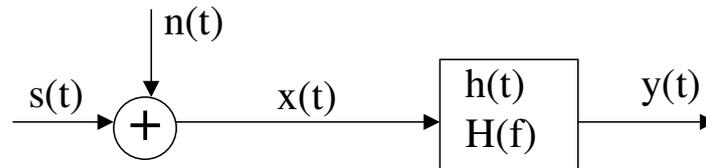


Filtragem casada

Para entender como um filtro casado pode comprimir uma pulso de onda, para resultar numa resolução fina, precisamos introduzir a idéia de um filtro linear, mostrado esquematicamente abaixo.



No sistema mostrado acima, o sinal recebido $s(t)$ é contaminado por um ruído aditivo $n(t)$ que é um processo aleatório. O único requerimento é de que $s(t)$ seja de natureza determinística. O sinal resultante, $x(t)$, é passado através de um filtro linear cuja função impulso é $h(t)$ para dar uma saída $y(t)$. Matematicamente, a implementação do filtro pode ser representada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (1)$$

que é a convolução de $x(t)$ e $h(t)$, usualmente denotada por:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (2)$$

A resposta impulso $h(t)$ leva este nome porque ela corresponde a saída do filtro de um impulso, isto é:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)h(t - \tau)d\tau \quad (3)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac, definida funcionalmente por:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{para } t \neq 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

A resposta em frequência de um filtro linear, $H(f)$, é a transformada de Fourier (FT) de $h(t)$, isto é:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp\{-j2\pi ft\} dt \quad (4)$$

$H(f)$ e $h(t)$ são um par de FT, visto que uma sempre pode ser obtida a partir da outra. Com a FT inversa se obtém $h(t)$ de $H(f)$,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp\{j2\pi ft\} df$$

O espectro de potência, $P(f)$, de $h(t)$ é definido como o módulo de sua transformada de Fourier ao quadrado, ou seja:

$$P(f) = |H(f)|^2 \quad (5)$$

Um importante resultado na teoria de transformadas de Fourier é conhecido como o *teorema da convolução* que tem implicações de grande interesse na teoria de filtragem. Aqui vai:

$$\text{Se } y(t) = x(t) * h(t)$$

$$\text{Então } Y(f) = X(f)H(f)$$

Isto significa que a convolução no domínio do tempo é equivalente a multiplicação no domínio da frequência (Fourier). Então, pode-se realizar a filtragem no domínio de frequência tomando-se a transformada de Fourier do sinal de entrada, multiplicá-la pela resposta em frequência do pulso, e finalmente realizar a transformada inversa para obter o sinal de saída desejado $y(t)$. Matematicamente, temos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)H(f) \exp\{j2\pi ft\} df \quad (6)$$

Filtro casado é um filtro que maximiza a relação Sinal/Ruído na saída. Define-se a relação Sinal/Ruído neste contexto por:

$$\frac{S}{N} = \frac{\text{Potência de saída de pico}}{\text{Potência média do ruído}}$$

Vamos supor que o nível de saída de pico devido somente ao sinal ocorra num determinado instante t_0 , de forma que,

$$\text{Sinal de Pico} = |y_s(t_0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f) \exp\{j2\pi ft_0\} df \right|^2 \quad (7)$$

O ruído é comumente assumido como branco ou Gaussiano, o que significa que possui um espectro de potência constante sobre uma banda $(-W, W)$ com densidade de potência média, N_p . A potência média de saída devido ao ruído é:

$$N = E\left[|y_n(t)|^2\right] = E\left[\left|\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(t-\tau)d\tau\right|^2\right] \quad (8)$$

Que resulta em:

$$N = \frac{N_p}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

A relação S/N a ser maximizada pelo uso de um dado filtro h no processamento é então dada por:

$$\frac{S}{N} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f) \exp\{j2\pi ft_0\} df \right|^2}{\frac{N_p}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (9)$$

De forma que o filtro casado pode ser derivado como a função que maximiza a equação (9).

Usando a inequação de *Schwartz* temos que o numerador satisfaz:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f) \exp\{j2\pi ft_0\} df \right|^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |S(f) \exp\{j^2 \pi ft_0\}|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \end{aligned}$$

de forma que a relação S/N torna-se

$$\frac{S}{N} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{N_p}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (10)$$

$$\therefore \left(\frac{S}{N} \right)_{\max} = \frac{2}{N_p} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (11)$$

Usando o teorema de Parseval, que estabelece que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df$$

para qualquer par de FTs, $z(t)$ e $Z(f)$. Este teorema diz que a energia total (potência integrada no tempo) no domínio do tempo é igual energia total do sinal no domínio da frequência. O valor máximo da relação S/N é, então,

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\max} = \frac{2E}{N_p} \quad (12)$$

onde $E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt$ é a energia total do sinal.

Este é um resultado muito significativo, porque mostra que o valor máximo da SNR (Signal-to-Noise Ratio) depende apenas do

signal e da densidade de potência do ruído e não da forma de onda utilizada.

A forma do filtro casado que produz a SNR máxima pode ser encontrada a partir da condição de igualdade da equação (10), que é satisfeita quando:

$$H(f) = mS^*(f) \exp\{-j2\pi ft_0\} \quad (13)$$

em que m é algum múltiplo e S^* denota complexo conjugado.

No domínio do tempo, o filtro casado, é a transformada inversa de (13),

$$h(t) = ms^*\{t - t_0\} \quad (14)$$

que é a versão invertida no tempo do complexo conjugado do sinal de entrada, s .

O filtro casado é muito útil em SAR. Não se deve confundir filtro casado com requerimento de resolução fina, que só pode ser obtida se o sinal recebido possui largura de banda suficiente. A melhora na relação SNR por filtragem casada é proporcional a $\tau_p B_p$, enquanto a resolução é inversamente proporcional a largura de banda apenas (B_p). Então um pulso longo com pequena banda de passagem e um pulso curto com grande largura de banda podem resultar no mesmo aumento de SNR, mas apenas o pulso com grande largura de banda pode dar resolução fina.

O filtro casado e o chirp

Estamos agora interessados em derivar uma forma particular de filtro casado para um pulso modulado linearmente em frequência (FM) ou um chirp. A forma de onda de um chirp FM é:

$$p(t) = \begin{cases} A \exp\left\{j \frac{2\pi}{\lambda} \left(f_c + \frac{1}{2} \alpha^2\right)\right\}, & -\tau_p/2 \leq t \leq \tau_p/2 \\ 0, & \text{fora deste intervalo} \end{cases} \quad (15)$$

O filtro casado de (15) é então:

$$h(t) = mA \exp\left\{-j2\pi \left[f_c(t_0 - t) + \frac{1}{2} \alpha(t_0 - t)^2\right]\right\} \quad (16)$$

sem perda de generalidade, podemos remover a frequência central (da onda portadora), e mudar a origem do tempo de forma que $t_0=0$. Podemos também escolher $m=1/A$, de forma que teremos:

$$h(t) = \exp\left\{-j\pi\alpha^2 t^2\right\} \quad (17)$$

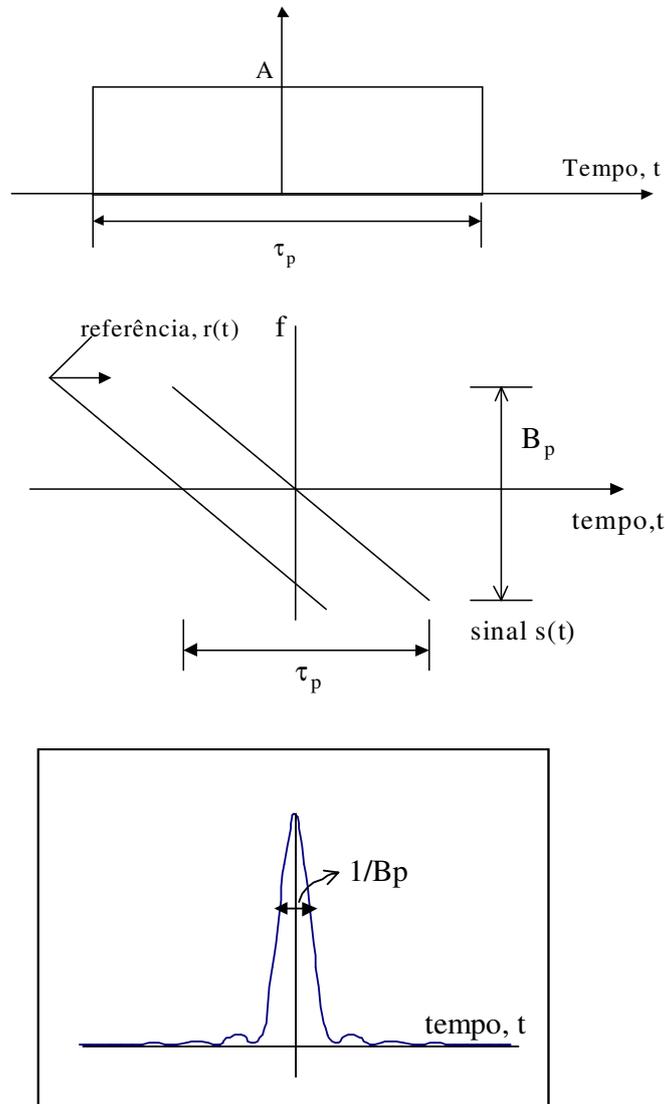
Fazendo a convolução do sinal de entrada $s(t)$ com este filtro casado obtemos uma saída (na presença deste sinal de entrada apenas) que seria:

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} \exp\left\{-j\pi\alpha\tau^2\right\} \cdot \exp\left\{-j\pi\alpha(t-\tau)^2\right\} d\tau \\ &= \exp\left\{-j\pi\alpha t^2\right\} \int_{-\tau_p/2}^{\tau_p/2} \exp\left\{j2\pi\alpha\tau\right\} d\tau \\ &= \exp\left\{-j\pi\alpha t^2\right\} \frac{\text{sen}(\pi\alpha\tau_p)}{\pi\alpha} \end{aligned} \quad (18)$$

Após detecção quadrática isto se torna:

$$\begin{aligned} |y_s(t)|^2 &= B_p^2 \text{senc}^2(\pi B_p t) \\ \text{posto que } B_p &= \alpha\tau_p \end{aligned} \quad (19)$$

Esta é uma função seno cardinal quadrática que possui uma resolução $\approx 1/B_p$ no tempo, dando a resolução fina em range ($r_{sr} = c/2B_p$), como originalmente requerido.



Uma forma simples de considerar filtragem casada na compressão de um pulso modulado linearmente em frequência é como uma correlação entre o sinal de saída $s(t)$ e um sinal de referência $r(t)$, ilustrado esquematicamente abaixo (Figura 1). O filtro casado e/ou a função de referência $r(t)$ são deslizados ao longo do eixo t e correlacionados com o sinal $s(t)$ de amplitude e fase conhecidas no tempo. Quando os dois se “casam” a saída da correlação é máxima. O resultado da correlação é uma função senc^2 , muito mais “estreita” que o sinal original, com resolução no tempo de $1/B_p$.

Figura 1. Pulso modulado linearmente em frequência (FM) e sua correlação com uma referência $r(t)$ da mesma forma. O resultado é uma função senc² com resolução no tempo de $1/B_p$.

A modulação em azimute (azimuth chirp)

Nota-se que a forma do onda modulada linearmente em frequência, possui variação de fase quadrática com o tempo, de maneira similar a da modulação da fase em azimute. De fato, a assinatura de um alvo pontual no terreno é freqüentemente chamada de modulação em azimute (azimuth chirp). Resulta que uma forma similar de filtro casado é utilizada na operação de compressão em azimute.

Em azimute, a variação quadrática da fase era

$$\phi(t) = \frac{\kappa V^2}{R_0} t^2 \quad (20)$$

que dá uma frequência instantânea de

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{2V^2}{\lambda R_0} t \quad (21)$$

que é a frequência Doppler resultante do movimento do radar em relação ao ponto no terreno. Lembrando que o comprimento máximo da antena sintética é:

$$L = VT_s = \frac{\lambda R_0}{L} \quad (22)$$

resulta que a largura de banda Doppler da modulação azimute é:

$$B_d = \frac{2V}{\lambda R_0} \cdot \frac{\lambda R_0}{L} = \frac{2V}{L} \quad (23)$$

Comparação entre chirp range e chirp azimute

Diferenças importantes entre chirps de range e de azimute estão ligadas nas relações tempo/largura de banda. Ambos possuem produtos tempo-largura de banda (razão de compressão) muito maiores que 1 ($\tau_p B_p \gg 1$), mas obtidas de formas muito diferentes. Em compressão de pulso, são utilizadas larguras de banda muito grandes com pulsos muito curtos, enquanto que em azimute a variação Doppler dá origem a bandas pequenas, de maneira que tempos de integração longos são necessários. Por exemplo, considere um SAR com razão de compressão de 1000 em range e em azimute. Em range, poderíamos ter modulações de 100 MHz para pulsos de 10 ns para dar $\tau_p B_p = 1000$. Em azimute, uma banda Doppler de apenas 500 Hz seria típica, com uma síntese de abertura de 2 s para resultar $T_s B_p = 1000$.

Outra diferença notável é a “velocidade de propagação” dos chirps em range e em azimute. Em range isto é a velocidade da luz e em azimute o chirp se “propaga” a velocidade da plataforma V . A resolução em range é dada por $c/2B_p$, enquanto em azimute é V/B_D (o fator 2 aparece em razão do espaçamento efetivo entre dois elementos da antena sintética, isto é, tem que considerar ida e volta).

Isto significa que mesmo que $B_D \ll B_p$, as resoluções em azimute e range podem ser similares.

Processamento SAR básico

Transformar dado bruto (sinal SAR após passagem por um conversor analógico/digital, A/D) numa imagem é basicamente uma operação de compressão de pulso em duas dimensões, com uma transposição (corner turn) entre range e azimute. O sinal bruto é gravado em linhas, para as quais as primeiras amostras correspondem ao range próximo e as últimas amostras correspondem ao range distante (figura 2). Cada linha gravada

corresponde a uma posição diferente em azimute visto que SAR se move enquanto envia e recebe pulsos. Então, é natural realizar o processamento em range em primeiro lugar, visto que o dados de uma linha são uma seqüência de amostras que correspondem a diferentes posições em range na faixa varrida pelo SAR (o conversor A/D faz com que cada amostra corresponda a um intervalo de distância fixo em range). Então, a operação de compressão do pulso é seguida de uma transposição da matriz de dados (corner turn), para apresentar os dados como registros em azimute para processamento azimute (compressão em azimute).

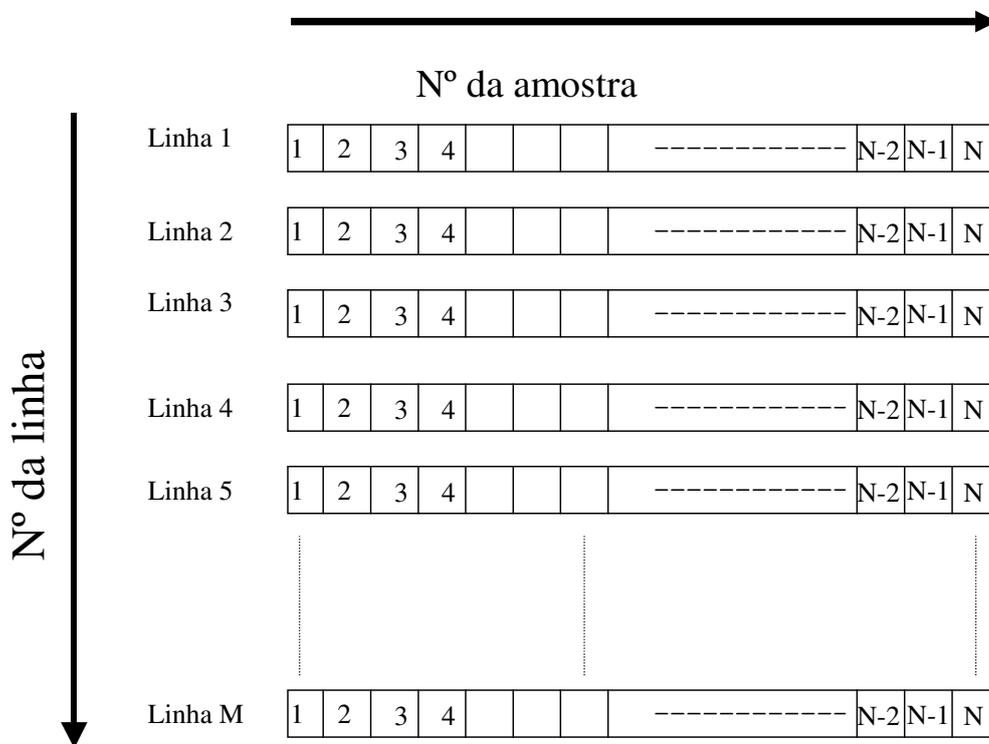


Figura 2. Arranjo dos dados SAR em amostras (espaçamento fixo em range) e linhas (obtidas por pulsos consecutivos).

Dimensões mínimas de uma antena SAR

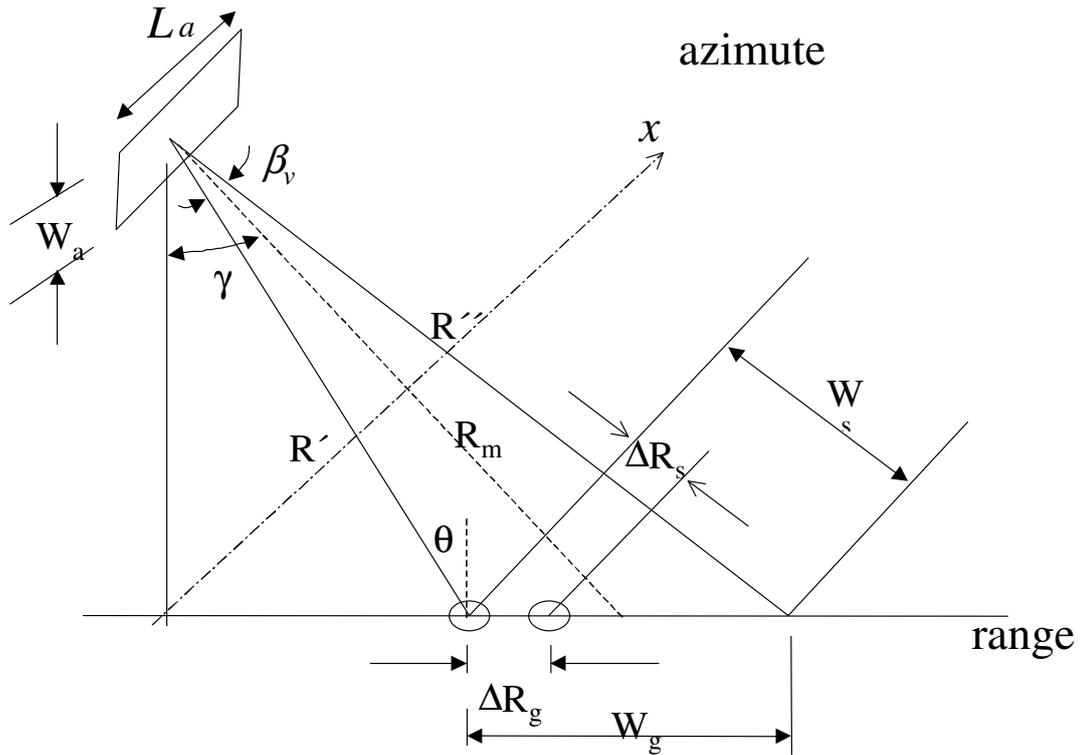


Figura 3. Geometria Radar ilustrando a faixa imageada, W_g , a largura do feixe β_a , ângulo de apontamento γ , dimensões da antena W_a e L_a

Vimos que a resolução azimutal do radar é, na melhor das hipóteses:

$$r_a = \delta x = \frac{L_a}{2}$$

Esta equação nos diz que uma resolução arbitrariamente fina é conseguida pela redução do comprimento da antena. Na prática existem limites para a dimensão da antena.

Impõe-se que o tempo de recepção do primeiro eco de um dado pulso ocorra após a recepção do último eco do pulso anterior. Se os ranges próximo e distante são R' e R'' , isto implica que

$$2R'/c + T_p > 2R''/c \quad (24)$$

em que $T_p = 1/f_p$ é o período entre pulsos (isto é, separação no tempo entre dois pulsos) e f_p é a Frequência de Repetição de Pulso (“Pulse Repetition Frequency”, PRF). Então, a faixa imageada é limitada por

$$W_s = R'' - R' < cT_p/2 = c/2f_p \quad (25)$$

Entretanto, é também necessário considerar a frequência Doppler, (que é a mudança na diferença de fase entre a onda transmitida e a recebida devido a mudança da posição relativa entre o radar e o alvo em pulsos consecutivos). Para relacionar de forma não ambígua a mudança na diferença de fase à frequência Doppler, a largura de banda Doppler precisa ser menor que a PRF, $B_D < f_p$.

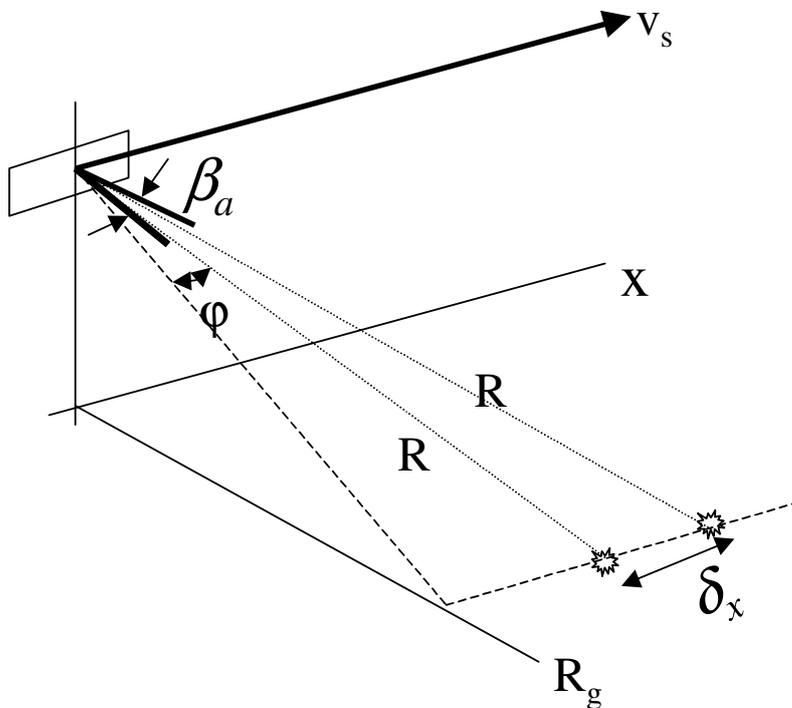


Figura 4. Aquisição de sinais para o elemento de resolução δx .

Da figura 4, a variação Doppler relativa a frequência transmitida é:

$$f_D = 2V_s \sin \varphi / \lambda \approx 2V_s x / \lambda R$$

em que x é a coordenada em relação azimutal (em relação a direção ortogonal do vetor velocidade).

Então a banda Doppler é limitada por:

$$\begin{aligned} B_D &= f_{D,max} - f_{D,min} \\ &= (2V_s / \lambda) [\sin(\varphi/2) - \sin(-\varphi/2)] \approx 2V\varphi / \lambda \\ &= 2V_s / L_a = V_s / \delta x < f_p \end{aligned}$$

Re-arranjando, temos que:

$$V_s / f_p = V_s T_p < L_a / 2 \quad (26)$$

Esta equação estabelece que o radar precisa transmitir pelo menos um pulso cada vez que a plataforma se desloca de uma distância equivalente a metade do comprimento da antena .

Combinando as equações anteriores, temos

$$W_s < c/2f_p < \left(\frac{c}{2V_s} \right) \delta x \quad (27)$$

O que implica que a largura da faixa imageada deve decrescer se a resolução azimutal é melhorada (isto é, para um menor δx).

Podemos re-arranjar a última equação na forma

$$W_s / \delta x < c/2V_s \quad (28)$$

O lado direito desta inequação é da ordem de 20000 para uma satélite orbital.

Verifica-se que

$$W_s = W_g \operatorname{sen} \theta \cong \frac{\lambda R_m}{W_a \cos \theta} \operatorname{sen} \theta = \frac{\lambda R_m \tan \theta}{W_a} \quad (29)$$

A última inequação nos conduz a uma requerimento sobre a área da antena de

$$A_a = W_a L_a > 4V_s \lambda R_m \tan \theta / c \quad (30)$$

que é o tamanho mínimo para realização de um SAR de máxima resolução.

Quanto maior for o comprimento de onda, maior deve ser a área (e o tamanho da antena) para a realização deste critério.