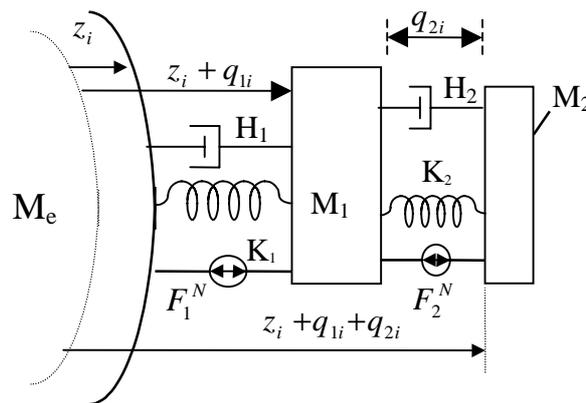


Fig. 5.1 - Esquema do ressonador  $i$  mecânico de dois modos montado sobre a superfície de uma esfera. Forças e deslocamentos são indicados.

Os valores dos deslocamentos radiais relativos, nas posições de cada ressonador, podem ser agrupados, para cada um dos modos, numa matriz padrão que depende unicamente da posição dos transdutores. Essa matriz  $\mathbf{B}_{mi}$  é definida por:

$$\hat{r}_i \cdot \vartheta_m(x_i) = \alpha \mathbf{B}_{mi}, \quad (5.16)$$

na qual  $\alpha = \alpha(R)$  é o valor da componente radial da autofunção na superfície. Da equação (5.8) obtém-se

$$\mathbf{B}_{mi} = \mathbf{Y}_m(\hat{e}_i, \hat{o}_i). \quad (5.17)$$

Pode-se escrever a equação de movimento acoplada dos modos da esfera, com  $n$  transdutores de um modo, da seguinte forma:

$$m_e \ddot{a}_m(t) + H_e \dot{a}_m(t) + k_e a_m(t) = \sum_{i=1}^n \alpha \mathbf{B}_{mi} [k_r q_i(t) + H_r \dot{q}_i(t) - F_i^N(t)] + F_m^{OG}(t), \quad (5.18)$$

onde  $n$  é o número de transdutores e  $q_i$  é o deslocamento do  $i$ -ésimo transdutor de um modo sobre à superfície da esfera.

Uma esfera tem cinco modos quadrupolares de vibração. Portanto, teremos que ter no mínimo cinco transdutores, para monitorarmos os modos da esfera. Neste trabalho serão utilizados seis transdutores, visando uma distribuição mais uniforme sobre a superfície da esfera, o que torna  $\mathbf{B}_{mi}$  uma matriz de cinco linhas por seis colunas.

Escrevendo as três equações acopladas na forma matricial (5.14, 5.15 e 5.18), obteremos um conjunto de equações de movimento que descrevem o movimento radial da esfera com os seis transdutores acoplados, na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} M_e \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M_{r1} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ M_{r2} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r2} \mathbf{I} & M_{r2} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{a}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_e \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} H_{r1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{r2} \mathbf{I} & -H_{r2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{r2} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_e \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} k_{r1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_{r1} \mathbf{I} & -k_{r2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_{r2} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{OG} + \mathbf{F}_e^N(t) \\ \mathbf{F}_1^N(t) \\ \mathbf{F}_2^N(t) \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade,  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{q}_1(t)$ ,  $\mathbf{q}_2(t)$ ,  $\mathbf{F}^{OG}(t)$  e  $\mathbf{F}^N(t)$  são vetores coluna.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t) &= (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5)^T \\
\mathbf{q}_1(t) &= (q_{11} \ q_{12} \ q_{13} \ q_{14} \ q_{15} \ q_{16})^T \\
\mathbf{q}_2(t) &= (q_{21} \ q_{22} \ q_{23} \ q_{24} \ q_{25} \ q_{26})^T
\end{aligned}$$

Os seis transdutores serão dispostos em seis faces pentagonais não opostas, conforme é mostrado na Figura 5.2.

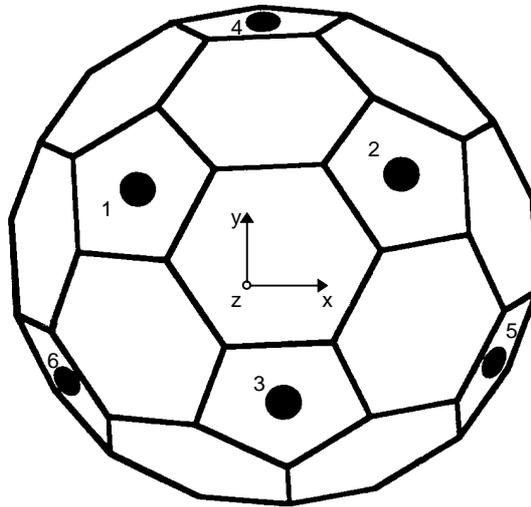


Fig. 5.2 - Distribuição dos seis ressonadores sob a superfície do icosaedro truncado.

### 5.3 Sistema de Multimodos

O primeiro a propor um sistema de antena de multimodos foi Richard. No seu trabalho, foi mostrado que se um sistema de três ressonadores harmônicos, como mostrado na Figura 5.3, for resolvido pelo método tradicional de pequenas vibrações, onde  $\mu_1 \ll 1$  é a razão das massas do segundo corpo e do primeiro, e  $\mu_2 \ll 1$  é a relação entre a massa do terceiro corpo e do segundo. Fazendo-se  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  obtemos as soluções para as frequências características do sistema:

$$\omega_- = \omega_0(1 - \sqrt{\mu}), \quad (5.20)$$

$$\omega_c = \omega_0, \quad (5.21)$$

$$\omega_+ = \omega_0(1 + \sqrt{\mu}), \quad (5.22)$$

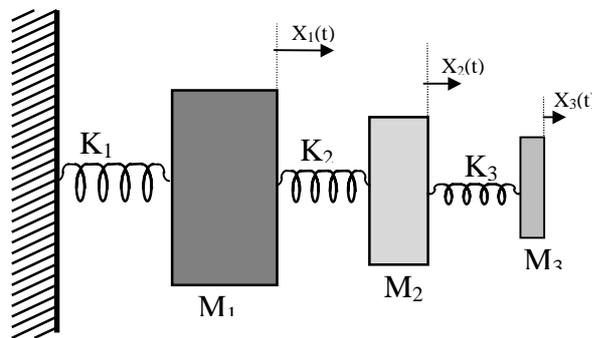


Fig. 5.3 - Modelo de sistema de três modos

Supondo-se a conservação da energia entre  $M_1$  e  $M_2$ , Richard mostrou que a amplificação mecânica das amplitudes é dada por:

$$\frac{|x_3|}{|x_1|} = \sqrt{\frac{M_1}{M_3}}. \quad (5.23)$$

São duas as vantagens do sistema de multimodos. A primeira é a possibilidade de utilizar uma massa final mais leve para a operação de transdutância, causando um aumento no acoplamento eletromecânico, e uma maior amplificação mecânica. A segunda é a de propiciar uma maior separação entre os modos, o que aumenta a banda de detecção ( $\Delta\omega \approx 2\omega_0\sqrt{\mu}$ ), como visto pelas equações (5.20) e (5.22).

#### 5.4 Simulação da Antena Esférica

Por questão de simplicidade e estética primeiramente é apresentado um modelo simplificado de um detector de ondas gravitacionais do tipo barra ressonante de três modos, com um transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante utilizado na UWA. A Figura 5.4 mostra um diagrama esquemático deste sistema de três modos. Depois faremos a correspondência entre suas equações de movimento e as equações de movimento da esfera acoplada a seis transdutores de dois modos.

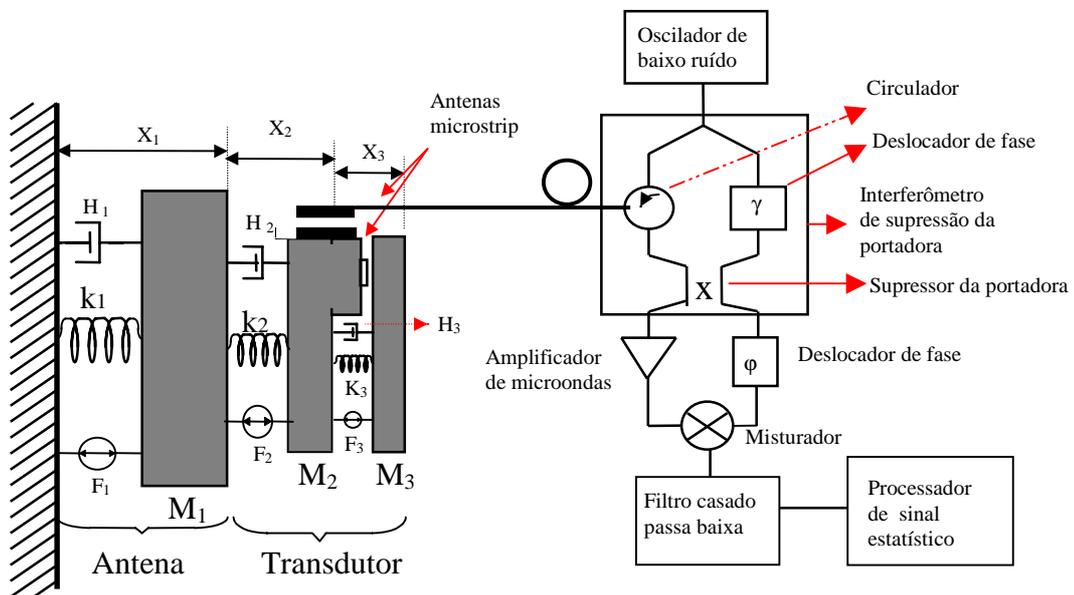


Fig. 5.4 - Modelo de um detector de ondas gravitacionais do tipo barra ressonante de três modos, com transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante.

As equações de movimento para este sistema com todas as fontes de ruídos gaussiano incluídas são dadas por:

$$M_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + H_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + K_1 \mathbf{x}_1 - H_2 \dot{\mathbf{x}}_2 - K_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_S \quad (5.24)$$

$$M_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 + H_2 \dot{\mathbf{x}}_2 + K_2 \mathbf{x}_2 - H_3 \dot{\mathbf{x}}_3 - K_3 \mathbf{x}_3 + M_2 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_3 \quad (5.25)$$

$$M_3 \ddot{\mathbf{x}}_3 + H_3 \dot{\mathbf{x}}_3 + K_3 \mathbf{x}_3 + M_3 [\ddot{\mathbf{x}}_1 + \ddot{\mathbf{x}}_2] + M_3 Z_m \dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{F}_3(t) \quad (5.26)$$

Desta forma, a única modificação necessária para ser realizada nas equações 5.19 é a introdução da impedância  $Z_m$ . Portanto, a equação matricial completa é:

$$\begin{pmatrix} M_e \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M_{r1} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ M_{r2} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r2} \mathbf{I} & M_{r2} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{a}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_e \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} H_{r1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{r1} \mathbf{I} & -H_{r2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{r2} (Z_m + \omega_{r2} / Q_{r2}) \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_e \mathbf{I} & -k_{r1} \alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_{r1} \mathbf{I} & -k_{r2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_{r2} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{OG} + \mathbf{F}_e^N(t) \\ \mathbf{F}_1^N(t) \\ \mathbf{F}_2^N(t) \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Estas equações representam um conjunto de equações de movimento para um modelo de detector esférico, acoplado a seis transdutores paramétricos do tipo cavidade reentrante de dois modos, com todas as fontes de ruídos gaussiano incluídas.

Após efetuarmos a transformada de Fourier nas equações (5.27) obtemos um conjunto de equações de movimento na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}^{OG} + \mathbf{F}_e^N(t) \\ \mathbf{F}_1^N(t) \\ \mathbf{F}_2^N(t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} M_e \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M_{r1} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ M_{r2} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r2} \mathbf{I} & M_{r2} \mathbf{I} \end{pmatrix} + j\omega \begin{pmatrix} H_e \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} H_{r1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{r1} \mathbf{I} & -H_{r2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{r2} (Z_m + \omega_{r2} / Q_{r2}) \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_e \mathbf{I} & -k_{r1} \alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_{r1} \mathbf{I} & -k_{r2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_{r2} \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

No apêndice C mostra-se os cálculos das transformada de Fourier das equações acima.

As equações (5.28) simulam a operação do detector Schenberg. As mesmas são resolvidas utilizando um programa desenvolvido no aplicativo MatLab. As mesmas fornecem o cálculo da sensibilidade de amplitude de deformação de um Burst ( $h$ ) e a temperatura de ruído do sistema. O apêndice D mostra o programa utilizado na simulação computacional e o diagrama de bloco do mesmo.

Na seção seguinte analisaremos os resultados obtidos na simulação.

### 5.5 Resultados da simulação

A energia depositada por um pulso de onda gravitacional numa antena esférica é dada por:

$$E = \frac{1}{2} m_e (\chi R_e)^2 \omega^2 (|h_+|^2 + |h_x|^2), \quad (5.29)$$

nas quais:  $m_e$  e  $R_e$  são a massa e o raio efetivo da esfera respectivamente. Comparando esta energia com a energia térmica de ruído,  $4k_b T_e$ , temos:

$$h = \sqrt{|h_+|^2 + |h_x|^2} = \sqrt{\frac{k_B T_e * 2}{m_e (\chi R_e)^2 \omega^2}}, \quad (5.30)$$

na qual  $T_e$  é a temperatura efetiva que pode ser obtida por similaridade com a densidade espectral da força de Langevin.

O programa, inicialmente foi executado, fixando-se os seguintes parâmetros:  $Q_e = 1 \times 10^6$ ,  $T = 50 \times 10^{-3} K$  e mais os parâmetros das massas ressonantes listados na Tabela 5.1. Estes parâmetros foram escolhidos baseando-se nos principais detectores em operação e alguns parâmetros otimistas, mas que podem ser alcançados em pouco tempo nas pesquisas em andamento em várias partes do mundo.

TABELA 5.1: PARÂMETROS DAS MASSAS RESSONANTES

Antena ( $\phi = 60$ cm)	1° Ressonador	2° Ressonador
$M_1 = 800$ kg	$M_2 = 0.41$ kg	$M_3 = 0.001$ kg
$Q_1 = 10 \times 10^6$	$Q_2 = 10 \times 10^6$	$Q_3 = 50 \times 10^6$
$F_1 = 4200$ Hz	$F_2 = 4200$ Hz	$F_3 = 4200$ Hz

Fixando os parâmetros acima, o modelo desenvolvido pode ser otimizado ajustando-se os dois parâmetros livres do transdutor paramétrico do tipo cavidade reentrante da UWA. Estes parâmetros são: a potência da bomba, que pode ser ajustada para balancear o ruído de serie e o de “back action” e o tempo de integração que pode ser ajustado para balancear a largura de banda<sup>1\*</sup> e os termos de banda estreita do detector.

A Tabela 5.2 apresenta os resultados obtidos de uma série de simulações realizadas. A mesma mostra o parâmetro variado,  $P_{inc}$ , e os valores dos parâmetros de saída: temperatura de ruído e sensibilidade de amplitude de deformação (h) para um sinal impulsivo.

TABELA 5.2: VALORES DE SAÍDA FORNECIDO PELO PROGRAMA VARIANDO A POTÊNCIA INCIDENTE DA BOMBA

Potência incidente (W)	Temperatura de Ruído K	Sensibilidade
$3 \times 10^{-6}$	$1,21 \times 10^{-4}$	$4,30 \times 10^{-19}$
$9 \times 10^{-6}$	$4,23 \times 10^{-5}$	$2,54 \times 10^{-19}$
$1 \times 10^{-5}$	$3,92 \times 10^{-5}$	$2,45 \times 10^{-19}$
$2 \times 10^{-5}$	$3,17 \times 10^{-5}$	$2,20 \times 10^{-19}$
$3 \times 10^{-5}$	$3,39 \times 10^{-5}$	$2,28 \times 10^{-19}$
$5 \times 10^{-5}$	$5,36 \times 10^{-5}$	$2,86 \times 10^{-19}$
$1 \times 10^{-4}$	$1,09 \times 10^{-4}$	$4,08 \times 10^{-19}$

<sup>1</sup> \*A largura da banda é inversamente proporcional ao tempo de integração.

Analisando os resultados listados na Tabela 5.2 e os principais gráficos das séries de simulações realizadas, apresentados abaixo nas Figuras 5.5a, b e c, vemos claramente que os ruídos eletrônicos são dominantes sobre os ruídos térmicos, portanto são eles que determinam a sensibilidade da antena. Dessa forma, para conseguirmos uma melhoria na sensibilidade, devemos diminuir o ruído de “back action” e o ruído serial eletrônico.

Ainda analisando a Tabela 5.2 e as Figuras 5.5a, b e c, vemos, que o melhor desempenho para o sistema foi com uma potência incidente  $P_{inc} = 2 \times 10^{-5}$  W. O tempo de integração foi ajustado para uma situação ótima, isto é, não perdendo informação do sinal e nem deixando entrar ruído desnecessário no sistema.

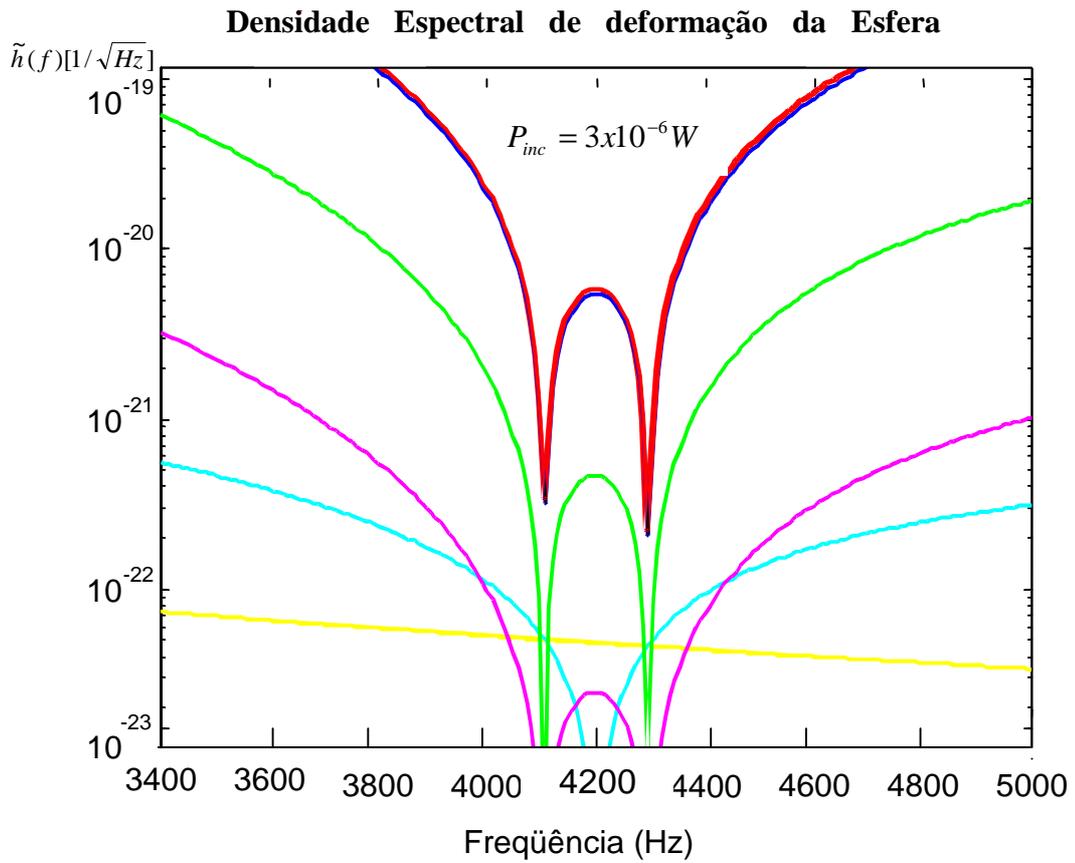


Fig. 5.5a - Gráfico da sensibilidade espectral de deformações de um detector esférico com 60 cm de diâmetro.

Ruído Total	<span style="color: red;">—</span>	Ruído Browniano da Antena	<span style="color: yellow;">—</span>
“Back action”	<span style="color: green;">—</span>	Ruído Browniano do 2º Ressonador	<span style="color: cyan;">—</span>
Ruído serial	<span style="color: blue;">—</span>	Ruído Browniano do 3º Ressonador	<span style="color: magenta;">—</span>

$$T_n = 1,21 \times 10^{-4} K$$

$$h = 4,30 \times 10^{-19}$$

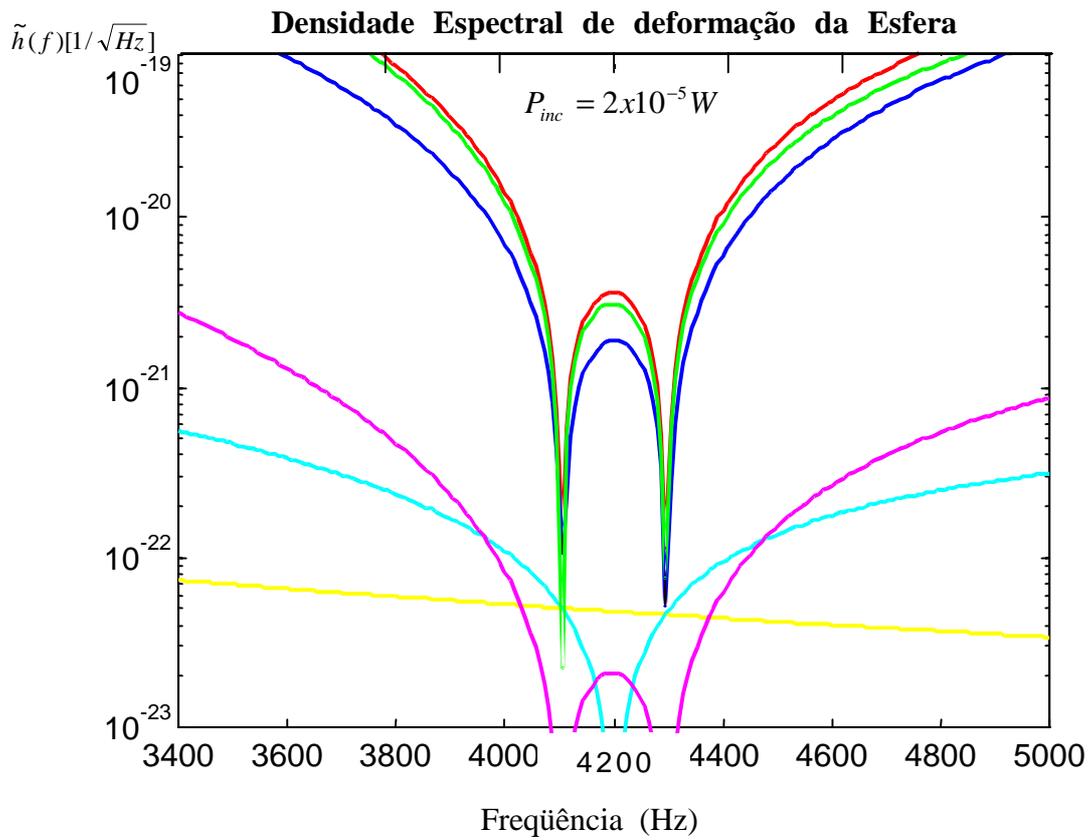


Fig. 5.5b - Gráfico da sensibilidade espectral de deformações de um detector esférico com 60 cm de diâmetro.

Ruído Total	<span style="color: red;">—</span>	Ruído Browniano da Antena	<span style="color: yellow;">—</span>
“Back action”	<span style="color: green;">—</span>	Ruído Browniano do 2º Ressonador	<span style="color: cyan;">—</span>
Ruído serial	<span style="color: blue;">—</span>	Ruído Browniano do 3º Ressonador	<span style="color: magenta;">—</span>

$$T_n = 5,36 \times 10^{-5} K$$

$$h = 2,86 \times 10^{-19}$$

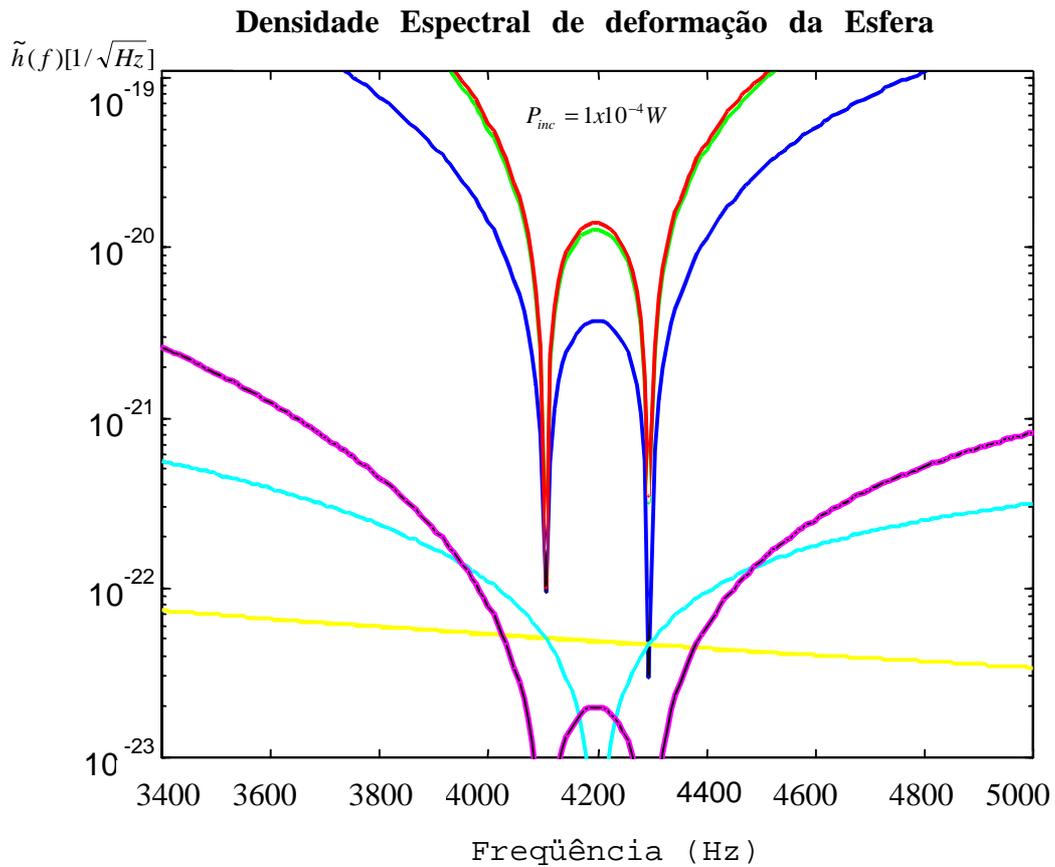


Fig. 5.5c - Gráfico da sensibilidade espectral de deformações de um detector esférico com 60 cm de diâmetro.

Ruído Total	<span style="color: red;">—</span>	Ruído Browniano da Antena	<span style="color: yellow;">—</span>
“Back action”	<span style="color: green;">—</span>	Ruído Browniano do 2º Ressonador	<span style="color: cyan;">—</span>
Ruído serial	<span style="color: blue;">—</span>	Ruído Browniano do 3º Ressonador	<span style="color: magenta;">—</span>

$$T_n = 1,09 \times 10^{-4} \text{ K}$$

$$h = 4,08 \times 10^{-19}$$

Agora com o sistema otimizado, em uma potência da bomba  $P_{inc} = 2 \times 10^{-5} \text{ W}$ , podemos variar os parâmetros anteriormente fixados, para podermos explorar melhor o nosso modelo para uma antena de ondas gravitacionais acoplada a transdutores paramétricos de dois modos.

TABELA 5.3: RESULTADOS DOS CÁLCULOS DA SENSIBILIDADE, MANTENDO A POTÊNCIA DA BOMBA FIXA E VARIANDO OS DEMAIS PARÂMETROS

Temperatura Termodinâmica(mK)	$Q_e$	$Q_1 = Q_2$	$Q_3$	Temperatura de Ruído K	Sensibilidade
10	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^7$	$5 \times 10^7$	$2,49 \times 10^{-5}$	$1,95 \times 10^{-19}$
10	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^8$	$5 \times 10^8$	$2,27 \times 10^{-5}$	$1,86 \times 10^{-19}$
10	$1 \times 10^7$	$1 \times 10^7$	$5 \times 10^7$	$5,09 \times 10^{-4}$	$8,82 \times 10^{-19}$
10	$1 \times 10^7$	$1 \times 10^8$	$5 \times 10^8$	$5,05 \times 10^{-4}$	$8,79 \times 10^{-19}$
50	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^8$	$5 \times 10^8$	$2,37 \times 10^{-5}$	$1,90 \times 10^{-19}$
50	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^7$	$5 \times 10^7$	$3,17 \times 10^{-5}$	$2,20 \times 10^{-19}$
50	$1 \times 10^7$	$1 \times 10^7$	$5 \times 10^7$	$5,26 \times 10^{-4}$	$8,97 \times 10^{-19}$
50	$1 \times 10^7$	$1 \times 10^8$	$5 \times 10^8$	$5,07 \times 10^{-4}$	$8,80 \times 10^{-19}$

Com a potência da bomba otimizada para os parâmetros fixados anteriormente, obteve-se valores semelhantes, quando a temperatura termodinâmica e as figuras de mérito das massas ressonantes foram variadas. Nota-se que a sensibilidade do sistema, aparentemente, cai com o aumento do  $Q_e$ , na verdade existe um  $Q_e$  ótimo. Isto fica evidente na Tabela 5.4, na qual são fixados os seguintes parâmetros  $Q_1 = Q_2 = 1 \times 10^7$ ,  $Q_3 = 5 \times 10^7$ ,  $P_{inc} = 2 \times 10^{-5}$  W e a temperatura termodinâmica ( $T = 50$  mK) e variado o  $Q_e$ . A razão física para este resultado ainda não está clara. Analisando o modelo, parece que a razão está relacionada a um valor ótimo da impedância  $Z_m$ .

TABELA 5.4: RESULTADOS DOS CÁLCULOS DA SENSIBILIDADE, VARIANDO O  $Q_E$  E FIXANDO OS DEMAIS PARÂMETROS

$Q_e$	Temperatura de Ruído (K)	Sensibilidade
$1 \times 10^4$	$1,87 \times 10^{-1}$	$1,69 \times 10^{-17}$
$1 \times 10^5$	$1,86 \times 10^{-3}$	$1,69 \times 10^{-18}$
$1 \times 10^6$	$3,17 \times 10^{-5}$	$2,20 \times 10^{-19}$
$1 \times 10^7$	$2,45 \times 10^{-4}$	$6,12 \times 10^{-19}$
$1 \times 10^8$	$2,24 \times 10^{-2}$	$5,86 \times 10^{-18}$
$1 \times 10^9$	$2,24 \times 10^0$	$5,85 \times 10^{-17}$

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um programa no aplicativo MatLab para simular um detector de ondas gravitacionais esférico acoplado a 6 transdutores de dois modos. O sistema consiste de uma antena esférica de 800 kg e 60 cm de diâmetro feita de CuAl (94%-6%), e seis transdutores paramétricos de dois modos, do tipo cavidade reentrante, acoplados à sua superfície, sendo a massa do ressonador intermediário igual a 0,41 kg e a do terceiro ressonador igual a 0.001 kg.

Na presente simulação foram utilizados valores realistas para os parâmetros de entrada do modelo, tais como: fator de qualidade mecânico na antena e no primeiro modo de 10 milhões e no segundo modo de 50 milhões,  $Q_e$  de 1 milhão e temperatura termodinâmica de 50 mK. Estes parâmetros são os mesmos utilizados no detector tipo barra ressonante da UWA (Niobe) que se encontra em operação.

Fixando os parâmetros acima, o modelo foi analisado e investigado numericamente e as possíveis otimizações do sistema foram feitas, em termos da potência incidente da bomba e o tempo de integração. O tempo de integração, foi ajustado inicialmente para uma situação ótima, isto é, não perdendo informação do sinal e nem deixando entrar ruído desnecessário no sistema. A potência incidente da bomba foi ajustada, e a que ofereceu melhor desempenho ao sistema foi  $2 \times 10^{-5}$  W.

Para a configuração acima, obteve-se uma temperatura de ruído igual a 31,7 K e uma sensibilidade de deformação para fontes de ondas impulsivas de  $2,20 \times 10^{-19}$ . A sensibilidade do sistema ainda pode ser melhorada diminuindo a temperatura do amplificador até o limite quântico de 0.5 Kelvin e também diminuindo o ruído de fase da bomba. A sensibilidade do sistema está diretamente relacionada com a qualidade dos amplificadores e da bomba.

É bem aceito na comunidade científica que o número de estrelas de nêutrons em nossa galáxia é de pelo menos  $10^8$  [42]. Supondo que metade destas estrelas de nêutrons estejam em sistemas binários, que 1% delas possuam campos magnéticos fracos o bastante para permitir que as mesmas sofram instabilidades hidrodinâmicas, e que um milésimo delas já tenham atingido a instabilidade hidrodinâmica, e supondo ainda que essa instabilidade hidrodinâmica ocorre a cada 5-20 anos, então teremos em torno de 25-100 eventos em um ano, muito deles com amplitude de deformação  $h \sim 4 \times 10^{-19}$  na faixa de frequência de 3,9 - 4,3 kHz, que corresponde à faixa de sensibilidade do detector SCHENBERG, modelado neste trabalho.

Como foi visto acima, a sensibilidade para deformação espectral obtida na simulação para o detector SCHENBERG é bem próxima da amplitude de deformação que seria produzido por instabilidades de estrelas de nêutrons com alta rotação dentro de nossa galáxia. Portanto, o modelo de detector proposto com as características acima seria capaz de detectar as ondas gravitacionais emitidas pelas estrelas de neutros que sofrem instabilidade e que estejam na nossa galáxia próximas à Terra.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Fowley, D.; Horton, M. **The student edition of matlab.** ed Joe Scodato New York: Englewood Cliffs, 1995.
- [2] Aguiar, O. D. **Parametric motion transducers for gravitational waves detectors.** Baton Rouge. 98 p. Thesis (PhD in Physics) - Louisiana State University, 1990.
- [3] Melo, J. L. **Estudo do sistema de isolamento vibracional para o protótipo de um detector de ondas gravitacionais.** São José dos Campos. 114 p. Dissertação (Mestrado em Astrofísica) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1998.
- [4] Thorne, K. S. Gravitational radiation. In: Hawking S., Israel W. ed. **300 years of gravitation.** Cambridge: Cambridge University Press, 1987. Cap. 9, p. 330-445.
- [5] Papoulis, A. Data smoothing and spectral estimation. **Signal analysis.** New York: McGraw-Hill, 1977. Cap 9 p.299-323.
- [6] Viceré, A. Techniques for non-linear and non-stationary time series analyses. In: Edoardo Amaldi Conference on Gravitational wave, 2., v. 4, Geneva 1997. **Proceedings.** Singapore: World Scientific Publishing Company, 1998. p. 538-545.
- [7] Tammann, G. A. Supernova statistics and related problems. In: Supernovae: A Survey of Current Research, Cambridge,1981. **Proceedings.** Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1982. p. 371-403.
- [8] Hulse, R.A., Taylor, J.H. Discovery of a pulsar in a binary system. **Astrophysics Journal Letter.** v.195, n. 2, p. 51-53, Jan. 1975.

- [9] Merkowitz, S. M. and Johnson, W. W. Spherical gravitational wave antenna and the truncated icosahedral arrangement. **Physical Review D**, v.51, n. 6, p. 2546-2558, Mar. 1995.
- [10] Johnson, W. W. Merkowitz, S. M. Truncated Icosahedral gravitational wave antenna. **Physical Review Letter**, v. 70, n. 16, 2367-2370, Apr. 1993.
- [11] Spetz, G. W. et al. Experimental verification of a single transducer back-action evading measurement scheme for a gravitational wave detector. **Physical Review Letters A**, v.104, n.6-7, p. 335-340, 1984.
- [12] Weber, J. Detection and generation of gravitational waves. **Physical Review**. v.117, n.1, p.306-313, Jul 1960.
- [13] Weber, J. Observation of the thermal fluctuations of a gravitational-wave detector. **Physical Review Letter**, v. 17, n. 24, p. 1228-1230, Oct. 1966.
- [14] Richard, J. P. A Multimode antenna for the detection of short pulses of gravitational waves. In: Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, 2., Trieste, 1979. **Proceedings**. Amsterdam: 1982. p. 1239-1244.
- [15] Richard, J. P. Wide-band bar detectors of gravitational radiation. **Physical Review Letters**, v. 52, n. 3, p. 165-167, Jan. 1984.
- [16] Price, J. C. Optimal design of resonant-mass gravitational wave antenna. **Physical Review D**, v. 36, n. 12, p. 3555 - 3570, Jul. 1987.
- [17] Pallotino, G. V. The resonant mass detectors of the Rome group. In: Edoardo Amaldi Conference on Gravitational wave, 2., v. 4, Geneva 1997. **Proceedings**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1998. p. 105-113.

- [18] Solomonson, N. et al. Construction and performance of a low noise inductive transducer for the Louisiana State University gravitational wave detector. **Review of Scientific Instruments**, v. 65, n. 1, p. 174-181, Jan.1994.
- [19] Linthorne, N. P. et al. Recent results from the niobium gravitational radiation antenna at the University of Western Australia. In: Marcel Grossmann on General Relativity, 7., 1994. **Proceedings**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996.
- [20] Pizzella, G. The Ultracryogenic gravitational wave antenna Nautilus. In: Marcel Grossmann on General Relativity, 7., 1994. **Proceedings**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996.
- [21] Forward, R. L. Multidirectional, multipolarization antenna for scalar and tensor gravitational radiation. **General Relativity and Gravitation**, v.2, n.2, p. 149-159, 1971.
- [22] Wagoner, R. V. Paik, H. J. Multi-mode detection of gravitational waves by sphere. In: International Symposium on Experimental Gravitation, Pavia, 1996. **Proceedings**. Rome: Academia Nazionale dei Lincei, 1977. p. 257-266.
- [23] Magalhães, N. S. et al. Determination of astrophysical parameters from the spherical gravitational waves detectors data. **Monthly Notices of Royal Astronomical Society**, v. 274, n. 3, p. 670 – 678, Jun.1995.
- [24] Zhou, Z. C. **Investigation of advanced resonant-mass gravitational radiation detectors**. Palo Alto. 93 p. Thesis (PhD in Physics) - Stanford University, 1994.

- [25] Coccia, E. Fafone, V. Study of coalescing binaries with spherical gravitational waves detectors. In: International workshop for Omnidirectional Gravitation Observatory, 1., São José dos Campos, 1996. **Proceedings:** Singapore, World Scientific Publishing Co, 1997. p.113-122.
- [26] Bianchi, M. et al. Testing gravitational theories with a spherical gravitational wave detectors. **Classical Quantum Gravity**, v.13 n. 11, p. 2865-2874, Nov. 1996
- [27] Veith P. J. Parametric transducer. In: Blair D. G. ed. **The detection of gravitational waves**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. Cap. 8, p. 186-225.
- [28] Manley, J. M. Rowe, H. E. Some general properties of nonlinear elements. In: General energy relations, 1. **Proceedings of the Institute of Radio Engineers**, v. 44, n. 7, p.904 – 913, 1956.
- [29] Tobar, M. E. **Microwave parametric transducer for the next generation of resonant-mass gravitational wave detectors**. (Department of physics the University of Western Australia, Nedlands, WA Australia, 1998).  
Comunicação pessoal.
- [30] Solomonson, N. D. **Sensitive cryogenic transducer development and analyses for use on gravity wave detector**. Baton Rouge. 123 p. Thesis (PhD in Physics) - Louisiana State University, 1990.
- [31] Solomonson, N. D. et al. Comparative performance of a two, three, and four mode gravitational radiation detectors. **Physical Review D**, v. 46, n. 6, p.2299-2308, Sep. 1992.

- [32] Ziniu, G. **Advanced gravitational radiation transducers with small mass and ultra-low temperature SQUIDS**. Baton Rouge. Thesis (PhD in Physics) - Louisiana State University, 1989.
- [33] Michelson, P. F. Taber, R. C. Sensitivity analysis of a resonant mass gravitational wave antenna with resonant Transducer. **Journal of Applied Physics**, v. 52, n. 6, p. 4313 - 4319. 1981.
- [34] Clarke, J., Tesche, C. D. and Giffard, R. P. Optimization of dc SQUID voltmeter and magnetometer circuits. **Journal of Low Temperature Physics**, v. 37, n. 3-4, p. 405-420, 1979.
- [35] Tobar, M. E. and Blair, D. G. Parametric transducer for resonant bar gravitational wave antenna. **Journal of Physics D- Applied Physics**, v. 26, n. 12, p. 2276-2291, Dec.1993.
- [36] Veitch, P. J. Parametric transducer. Blair D. G. ed. **The detection of gravitational wave**. Cambridge: Cambridge University Press, cap. 8, p.186-225. 1991
- [37] Giffard R. P. Ultimate sensitivity limit of a resonant gravitational wave antenna using a linear motion detector. **Physical Review D**, v. 14, n. 10, p. 2478-2486, Nov. 1976.
- [38] Paik H. J. **Analysis and development of a very sensitive low temperature gravitational radiation detector**. Palo Alto. 113 p. Thesis (PhD in Physics)-Stanford University, 1974.
- [39] Ashby, N., Dreitlen, J. Gravitational waves reception by a sphere. **Physical Review D**, v.12, n.2, p.336 - 349, Jul. 1975.

- [40] Spiegel, M. R. **Manual de fórmulas, métodos e tabelas de matemática.** São Paulo: Mc Graw Hill, 1968.
- [41] Frajuca, C. **Otimização de transdutores de dois modos mecânicos para detectores de ondas gravitacionais.** São Paulo. 97 p. Tese (Doutorado em Física) - Universidade de São Paulo, 1996.
- [42] Houser, J. L. Centrella J. M. and Smith, S. C. Gravitational radiation from nonaxisymmetric instability in a rotating star. **Physical Review Letters**, v.72, n.9, p. 1314-1317, Feb. 1994.
- [43] Thorne, K. et al. The quantum limit for gravitational-wave detectors and methods of circumventing it. In: Sources of gravitational radiation, Cambridge, 1978. **Proceedings.** Cambridge: Cambridge University Press, 1979. p.49-68.
- [44] Clark, J. SQUIDS, Brains and gravity waves. **Physical Today**, v.39, n.3, p. 36-43, Mar 1986.

## APÊNDICE A

### BACK ACTION EVASION

Existe um grande obstáculo para se conseguir um detector de ondas gravitacionais com uma sensibilidade  $h \sim 10^{-21}$  para sinais impulsivos. Este obstáculo é o limite quântico, que foi primeiramente investigado por Braginsky. O princípio de incerteza de Heisenberg proíbe o monitoramento da amplitude complexa,  $X = X_1 + iX_2$ , de um oscilador mecânico, com uma precisão maior que:

$$|\Delta X|_{QL} = \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right) \approx (3 \times 10^{-19} \text{ cm}) \left( \frac{1 \text{ ton}}{\text{m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{10^4 \text{ s}^{-1}}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A1})$$

onde  $m$  é a massa do oscilador,  $\omega$  é sua frequência angular e  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ . Deste modo não temos como medir, com uma antena tipo barra de Weber de comprimento  $\ell$ , ondas gravitacionais com uma amplitude menor que:

$$h_{QL} \approx \frac{|\Delta X|_{QL}}{\ell} \approx (3 \times 10^{-20}) \left( \frac{1 \text{ ton}}{\text{m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{10^4 \text{ s}^{-1}}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{100 \text{ cm}}{\ell} \right) \quad (\text{A2})$$

onde  $h$  é a amplitude de deformação da onda gravitacional.

Em princípio, nós podemos ultrapassar este limite quântico em  $h$ , como foi demonstrado por Braginsky e Vorontsov (1974). Eles propuseram ultrapassar o limite quântico amostrando o oscilador com uma técnica de contagem quântica. Ainda que seu projeto original, para um sensor de contagem quântica, apresente imperfeições (Unruh 1977, 1978; Braginsky e Vorontsov, Khalili em 1977), projetos corretos foram desenvolvidos por Unruh (1977, 1978) e por Braginsky et al (1977).

Um método alternativo de ultrapassar o limite quântico foi descoberto por Thorne, Drever, Caves, Zimmermann e Sandberg em 1978 [43]. Este método, denominado “back action evasion” é muito mais prático do que a contagem quântica.

Técnicas como contagem quântica e “back action evasion”, as quais ultrapassam o limite quântico, são muitas vezes chamadas “técnicas de não demolição quântica” porque elas tentam monitorar o oscilador sem demolir (perturbar) seu estado quântico.

A forma da relação de incerteza  $\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \hbar / 2m\omega$ , sugere uma possível maneira de ultrapassar o limite quântico na medida da amplitude de deformação da onda ( $h_{QL}$ ). Em vez de monitorarmos  $X_1$  e  $X_2$  com a mesma precisão (medição de fase e amplitude), monitoraríamos  $X_1$  com uma alta precisão ( $\Delta X_1 \ll \hbar / 2m\omega$ ) e  $X_2$  com uma pequena precisão ( $\Delta X \gg \hbar / 2m\omega$ ), ou vice versa. Como nós veremos a seguir, a partir de medições precisas de  $X_1$ , é possível, em princípio, inferir com grande precisão os detalhes da radiação gravitacional ou outras forças clássicas que atuam no oscilador harmônico.

Medições com  $\Delta X_1 \ll \Delta X_2$ , são chamadas “back action evading” (BAE) porque elas são cuidadosamente realizadas para permitir que  $X_1$  elimine o efeito de “back action” do sistema medido.

A Figura A1 contrasta a caixa de erro para uma medição de “back action evading” de um oscilador, com as caixas de erro de medições de contagem quântica de amplitude e fase.

A idéia básica atrás de uma medição de “back action evading” é ilustrada na Figura A2. Suponha que em um tempo  $t = 0$  alguém meça a posição  $x$  do oscilador com alta precisão, produzindo por ação reversa uma grande incerteza no momento  $p$  (Fig. A2a).

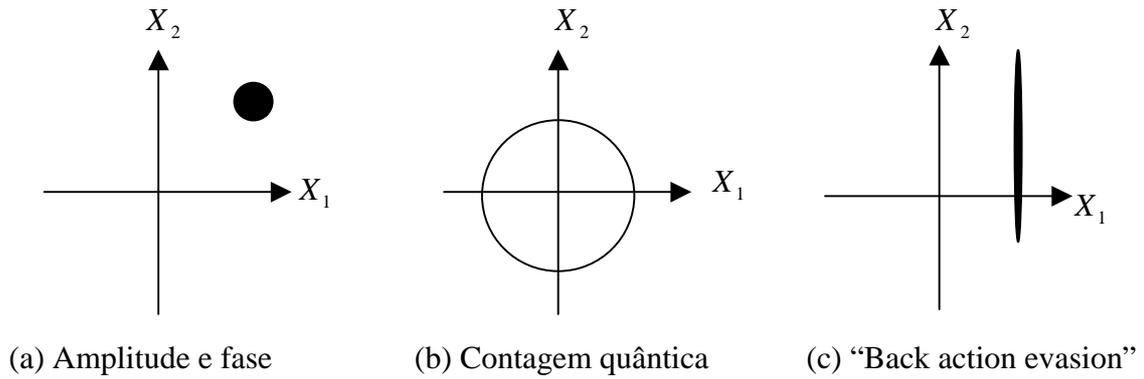


Fig. A1: As caixas de erro, no plano complexo, para os três tipos de medições de um oscilador harmônico. Em todos os três casos a área das caixas excedem o limite do amplificador de  $kT_n / m\omega^2$ .

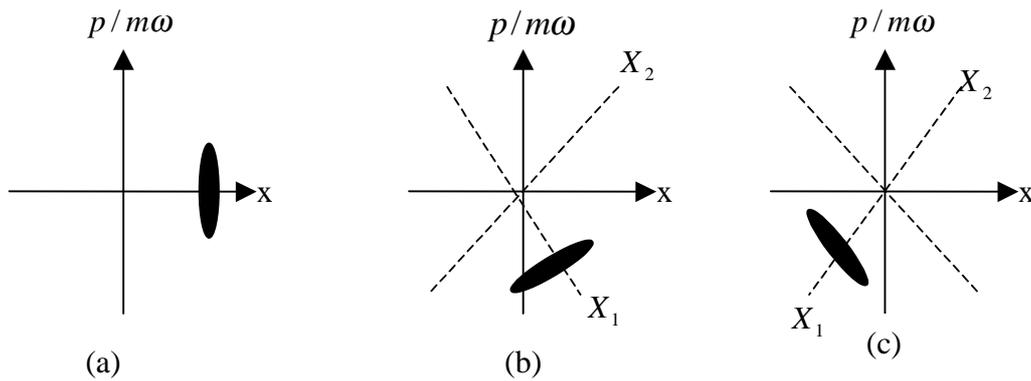


Fig. A2: Caixa de erro, para uma medição de “back acton evading” de  $X_1$ , quando vista no espaço de fase posição-momento.

Então, na ausência de medições posteriores ou forças externas, quando o tempo passa, as caixas de erro giram no espaço de fase, no sentido horário, com velocidade angular  $\omega$  (evolução de um oscilador harmônico). Se em um tempo posterior (Fig. A2b), nós tentarmos medir novamente  $x$  com alta precisão (técnica de amplitude e fase), nós obteremos um resultado imprevisível. Mas se em vez disto, tentarmos medir  $X_1 \equiv [\text{valor de } x \text{ no referencial de rotação}]$  (técnica de “back action evading”), nós obteríamos um resultado altamente previsível, um resultado com uma precisão maior do que a medição original.

O ponto chave matemático é que  $X_1$  é uma constante do movimento na ausência de forças externas, enquanto  $x$  não é. Isto significa, que se  $X_1$  é medido precisamente uma vez, ele permanecerá conhecido precisamente daí para frente, enquanto se  $x$  é medido precisamente, sua precisão depois fica destruída pelas misturas do momento modificado pelo “back action”.

## APÊNDICE B

### SQUID DC

Robert Jaklesvic, John Lambe, Arnold Silvere James Mercereau foram os primeiros a demonstrarem a interferência quântica entre duas junções Josephson conectadas em paralelo como mostrado na Figura B1a. Quando eles variaram o fluxo magnético através de uma malha supercondutora, eles encontraram que a corrente crítica das duas junções oscilava com um período igual ao fluxo quântico  $\Phi_0$  [44]. Estas flutuações são provenientes da interferência entre as funções de onda macroscópicas nas duas junções, da mesma forma que a interferência entre dois feixes de luz coerente em um experimento óptico formando franjas brilhantes e escuras. Este fenômeno de interferência quântica em supercondutividade é a base de toda a tecnologia de SQUIDS.

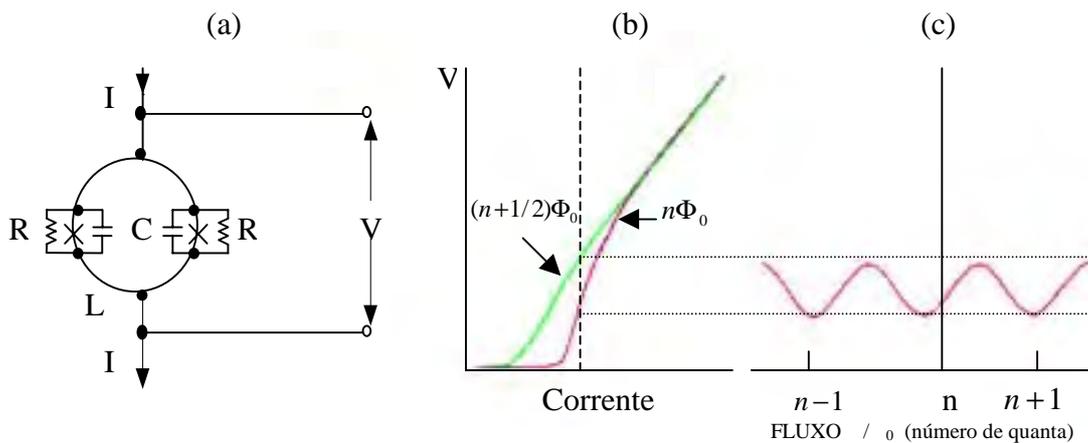


Fig. B1: Esquema de SQUID DC. (a) Esquema de um SQUID DC polarizado com uma corrente  $I$  e um fluxo  $\Phi$ . (b) Corrente e tensão características de um SQUID com fluxos  $n\Phi_0$  e  $(n+1/2)\Phi_0$ . (c) Gráfico da tensão  $V$  sobre o SQUID como uma função do fluxo  $\Phi / \Phi_0$  da corrente polarizada e fixada, indicada pela linha pontilhada em (b).

No modo convencional de operação de um SQUID DC, a tensão e a corrente característica deverá ser não histerética. Isto pode ser assegurado fechando o circuito com uma resistência externamente suficientemente pequena. Quando o fluxo através do SQUID é variado, a curva I-V característica oscila suavemente entre dois extremos, os

quais estão indicados na Figura B1b. Deste modo, quando o SQUID é polarizado com uma corrente constante, a voltagem sobre o SQUID é periódica em relação ao fluxo aplicado, como mostrado na Figura B1c. Normalmente se opera o dispositivo com um fluxo aplicado de aproximadamente  $(2n+1)\Phi_0/4$ , para o qual a voltagem é quase linear.

Deste modo, um SQUID pode ser pensado como um transdutor, que transforma fluxo em voltagem. Isto é, uma mudança no fluxo magnético é convertida em uma voltagem facilmente detectável, com uma eletrônica convencional. Entretanto, por causa de se necessitar, freqüentemente, uma faixa dinâmica de fluxo consideravelmente maior que uma fração do fluxo quântico, opera-se, geralmente, um SQUID como um detector nulo em um circuito “feedback”. Neste modo de operação, qualquer variação na voltagem sobre o SQUID, produzida por um fluxo magnético aplicado, é amplificada e convertida em uma corrente através de uma bobina acoplada ao SQUID, para produzir um fluxo igual e oposto. Deste modo, pode-se não apenas detectar a variação de um fluxo muito menor que o fluxo quântico  $\Phi_0$ , mas também medir um fluxo aplicado correspondente a muitos quanta. A freqüência de resposta de um SQUID, nesta situação, é tipicamente na faixa de 0 a 10 kHz.

Para calcular a voltagem de ruído e a função de transferência, Claudia Tesche e John Clarke resolveram numericamente as equações para um SQUID, assumindo que as únicas fontes de ruído sejam: Nyquist (térmico) e os produzidos por resistores “shunt”. A partir desta análise, eles concluíram que, com uma corrente e fluxo apropriado, o SQUID tem o seu nível de energia de ruído ótima quando  $2LI_0 \approx \Phi_0$ . A energia de ruído ótimo é dada por:  $\varepsilon \approx 10k_B T(LC)^{1/2}$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $C$  é a capacitância de uma das junções túnel e  $T$  é a temperatura termodinâmica. A mensagem desta equação é clara: quanto menor melhor. Deste modo, se pudermos aumentar a indutância da malha do SQUID, ou a área, e deste modo a capacitância das junções, a energia de ruído será correspondentemente reduzida. Resfriando o dispositivo à temperatura baixíssima, diminuiríamos ainda mais a energia de ruído.

## APÊNDICE C

### TRANSFORMADA DE FOURIER DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO (4.28)

#### TRANSFORMADA DE FOURIER DE DERIVADAS

Usando a forma exponencial, a transformada de Fourier de  $f(t)$  é dada por,

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (C1)$$

e para  $df(t)/dt$  é dada por,

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{i\omega t} dt. \quad (C2)$$

Integrando (C2) por partes, obtemos

$$g_1(\omega) = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} f(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (C3)$$

Como  $f(t)$  desaparece quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , obtemos

$$g_1(\omega) = -i\omega g(\omega); \quad (C4)$$

Isto é, a transformada de Fourier da derivada é  $(-i\omega)$  a transformada da função original.

Isto pode ser prontamente generalizado para a  $n$ -ésima derivada da função

$$g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega); \quad (C5)$$

Dado que todas as partes integradas desaparecem quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

A equação (C6), antes (4.28), transcrita abaixo corresponde a função  $f(t)$  escrita acima,

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc} M_e \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M_{r_1} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r_1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ M_{r_2} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r_2} \mathbf{I} & M_{r_2} \mathbf{I} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{a}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_2(t) \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{ccc} H_e \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} H_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_1 \mathbf{I} & -H_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{r_2} (Z_m + \omega_{r_2} / Q_{r_2}) \mathbf{I} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{pmatrix} \\ & \left( \begin{array}{c} \dot{\mathbf{a}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_2(t) \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} k_e \mathbf{I} & -k_{r_1} \alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_{r_1} \mathbf{I} & -k_{r_2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_{r_2} \mathbf{I} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc} \mathbf{I} & -\alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{OG} + \mathbf{F}_e^N(t) \\ \mathbf{F}_1^N(t) \\ \mathbf{F}_2^N(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C6})$$

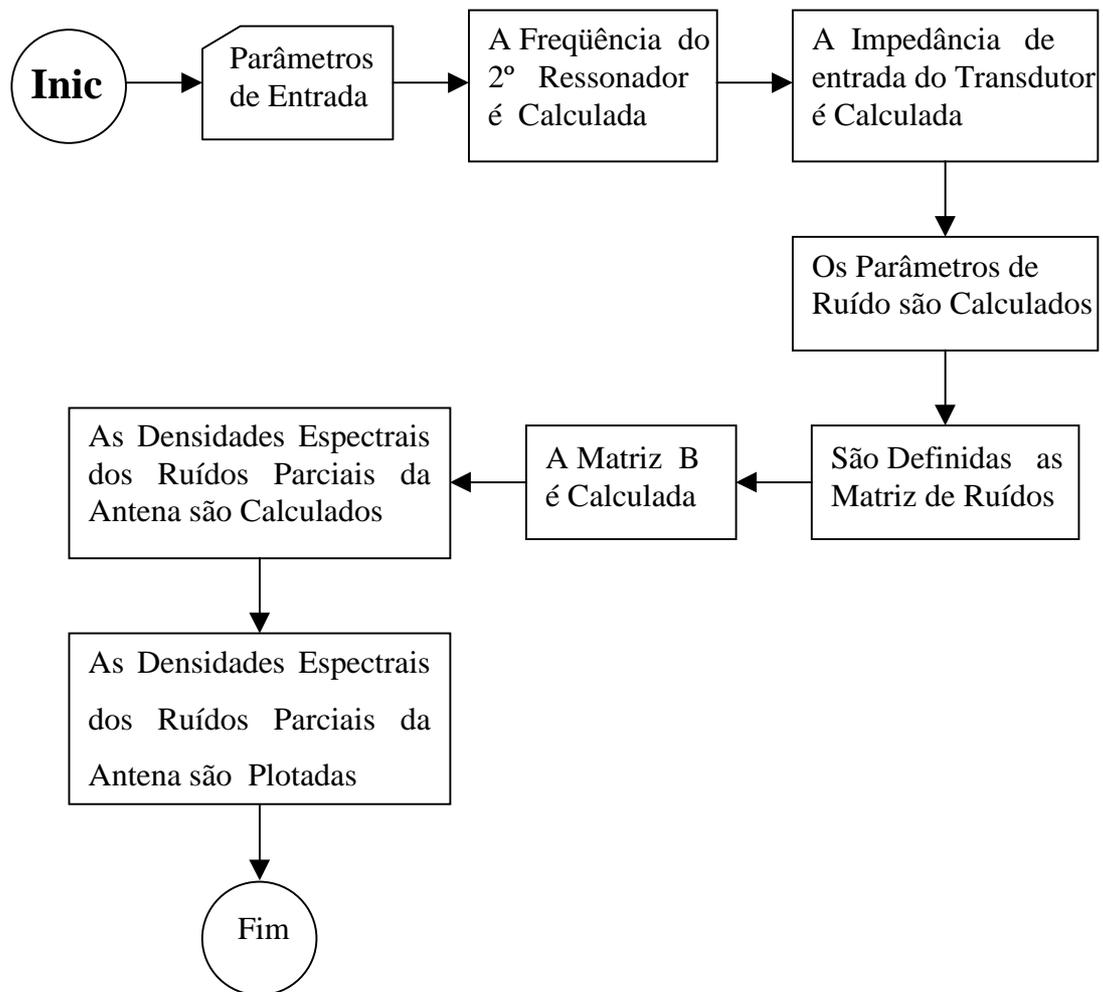
De acordo com (C5), após efetuarmos a transformada de Fourier nas equações (C6) obtemos:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{OG} + \mathbf{F}_e^N(t) \\ \mathbf{F}_1^N(t) \\ \mathbf{F}_2^N(t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} M_e \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M_{r_1} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r_1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ M_{r_2} \alpha \mathbf{B}^T & M_{r_2} \mathbf{I} & M_{r_2} \mathbf{I} \end{pmatrix} + \\ & j\omega \begin{pmatrix} H_e & -\alpha \mathbf{B} H_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{r_1} \mathbf{I} & -H_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{r_2} (Z_m + \omega_{r_2} / Q_{r_2}) \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_e & -k_1 \alpha \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_1 \mathbf{I} & -k_2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_2 \mathbf{I} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C7})$$

Sendo que o primeiro termo do segundo membro corresponde a transformada da segunda derivada, o segundo termo a transformada da primeira derivada e ultimo termo a transformada da função  $f(t)$ .

## APÊNDICE D

### DIAGRAMA DE BLOCO DO PROGRAMA





## APÊNDICE E

### PROGRAMA DO CÁLCULO DE RUÍDO DA ANTENA

Este programa foi escrito para ser usado no aplicativo MatLab [1]. O mesmo calcula a temperatura de ruído para um detector esférico de três modos. A antena é feita de CuAl (94%-6%) e tem 60 cm diâmetro, e os transdutores estão dispostos na configuração TIGA. Todas as variáveis são parametrizadas com a escala do segundo ressonador de massa  $M_2$ . A base dos parâmetros é a Dissertação do Mike Tobar.

23/01/99

```
figure(gcf);
```

```
% parâmetros de integração
```

```
num = 400 ; % numero de intervalo(manter par)
```

```
f1 = 3400 ; f2 = 5000 ; df=(f2-f1)/num;
```

```
fc = (f1+f2)/2 ; % frequência próxima ao centro da banda
```

```
wc = 2*pi*fc ;
```

```
% Constantes
```

```
j = sqrt(-1) ; % Raiz de -1
```

```
kb = 1.38e-23 ; % constante de Boltzmann
```

```
hbar = 1.055e-34 ; % Constante de Plank
```

```
% Parâmetros físicos fixados
```

```
T = 0.05 ; % temperatura termodinâmica
```

```
 $M_e = 800$  ; % massa da esfera
```

```
 $\mu = 650$  ; % Razão entre as massas dos modos do transdutor
```

```
 $M_1 = M_e/\mu/3$  ; % Massa do ressonador intermediário
```

```

Fm = 4200;          % Freqüência ressonante modulada da barra
wm=2*pi*Fm;
Fe = 4200 ;        % Freqüência ressonante da antena
we = 2*pi*Fe ;
F1 = 4200;        % Freqüência ressonante do primeiro ressonador
w1 = 2*pi*F1 ;
Qesf = 10e6 ;      % Q mecânico da antena
Q1 = 10e6 ;       % Q mecânico do primeiro ressonador
te = Qesf/we ;    % Amplitude da constante de decaimento de tempo da esfera
t1 = Q1/w1 ;      % Amplitude da constante de decaimento de tempo do primeiro
%ressonador
He = we*Me/Qesf;  % Coeficiente de amortecimento da antena
H1 = w1*M1/Q1;    % coeficiente de amortecimento do primeiro ressonador
Length = 0.18 ;   % comprimento efetivo da esfera
ce = (2/(Me*Length))^ 2 ;

% parâmetros do segundo ressonador
M2 = M1/mu ;     Massa do segundo ressonador
M2 sqrt = sqrt(M2);
Q2 = 50e6 ;      % Q mecânico de M3
Qe = 1e6;        % Q elétrico do transdutor
F2T = 4225;      % Freq:uência sintonizada do segundo ressonador
W2T = 2*pi*F2T;
FO1 = 4150;      % Freqüência do automodo -
FO2 = 4250;      % Freqüência do automodo +
wO1 = 2*pi*FO1;
wO2 = 2*pi*FO2;
QO2 = 3.7e6;     % Q mecânico do auto modo +
kO2=7e4;         % Constante de mola do auto modo +
tO2=QO2/wO2;    % Amplitude da constante de decaimento do automodo +
w2Tsq = w2T^ 2;

```

```

Fpump = 9.5e9 ; % Freqüência da bomba
wpump = 2*pi*Fpump;
wpumpsq = wpump^ 2 ;
Betae = 0.3; % Acoplamento elétrico da cavidade
dfdx = 3e14; % (Hz/m),
% taxa de mudança da freqüência rressonate do transdutor em relação ao deslocamento
Pinc = 1e-5; % (W), Potência incidente da bomba
Tamp = 4; % Temperatura de ruído do amplificador
Spm = 10^ (-14.5);
Sam = 10^ (-16.5);
Sserial = (2*Tamp*kb/Pinc)*(Fpump/2/Qe/dfdx)^ 2*4*1.25^ 2 % Calcula o ruído serial
é multiplicado por 4 para compensar a divisão da potência antes do mixer.

```

```

% Calcula-se a freqüência do segundo ressonador sem corrente.
w0=sqrt(wO1*wO2);
f0=w0/2/pi;
Qfac=(Qe^ 2/(1+4*Qe^ 2*wm^ 2/wpump^ 2))^ .5;
beta0=(4*Betae*Pinc)/((1+Betae)*M3*wm^ 2*wpump)*((2*Qfac*dfdx)/(Fpump))^ 2;
w2 = w2T*(1- (3*3^ .5*beta0)/(16))^ .5;
F2 = w2/(2*pi);
beta0=beta0 % Imprimir beta na tela.
t2 = Q2/w2;
H2 = w2*M2/Q2; % Coeficiente de amortecimento do segundo ressonador

```

```

Dw=50000*2*pi;
DUO1=(Dw+wO1)/wpump;
DLO1=(Dw-wO1)/wpump;
D0=Dw/wpump;

```

```

ab1=w2^ 2/wO1; ac1=wO1^ 2/wpump^ 2;
ad1=(1+4*Qe^ 2*ac1);

```

```

bb1=(beta0*ab1*ad1);
bb3=2*(1+4*Qe^ 2*D0^ 2);
bbO1=bb1/bb3;
bcU1=(2*Qe*DUO1)^ 2+1; bcL1=(2*Qe*DLO1)^ 2+1;
bcUO1=1/bcU1; bcLO1=1/bcL1;
ZmR=-1*bbO1*(bcUO1-bcLO1);  ZmI= -j*(bbO1*2*Qe*DUO1*(bcUO1-bcLO1));

```

```

Sbacaction = Pinc^ 2/2/wpump^ 2*(2*Qe*dfdx/Fpump)^ 2*Sam %double sided

```

```

% parâmetros de ruído

```

```

SFe = 2*kb*T*Me/te;           % Força Langevin em Me
SF1 = 2*kb*T*M1/t1;           % Força Langevin em M1
SF2 = 2*kb*T*M2/t2 + Sbacaction ; % Força Langevin em M2
RSF2=( 2*kb*T*M2/t2/SF2);      % Razão para separar as contribuições dos ruídos
rSbac= (Sbacaction/SF2);

```

```

% parâmetros do sinal

```

```

Tburst=0.050;  % Temperatura do sinal na antena medida em Kelvin.

```

```

% Inicializa-se matrizes e vetores.

```

```

SnSFea=[]; SnSF1a=[]; SnSF2a=[]; SnSva=[]; SnSvampa=[];
SnSseriala=[]; SONa=[]; SONab=[]; far=[]; hwa=[];
SnSpm=[]; SnSbac =[] ; SnSbaca =[]; SnSpma=[];

```

```

% Estabelecer as matrizes constantes.

```

```

56=zeros(5,6); O55=zeros(5,5); O65=zeros(6,5); O66=zeros(6,6);
E56=eye(5,6); E55=eye(5,5); E65=eye(6,5); E66=eye(6,6);
E5=ones(5,1); E6=ones(6,1);

```

```

% localizações dos transdutores (em graus).

```

```

theta1=37.3774; theta2=79.1877;

```

```
thetad=[ theta1, theta1, theta1, theta2, theta2, theta2];
phid =[ 0, 120, 240, 60, 180, 300];
```

```
%converte para radianos.
```

```
theta=thetad*pi/180; phi=phid*pi/180; nt=length(phid);
```

```
% Calcula a matriz padrão,
```

```
B(i,j), i=modo, j=localização
```

```
B=zeros(5,nt);
```

```
B(1,:)=sqrt(15/(pi*16))*(sin(theta).^ 2).*cos(2*phi);
```

```
B(2,:)=sqrt(15/(pi*16))*(sin(theta).^ 2).*sin(2*phi);
```

```
B(3,:)=sqrt(15/(pi*16))*sin(2*theta).*sin(phi);
```

```
B(4,:)=sqrt(15/(pi*16))*sin(2*theta).*cos(phi);
```

```
B(5,:)=sqrt(5/(pi*16))*(3*cos(theta).^ 2-1);
```

```
sal=2.9; % Valor do alpha (paper do Steven)
```

```
Mmat=[ Me*E55 O56 O56
        M1*sal*B' M1*E66 O66
        M2*sal*B' M2*E66 M2*E66 ];
```

```
Dmat=[ He*E55 -sal*H1*B O56
        O65 sal*E66 -H2*E66
        O65 O66 M2*(ZmR+ZmI)*E66+M2*w2*E66];
```

```
Ke=Me*we2; k1=M1*w12; k2=M2*w22;
```

```
Kmat=[ ke*E55 -k1*sal*B O56
        O65 k1*E66 -k2*E66
        O65 O66 k2*E66 ];
```

```

A=[ E55 -sal*B O56
    O65 E66 -E66
    O65 O66 E66 ];

```

```

% Pesos da regra de simpsons para a integração

```

```

simp=zeros(1,num+1);

```

```

for i=1:num

```

```

    simp(i)=2*(rem(i+1,2)+1);

```

```

end

```

```

simp(1)=1; simp(num+1)=1;

```

```

for f=f1:df:f2

```

```

    w=2*pi*f;

```

```

    far=[far, f];

```

```

    V = (-w^ 2)*Mmat +j*w*Dmat + Kmat ;

```

```

    bigG=inv(V)*A; % função transferência para todas as variáveis

```

```

    H = B*bigG(12:17,:); % Função transferência para os modos canais

```

```

    H2=abs(H).^ 2;

```

```

SFv=[ E5*SFe E6*SF1 E6*SF2 ]; % Vetor densidade de força

```

```

Sgm = H2*SFv + Sserial*E5 + E5*Spm*f^ 2/dfdx^ 2/2;

```

```

% Espectro para os 5 modos de saída

```

```

SFm = Sgm./(diag(H2(:,1:5))); % referencia o ruído de volta à força de entrada

```

```

pmode=1;

```

```

Sn = SFm(pmode); % Traça apenas um dos modos, os outros devem ser os mesmos

```

```

factor=(c1/w^ 4)^ 0.5; % Fator que converte para a densidade espectral de deformação

```

```

factor=factor*sqrt(2); % converte para espectro com um lado

```

```

hwa = [hwa, factor*sqrt(Sn)];

```

```

% SON=abs(G(5,1)^ 2/Sn);

```

```

SON = 1/Sn;

```

```

SONa=[SONa,SON];
SnSFe=SFe;
SnSFea=[SnSFea, factor*sqrt(SnSFe)];
SnSF1=(H2(:,6:11)*SF1*E6)./(diag(H2(:,1:5)));
SnSF1a=[SnSF1a,factor*sqrt(SnSF1(pmode))];
SnSF2=(H2(:,12:17)*SF2*E6*rSF2)./(diag(H2(:,1:5)));
SnSF2a=[SnSF2a,factor*sqrt(SnSF2(pmode))];
SnSbac=(H2(:,12:17)*SF2*E6*rSbac)./(diag(H2(:,1:5)));
SnSbaca=[SnSbaca,factor*sqrt(SnSbac(pmode))];
SnSserial=(Sserial*E5)./(diag(H2(:,1:5)));
SnSseriala=[SnSseriala,factor*sqrt(SnSserial)];
SnSpm=(E5*Spm*f^2/dfdx^2/2)./(diag(H2(:,1:5)));
SnSpma=[SnSpma,factor*sqrt(SnSpm)];
end

```

```

Auto = inv(Mmat)*(Kmat + j*w1*Dmat);
values = (eig(Auto).^ .5)./(2*pi);
autofreq= real(values)
Qplusminus = autofreq./imag(values)

```

```

integral=2*(df/3)*sum(simp.*SONa)*2;
% multiplica-se por 2 para converter para espectro com um lado
Tn=1/(2*kb*Me*integral)*2
% multiplica-se por 2 para considerar sinais chegando em tempos desconhecidos
noisenum = kb*Tn/(hbar*w1)
h=sqrt(2*kb*Tn/(Me*wc^2))/(Length)
clg

```

```

% noise spectrum graph
semilogy(far,hwa,' -r' );
hold on;

```

```

semilogy(far,SnSseriala,' -b' );
%title (' Ruído serial devido a deformação da Buckybola' );
semilogy(far,SnSFea,' -y' );
% title (' Ruído browniano na antena devido a deformação da mesma' );
semilogy(far,SnSF1a,' -c' );
% title (' Ruído browniano no primeiro ressonador devido a deformação da Buckybola' );
semilogy(far,SnSF2a,' -m' );
% title (' Ruído browniano no segundo ressonador devido a deformação da Buckybola' );
semilogy(far,SnSbaca,' -g' );
% title (' Ruído de back action da bomba no segundo ressonador devido a deformação
da Buckybola' );

% grid;
set(gca,' Fontsize' ,12,' Fontname' ',' palotino' );
xlabel(' Frequência (Hz)' );
ylabel(' h/raizHz ' );
title(' Densidade Espectral de Deformação da Esfera' );
Vaxis=[min(far),max(far),1e-23,1e-19];
axis(Vaxis);
xlab=.26; ylab=.90;

% text(xlab,ylab,t,' units' ,' normalized' );
t=sprintf(' Temperatura de ruído, Tn = %5.2e K' ,Tn);
text(xlab,ylab-0.06,t,' units' ,' normalized' );
t=sprintf(' Burst Strain Sensitivity, h = %5.2e' ,h);
text(xlab,ylab-0.12,t,' units' ,' normalized' );
t=sprintf(' Temperatura Termodinâmica = %5.2f K' ,T);
text(xlab,ylab-0.18,t,' units' ,' normalized' );
t=sprintf(' M= %5.2f kg' ,M);
text(xlab,ylab-0.24,t,' units' ,' normalized' );
t=sprintf(' M= %5.2f kg' ,M);

```

```
text(xlab,ylab-0.30,t,' units' , ' normalized' );  
t=sprintf(' M= %5.3f kg' ,M);  
text(xlab,ylab-0.36,t,' units' , ' normalized' )  
figure(gcf)
```