INPE 258
NAS

ARMAZENAGEM DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA

- ARPA -

Outubro 1972

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA
CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
São José dos Campos - Estado de S. Paulo - Brasil

ARMAZENAGEM DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA

- ARPA -

Este projeto foi apresentado, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Análise de Sistemas, pelo INPE, por Maria Angela Campelo de Melo, Virgílio Antônio do Amaral César, Wilson Porto Filho e sua publicação foi autorizada pelo abaixo assinado,

F de Mendonça

Fernando de Mendônça
Diretor Geral

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA
CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
São José dos Campos - Estado de São Paulo - Brasil

CERTIFICADO

O Instituto de Pesquisas Espaciais, INPE, CONFERE aô, Engra. MARIA ANGELA CAMPELO DE MELO x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x, o Título de MESTRE EM CIÊNCIAS, na especialidade de Análise de Sistemas e Aplicações x-x-x-x-x- , de acôrdo com o artigo 3.º, item e, do Decreto n.º 68.532 de 22 de abril de 1971

O supra citado, completou os 36 créditos exigidos para a concessão daquele Título e no dia 30 de maio de 19 72 , apresentou, na forma final, o Projeto Coletivo, cujo título foi Projeto ARPA - Armazenagem da Produção Agrícola x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-

tendo sido aprovado pela Banca Examinadora.

São José dos Campos, 26 de junho de 1973

Fde Mendonça
Dr. Fernando de Mendonça
DIRETOR GERAL

PRESIDÊNCIA DA REPUBLICA
CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
São José dos Campos · Estado de S. Paulo · Brasil

FORMULÁRIO PG-012

AVALIAÇÃO DE PROJETO COLETIVO

1. Aluno: MARIA ANGELA CAMPELO DE MELO

2. Assunto do Trabalho: Projeto ARPA - ANS

3. Período: 1) /1972 Projeto: Analise de Sistemas

4. Orientador Eng. S. E. Girão B. Ass. do ~~Orientador~~ Avaliador: [signature]

5. Setor de Pós-Graduação: Analise de Sistemas e Aplicações

6. Membro: Dr. Amit Dutta-Roy

INSTRUÇÕES AO AVALIADOR

1. A apreciação de cada fator deverá ser efetuada pela colocação de uma cruz (+) no losango correspondente da esquerda. Caso o avaliador julgar que a apreciação está situada entre dois fatôres subsequentes, deverá assinalar o losango correspondente da direita.
2. O avaliador deverá julgar seus orientados em relação a cada fator, separadamente, sem considerar sua impressão geral do conjunto.
3. É importante basear as avaliações em fatos e não em opiniões.
4. É necessário que o orientador tome sua própria decisão, não se deixando influenciar pela decisão dos outros.
5. Deve-se procurar evitar cair nos êrros geralmente cometidos pelo avaliador:
   - tendência natural para elevar a categoria por benevolência;
   - tendência a que a impressão do conjunto se sobreponha a cada qualidade particular;
   - tendência de deixar-se levar pelo desejo de favorecer consciente ou inconscientemente, o colaborador.
6. A avaliação deve ser feita imediatamente após a apresentação de cada grupo, perante a Banca Examinadora.
7. A avaliação deve ser feita individualmente, por cada membro da Banca Examinadora, e para cada elemento integrante do grupo.
8. Após a avaliação os membros da Banca Examinadora, devem remeter as suas Fôlhas de Avaliação diretamente para a Divisão de Ensino, para o cálculo da média e aferição de créditos.

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA
CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
São José dos Campos - Estado de S. Paulo - Brasil

FORMULÁRIO PG-012

AVALIAÇÃO DE PROJETO COLETIVO

1. Aluno: MARIA ANGELA CAMPELLO DE MELO

2. Assunto do Trabalho: Projeto ARPA - ANS

3. Período: 1º /19 72 Projeto: Analise de Sistemas

4. Orientador: Eng. S. E. Girão B. Ass. do ~~Orientador~~ Avaliador: Plinio Tissi

5. Setor de Pós-Graduação: Analise de Sistemas e Aplicações

6. Membro: Dr. Plinio Tissi

INSTRUÇÕES AO AVALIADOR

1. A apreciação de cada fator deverá ser efetuada pela colocação de uma cruz (+) no losango correspondente da esquerda. Caso o avaliador julgar que a apreciação está situada entre dois fatôres subsequentes, deverá assinalar o losango correspondente da direita.
2. O avaliador deverá julgar seus orientados em relação a cada fator, separadamente, sem considerar sua impressão geral do conjunto.
3. É importante basear as avaliações em fatos e não em opiniões.
4. É necessário que o orientador tome sua própria decisão, não se deixando influenciar pela decisão dos outros.
5. Deve-se procurar evitar cair nos êrros geralmente cometidos pelo avaliador:
   - tendência natural para elevar a categoria por benevolência;
   - tendência a que a impressão do conjunto se sobreponha a cada qualidade particular;
   - tendência de deixar-se levar pelo desejo de favorecer consciente ou inconscientemente, o colaborador.
6. A avaliação deve ser feita imediatamente após a apresentação de cada grupo, perante a Banca Examinadora.
7. A avaliação deve ser feita individualmente, por cada membro da Banca Examinadora, e para cada elemento integrante do grupo.
8. Após a avaliação os membros da Banca Examinadora, devem remeter as suas Fôlhas de Avaliação diretamente para a Divisão de Ensino, para o cálculo da média e aferição de créditos.

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA
CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
São José dos Campos - Estado de S. Paulo - Brasil

FORMULÁRIO PG-012

AVALIAÇÃO DE PROJETO COLETIVO

1. Aluno: MARIA ANGELA CAMPELLO DE MELLO

2. Assunto do Trabalho: Projeto ARPA - ANS

3. Período: 1º /1972 Projeto: Analise de Sistemas

4. Orientador: Eng. S. E. Girão B. Ass. do ~~Orientador~~ Avaliador: Joanilio R. Teixeira

5. Setor de Pós-Graduação: Analise de Sistemas e Aplicações

6. Membro: Econ. Joanilio R. Teixeira

INSTRUÇÕES AO AVALIADOR

1. A apreciação de cada fator deverá ser efetuada pela colocação de uma cruz (+) no losango correspondente da esquerda. Caso o avaliador julgar que a apreciação está situada entre dois fatôres subsequentes, deverá assinalar o losango correspondente da direita.
2. O avaliador deverá julgar seus orientados em relação a cada fator, separadamente, sem considerar sua impressão geral do conjunto.
3. É importante basear as avaliações em fatos e não em opiniões.
4. É necessário que o orientador tome sua própria decisão, não se deixando influenciar pela decisão dos outros.
5. Deve-se procurar evitar cair nos êrros geralmente cometidos pelo avaliador:
   - tendência natural para elevar a categoria por benevolência;
   - tendência a que a impressão do conjunto se sobreponha a cada qualidade particular;
   - tendência de deixar-se levar pelo desejo de favorecer consciente ou inconscientemente, o colaborador.
6. A avaliação deve ser feita imediatamente após a apresentação de cada grupo, perante a Banca Examinadora.
7. A avaliação deve ser feita individualmente, por cada membro da Banca Examinadora, e para cada elemento integrante do grupo.
8. Após a avaliação os membros da Banca Examinadora, devem remeter as suas Fôlhas de Avaliação diretamente para a Divisão de Ensino, para o cálculo da média e aferição de créditos.

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA
CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
São José dos Campos - Estado de S. Paulo - Brasil

FORMULÁRIO PG-012 AVALIAÇÃO DE PROJETO COLETIVO

1. Aluno: MARIA ANGELA CAMPELLO DE MELLO

2. Assunto do Trabalho: Projeto ARPA - ANS

3. Período: 1º /1972 Projeto: Analise de Sistemas

4. Orientador: Eng. S. E. Girão B. Ass. do Avaliador:

5. Setor de Pós-Graduação: Analise de Sistemas e Aplicações

6. Membro: Eng. Jorge de Mesquita

INSTRUÇÕES AO AVALIADOR

1. A apreciação de cada fator deverá ser efetuada pela colocação de uma cruz (+) no losango correspondente da esquerda. Caso o avaliador julgar que a apreciação está situada entre dois fatôres subsequentes, deverá assinalar o losango correspondente da direita.

2. O avaliador deverá julgar seus orientados em relação a cada fator, separadamente, sem considerar sua impressão geral do conjunto.

3. É importante basear as avaliações em fatos e não em opiniões.

4. É necessário que o orientador tome sua própria decisão, não se deixando influenciar pela decisão dos outros.

5. Deve-se procurar evitar cair nos êrros geralmente cometidos pelo avaliador:
   - tendência natural para elevar a categoria por benevolência;
   - tendência a que a impressão do conjunto se sobreponha a cada qualidade particular;
   - tendência de deixar-se levar pelo desejo de favorecer consciente ou inconscientemente, o colaborador.

6. A avaliação deve ser feita imediatamente após a apresentação de cada grupo, perante a Banca Examinadora.

7. A avaliação deve ser feita individualmente, por cada membro da Banca Examinadora, e para cada elemento integrante do grupo.

8. Após a avaliação os membros da Banca Examinadora, devem remeter as suas Fôlhas de Avaliação diretamente para a Divisão de Ensino, para o cálculo da média e aferição de créditos.

SUMÁRIO

Este trabalho consta de um conjunto de procedimentos para determinação da localização de depósitos para produtos agrícolas, visando minimizar os custos de transporte e de operação dos armazéns.

O tratamento do problema é calcado na Engenharia de Sistemas.

Analisam-se os aspectos econômicos da armazenagem e os efeitos da Política de Preços Mínimos do Governo Federal.

São apresentados métodos estatísticos para estimação dos parâmetros de entrada do modelo matemático.

O modelo é estruturado em termos de programação linear, o que torna viável sua aplicação prática visto que o algorítmo para sua resolução é amplamente divulgado e faz parte das bibliotecas de programas científicos dos computadores dos principais centros tecnológicos do país.

É dada uma interpretação econômica para o problema dual associado ao problema considerado, enfatizando-se a importância do conceito de utilidade marginal.

PROJETO ARPA

ÍNDICE

SUMÁRIO

ÍNDICE DAS FIGURAS

ABSTRACT

This thesis proposes a set of procedures for localization of storehouses for agricultural products, the object of the process being simultaneous minimization of the cost transport and the operational costs of the storehouses themselves.

Treatment of these problems is based on the principles of systems engineering. The economic aspects of storing and the effects of the Minimum Price Policy of the Federal Government of Brazil are analyzed. Statiscal methods for the estimation of the parameters as input to the mathematical model are presented.

The model is so structured that methods of Linear Programming can be applied to obtain solutions in specific cases and what makes its practical application feasible is that algorithms for such solutions are well known and can be found at the main Technological Centers of the Country.

An economic interpretation is given to the dual problem associated to the problem considered, with emphasis on the concept of marginal utility.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Dr.Fernando de Mendonça, Diretor Geral do Instituto de Pesquisas Espaciais, por ter nos dado condições para elaborar este projeto.

Queremos expressar o nosso agradecimento ao prof.Sérgio Ellery Girão Barroso. nosso orientador acadêmico, pelo estímulo e interesse com que nos guiou durante todo o desenvolvimento do trabalho.

Agradecemos também ao prof. Joanílio Rodolpho Teixeira pelas sugestões apresentadas nas questões relativas à economia e a D.Suzanne Palocz pela colaboração na abordagem do trabalho e na formulação do modelo estocástico.

Aos nossos colegas José Natal Figueirôa, Lúcia Maria Guimarães Tardin e Wilson Francisco de Paula Filho, que conosco colaboraram na elaboração deste trabalho, nosso reconhecimento.

Queremos finalmente agradecer à Elenice do Santos da Secretaria Geral e à Maria Izildinha de Oliveira Souza, secretária do Núcleo de Análise de Sistemas do INPE, pela paciência e dedicação com que datilografaram o trabalho.

1.0 - INTRODUÇÃO GERAL

1.1 - INTRODUÇÃO

O projeto ARPA - Armazenamento da Produção Agrícola, se propõe a estabelecer um modelo para um sistema de armazenamento e distribuição da produção agrícola de uma região, visando a minimização dos custos de transporte e de armazenamento.

O sistema deverá aproveitar, na região em que for implantado, a rede de armazéns ali existentes, e deverá ter características que permitam sua aplicação a qualquer estado da federação.

O problema da localização de fábricas ou armazéns tem sido amplamente abordado na literatura técnica especializada em Pesquisa Operacional, principalmente a partir da década passada.

Os métodos de análise estudados não pretendem encontrar soluções ideais, pois a complexibilidade dos problemas reais não permite uma perfeita analogia com qualquer modelo apresentado, por mais sofisticado que seja este. Os modelos visam, primordialmente, servir como base para a análise do problema, cuja solução final dependerá da sensibilidade às mudanças nos parâmetros, nas restrições e nos critérios de otimalidade.

Os modelos até aqui estudados podem ser classificados em duas categorias gerais: modelos utilizando grafos e modelos analíticos.

Ford e Fulkerson |11|, Gomory e Hu |14|, Marks |17| e Ponsard |20|, estudaram o primeiro tipo de modelo, que consiste numa re de formada por nós interligados por arcos aos quais se associa um custo e uma capacidade. A aplicabilidade de tais modelos se reduz a medida que aumenta o número de nós.

Entre os autores que apresentaram modelos analíticos podemos citar: Efroymson e Ray | 9| e El Shaeib | 1|, cuja análise é baseada no método "branch-and-bound", de enumeração implícita, utilizado na programação com inteiros. Este método envolve uma enumeração seletiva que é guiada, em cada estágio, por um limite na função objetivo, obtido naquele estágio.

Uma outra abordagem analítica nos levaria a introduzir uma função objetivo não linear, uma vez que os coeficientes desta função, que indicam os custos unitários de transporte, dependem das distâncias entre os centros de produção e consumo e os armazéns, cuja localização é desconhecida. O cálculo euclideano desta distância, introduziria um fator quadrático na função objetivo, o que aumentaria muito o trabalho requerido para otimizar tal função, pois não dispomos de um algorítmo geral para a solução de problemas não lineares.

Produramos reduzir o nosso problema a um conjunto de problemas de programação linear, cujo algorítmo para solução, o método "simplex" devido a Dantzig |8 |, é de uso generalizado, podendo-se dispor do mesmo nas bibliotecas dos computadores dos principais centros tecnológicos do país. Esta redução foi dificultada por não se conhecer a priori as capacidades dos depósitos a serem construidos, o que deu origem a um sistema de restrições com limite superior variável. Outro fator que contribuiu para tomar mais complexo o modelo foi o fato de ter que se aproveitar a rede de depósitos já existentes. O modelo final aqui apresentado considera todos estes fatores.

1.2 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Além deste capítulo introdutório, este trabalho consta de mais cinco capítulos e cinco apêndices.

O capítulo 2 trata dos aspectos econômicos da armazenagem. Nele são discutidas as características peculiares da oferta de produtos agrícolas e os fatores que a influenciam. Introduzimos um ítem sobre a Política de Preços Mínimos do Governo Federal, cuja adoção tornou evidente a necessidade de uma reformulação do sistema de armazenagem existente, levando-nos a elaborar o projeto ARPA.

No capítulo 3 abordamos o problema da estruturação do sistema. Nele são indicadas as maneiras de se obter quantitativamente os parâmetros de entrada para o modelo, que são: produção estocável, custos de transporte, demanda, disponibilidades médias e custos operacionais de estocagem.

No capítulo 4, que constitue o núcleo principal do trabalho, apresentamos o modelo matemático cuja elaboração foi o objetivo principal do projeto.

O capítulo 5 consiste em um exemplo de aplicação do modelo apresentado.

No capítulo 6 apresentamos as conclusões do trabalho e sugestões para os que desejarem continuar estudando o assunto.

Nos apêndices, de I a V, fazemos uma descrição sumária das principais técnicas estatísticas e de programação matemática utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

1.3 - PROJETO PILOTO

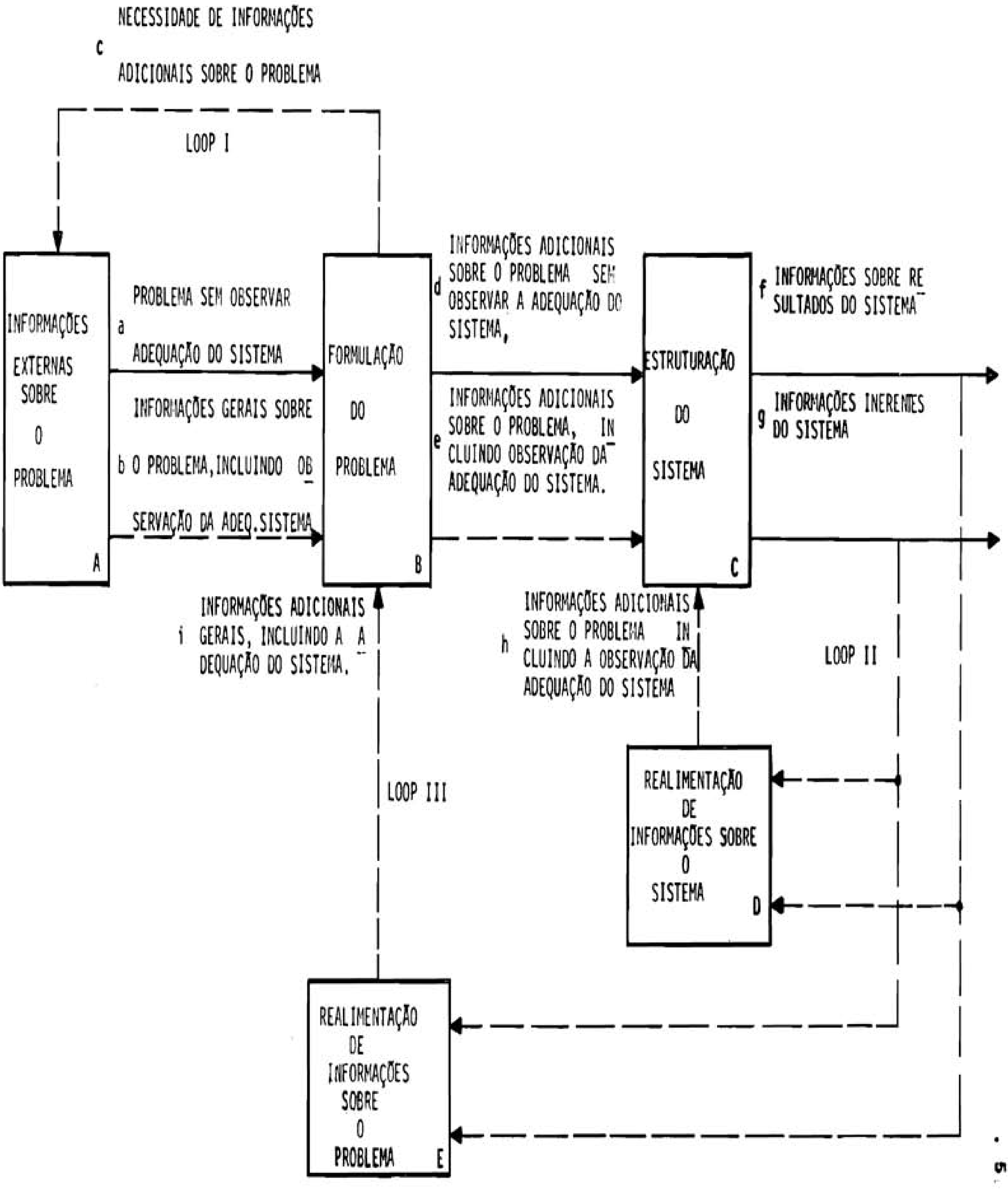
Será elaborado um projeto piloto para o estado de Pernambuco. A avaliação de seus resultados fornecerá subsídios para as modificações a serem introduzidas nos sistemas similares que possam vir a ser implantados em outras regiões do país.

A elaboração deste projeto piloto constituirá a fase II do projeto que terá início em setembro de 1972, e deverá ser realizada no Centro de Prestação de Serviços Técnicos de Pernambuco-CETEPE, com sede em Recife.

1.4 - ABORDAGEM

A estruturação do projeto foi baseada nos procedimentos padrões da Engenharia de Sistemas, aplicadas a este projeto específico. O fluxo de informações requerido para esta estruturação é apresentada na figura 1.1 .|6 |

Observamos que a figura consiste de 3 "loops" principais, que passaremos a descrever com detalhes.



FLUXO DE INFORMAÇÕES MOSTRANDO RELAÇÃO ENTRE FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E ESTRUTURAÇÃO DO SISTEMA

FIGURA 1.1

LOOP I : Representa o estágio de planejamento e estruturação do projeto

LOOP II : Este é um "loop" de decisão que especifica o sistema real requerido em cada estágio de decisão. Determina-se aqui o modelo a ser adotado (ver secção 3.1)

LOOP III : Este é um "loop" de realimentação que incorpora os resultados do Projeto Piloto a ser executado em Pernambuco. Estes resultados modificarão o modelo caso venha a ser aplicado ao resto do país.

Os elementos específicos do diagrama de fluxo são os seguintes:

BLOCO A

Informação externa sobre o sistema

Compreende os seguintes ítens:

1. Localização dos Centros de produção
2. Localização dos Centros Consumidores
3. Localização dos armazénes existentes
4. Estrutura viária existente
5. Oferta de cada produto agrícola
6. Demanda nos centros de consumo, para cada produto
7. Determinação dos custos unitários de transporte
8. Determinação dos custos de armazenagem

BLOCO B

Formulação do Problema

1. O problema consiste em minimizar os custos de distribuição e armazenagem de produtos agrícolas

2. Estabelecer um projeto piloto para o estado de Pernam buco
3. Aplicar o projeto para todo o país

BLOCO C

Estruturação do sistema

1. O sistema é estruturado segundo o modelo matemático a presentado no ítem 3.1 .

BLOCO D

Realimentação de informações sobre o sistema

1. Condições existentes em Pernambuco
   i. Requisitos especiais da área
   ii. Dinâmica do sistema no espaço e no tempo

Este teste deverá ser realizado durante o primeiro está gio da simulação.

2. Condições existentes no Brasil
   i. Requisitos especiais da área
   ii. Dinâmica do sistema no espaço e no tempo

Este teste deverá ser realizado durante o segundo está gio da simulação.

BLOCO E

Realimentação de informação sobre o problema

1. O projeto Piloto foi representativo para o problema em Pernambuco?
2. A simulação matemática foi consistente com o teste nas condições reais?
3. Se não, quais as modificações necessárias para a simu lação do modelo em Pernambuco?

4. Se sim, há necessidade de alguma modificação para o sistema em outras regiões?
5. Em caso afirmativo, pode ser aplicado em outras áreas.
6. Em caso negativo, considerar a dinâmica do sistema no espaço e no tempo.

Descrição das rotas de informação:

ROTA a:

Custos de transporte e operacionais como função dos ítens do Bloco A, baseados em dados estatísticos.

ROTA b:

Estimativa da capacidade de armazenagem disponível e facilidades de transporte, a partir de dados estatísticos.

ROTA c:

1. Mudanças esperadas nos ítens do Bloco A, em relação ao tempo e ao espaço em Pernambuco.
2. Idem, em outras áreas.

ROTA d:

Informações sobre as variáveis do problema.

ROTA e:

Informações sobre as mudanças esperadas das variáveis.

BLOCO C

Estruturação do Sistema.

1. O sistema é estruturado segundo o modelo matemático apresentado no ítem 3.0.

BLOCO D

Realimentação de informações sobre o sistema.

Teste da adequação do modelo adotado, considerando-se:

1. Condições existentes em Pernambuco.
   i. Requisitos especiais da área
   ii. Dinâmica do sistema no espaço e no tempo

Este teste deverá ser realizado durante o primeiro estágio da simulação.

2. Condições existentes no Brasil
   i. Requisitos especiais da área
   ii. Dinâmica do sistema no espaço e no tempo

Este teste deverá ser realizado durante o segundo estágio da simulação.

BLOCO E

Realimentação de informação sobre o problema.

1. O Projeto Piloto foi representativo para o problema em Pernambuco?
2. A simulação matemática foi consistente com o teste nas condições reais?
3. Se não, quais as modificações necessárias para a simulação do modelo em Pernambuco?

ROTA f:

Resultados do sistema consistindo na localização dos armazéns e sua capacidade.

ROTA g:

Erros na simulação do programa

ROTA h:

1. Fazer as mudanças necessárias nas variáveis do sistema como função dos ítens 1 ou 2 no Bloco D.

2. Corrigir as partes do programa que produzem erro na simulação.

ROTA i:

Introduz as mudanças necessárias nas variáveis como função dos ítens do Bloco E.

2.0 - ASPECTOS ECONÔMICOS DO ARMAZENAMENTO

2.1 - COMERCIALIZAÇÃO AGRÍCOLA

Até mesmo nas economias mais primitivas existem necessidades que não podem ser satisfeitas pelo indivíduo, isoladamente, o que gera a necessidade de intercâmbio de bens e serviços. Nas etapas iniciais do desenvolvimento verifica-se a simples troca direta, cuja evolução conduz às complexas transações comerciais das economias monetárias contemporâneas.

Os países em vias de desenvolvimento, ao procurar elevar rapidamente o nível de vida de seus habitantes, têm que enfrentar problemas de produção e comercialização decorrentes do aumento da demanda efetiva de alimentos e matérias primas agrícolas, devido ao alto crescimento demográfico e ao fluxo migratório das zonas rurais para os centros urbanos.

À medida que se amplia o mercado e a demanda dos produtos agrícolas, os produtores e consumidores se distanciam no tempo e no espaço, pois a produção se localiza nas regiões que oferecem condições de solo e climáticas mais favoráveis, enquanto o consumo tende a se concentrar nos centros urbanos. Além disso, o período de oferta é estacional, ocorrendo na época das colheitas, enquanto a demanda se mantém por um período mais amplo.

No mercado de produtos agrícolas das economias sub-desenvolvidas se observam grandes flutuações de preços a todos os níveis, especialmente ao nível do produtor. Os preços da produção agrícola total apresentam deterioração a longo prazo e alterações a curto prazo e os produtos, separadamente, apresentam variações cíclicas no decorrer dos anos e variações estacionais em determinadas épocas do ano. As decisões sobre o que produzir num determinado período são baseadas nos preços dos períodos precedentes, o que gera variações cíclicas consideráveis.

As oscilações cíclicas da produção agrícola e seu caráter estacional, aliados ao fato de que a demanda, além de poder variar, está localizada em pontos diferentes, produzem falhas imprevisíveis na distribuição. Outro fator que contribue para uma distribuição imperfeita é o caráter peculiar dos produtos agrícolas, que são volumosos, têm relativamente baixo preço, são perecíveis e além de tudo isto têm sua produção afetada por fatores climáticos não controláveis.

Os preços dos produtos agrícolas flutuam com as mudanças da oferta e da demanda,e os desequilíbrios de mercado são aproveitados por especuladores, que podem obter margens extraordinárias a curto prazo. Os pequenos produtores não têm facilidade de armazenamento, e portanto não podem lucrar guardando seus produtos para vendê-los na época oportuna.

Para melhorar a posição do produtor no mercado,podem ser tomadas as seguintes medidas: a manutenção de um sistema de informação de mercado, facilidades de crédito, fomento das cooperativas de comercialização e implantação de um sistema de armazenamento eficiente.

As necessidades de armazenamento, no caso de produtos agrícolas, para evitar perdas e deterioração nos períodos de entre-safra, são óbvias. As pesquisas neste sentido, no entanto, não tem dado a necessária ênfase ao problema da localização dos depósitos, de modo a mi nimizar os custos de transporte, nem à determinação das capacidades de armazéns que acarretem baixos custos operacionais.

A solução destes dois problemas é o objetivo do projeto ARPA.

2.2 - PORQUE ARMAZENAR

Podemos distinguir tres aspectos básicos do armazenamento, no tocante à sua finalidade.

A armazenagem dos produtos agrícolas tem por objetivo fundamental a regularização dos estoques de bens disponíveis, possibilitando o atendimento da demanda, que varia pouco durante o ano, enquanto a oferta se concentra nos períodos de safra.

Objetiva-se também, com o armazenamento, alcançar uma relativa estabilização dos preços dos produtos agrícolas, que por sua própria natureza estão sujeitos a toda sorte de oscilações especulativas. O armazenamento serve, portanto, como instrumento para a defesa da renda do agricultor.

Podemos citar ainda, como finalidade de estocagem, a melhoria de qualidade do produto estocado, o qual se obtem através das operações de beneficiamento.

2.3 - CONDICIONANTES ECONÔMICOS DA ARMAZENAGEM

Os postulados econômicos que regem os fenômenos da estocagem de produtos agrícolas, para fins comerciais, podem ser expressos como segue: |21|

1. A estocagem é realizada até quando seu custo marginal iguale o aumento esperado do preço de mercadoria armazenada.

2. A generalização da prática de estocagem tende a reduzir os estímulos para sua efetuação, na medida em que reduz as oscilações de preço, através da regularização da oferta, no tempo. A recíproca é verdadeira.

3. O preço médio de equilíbrio ao longo do ano tende a diferenciar-se em função do custo marginal de estocagem, nos intervalos de tempo considerados.

2.4 - POLÍTICA DE PREÇOS MÍNIMOS DO GOVERNO FEDERAL

Visando proteger os agricultores contra os transtornos advindos das violentas flutuações dos preços dos produtos agrícolas, foi instituida, pelo Decreto Lei Nº79, de 19 de dezembro de 1966, a Política de Preços Mínimos, cujas diretrizes são estabelecidas pela Comissão de Financiamento da Produção.

A fim de prevenir uma abrupta queda de preços pagos aos produtos durante a safra, motivada pelo acúmulo estacional da oferta agrícola, a CFP absorve o excesso concentrado da oferta ou através de aquisições diretas, que produzem um efeito revigorador sobre os preços pa gos, ou por meio de financiamentos, pelos quais os agricultores recebem uma transfusão creditícia que os capacita a reter sua produção, fazendo a oferta fluir por um período maior de tempo com idêntico efeito revitalizador sobre os preços.

A Política de Preços Mínimos tem como objetivos principais:

1 - <u>Diminuir a incerteza que envolve o futuro comportamento dos preços agrícolas</u>

Com o preço mínimo, o produtor tem a garantia de que pelo menos aquela renumeração ele receberá, o que o encorajará a assumir os riscos inerentes a um dispêndio maior.

2 - <u>Abrandar as flutuações estacionais dos preços agrícolas</u>

Este efeito é obtido através da diluição da oferta por um período maior de tempo.

3 - <u>Prover crédito de comercialização à lavoura</u>

Com isto, garante-se a existência de crédito, no caso de haver produção.

Além dessas finalidades, que podemos classificar como imediatas, a Política de Preços Mínimos visa ainda: possibilitar incrementos compatíveis na renda rural, induzir alterações quantitativas e qualitativas na produção, auxiliar a política de abastecimento nacional e disciplinar a distribuição geográfica da produção agrícola no país.

Para atender a tão amplos objetivos, a CFP necessita dispor de uma adequada rede de comercialização e armazenagem.

Verificamos a existência, atualmente, de inumeras regiões carentes de depósitos para armazenagem de produtos agrícolas, ao lado de outras regiões que contam com silos e armazéns operando com capacidade ociosa e sem perspectivas de uma utilização mais econômica .

Evidencia-se portanto, a necessidade de uma reestruturação do sistema de armazenagem, com o levantamento das necessidades regiões, tomando-se por base a crescente demanda por armazenagem, consequência da adoção desta política, e procurando corrigir as distorções existentes.

3.0 - ESTRUTURAÇÃO DO SISTEMA

3.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo abordamos o problema da elaboração do modelo matemático para a localização dos depósitos e a determinação de suas capacidades.

Relembramos aqui que o nosso problema consiste em determinar os locais onde construir novos depósitos, de modo a minimizar o custo operacional do sistema.

Em lugar de elaborar um único modelo para o projeto, apresentamos dois modelos, com diferentes graus de dificuldade e sofisticação.

Justifica-se a necessidade desta hierarquia de modelos pelas seguintes razões:

1. Espera-se que num futuro próximo, com o início de programas educacionais e de desenvolvimento econômico, haverá uma gradual mudança de condições no setor agrícola da economia. Com estes desenvolvimentos, modelos com vários graus de sofisticação serão mais representativos da situação real.

2. O modelo deve ser aplicável a diferentes áreas do país, com características bastante diferenciadas, havendo necessidade portanto de uma maior flexibilidade na elaboração do modelo.

3. As diferentes áreas do país podem ser classificadas de acordo com as seguintes considerações:

a) Áreas onde não se espera nenhum crescimento num futuro próximo. Estas áreas podem ser representadas por um modelo mais simples.

b) Áreas onde se espera um rápido crescimento, devido, por exemplo, a construção de novas fábricas com o consequente crescimento abrupto da população. Estas áreas pedem um modelo mais sofisticado.

c) Uma seca ou uma enchente podem causar flutuações inesperadas na oferta dos produtos agrícolas. O estudo, desta situação requer um modelo probabilístico.

d) Com um modelo probabilístico pode-se considerar a estocagem de bens perecíveis, onde as flutuações diárias da demanda representam um fator que não pode ser negligenciado.

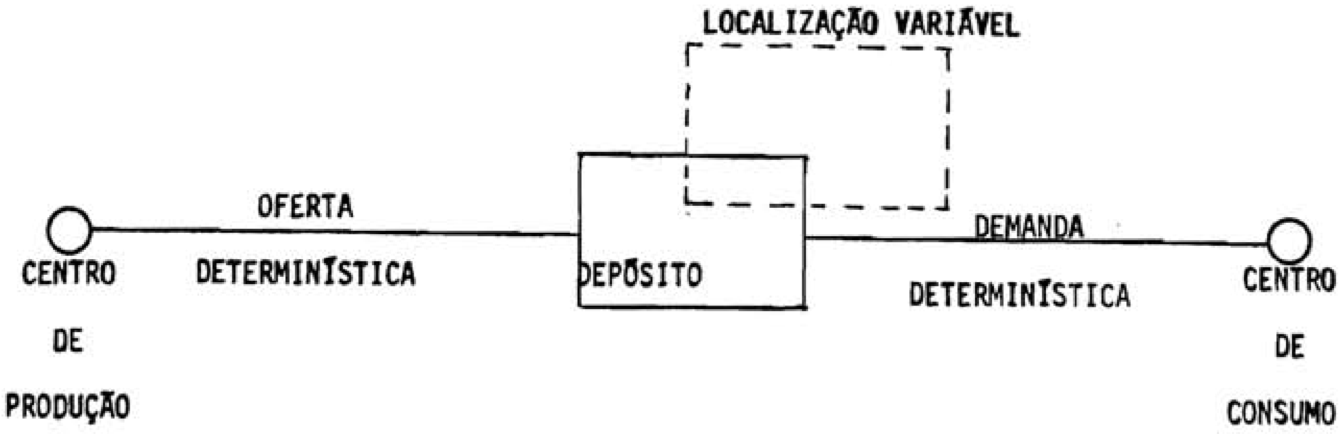
4. Na fase II deste projeto será necessária a utilização do computador para a simulação do modelo. Os custos e a disponibilidade de mão de obra e de tempo no computador do CETEPE, que será utilizado para este fim, devem ser considerados. Obviamente estes custos aumentarão na medida em que aumentar o grau de sofisticação do modelo. Baseados nestas considerações, foram estabelecidos os seguintes modelos para o sistema:

MODELO ARPA I:

A oferta e a demanda dos produtos agrícolas é considerada deterministicamente previsível e independente do tempo.

O número e localização dos depósitos é variável.

Podemos esquematizá-lo de acordo com a figura 3.1.



MODELO ARPA I

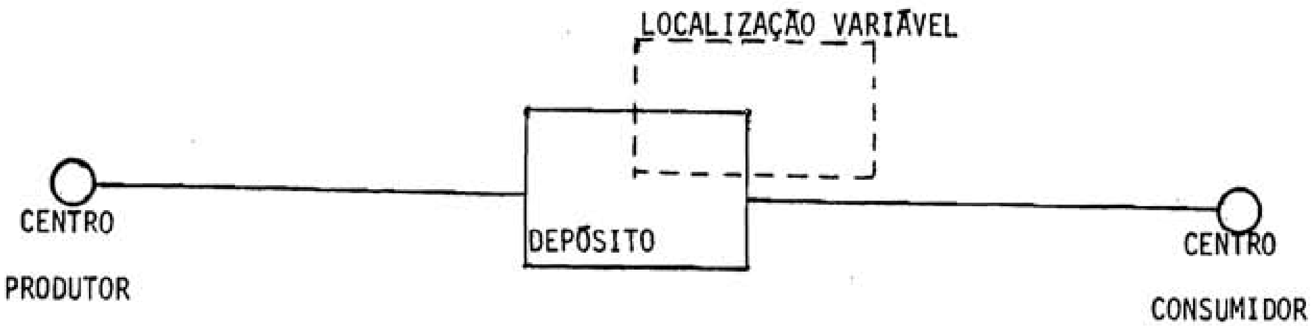
FIGURA 3.1

MODELO ARPA II:

As funções oferta e demanda são probabilísticas e dependem do tempo.

O número e localização dos depósitos é variável.

O diagrama esquemático de uma unidade operacional corresponde a este caso é a da figura 3.2 .



MODELO ARPA II

FIGURA 3.2

Na prática, tanto a oferta como a demanda têm um caráter estocástico, A fim de reduzir os custos, é necessário utilizar os depósitos na sua capacidade ótima. Apresentamos, no Apêndice IV , um procedimento analítico para determinar os níveis adequados de estoque para um sistema de armazenagem com funções de demanda e de oferta probabilísticas.

3.2 - ESTIMAÇÃO DA PRODUÇÃO ESTOCÁVEL

Como produção estocável, queremos nos referir à parcela da produção total que demanda armazenagem; em outras palavras: à parcela da produção total descontado o consumo imediato.

Este consumo imediato ocorre no próprio local de produção devido aos seguintes fatores:

- Estocagem para Consumo próprio dos Produtores
- Transferências diretas aos Centros de Consumo

Deveremos obter junto às Secretarias de Agricultura, Companhias de Armazenagem e demais órgãos relacionados, dados de Produção Estocável em anos anteriores que irão servir de base para nossas análises. É necessário que haja um exame dos dados obtidos para evitar informações tendenciosas. De posse destes dados, aplicaremos métodos estatísticos (ap. I) que irão permitir a previsão da produção estocável no ano base considerado, para cada centro produtor.

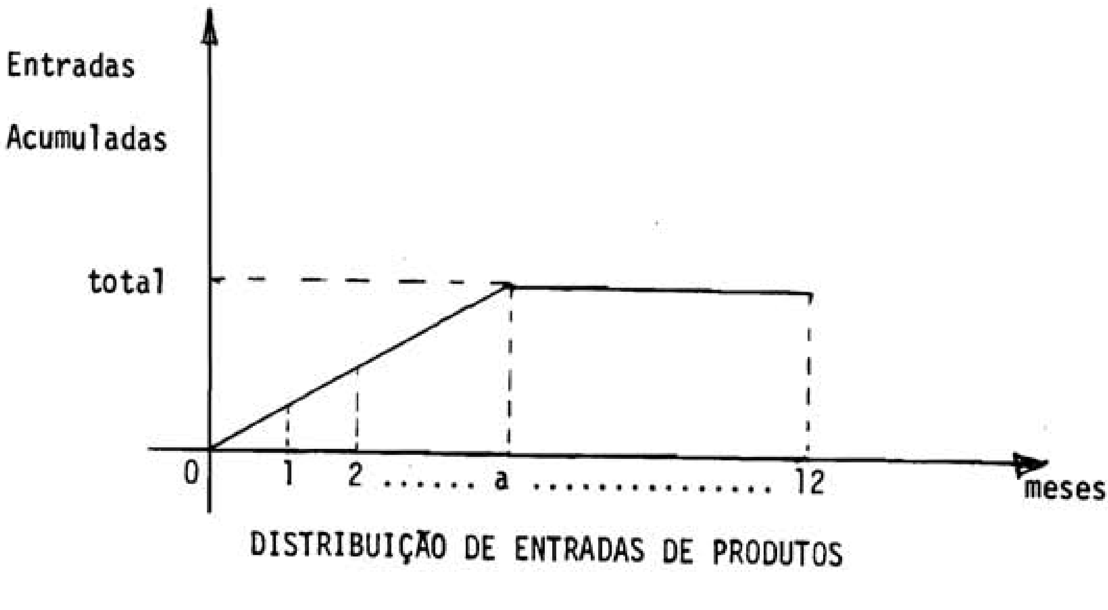
Previsões deste tipo, geralmente são feitas ajustando-se uma curva aos dados disponíveis. Sugerimos o ajuste de um polinômio de grau n (ap. II).

Devido ao grande número de polinômios a ajustar (no caso de Pernambuco: 160 centros produtores e 5 produtos agrícolas em média, daria 800), torna-se mais simples o emprego de polinômios ortogonais (ap. II), visto que, por este processo consegue-se tornar diagonal a matriz de coeficiente das chamadas equações normais (ap. I).

Testando hipóteses |15| sobre a nulidade dos coeficientes do polinômio, o método determina seu grau, permitindo utilizá-lo na projeção de produção estocável no ano base.

Admitamos então que seja conhecida a estimação da produção estocável de um determinado centro produtor (P_k). Deveremos obter dados nos armazéns existentes afim de determinarmos a distribuição de entradas durante o período considerado (1 ano).

Como exemplo citamos a distribuição obtida no trabalho "Uma pesquisa básica para um programa global de armazenagem": |21|



DISTRIBUIÇÃO DE ENTRADAS DE PRODUTOS

FIGURA 3.3

0 : início da colheita

a : fim da colheita

ou seja as entradas são constantes para o período da colheita, e nulos após a colheita.Portanto:

$$\overline{P}_K = \frac{\sum_{1}^{a} P_i}{a} \qquad \text{(Entradas Médias)}$$

Este será o valor que servirá como entrada para o modelo ARPA I.

3.3 - DETERMINAÇÃO DOS CUSTOS DE TRANSPORTE

Os custos de transporte dependem de quatro fatores principais: | 5|

1. A distância de transporte
2. Método de transporte
   . rodoviário
   . ferroviário
   . fluvial
3. Congestão de tráfego em grandes cidades
4. Possibilidade de obtenção de cargas de retorno

Para aplicação ao nosso caso, consideraremos os dois primeiros fatores como relevantes devido as condições da região onde irá se aplicar o modelo.

O método de calcular os custos pode ser simplificado,considerando uma relação linear com as distâncias, afetada de um fator de correção relativo ao tipo de transporte utilizado.

Esta simplificação torna extremamente trivial a determinação dos custos e as exceções, no caso de rotas com característi cas topográficas "sui generis" ou impedimentos naturais, poderão ser encaradas como casos isolados e passíveis de uma análise mais detalhada.

3.4 - ESTIMAÇÃO DA DEMANDA NOS CENTROS DE CONSUMO

A quantidade de um bem consumida por unidade de tempo é função do preço do bem, do preço dos bens substitutos e complementares, da renda familiar, do tamanho e preferências das famílias e de outros fatores menos relevantes.

A estimação rigorosa da demanda vai requerer, por conseguinte, dados sobre todas essas variáveis, para que se possa aplicar os métodos estatísticos gerais.

De início, pode-se introduzir uma restrição: uma estimativa sobre consumo baseada nas vendas de produtos pode não levar a um resultado satisfatório, pois sempre que o estoque for insuficiente, a quantidade vendida será menor do que a quantidade demandada. Torna-se portanto perigoso basearmos nossas análises da demanda de produtos em dados históricos de vendas.

Outro problema que surge é o da determinação das variáveis, dentre as citadas acima, que são realmente relevantes, em cada caso.

Para contornar estes inconvenientes, damos indicações de como extrair informações de dados obtidos através de um experimento orientado.

Deve-se analisar cada caso isoladamente. Dependendo das características de cada centro opta-se por um tipo de experimento que possibilite uma estimação aceitável.

O experimento pode consistir de uma pesquisa junto aos revendedores de produtos agrícolas ou de pesquisas junto ao consumidor.

A seguir analisaremos estes dois tipos de experimento:

3.4.1 - Pesquisa junto aos revendedores de produtos agrícolas

Esta pesquisa visará obter informes sobre os seguintes itens:

- Estoques no início e fim do período
- Procedência do produto

A escolha dos locais a serem visitados, dependerá do Centro de Consumo considerado, cujo sistema de abastecimento deverá ser bem analisado. Procurar-se-á obter uma amostra representativa da população estudada.

Desde que não haja escassez do produto, este experimento satisfaz, porque o volume de vendas, neste caso, coincide com a demanda.

Haverá interesse em se verificar se o Estado é ou não auto-suficiente para se suprir de produtos agrícolas, determinando-se qual parcela da população é abastecida pela produção do próprio estado.

Feita a amostra podemos inferir o consumo per capita.

A partir deste dado, conhecendo-se a população, teremos a demanda total.

3.4.2 - Pesquisa junto ao consumidor

Esta pesquisa deverá obter informes sobres os seguintes ítens:

- consumo individual
- consumo de bens substitutos/complementares
- renda familiar

- tamanho das familias

Este experimento possibilita uma determinação satisfatória da demanda de produtos agrícolas. Cada Centro de Consumo deverá ser analisado isoladamente. A obtenção de uma amostra representativa deve levar em conta:

- Tamanho da amostra
- Nível de renda
- Hábitos alimentares

Este método dará uma estimação da demanda melhor do que a obtida pelo método anterior mas, evidentemente, é mais oneroso e de difícil efetivação.

3.4.3 - Função demanda

A forma da função demanda é obtida empiricamente, a partir de dados sobre o consumo e as variáveis relacionadas no ítem anterior.

A partir dos dados obtidos no segundo experimento descrito, podemos derivar a função demanda, fazendo uma análise de orçamento familiares e supondo que os preços permaneçam constantes durante o período da pesquisa.

Uma análise de orçamentos familiares visa obter uma curva que indique como varia o consumo em relação às variações da renda e do tamanho das famílias. Isto é feito através da comparação de famílias de diferentes tamanhos e níveis de renda, mas semelhantes em outros aspectos sócio-econômicos como ocupação, escala de valores, localização geográfica, etc. O que se pretende é que as famílias comparadas tenham curvas de indiferença similares e difiram apenas quanto ao nível de ren da |18|.

Na prática, isto se faz através de uma análise de regressão múltipla, onde a variável dependente é o gasto num determinado produto e as variáveis independentes são a renda e o tamanho familiar, ou seja:

$$D = f(n, r)$$

onde:

D = gasto total num bem, em cruzeiros

r = renda familiar, em cruzeiros

n = número de pessoas na família

Os modelos empíricos deduzidos por Schultz, Moore e Stone |22|, para a demanda de bens de consumo, não duráveis, apresentam a forma exponencial, que tem sido geralmente utilizada para funções deste tipo.

Com base nestas experiências, é razoável supor que o seguinte modelo se ajuste bem aos dados obtidos:

$$D = a r^{c_1} n^{c_2} u \quad (I)$$

onde:

a = constante, dada em unidades convenientes

c_1 e c_2 = parâmetros admensionais

u = perturbação aleatória

Logaritmizando (I), obtemos:

$$\log D = c_0 + c_1 \log r + c_2 \log n + \log u$$

onde: $c_0 = \log a$

A estimação desta função nos dará os valores de c_1 e c_2, que representam as elasticidade renda e elasticidade tamanho familiar da demanda, respectivamente.

A projeção do consumo futuro pode ser feita com base nas seguintes hipóteses:

1ª - A renda aumentará de maneira uniforme, a uma taxa $\frac{\Delta r}{r}$, no período considerado.

2ª - O tamanho familiar, no período em questão, decrescerá uniformemente, na razão $\frac{\Delta n}{n}$.

3ª - A variação relativa no número de famílias, N, será dada por: $\frac{\Delta N}{N}$

O consumo total no ano t, C_t, calculado com base nas hipóteses acima será dado por: |18|

$$C_t = C_0 \left(1 + c_1 \frac{\Delta r}{r} + c_2 \frac{\Delta n}{n}\right) \left(1 + \frac{\Delta N}{N}\right)$$

onde:

C_t = consumo total no ano t, dado em toneladas

C_0 = consumo total no ano base, para um produto dado, expresso em toneladas.

Obviamente, a função proposta é apenas indicativa. Será necessário ajustar funções que se adaptem às condições existentes em cada caso, o que constitue uma questão empírica. Acredita-se ser a abordagem apresentada suficiente para uma primeira estimativa do comportamento da demanda e expansão do consumo.

3.5 - DETERMINAÇÃO DE DISPONIBILIDADES MÉDIAS

Para a determinação das disponibilidades médias, necessitamos do conhecimento razoável dos seguintes ítens:

a) Quantidades e Períodos de Entrada dos Produtos no Sistema de Armazenagem

b) Quantidades e Períodos de Saídas dos Produtos no Sistema de Armazenagem.

Admitiremos a quantidade de produtos que entram no Sistema de Armazenagem, "constante" durante o período de colheita e uma estimativa de consumo constante ao longo do tempo.

Isto equivale a considerar um gráfico do tipo mostrado na figura 3.4 onde a curva OAC que representa as quantidades que entram no Sistema é crescente até o fim da colheita (Ponto A) quando se estabiliza até encontrar a curva OBC que representa as saídas (consumo do Sistema).

Desta forma a diferença entre as duas curvas mostra a quantidade estocada em cada momento.

A figura 3.5 mostra esta quantidade estocada durante o mes t. O estoque médio E_t pode ser considerado como a ordenada na metade do período.

A disponibilidade será dada por:

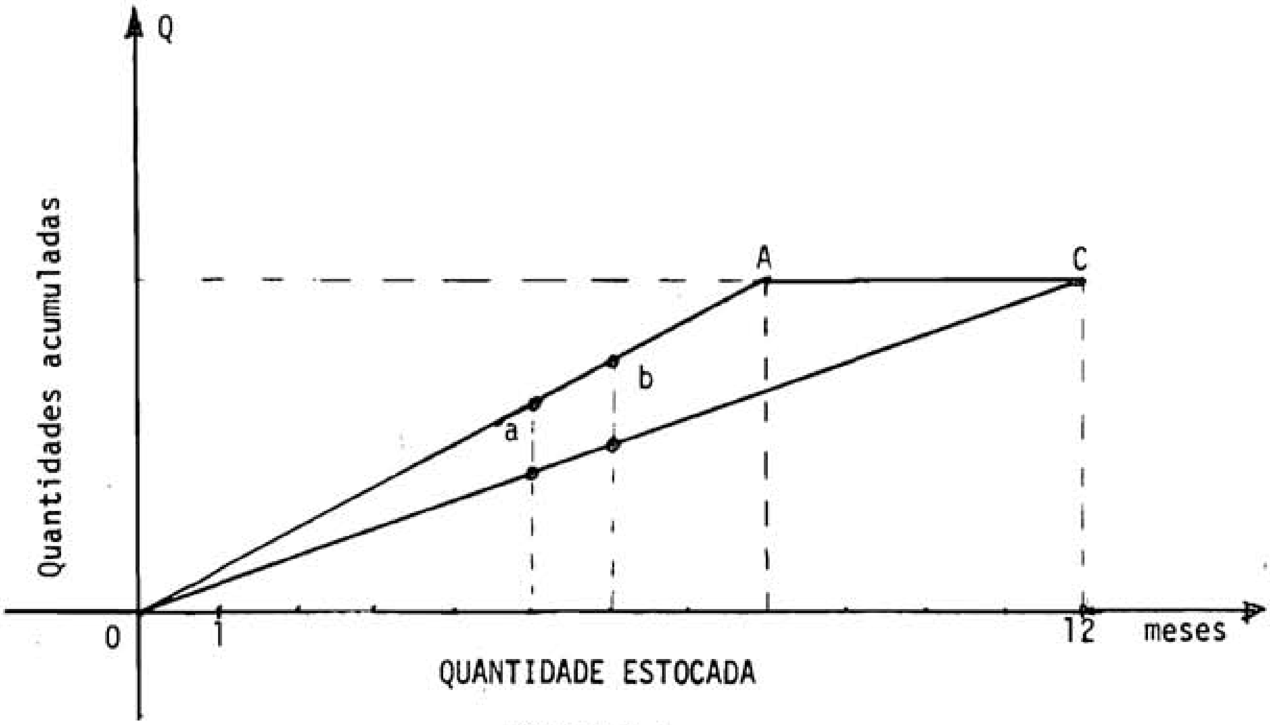
$$w_t = C_i - E_t$$

onde: C representa a capacidade de depósito em foco

Esta análise é feita para todos os meses de colheita dos produtos e para todo depósito já existente, tomando como disponibilidade média: W_{ij}

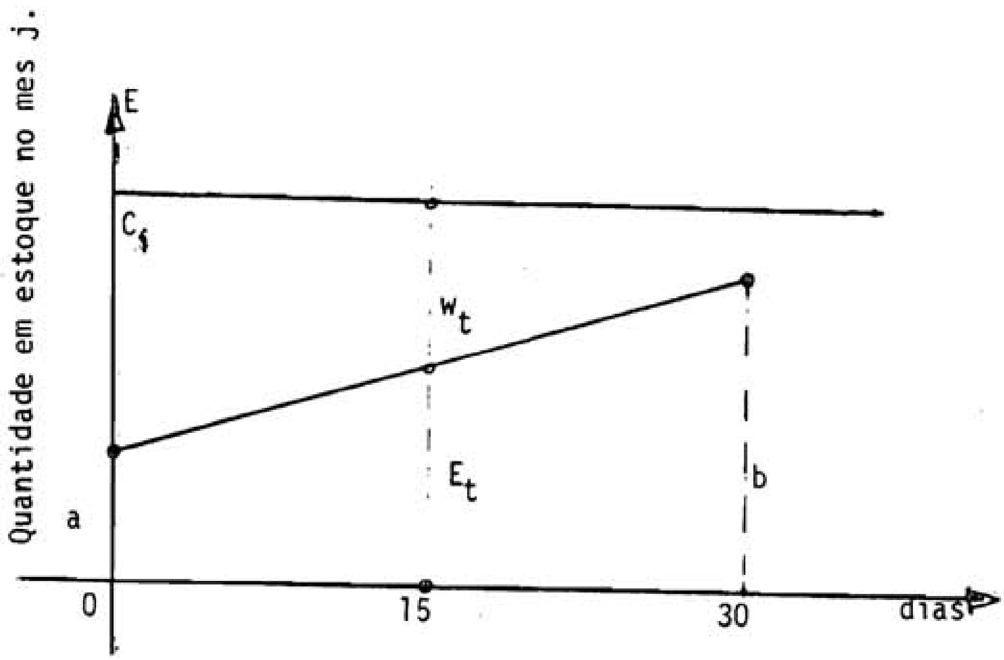
$$W_{ij} = \sum_{1}^{a} \frac{w_t^1}{a}$$

onde: a é o número de meses onde se processa a colheita e o índice i refere-se ao depósito e o índice j ao produto considerado.



QUANTIDADE ESTOCADA

FIGURA 3.4



QUANTIDADE ESTOCADA EM UM MES

FIGURA 3.5

Disponibilidade média no período t $\Rightarrow w_t = C_i - E_t$

3.6 - DETERMINAÇÃO DOS CUSTOS OPERACIONAIS

Os custos operacionais médios mensais para o manuseio de uma quantidade q_{ij} de um produto j, em um depósito i, cuja capacidade disponível para o produto j é K_{ij}, são dados por :

$$t_{ij} = \alpha_j K_{ij} + \gamma_j + \left(\frac{\beta_j}{K_{ij}} + \delta_j\right) q_{ij}$$

onde α_j, γ_j, β_j, δ_j são parâmetros associados com o processamento do produto j; com dimensões: α_j e δ_j em cruzeiros por unidade de volume e γ_j e β_j em cruzeiros

Esta estrutura de custos expressa o fato de que em qualquer depósito existem duas espécies de custos: os fixos e os variáveis. Os custos fixos no modelo são considerados proporcionais à capacidade do depósito e são representados por:

custos fixos $= \alpha_j K_{ij} + \gamma_j$

Os custos unitários variáveis são representados por:

$$\text{custos unitários variáveis} = \frac{\beta_j}{K_{ij}} + \delta_j$$

e exibem as economias de escala inerentes a qualquer processo. Quanto maior o depósito, menores serão os custos variáveis unitários. Esta representação também reflete o fenômeno de que a diminuição destes custos torna-se menor a medida que a capacidade aumenta.

Os parâmetros $\alpha_j, \gamma_j, \beta_j$ e δ_j são determinados através de uma regressão múltipla |15| feita com dados obtidos nos depósitos existentes.

No nosso problema uma das incógnitas é a capacidade dos depósitos a construir.Isto implica que não conhecemos a priori os custos operacionais destes depósitos.

A capacidade dos depósitos será uma função das disponibilidades médias de estocagem.

$$K_{ij} = f(W_{ij})$$

Consideramos como aplicação no modelo as disponibilidades médias nos depósitos a construir para efeito do cálculo dos custos operacionais iguais e tendo por valor:

$$W_{ij} = \frac{\sum_i P_{ij} - \sum_i r_{ij}}{p}$$

p = número de armazéns construidos e a construir.

P_{ij} = produção estocável do produto j no centro produtor i

r_{ij} = disponibilidade média de armagenagem para o produto j no depósito i, já construido.

ou seja estabelecemos a disponibilidade média de cada depósito para um dado produto como a média da diferença entre a demanda e a oferta de armazenagem para aquele produto.

No cálculo de p levamos em conta os armazéns construidos e a construir porque a hipótese de ampliação dos armazéns existentes foi considerada.

Trabalharemos portanto ao longo do processo com os custos operacionais diferentes dos custos reais. Após determinada a solução ótima com aqueles custos, teremos os valores de W_{ij} reais, possibilitando-nos determinar os K_{ij} e os custos operacionais. De posse dos novos custos efetuamos uma análise pós-ótima afim de estudarmos as modificações introduzidas por estes, na solução ótima.

4.0 - MODELO MATEMÁTICO

4.1 - INTRODUÇÃO

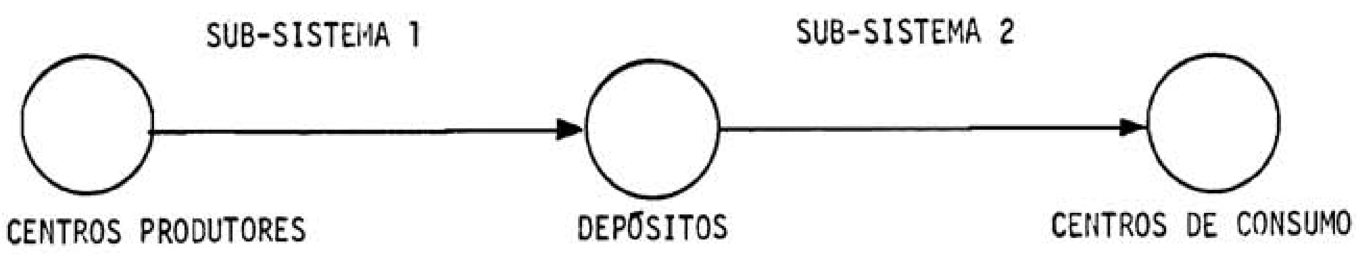
Como vimos nos ítens 3.2 a 3.6,consideraremos como entradas para o modelo, a oferta, a demanda e a disponibilidade de estocagem com os seus valores médios,e os custos operacionais e de transporte.

Observando a representação esquemática do sistema (figura 4.1) vemos que podemos considerá-lo como formado por dois sub-sistemas:

sub-sistema 1: centros produtores - armazéns

sub-sistema 2: armazéns - centros consumidores

Os dois sub-sistemas são interligados pelo conjunto dos depósitos. As disponibilidades médias de estocagem para os novos depósitos são função de sua localização, implicando portanto que na representação matemática a ligação entre os dois sub-sistemas será variável.



REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO SISTEMA

FIGURA 4.1

4.2 - MODELO MATEMÁTICO

Devemos estabelecer um modelo que nos permita determinar:

a). Nº de depósitos a construir

b). Disponibilidades médias dos depósitos a construir

c). Incremento nas disponibilidades médias dos depósitos existentes

d). Locais para construção dos novos depósitos.

e). quantidades transportadas centro produtor-depósito , depósito-centro de consumo concentrado.

As disponibilidades médias dos depósitos a construir bem como o incremento nas disponiblidades médias dos armazéns existentes serão dados por vetores W_i. O símbolo T colocado em cima e a direita de um vetor indica a transposição do vetor.

$$W_i^T = [W_{i1} \quad W_{i2} \; . \; . \; . \; W_{is}]$$

$$i = 1, 2, \ldots, p \qquad (4.1\text{-}1)$$

onde W_{ih} indica a disponibilidade média no depósito i para o produto h; o nº de produtos a estocar é $\underline{s}$ e o nº total de depósitos é $\underline{p}$. Admitindo que já existam q depósitos, então para i= 1, 2 ..... q:

$$\begin{bmatrix} W_{i1} \\ W_{i2} \\ \vdots \\ W_{is} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{i1} + W'_{i1} \\ r_{i2} + W'_{i2} \\ \vdots \\ r_{is} + W'_{is} \end{bmatrix} \qquad (4.1\text{-}2)$$

onde:

r_{ih}: disponibilidade média para o produto h no depósito i (já construido)

W'_{ih}: incremento de disponibilidade média para o produto h no depósito i.

As quantidades transportadas de cada produto dos centros produtores para os depósitos e destes para os centros de consumo concentrado serão dados pelos vetores X_i e Y_i, respectivamente.

$$X_i^T = |X_{1\ 1i}\ X_{1\ 2i} \cdots X_{1\ pi}\quad X_{2\ 1i} \cdots X_{2\ pi} \cdots\cdots X_{n\ 1i} \cdots X_{n\ pi}|$$

$$i = 1, 2, \ldots, S \qquad (4.1\text{-}3)$$

$$Y_i^T = |Y_{1\ 1i} \cdots Y_{1\ mi}\ Y_{2\ 1i} \cdots Y_{2\ mi} \cdots\cdots Y_{p\ 1i}\quad Y_{p\ mi}|$$

$$i = 1, 2, \ldots, S \qquad (4.1\text{-}4)$$

onde:

n: nº de centros produtores

m: nº de centros de consumo concentrado

$X_{h\ si}$: quantidade transportada do produto i do centro produtor h para o depósito s

$Y_{f\ gi}$: quantidade transportada do produto i do depósito f para o centro de consumo g.

os dados para o problema são:

a). nº de centros produtores (n)

b). nº de centros de consumo concentrado (m)

c). nº de produtos a estocar (s)

d). nº de depósitos existentes (q)

e). produção estocável média de cada produto em cada centro produtor i. $\bar{P}_i$

$$\bar{P}_i^T = \left[\bar{P}_{i1} \quad \bar{P}_{i2} \ \dots \ \bar{P}_{is}\right]$$

$$i = 1, 2, \dots, n \qquad (4.1\text{-}5)$$

onde: $\bar{P}_{ij}$ indica a produção estocável média do produto $\underline{j}$ no centro produtor $\underline{i}$.

f). a demanda média para cada produto em cada centro de consumo concentrado j.

$$D_j^T = \left[D_{j1} \quad D_{j2} \ \dots \ D_{js}\right]$$

$$j = 1, 2, \dots, m \qquad (4.1\text{-}6)$$

g). os custos de transporte dos centros produtores para os depósitos para cada produto k. Para cada produto k representaremos estes custos por um matriz

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{11k} & C_{12k} & \cdots\cdots & C_{1pk} \\ C_{21k} & C_{22k} & \cdots\cdots & C_{2pk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1k} & C_{n2k} & \cdots\cdots & C_{npk} \end{bmatrix} \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots s \qquad (4.1\text{-}7)$$

onde: C_{ijk} indica o custo unitário de transporte do produto k do centro produtor i para o depósito j.

h). Os custos de transporte do depósito aos centros consumidores do produto k.

Representando-os por matrizes temos:

$$d_k = \begin{bmatrix} d_{11k} & d_{12k} & \cdots\cdots & d_{1mk} \\ d_{21k} & d_{22k} & \cdots\cdots & d_{2mk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{pik} & d_{p2k} & \cdots\cdots & d_{pmk} \end{bmatrix} \qquad (4.1\text{-}8)$$

onde: d_{ijk} indica o custo unitário de transporte do produto k do depósito i para o centro de consumo concentrado j.

i). os custos operacionais nos depósitos, que representaremos por uma matriz T,

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots\cdots\cdots & t_{1s} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots\cdots\cdots & t_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{p1} & t_{p2} & \cdots\cdots\cdots & t_{ps} \end{bmatrix} \qquad (4.1\text{-}9)$$

onde: t_{ij} indica o custo operacional unitário no depósito i para o produto j.

j). o conjunto dos locais viáveis,

$$L=\left\{L_1, L_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, L_{p-q}\right\}$$

Nada foi dito anteriormente quanto a determinação dos locais viáveis, cabendo portanto no momento uma explicação sobre esta determinação.

Locais Viáveis:

Entre os municípios do estado podemos determinar, a priori, aqueles que, por suas características geográficas, sócio-econômicas e políticas, apresentam melhores condições para a localização dos depósitos.

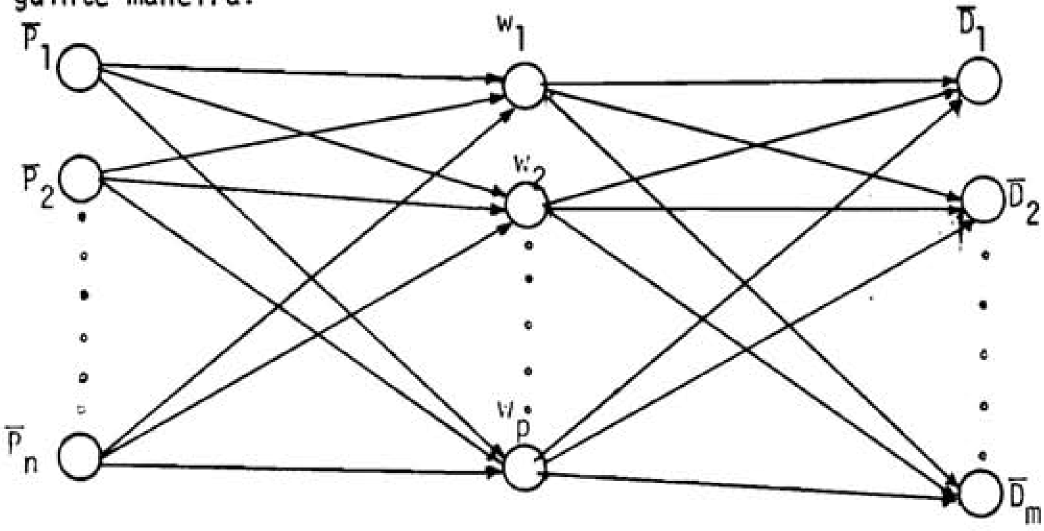
Tais municípios, considerados locais viáveis, deverão atender ao requisito de fácil acesso, ou seja, a rede viária que o serve deverá proporcionar facilidade de transporte dos centros produtores aos depósitos e destes aos centros consumidores.

Nesta determinação serão considerados ainda os seguintes fatores; população, produção agrícola, eletrificação, abastecimento d' água e clima.

Dentre os municípios assim determinados, serão definidos, utilizando-se o modelo matemático aqui apresentado, que leva em conside ração os custos de transporte e de armazenagem, aqueles locais em que se deverá construir os armazéns.

4.3 - FORMULAÇÃO DO MODELO

Podemos esquematizar graficamente o nosso problema da seguinte maneira:



FORMULAÇÃO DO MODELO

FIGURA 4.2

e formulá-lo como:

$$\min \{X_0 = \sum_i \sum_j \sum_k X_{ijk}\, C_{ijk} + \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}\, d_{ijk} + \sum_i \sum_j t_{ij} \sum_k X_{ijk} \}$$

Sujeito a:

$$\sum_j X_{ijk} \leqslant \overline{P}_{ik} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n \quad k = 1, 2, \ldots\ldots s$$

$$\sum_i X_{ijk} \leqslant W_{jk} \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots p \quad k = 1, 2, \ldots\ldots s$$

$$\sum_i Y_{ijk} \geqslant D_{jk} \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots s \quad j = 1, 2, \ldots\ldots m$$

$$\sum_j Y_{ijk} \leqslant W_{ik} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots p \quad k = 1, 2, \ldots\ldots s$$

$$\sum_i W_{ik} \geqslant \sum_h \overline{P}_{hk} \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots s \qquad (4.2\text{-}1)$$

$$X_{ijk} \geqslant 0 \qquad \forall \quad i, j, k$$

$$Y_{ijk} \geqslant 0 \qquad \forall \quad i, j, k$$

Para melhor compreensão da solução encontrada, considera remos inicialmente o caso de apenas um produto.

4.3.1 Modelo considerando-se apenas um produto

Considerando-se um único produto a estocar, a esquematização de 3.6.1, torna-se:

$$\min \quad X_o = \sum_i \sum_j X_{ij} C_{ij} + \sum_i \sum_j Y_{ij} d_{ij} + \sum_i t_i \sum_j X_{ij}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
&\sum_j X_{ij} \leq \bar{P}_i \\
&\sum_i X_{ij} \leq W_j \\
&\sum_i Y_{ij} \geq D_j \qquad\qquad (4.3\text{-}1) \\
&\sum_j Y_{ij} \leq W_i \\
&\sum_i w_i \geq \sum_j \bar{P}_j \\
&X_{ij} \geq 0 \;,\; Y_{ij} \geq 0 \qquad \forall \; i, j
\end{aligned}$$

Por ser desconhecida, a priori, a localização dos novos depósitos, poder-se-ia cair em um problema com função objetivo não linear. Para efeitos computacionais isto traz grandes inconvenientes desde que programas para programação não linear não são ainda facilmente disponíveis nas bibliotecas dos computadores. Este inconveniente é evitado, com a interpretação econômica dada ao problema dual, que permitiu a decomposição do problema e sua resolução através da programação linear. No tratamento que nós demos ao problema consideramos como ponto de partida que as disponibilidades médias de estocagem eram fixas. Resolveríamos este problema e procuraríamos em seguida novos valores para as disponibilidades médias de armazenagem que nos dessem uma melhor solução; com esta solução resolveríamos um novo problema, e assim procederíamos até atingirmos a solução ótima.

Para compreensão da solução encontrada torna-se necessário uma interpretação do problema dual associado:

4.3.2 - Problema Dual

Considerando-se fixas as disponbilidades médias de armazenagem passamos a ter dois problemas independentes, um para cada sub-sistema.

O sub-sistema 1 diz respeito aos produtores, ou seja, considera o problema de transportar o produto dos centro produtores aos depósitos.

O sub-sistema 2 refere-se aos revendedores, ou seja, pessoas ou firmas que compram os produtos nos depósitos para vender nos centros de consumo.

Os problemas primários com os respectivos problemas duais associados relativos aos sub-sistemas são:

<u>Sub-Sistema 1</u>

$$\min \{X_0^{(1)} = \sum_i \sum_j X_{ij}\, C_{ij} + \sum_i t_i \sum_j X_{ij}\}$$

Sujeito a:

$$\sum_j X_{ij} \leq \bar{P}_i$$

$$\sum_i X_{ij} \leq W_j \qquad (4.3.2\text{-}1)$$

e o dual associado a este problema

$$\min \{\sum_i u_i \bar{P}_i + \sum_j v_j W_j\} \qquad (4.3.2\text{-}2)$$

Sujeito a:

$$u_i + v_j \geq C'_{ij} \quad \text{onde} \quad C'_{ij} = C_{ij} + t_i$$

De acordo com o que é visto no apêndice V, página 123 temos que na solução ótima:

$$X_0^{(1)} = \sum_i \sum_j C_{ij}\, X_{ij} + \sum_i t_i \sum_j X_{ij} = \sum_i u_i \bar{P}_i + \sum_j v_j W_j \qquad (4.3.2\text{-}3)$$

Sabemos que:

$\dfrac{\partial X_0^{(1)}}{\partial P_i}$ = acréscimo no custo do transporte ao se aumentar a produção do centro i de uma unidade

$\dfrac{\partial X_0^{(1)}}{\partial W_j}$ = acréscimo no custo do transporte ao se aumentar a disponibilidade média do depósito j de uma unidade

De acordo com (4.3.2-3), temos:

$$\frac{\partial X_0^{(1)}}{\partial P_i} = u_i$$

$$\frac{\partial X_0^{(1)}}{\partial W_j} = v_j$$

v_j tem sinal contrário ao de μ_i desde que aumentando a disponibilidade média para armazenagem teremos realmente um decréscimo no custo de transporte.

Sabemos que o problema primário associado ao sub-sistema 1 tem solução ótima quando:

$$C'_{ij} - (u_i + v_j) \geqslant 0 \Rightarrow u_i + v_j \leqslant C'_{ij}$$

isto nos leva a dar uma interpretação econômica ao problema.

É econômico para o produtor i transportar para o depósito j até ao ponto em que a próxima unidade a ser transportada tenha o custo de transporte superior a soma entre o acréscimo no custo ao se aumentar a produção de uma unidade e o decréscimo ao se aumentar a disponibilidade média de uma unidade.

Sub-Sistema 2

$$\min \{X_0^{(2)} = \sum_j \sum_k Y_{jk} \quad d_{jk}\}$$

Sujeito a:

$$\sum_k Y_{jk} \leqslant W_j \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$

$$\sum_j Y_{jk} \geqslant D_k \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$Y_{jk} \geq 0$$

o dual associado a este problema é

$$\max \ \{\sum_k v'_k \ D_k - \sum \mu'_j W_j \ \}$$

Sujeito a:

$$v'_k - u'_j \leq d_{ij}$$

Analogamente ao item anterior:

$\dfrac{\partial X_0^{(2)}}{\partial W_j} = u'_j$ acréscimo no custo do transporte ao se adquirir disponibilidade para mais uma unidade no depósito j

$\dfrac{\partial X_0^{(2)}}{\partial D_k} = -v'_k$ acréscimo no custo de transporte ao se entregar mais uma unidade no centro de consumo k

Desde que $\dfrac{\partial X_0^{(2)}}{\partial D_k}$ tem sinal negativo podemos considerá-lo como um lucro em lugar de um custo.

Teremos uma solução ótima para o primário do sub-sistema 2 quando

$$d_{jk} - (v'_k - u'_j) \geq 0 \Rightarrow (v'_k - u'_j) \leq d_{jk}$$

ou seja o comprador efetua a compra de mais uma unidade até o ponto em que o custo de transporte para esta unidade seja superior a diferença entre acréscimo no lucro no destino e o acréscimo de custo na origem

Considerando-se esta interpretação podemos agora dar um enfoque global ao problema. O sistema em consideração tem que atender tanto aos produtores (sub-sistema 1) como aos compradores (sub-sistema 2) e minimizar os custos totais de operação do sistema. Sabemos ainda que:

$$X_0 = \sum_i \sum_j C_{ij}\, X_{ij} + \sum_j \sum_k Y_{jk}\, d_{jk} + \sum_i t_i \sum_j X_{ij} = \sum_i u_i \bar{P}_i + \sum_j v_j W_j -$$

$$- \sum_j u_j' W_j + \sum v_k' D_k$$

isto na solução ótima.

Podemos então dividir o nosso problema em dois sub-problemas. No 1º consideraremos fixas as disponibilidades médias de armazenagem e procuraremos determinar os valores transportados que otimizam o sistema. No segundo procuraremos,de posse de u_i, v_j, u_j' e v_k', determinar novos valores para as disponibilidades de modo a melhorar a solução anteriormente encontrada.

O problema de:

$$\min \{X_0 = \sum_i \sum_j X_{ij}\, C_{ij} + \sum_j \sum_k Y_{jk}\, d_{jk} + \sum_i t_i \sum_j X_{ij}\}$$

Sujeito a:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j X_{ij} \leqslant \bar{P}_i \\ \sum_i X_{ij} \leqslant W_j \\ \sum_k Y_{jk} \leqslant W_j \\ \sum_j Y_{jk} \geqslant D_k \\ \sum_j W_j \geqslant \sum_i \bar{P}_i \end{array}\right. \qquad X_{ij} \geqslant 0,\ Y_{jk} \geqslant 0,\ W_i \geqslant 0 \quad \forall\ i, j, k \qquad (4.3.2\text{-}4)$$

passa a ter a seguinte formulação considerando-se os dois sub-problemas

$$\min_{X,Y} \{X_0 = \sum_i \sum_j X_{ij} C_{ij} + \sum_j \sum_k Y_{jk} d_{jk} + \sum_i t_i \sum_j X_{ij} \}$$

Sujeito a:

$$\sum_j X_{ij} \leq \bar{P}_i$$

$$\sum_i X_{ij} \leq W_j$$

$$\sum_k Y_{jk} \leq W_j \qquad (4.3.2\text{-}5)$$

$$\sum_j Y_{jk} \geq D_k$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad Y_{jk} \geq 0 \quad \forall\ i, j$$

que chamaremos de problema 1. O problema 2 é:

$$\min_{W} \{ Z_0 = \sum u_i \bar{P}_i + \sum v_j W_j + \sum v_k' D_k - \sum u_j' W_j \}$$

Sujeito a:

$$\sum_j W_j \geq \sum_i \bar{P}_i \qquad (4.3.2\text{-}6)$$

e ainda à condição de tornar viável o problema 1.

Obtemos desta maneira um processo que nos leva a determinar a solução do problema utilizando apenas programação linear[1], e seguindo u-

---

1 Problema análogo ao apresentado encontra-se no livro "Programação Linear" |13| de Girão e Ellenrieder com o nome de "Prob. de Progr.Linear relacionado"

ma rotina que se adapta naturalmente à estrutura do problema.

4.3.3 - Modelo

Adicionando as variáveis de folga necessárias (Apêndice V, página 121), podemos representar (3.6.2.1-5) em forma matricial como:

$$\min \; X_0$$

Sujeito a:

$$\begin{array}{ll} A_1X = b_1 & X \geq 0 \\ A_2Y = b_2 & Y \geq 0 \\ Bb_1 = e & b_1 \geq 0 \end{array} \qquad (4.3.3\text{-}1)$$

onde:

X : é um vetor que representa as quantidades transportadas dos centros produtores para os depósitos

$$X^T = |X_{11}\; X_{12} \;\ldots\; X_{1p}\; X_{21} \;\ldots\; X_{2p} \;\ldots\; X_{n1} \;\ldots\; X_{np}|$$

Y : vetor que representa as quantidades transportadas dos depósitos para os centros de consumo concentrado

$$Y^T = |Y_{11}\; Y_{12} \ldots\; Y_{1m}\; Y_{21}\; Y_{22} \ldots Y_{2m} \;\ldots\; Y_{p1}\; Y_{p2} \ldots\; Y_{pm}|$$

b_1 : vetor cujos elementos são as produções e as disponibilidades médias de estocagem

$b_1^T = |\overline{P}, W| = [P_1\ P_2 \dots P_n\ W_1\ W_2 \dots W_p]$

b_2 : vetor cujos elementos são as disponibilidades médias de estocagem e as demandas nos centros de consumo

A_1, A_2 e B : matrizes dos coeficientes tecnológicos relativos a X,Y e b_1.

e : vetor cujos elementos são os termos independentes das restrições que envolvem o vetor b_1.

Fazendo:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad X^* = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad b^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$e^* = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B^* = [\,B,\ 0\,]$$

Podemos representar de forma condensada (4.3.2-4),(4.3.2--5) e (4.3.2-6) como:

Problema Original[2]

$\min X_0$

Sujeito a:

$$A^* X^* = b^*$$
$$B^* b^* = e^* \qquad (4.3.3\text{-}2)$$
$$X^* \geqslant 0$$

2. As variáveis de folga necessárias foram adicionadas de modo a tornar as desigualdades em igualdades.

Problema decomposto

Problema 1:

$$\min X_0$$

Sujeito a:

$$A^* X^* = b^*$$
$$X^* \geq 0 \qquad (4.3.3\text{-}3)$$

Problema 2:

$$\min Z_0$$

Sujeito a:

$$B^* b^* = e^*$$
$$(A_{11}^*)^{-1} b^* > 0 \qquad (4.3.3\text{-}4)$$
$$b^* \geqslant 0$$

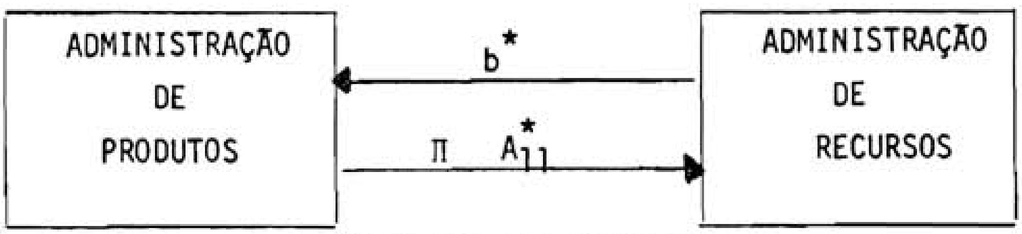
onde A_{11}^* é a matriz dos coeficientes tecnológicos das variáveis básicas na solução ótima e a restrição $(A_{11}^*)^{-1} b^* \geqslant 0$ impõe que a solução encontrada para o problema 2 não torne o problema 1 inviável. Para uma melhor compreensão da solução encontrada apresentamos em seguida uma analogia com um sistema administrativo.

4.3.4 - Analogia com sistemas administrativos

Consideremos que o nosso sistema é composto por uma administração de produtos e uma administração de recursos. A administração de produtos conhece a função objetivo e as restrições impostas ao vetor X^* (quantidades transportadas centros produtores-depósitos, depósitos centros de consumo) para um particular vetor b^* (produção média mensal, disponibilidades médias de estocagem, demanda nos centros de consumo). A administração de recursos conhece as restrições impostas ao vetor b^*.

De posse de um particular vetor b^* a administração de produtos determina o vetor X^* que otimiza o sistema. Com a solução ótima ele obtém também o vetor de preços Π[3] e a matriz A_{11}^*. Estes elementos vão permitir a administração de recursos procurar determinar um novo valor para b^* de modo a obter uma solução melhor que a anterior. Envia este novo valor de b^* à administração de produtos que efetua nova otimização determinando novos valores para Π e A_{11}^*, proseguindo este processo até obtermos a solução ótima.

O fluxo de informações estabelecido entre as administração é o da figura 4.3.

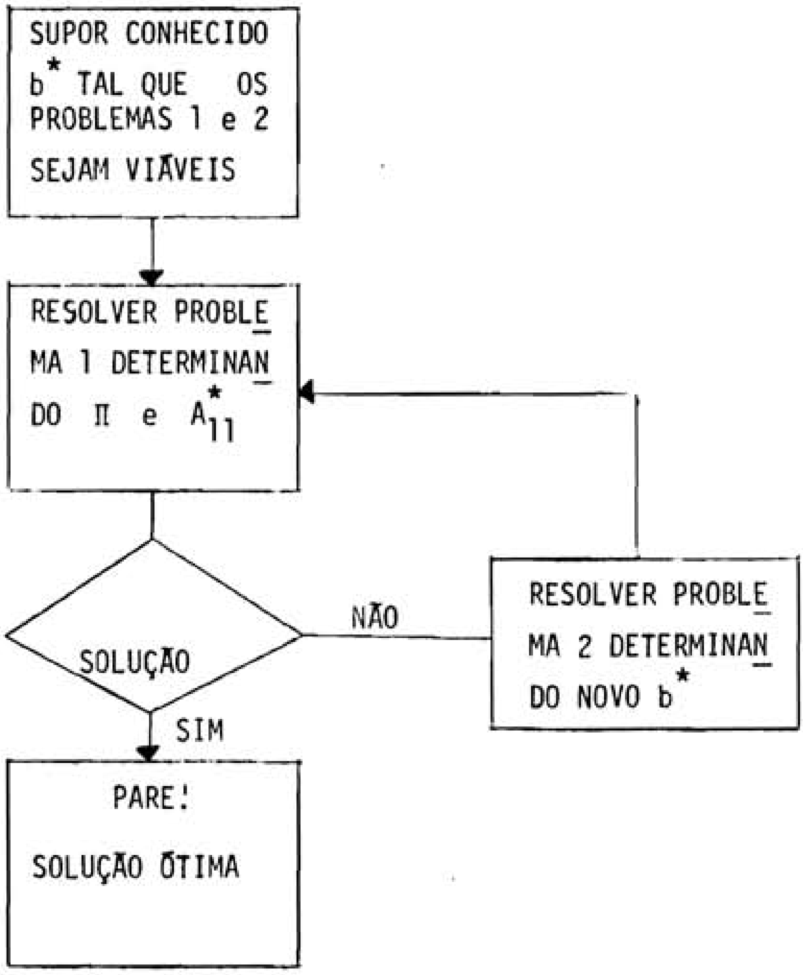


FLUXO DE INFORMAÇÕES
FIGURA 4.3

3. O vetor de multiplicadores (preços) Π com valor $\Pi = -u$ onde:
$u^T = | u_i \; v_j \; u'_j \; v'_k |$

4.3.5 - Algorítmo

1. Supor conhecido b* inicial e tal que $(A_{11}^*)^{-1} b^* \geq 0$ para alguma sub-matriz quadrada de A*, isto é, tal que exista solução viável para o problema 1 e para o problema 2.
2. Resolver o problema 1 em que o vetor b^* é a mais recente solução do problema 2 ao alcance. Como resultado da otimização, são determinados: vetor Π e a matriz A_{11}^*.
3. Resolver o problema 2 usando Π e A_{11}^* determinados em 2. O resultado será um vetor b^*.
4. Repetir o ciclo (2 → 3 → 2) até repetir-se a solução em 2.



ALGORÍTMO

FIGURA 4.4

4.4.0 - Modelo para s produtos

O modelo levando-se em consideração a existência de s produtos a estocar é apenas uma ampliação do modelo para um único produto.

De acordo com a notação adotada em (3.6.2-2) podemos representar o modelo formulado em (3.6.1-1) como:

$$\min \; X_0$$

Sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\, X_1 = b_{11} \\ A_{21}\, Y_1 = b_{21} \end{array}\right\} \quad \text{Restrições relativas ao produto 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{12}\, X_2 = B_{12} \\ A_{22}\, Y_2 = b_{22} \end{array}\right\} \quad \text{Restrições relativas ao produto 2}$$

$$\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{1s}\, X_s = b_{1s} \\ A_{2s}\, Y_s = b_{2s} \end{array}\right\} \quad \text{Restrições relativas ao produto s}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_{11}\, b_{11} = e_{11} \\ B_{12}\, b_{12} = e_{12} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{1s}\, b_{1s} = e_{1s} \end{array}\right\} \quad \text{Restrições relativas aos termos independentes}$$

$$X_i \geq 0, \quad Y_i \geq 0 \quad \forall\, i$$

Fazendo:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{2s} \end{bmatrix}$$

$$(X^*)^T = | \; X_1 \quad Y_1 \quad X_2 \quad Y_2 \; \ldots\ldots\ldots \; X_s \quad Y_s \; |$$

$$(b^*)^T = | \; b_{11} \; b_{21} \; b_{12} \; b_{22} \ldots\ldots\ldots \; b_{1s} \; b_{2s} |$$

$$B^* = | \; B_{11} \; 0 \quad B_{12} \; 0 \; \ldots\ldots\ldots \; B_{1s} \; 0 \; |$$

$$(e^*)^T = | \; e_{11} \; 0 \quad e_{12} \; 0 \; \ldots\ldots\ldots \; e_{1s} \; 0 \; |$$

onde os elementos de b^*, B^* e e^* tem o mesmo significado dos apresentados em (3.6.2.2). A única diferença é a introdução de mais um índice indicando o produto.

Podemos então enunciá-lo como:

$$\min X_0$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} A^* \; X^* &= b^* \\ B^* \; b^* &= e^* \qquad\qquad (4.4.0\text{-}1) \\ X^* &\geq 0 \end{aligned}$$

que é idêntica a apresentada em (4.3.3-2)

A diferença apresentada neste caso é que, quando fixado o valor de b^*, o problema 1 será composto de 2 sub-problemas independentes (2 para cada produto). O procedimento para obter a solução ótima é o mesmo descrito em (4.3.5)

4.5.0 - Resultados

A utilização do modelo apresentado dará na solução ótima um vetor X^* e um vetor b^*. Como apresentado anteriormente supomos inicialmente a construção de p-q depósitos (número de locais viáveis) além da ampliação dos q existentes. Nas sucessivas resoluções do problema 2 alguns dos valores que representam as disponibilidades médias para armazenagem podem se anular. Não se deve portanto construir depósitos onde isto ocorre. Supondo que seja z o número de valores tornados nulos na solução ótima, então o número de depósitos a construir será:

$$n^{\circ} \text{ depósitos a construir} = p - q - z$$

Concluindo, teremos com a solução ótima

- nº de depósitos a construir
- nº de depósitos existentes que necessitam de ampliação
- disponibilidades médias dos depósitos a constuir
- acréscimo das disponibilidades médias nos depósitos existentes
- locais para construção dos novos armazéns

De acordo com as considerações feitas no ítem 3.6 os custos operacionais para operar uma quantidade q_{ij} são:

$$t_{ij} = \gamma\, \alpha_j\, K_{ij} + \gamma_j + (\frac{\beta_j}{K_{ij}}\, \delta_j)\, q_{ij}$$

Para proceder aos cálculos atribuimos valores a priori para K_{ij}. Ao determinarmos a solução ótima devemos efetuar os cálculos dos custos operacionais reais e proceder a uma análise pós-ótima para verificar as consequências das modificações introduzidas. O procedimento para se efetuar uma análise pós-ótima é apresentado no apêndice III.

4.6.0 - Modelo com restrições envolvendo simultâneamente todas as variáveis do problema 1

No modelo apresentado anteriormente considerou-se que não existiam restrições envolvendo todas as variáveis do problema simultaneamente. Quando isto ocorre são necessárias algumas modificações no modelo.

4.6.1 - Modelo considerando apenas um produto

Para efeito de simplicidade, consideremos que existe um único produto a estocar. Adotando a representação feita em 3.6.2.2 podemos enunciar o problema como:

$$\min X_0$$

Sujeito a:

$$\bar{A}_1 X + \bar{A}_2 Y = \bar{b} \qquad (4.6.1\text{-}1)$$

$$A_1 X = b_1 \qquad (4.6.1\text{-}2)$$

$$A_2 Y = b_2 \qquad (4.6.1\text{-}3)$$

$$B b_1 = e \qquad (4.6.1\text{-}4)$$

$$X \geq 0 \quad Y \geq 0 \qquad (4.6.1\text{-}5)$$

O conjunto de restrições representados em (3.6.4-1) são as que envolvem simultâneamente todas as variáveis do problema 1.

Fazendo:

$$A^* = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad (X^*)^T = [X \quad Y]$$

$$(b^*)^T = [\bar{b} \quad b_1 \quad b_2]$$

$$(e^*)^T = [\,0 \quad e \quad 0\,] \qquad B^* = [\,0 \quad b \quad 0\,]$$

podemos representar (4.6.1-1) - (4.6.1-5) como:

$$\min X_0$$

Sujeito a:

$$A^* X^* = b^*$$

$$B^* b^* = e^*$$

$$X^* \geqslant 0$$

que como vemos é idêntica a (4.3.3-2) e (4.4.0-1).

A diferença fundamental deste modelo para o anterior encontra-se no problema 1. No problema anterior o problema 1 consistia de dois problemas de transporte independentes. Neste caso tal não acontece. O problema 1 agora é:

$\min X_0$

Sujeito a:

$$\bar{A}_1 X + \bar{A}_2 Y = b \qquad (4.6.1\text{-}6)$$

$$A_1 X + \qquad = b_1 \qquad (4.6.1\text{-}7)$$

$$A_2 Y = b_2 \qquad (4.6.1\text{-}8)$$

$$X \geq 0 \quad Y \geq 0 \qquad (4.6.1\text{-}9)$$

Para problemas com esta estrutura, existe o algorítmo da decomposição | 8|, que permite resolver o problema decompondo-o em subproblemas.

O algorítmo sugerido para resolução deste problema, consta em linhas gerais do seguinte:

As soluções $X \geq 0$ ($Y \geq 0$) satisfazendo $A_1X = b_1$($A_2Y = b_2$) definem um conjunto convexo, onde os pontos extremos X_1, X_2,... X_k (Y_1, Y_2,... Y_L) são as soluções básicas. Devemos encontrar uma solução que, além de atender a estes dois conjuntos de restrições, também atenda ao conjunto (3.6.4-6). Tal solução pode ser colocada como combinação linear dos pontos extremos de (4.6.1-7) e (4.6.1-8), ou seja:

$$X = \sum_{1}^{K} \lambda_i X_i \qquad \sum_{j}^{K} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall\ i$$

$$Y = \sum_{j}^{L} \mu_j Y_j \qquad \sum_{j}^{L} \mu_j = 1 \quad \mu_j \geq 0 \quad \forall\ j$$

Podemos então enunciar o problema assim:

$$\min X_0$$

Sujeito a:

$$\sum_1^K \lambda_i(\bar{A}_1 X_i) + \sum_1^L \mu_j(\bar{A}_2\, Y_j) = \bar{b}$$

$$\sum_1^K \lambda_i = 1$$

$$\sum_1^L \mu_j = 1$$

$$\lambda_i \geqslant 0 \quad \mu_j \geqslant 0 \quad =$$

que é o programa mestre e ao qual nos referimos daqui por diante como o $PPLD_1$.

Resolvendo este problema, determinamos λ_i e μ_j e o vetor Π^* de multiplicadores

$$(\Pi^*)^T = (\Pi_0^* - s_0 - t_0)$$

Devemos em seguida procurar uma nova coluna que, se colocada na base, melhore a solução encontrada. Devemos entrar na base com aquela coluna que tenha menor custo relativo (negativo). Devemos portanto determinar:

$$\min\ (\Pi_0^*\ \bar{A}_1)\ X_i = \min\ \gamma_1\ X_i$$

$$\min\ (\Pi_0^*\ \bar{A}_2)\ {}_j = \min\ \gamma_2\ Y_j$$

sujeito as restrições (4.6.1-7) e (4.6.1-8) respectivamente.

Determinamos entre soluções X_* e Y_* para

$$\min \gamma_i X_i$$

Sujeito a:

$$A_1 X = b_1$$

$$X \geq 0$$

que passaremos a chamar de PPLD2-a

e

$$\min \gamma_2 Y_j$$

Sujeito a:

$$A_2 Y = b_2$$

$$Y \geq 0$$

que será chamado de PPLD2-b

Se $\gamma_1 X_* - s_0 < 0$ a introdução desta na base irá melhorar a função objetivo. O mesmo podemos dizer para

$$\gamma_2 Y_* - t^o < 0$$

Se ambos forem não negativos estaremos na solução ótima. Caso contrário devemos entrar na base com a coluna mais negativa e resolver novamente o PPLD1, definindo novos multiplicadores, efetuando novamente o PPLD2-a e o PPLD2-b até atingirmos a solução ótima. O algoritmo para solução é o seguinte:

1 - Fixar um valor para b^* , tal que $(A_{11}^*)^{-1}$ $b^* \geqslant 0$ para alguma sub-matriz quadrada de A^* tal que exista solução viável para os problemas 1 e 2.

2 - 2.1 - Determinar solução básica inicial para o PPLD2-a e PPLD2-b

2.2 - Resolver o PPLD1, determinando λ, μ e Π^*

2.3 - Resolver o PPLD2-a e o PPLD2-b

2.4 - Testar otimalidade. É ótimo o problema 1?

Sim: ir para 3.

Não: voltar a 2.2 entrando na base com a coluna que tenha o custo relativo mais negativo

3 - Resolver o problema 2, determinando um novo b^* e entrar com este valor em 2

4 - Repetir o ciclo (2.0 → 3.0 → 2.0) até repetir-se a solução em 2.0.

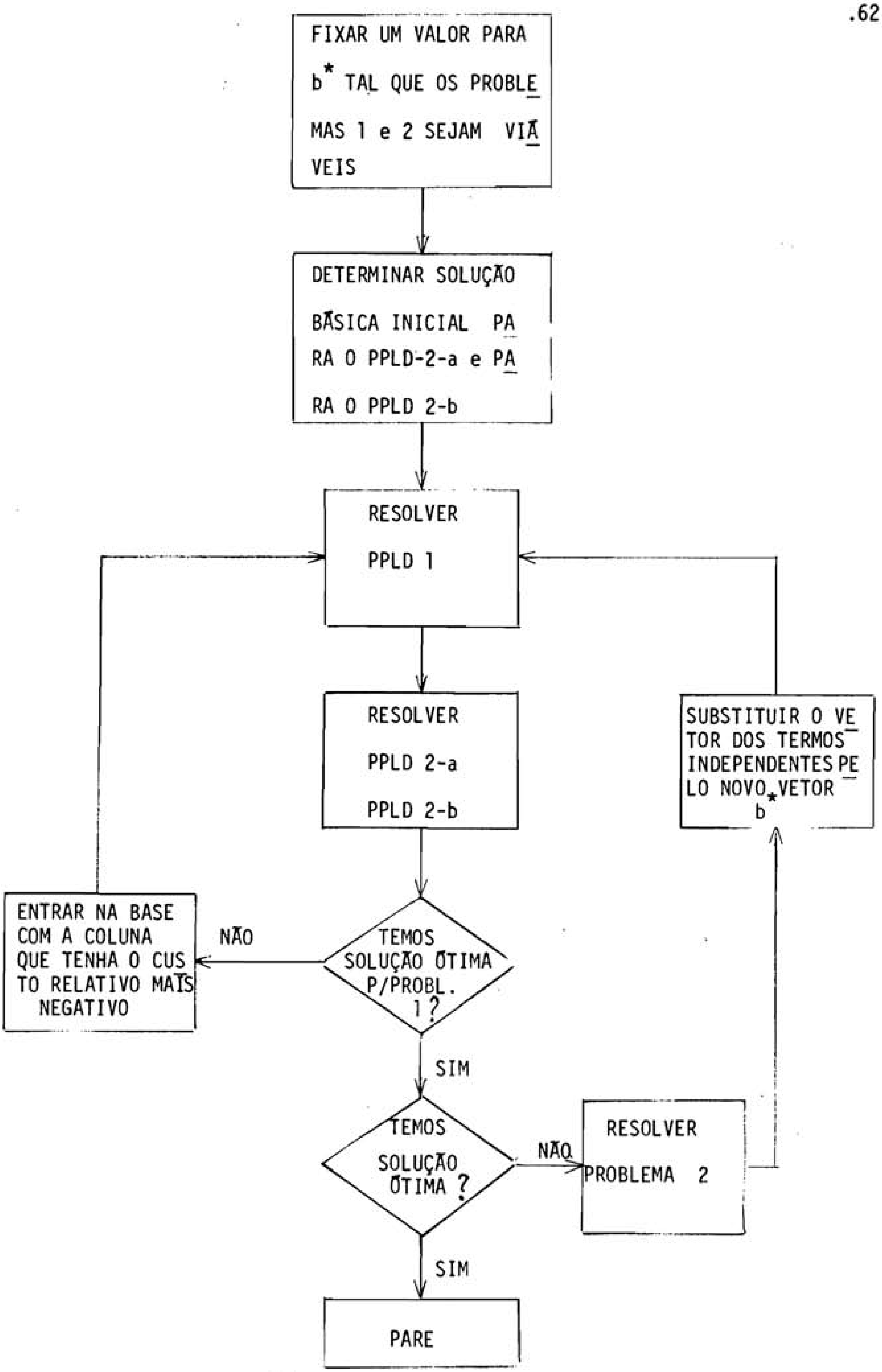


DIAGRAMA DE BLOCOS

FIGURA 4.5

4.6.2 - Modelo para o caso de s produtos

Para o caso de s produtos a representação seria:

$$
\begin{array}{lllll}
\bar{A}_{11} X_1 + \bar{A}_{21} Y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \bar{A}_{1s} X_s + \bar{A}_{2s} Y_s & = \bar{b} \\
A_{11} X_1 & = b_{11} \\
\quad A_{21} Y_1 & = b_{21} \\
\quad\quad \ddots & \\
\quad\quad\quad A_{1s} X_s & = b_{1s} \\
\quad\quad\quad\quad A_{2s} Y_s & = b_{2s} \\
\quad\quad\quad\quad B_{11} b_{11} & = e_{11} \\
\quad\quad\quad\quad B_{12} b_{12} & = e_{12} \\
\quad\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\quad\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\quad\quad\quad\quad B_{1s} b_{1s} & = e_{11}
\end{array}
$$

$X_i \geq 0 \quad Y_i \geq 0 \quad \forall \ i$

Fazendo:

$$A^{*} = \begin{vmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{21} & \cdots\cdots & \bar{A}_{2s} \\ A_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & A_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & A_{2s} \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad (b^{*})^{T} = [\bar{b}\; b_{11}\; b_{21}\; b_{12}\; b_{22} \cdots b_{1s}\; b_{2s}]$$

$$(X^{*})^{T} = [X_1 \quad Y_1 \quad X_2 \quad Y_2 \cdots\cdots X_s \; Y_s \,]$$

$$B^{*} = [B_{11} \; 0 \quad B_{12} \; 0 \cdots\cdots B_{1s} 0 \,]$$

$$(e^{*})^{T} = [e_{11} \; 0 \quad e_{12} \; 0 \cdots\cdots e_{1s} 0 \,]$$

e obtemos mais uma vez:

$$\min X_0$$

Sujeito a:

$$A^{*} \; X^{*} = b^{*}$$

$$B^{*} \; b^{*} = e^{*}$$

$$X^{*} \geqslant 0$$

A diferença neste caso é que o problema 1 (decomposição) terá 2s estágios. O algorítmo para solução é o mesmo já apresentado levando-se em conta o fato citado anteriormente.

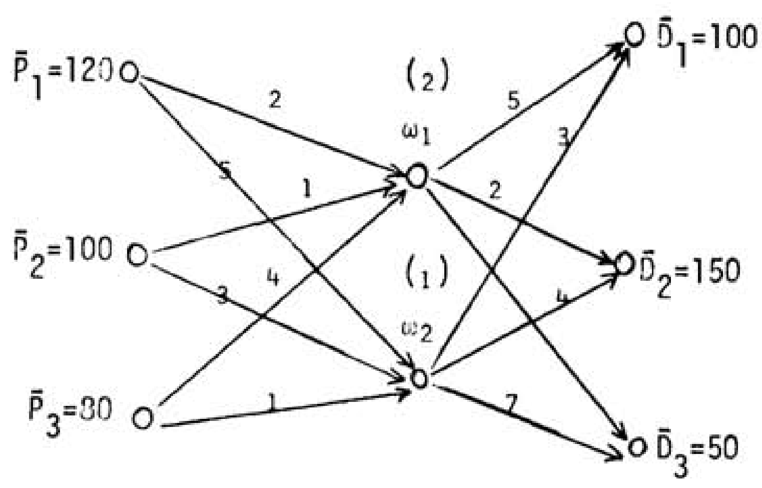
5.0 - EXEMPLO

Consideremos para exemplificar um sistema com 3 centros produtores, 3 centros consumidores e um único produto a estocar. Desejamos localizar depósitos de moso a minimizar o custo total de operação do sistema. Existem 2 locais viáveis . Consideremos que a demanda média total nos centros de consumo é igual a oferta média total nos centros produtores. Isto não acarreta nenhuma perda de generalidade visto que sempre poderemos considerar um centro de consumo ficticio de modo que aquela igualdade seja obtida.

Sejam dados:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix} \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 50 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\alpha = \frac{1}{3}$, $\gamma = 10$, $\beta = 1{,}5$ e $\delta = 0{,}99$



ESQUEMATIZAÇÃO DO EXEMPLO

FIGURA 5.1

Fazendo-se $K_1 = K_2 = 150$ teremos

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{3} \times 150 + 10 + \left(\frac{1{,}5}{150} + 0{,}99\right) X_i$$

$$k_1 = k_2 = 60 + X_i$$

O nosso problema então é:

$$\min X_0 = 2X_{11} + 5X_{12} + 3X_{22} + 4X_{31} + X_{32} + 5Y_{11} + 2Y_{12} + Y_{13} +$$

$$+ 3Y_{21} + 4Y_{22} + 7Y_{23} + X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22} \pm X_{31} + X_{32} + 60$$

ou:

$$\min X_0 = 3X_{11} + 6X_{12} + 2X_{21} + 4X_{22} + 5X_{31} + 2X_{32} + 5Y_{11} + 2Y_{12} +$$

$$+ Y_{13} + 3Y_{12} + 4Y_{22} + 7Y_{23} + 60$$

Sujeito a:

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{12} &= 120 \\ X_{21} + X_{22} &= 100 \\ X_{31} + X_{32} &= 80 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} &= w_1 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= w_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Restrições do sub-sistema 1}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_{11} + Y_{21} &= 100 \\ Y_{12} + Y_{22} &= 150 \\ Y_{13} + Y_{23} &= 50 \\ Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} &= w_1 \\ Y_{21} + Y_{22} + Y_{23} &= w_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Restrições do sub-sistema 2}$$

$$w_1 + w_2 = 300$$

Iteração 1:

1) Fixemos inicialmente:

$W_1 = 150$

$W_2 = 150$

2) Resolução Sub-Sistema 1

50+θ 3	70-θ 6	120 0
100-θ 2	θ -1 4	100 1
 5	80 2	80 4
150 -4	150 -6	

⟶

120 3	 6	120 -1
30 2	70 4	100 0
 5	80 2	80 2
150 -2	150 -4	

← solução ótima

$\pi^1 = [-1 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \quad -4]$

$X_0^{(1)} = 860$

3) Resolução Sub-Sistema 2

 5	100 2	50 1	150 0
100 3	50 4	 7	150 -2
100 -1	150 -2	50 -1	

← solução ótima

$\pi^2 = [0 \quad -2 \quad -1 \quad -2 \quad -1]$

$X_0^{(2)} = 750$

$X_0 = X_0^{(1)} + X_0^{(2)} + 60 = 860 + 750 + 60 = 1670$

Devemos agora procurar novos valores para W_1 e W_2 que permitam melhorar a função objetivo.

Temos que:

$$A_{11}^{*} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Iteração 2:

O problema é:

$$\max Z_0 = \Pi b^* = [0\ \ -2\ \ 2\ \ 4\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 2] \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_1 \\ W_2 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Obs.: despresamos a 1a. restrição do sub-sistema 1 e a última do sub-sistema 2.

$$\max Z_0 = -2W_1 - 6W_2 - 90$$

$$\min Z_0 = 2W_1 + 6W_2 + 90$$

sujeito a: $(A_{11}^{'})^{-1} b^* \geq 0$

$W_1 + W_2 = 30$

$$(A_{11}^*)^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 0 & -1 & & & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ \hline & & & & 0 & -1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ & 0 & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

ficamos então com as seguintes restrições:

$$\begin{array}{rcll} W_1 + W_2 & \geq & 180 & (1) \\ W_1 & \leq & 180 & (2) \\ W_2 & \geq & 80 & (3) \\ W_1 - W_2 & \leq & 100 & (4) \\ W_1 + W_2 & \geq & 250 & (5) \\ W_2 & \geq & 100 & (6) \\ W_1 + W_2 & = & 300 & (7) \end{array}$$

A restrição (7) domina as restrições (1) e (5)

A restrição (6) domina a restrição (3)

Temos então:

$$\min Z_0 = 2W_1 + 6W_2 + 90$$

Sujeito a:

$$W_1 \leqslant 180$$

$$W_1 - W_2 \leqslant 100$$

$$W_2 \geqslant 100$$

$$W_1 + W_2 = 300$$

Resolvendo, encontramos:

$$W_1 = 180$$

$$W_2 = 120$$

2) Resolução Sub-Sistema 1

$80+\theta$ 3	$40-\theta$ 6	120 0
$100-\theta$ 2	0 -1 4	100 1
5	80 2	80 4
180 -3	120 -6	

$\Rightarrow$

120 3	6	120 -1
60 2	40 4	100 0
5	80 2	80 2
180 -2	120 -4	

← solução ótima

$$\Pi_1 = [-1 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \quad -4]$$

$$X_0^{(1)} = 800$$

3) Resolução do Sub-Sistema 2

 5	130 2	50 1	180 0
100 3	20 4	 7	120 -2
100 -1	150 -2	50 -1	

← solução ótima

$$X_0^{(2)} = 690$$

$$\Pi_2 = [0 \quad -2 \quad -1 \quad -2 \quad -1]$$

$$X_0 = X_0^{(1)} + X_0^{(2)} + 60 = 800 + 690 + 60 = 1.550$$

<u>Iteração 3:</u>

$$\Pi = (0 \quad 2 \quad -2 \quad -4 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \quad -2)$$

$$A_{11}^{*} = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\ \hdashline & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ficamos então:

$$\max Z_0 = \Pi' b^* = \min Z_0 = -\Pi' b^* = \min Z_0 = 2W_1 + 4W_2 + 90$$

A matriz A_{11}^* é igual a da iteração anterior, logo as restrições são as mesmas.

Resolvendo, encontramos novamente:

$W_1 = 180$

$W_2 = 120$

Portanto estamos na solução ótima global.

Podemos agora calcular os valores de K_1 e K_2 para esta solução. Consideremos neste exemplo que $K_i = W_i$

$$K_1 = \frac{1}{3} \times 180 + 10 + \left(\frac{1,5}{180} + 0,99\right) X_i$$

$$K_2 = \frac{1}{3} \times 120 + 10 + \left(\frac{1,5}{120} + 0,99\right) X_i$$

$$K_1 = 70 + 1,07\ X_i$$

$$K_2 = 50 + 1.002\ X_i$$

Como vemos a variação nos custos variáveis unitários foram insignificantes dentro da dimensão do problema. É óbvio que a solução original permanecerá ótima não havendo necessidade neste caso de efetuarmos a análise pós-ótima de acordo com o procedimento descrito no apêndice 2 .

6.0 - CONCLUSÕES

Com este trabalho não pretendemos, de forma alguma, esgotar o assunto da localização de armazéns, que, por sua importância,aliada à complexidade dos fatores que a influenciam, merece uma atenção toda especial dos órgãos de planejamento do país.

Nossa intenção foi apenas aplicar as técnicas da pesquisa operacional a uma área que vem se resentindo da falta de racionalização dos métodos utilizados na abordagem e solução dos seus problemas.

Como enfatizamos na introdução deste trabalho, a nossa contribuição principal está contida no modelo matemático, apresentado no capítulo 4. A estruturação do modelo, permitindo sua resolução utilizando-se apenas as técnicas da programação linear, constitue, a nosso ver, uma colaboração válida para a abordagem de problemas deste tipo.

O modelo ainda é passível de revisões e modificações, para o que pedimos as sugestões dos estudiosos do assunto. Uma elaboração mais sofisticada poderá ser obtida levando-se em conta os fatores do modelo ARPA II, ou seja, as componentes aleatórias da oferta e da demanda.

Os resultados da implantação do Projeto Piloto em Pernambuco, que deverá ser levada a efeito pelo CETEPE, quando incorporados ao modelo, deverão atuar como fatores modificativos, originando mudanças substanciais no modelo que, como salientamos, ainda não se encontra em sua forma final.

O modelo em sua forma aqui apresentada, foi elaborado de modo a atender aos requisitos de um trabalho de conclusão de mestrado, em Análise de Sistemas.

A Análise de Sistemas preconiza a adoção de sistemas di nâmicos e flexíveis, que permitam a introdução de modificações e aprimoramentos onde se fizerem necessários. O projeto ARPA apresenta estas características e acreditamos que tenha atingido os seus objetivos imediatos.

APÊNDICE I

MODELO LINEAR[1]

1.0 - DEFINIÇÃO

Uma relação linear entre uma observação física Y, e k variáveis explanatórias, $x_1 \ldots x_k$, será chamada modelo linear estatístico, a parâmetros fixos, quando:

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + e_i$$

onde:

x_{ij} : valor da j-ésima variável explanatória, correspondente a i-ésima observação

β_j : coeficiente de regressão da variável Y na variável x_j, constante, desconhecido.

e_i : resíduo aleatório

Em notação matricial, estas n equações podem ser escritas como:

$$\boxed{Y = x\beta + e}$$

onde:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

(1) O tratamento descrito neste apêndice também é conhecido como Regressão Múltipla. [15]

2.0 - AMOSTRAGEM

O objetivo da amostragem consiste em obter informação a partir da qual se possa fazer algum tipo de afirmação ou inferência acêrca da população amostrada[1],

Estas inferências se fazem a partir de certas funções dos elementos da amostra.

Estamos supondo que o modelo linear se adapta na representação do processo físico real.

Essa hipótese pode ser objeto de análise, mas isso foge ao escopo desse apêndice.

Portanto, o mecanismo de amostragem pode ser descrito como sendo:

"Seleciona-se (aleatòriamente ou por projeto) um conjunto de x's, digamos: $x_{i1}, x_{i2} \ldots, x_{ik}$ e da distribuição da variável aleatória Y $(f\ (Y; x_1 = x_{i1}, x_2 = x_{i2} \ldots x_k = x_{ik}))$ seleciona-se uma observação Y_i."

Isto é feito para i = 1, 2, ..., n de modo que no fim do processo de amostragem teremos uma amostra de tamanho n. Com base na matriz X e no vetor observado Y, derivaremos estimadores para o vetor de coeficientes β e parâmetros da distribuição de e.

Cabe frisar que nenhuma restrição foi feita em relação a matriz X: seus elementos podem inclusive não serem todos distintos.

---

(1) No nosso caso Y será uma variável aleatória com distribuição $f(y; x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

3.0 - HIPÓTESES

As suposições que podem ser feitas a respeito da função de distribuição da população, vão desde aquelas que meramente afirmam esta distribuição satisfazer as propriedades de uma distribuição de probabilidades, até aqueles que a especificam completamente.

No nosso caso vamos admitir que os resíduos e_i são variáveis aleatórias independentes, com distribuição conjunta normal, média 0 e variância comum σ^2.

O problema então consiste em estimar, a partir de uma amostra, o valor de β_1, $\beta_2, \ldots \beta_k$ e σ^2.

Trataremos, especificamente, do caso em que as variáveis explanatórias podem ser controladas completamente, implicando na possibilidade de escolha conveniente da matriz X.

Considerações sobre a finalidade de experimentação exigem entre outras coisas, que seja possível inverter a matriz X'X. Embora não viável em geral |15|, este requerimento sempre poderá ser satisfeito no contexto desse apêndice.

4.0 - ESTIMAÇÃO

As relações abaixo permitem completar os estimadores $\hat{\beta}$, S^2, dos parâmetros β, σ^2.

Equações Normais $\quad (X'X)\,\hat{\beta} = X'Y$

Variância Amostral $\quad S^2 = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})/(n - k)$

Provam-se as seguintes propriedades, [15] :

$E\,[\hat{\beta}] = \beta$ ($\hat{\beta}$ é estimador não viesado de β)

$E\,[S^2] = \sigma$ (S^2 é estimador não viesado de β)

$\hat{\beta}$ tem distribuição normal, com média β, matriz de covariâncias $\sigma^2(X'X)^{-1}$.

$(n - k)S^2$ tem distribuição chi-quadrada, com n-k graus de liberdade.

$\hat{\beta}$ e S^2 são variáveis aleatórias estatísticamente independentes.

Teste de Hipóteses

Vamos dividir os coeficientes de regressão em dois subconjuntos, 1 e 2, o que equivale a considerar o modelo $Y = X\beta + e$ particionado de modo a

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + e$$

Com a hipótese H_0 de que $\beta_1 = 0$, as variáveis explanatórias no grupo 1 são omitidas, estabelecendo-se o modelo reduzido.

$$Y = X_2\,\beta_2 + e$$

Dessa forma podemos testar a nulidade de quaisquer conjunto de coeficientes e essa partição não acarreta perda de generalidade desde que podemos reordenar o vetor β.

O procedimento para testar a hipótese acima é:

1) Obter as equações normais $X'X\,\hat{\beta} = X'Y$ e computar $\hat{\beta}'X'Y$

2) Do modelo $Y = X_2\,\beta_2 + e$ obter as equações normais $X_2'\,X_2\,\tilde{\beta}_2 = X_2'\,Y$, (1) e computar $\tilde{\beta}_2'\,X_2'\,Y$.

3) Computar:

$$\upsilon = \frac{\hat{\beta}X'Y - \tilde{\beta}_2'\,X_2'\,Y}{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}\;\frac{n-k}{r}$$

onde: r é o número de componentes do vetor β_1.

Prova-se |15| que υ tem distribuição F de Snedecor.

4) Decisão: Rejeitar H_0 se $\upsilon \geqslant F_\alpha\,(r, n-k)$

Aceitar H_0 se $\upsilon \leqslant F_\alpha\,(r, n-k)$

onde: $F_\alpha\,(r, n-k)$ representa a distribuição F de Snedecor com nível de significância α e r e $n-k$ graus de liberdade [15] .

Todos estes cálculos podem ser postos num quadro de análise de variância [15] .

QUADRO DE ANÁLISE DE VARIÂNCIA

FONTE	GRAUS DE LIBERDADE	SOMA DE QUADRADOS	MÉDIA QUADRADOS	ESTATÍSTICA
TOTAL	n	$Y'Y$		
Redução devido a β	k	$\tilde{\beta}'\,X'\,Y$		
Redução devido a β_1	$k-r$	$\tilde{\beta}_2'\,X_2'\,Y$		
Redução devido a β_2	r	$\hat{\beta}'X'Y - \tilde{\beta}_2'X_2'Y = ks_1^2$	s_1^2	$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$
ERRO	$n-k$	$Y'Y - \hat{\beta}'X'Y = (n-k)\,s_2^2$	s_2^2	

(1) A notação $\tilde{\beta}_2$ indica que estamos considerando o modelo com a hipótese.

APÊNDICE II

POLINÔMIOS ORTOGONAIS

Adaptado de [15]

1.0 - INTRODUÇÃO

Modelos polinomiais ou curvelíneos podem ser apresentados da seguinte forma:

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + \beta_2 X_j^2 + \ldots\ldots + \beta_p X_j^p + e_j$$

e se constituem em um caso especial de modelos lineares (ver apêndice 1).

A introdução dos polinômios ortogonais em modelos curvelíneos é devida à simplificação dos cálculos obtida ao se fazer uma transformação nos valores de $\underline{x}$ de forma a tornar a matriz $X'X$ diagonal.

Pode-se utilizar os polinômios ortogonais para valores de $\underline{x}$ igual ou desigualmente espaçados. Contudo os procedimentos computacionais são mais simples quando os valores de x são igualmente espaçados. Discutiremos aqui apenas este caso.

2.0 - POLINÔMIOS ORTOGONAIS PARA MODELOS LINEARES

Consideremos que dispomos de alguns dados aos quais desejamos ajustar um polinômio. Consideremos ainda que os valores de X são igualmente espaçados, isto é:

$$X_1 = a + h,\ X_2 = a + 2h,\ \ldots,\ X_i = a + ih,\ \ldots,\ X_n = a + nh$$

Suponhamos que desejamos ajustar aos nossos dados um modelo linear:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \ell_i \tag{2.1}$$

Escrevendo em outra forma:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 (i - \bar{i}) + \ell_i \tag{2.2}$$

onde:

$P_1(i - \bar{i})$ é um polinômio do 1º grau em $i - \bar{i}$

$$\bar{i} = \frac{\sum i}{n} = \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{(1+n)n}{2n} = \frac{1+n}{2}$$

Portanto:

$$P_1(i - \bar{i}) = P_1(i - \tfrac{n+1}{2}) = C_0 + C_1(i - \tfrac{n+1}{2}) \qquad (2.3)$$

é um polinômio do 1º grau em $i - \bar{i}$ e C_0 e C_1 são constantes.

Colocando o polinômio em X igual ao polinômio em $i-\bar{i}$, temos:

$$\beta_0 + \beta_1 X_i = \alpha_0 + \alpha_1 [C_0 + C_1 (i - \tfrac{n+1}{2})] \qquad (2.4)$$

$$\beta_0 + \beta_1(a+ih) = \alpha_0 + \alpha_1 [C_0 + C_1 (i - \tfrac{n+1}{2})]$$

$$\beta_0 + \beta_{1a} + \beta_1 h_i = \alpha_0 + \alpha_1 [C_0 - C_1 \tfrac{(n+1)}{2}] + \alpha_1 C_1 i$$

Desde que isto é uma identidade podemos igualar os coeficientes:

coeficiente de i^0: $\beta_0 + \beta_1 = \alpha_0 + \alpha_1 [C_0 - \frac{C_1(n+1)}{2}]$

coeficiente de i : $\beta_1 h = \alpha_1 C_1$ (2.5)

Quaisquer que sejam os valores de C_0 e C_1 $(h \neq 0)$ podemos determinar os β_i desde que os α_i sejam conhecidos. Podemos portanto usar o modelo:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 [C_0 + C_1(i - \tfrac{n+1}{2})] + \ell_i \qquad (2.6)$$

ou seja:

$$Y = X\alpha + \ell$$

que nos permite estimar α_0 e α_1. Podemos então, por intermédio de (2.5), determinar β_0 e β_1.

Temos:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & C_0 + \frac{(1-n)}{2} C_1 \\ 1 & C_0 + \frac{(3-n)}{2} C_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & C_0 + \frac{(n-1)}{2} C_1 \end{bmatrix} \Rightarrow X'X = \begin{bmatrix} n & nC_0 \\ nC_0 & \sum C_0^2 - C_1^2 \sum i(i - \frac{n+1}{2}) \end{bmatrix}$$

Desde que podemos estabelecer valores para os constantes C_0 e C_1, escolhamos estes valores de modo a que a matriz X'X seja diagonal e também eliminemos as termos fracionários do modelo, Se n é ímpar façamos $C_1 = 1$, se n é par façamos $C_1 = 2$, e $C_0 = 0$ em qualquer dos dois casos. Isto nos dá:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 \left(i - \frac{n+1}{2}\right) + \ell_i \qquad (2.7)$$

onde:

$$P_1 \left(i - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{2i - n - 1}{2} \qquad n \text{ ímpar}$$

$$P_1 \left(i - \frac{n+1}{2}\right) = 2_i - n - 1 \qquad n \text{ par}$$

Portanto:

$$X'X = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & C_1^2 \frac{n(n+1)(n-1)}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \sum [P_1(i - \frac{n+1}{2})]^2 \end{bmatrix} \qquad (2.7)'$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i P_1 (i - \frac{n+1}{2}) \end{bmatrix} \quad \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \end{bmatrix}$$

Assim as equações normais $X'X\,\hat{\alpha} = X'Y$ são facilmente resolvidas. Temos:

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum y_i \\ \\ \dfrac{\sum y_i\, P_1(i - \frac{n+1}{2})}{\sum [P_1\,(i - \frac{n+1}{2})]^2} \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

Tendo os valores de α podemos facilmente determinar os valores de β.

Desde que queremos destar a hipótese $\alpha_1=0$, necessitamos conhecer:

Redução devida a α_0 e α_1 : $R(\alpha_0,\alpha_1) = \alpha\, X'Y$

Redução devida a α_1, ajustada para α_0: $R(\alpha_1,\alpha_0)=\alpha'X'Y-\bar{\alpha}'X_1'Y$

$$R(\alpha_1|\alpha_0) = R(\alpha_1) = \hat{\alpha}_1 X_1 Y = \frac{\{\sum y_i P_1\ [i - (n+1)/2]\}^2}{\sum\{\ P_1\ [i - (n+1)/2]\}^2}$$

$$R(\alpha_0,\ \alpha_1) = R(\alpha_0) + R(\alpha_1) = \hat{\alpha}_0\ X_0'Y + \hat{\alpha}_1\ X_1'\ Y =$$

$$= \frac{(\sum y_i)^2}{n} + \frac{\{\sum y_i P_1\ [i - (n+1)/2]\}^2}{\sum\{\ P_1\ [i - (n+1)/2]\}^2}$$

os valores de $P_1(i - \frac{n+1}{2})$ encontram-se tabulados para vários valores de n, tornando simples a análise do modelo.

EXEMPLO: Dado

y	1.0	2.0	4.0	3.0	5.0
X_i	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3

Vemos que os X_i são igualmente espaçados, e a=4.8, h=.3, n=5. Usando a tabela com n=5, temos:

Y	1.0	2.0	4.0	3.0	5.0	$\sum y_i = 15$
$P_1(i-\bar{i})$	-2	-1	0	1	2	$\sum y_i P_1(i-\frac{n+1}{2})=9$

$$\sum y_i^2 = 55 \quad \sum[P_1(i-\bar{i})]^2 = \sum P_1^2 = 10$$

Pela equação (2.8) temos:

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ .9 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\alpha}_0 - 3\hat{\alpha}_1 &= \hat{\beta}_0 + 4.8\hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_1 &= .3\hat{\beta}_1 \end{aligned}$$

Que nos dá $\hat{\beta}_1 = 3.33\,\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_0 = \hat{\alpha}_0 - 19\hat{\alpha}_1$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -14.1 \\ 3.0 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$R(\alpha_1 | \alpha_0) = 8.1, \quad R(\alpha_0, \alpha_1) = 53.1, \quad Y'Y = 55.0$$

FONTE	GL	SQ	MSQ	EST.(U)	Nº CRIT.
TOTAL	5	55.0			
$R(\alpha_0)$	1	45.0			
$R(\alpha_1 \mid \alpha_0)$	1	8.1	8.1	13.5	55.6
ERRO	3	1.9	.6		

Adotando-se um nível de significancia de 5%, temos

$F_{.05}(1,3) = 55,6 \Rightarrow$

$U < F_{.05}(1,3)$

Portanto aceitamos a hipótese $\beta_1 = 0$

Observações:

1 - Desde que, por (2.5), β_1 é nulo se e somente se α_1 é nulo, podemos testar $\beta_1 = 0$ usando o teste para $\alpha_1 = 0$

2 - Podemos obter estimação por ponto e por intervalo de β_0 e β_1 usando a equação (2.5).

3 - O quadro de análise de variância dos α_i é fácil de calcular, desde que as quantidades nas equações (2.7)' e (2.8) são facilmente obtidas.

Se desejamos ajustar apenas um polinômio linear, os polinômios ortogonais não são de grande valia. No entanto se queremos ajustar um linear, depois um quadrático, etc. até encontrarmos o melhor ajuste e se os X_i são igualmente espaçados, então o uso dos polinômios ortogonais é de grande auxílio.

Com um procedimento análogo podemos ajustar um polinômio do 2º grau, 3º grau, etc. Consideremos o caso geral de um polinômio do p-ésimo grau.

3.0 - POLINÔMIOS ORTOGONAIS DO P-ÉSIMO GRAU

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \ldots + \beta_p X_i^p + \ell_i \qquad (3.1)$$

onde os X_i são igualmente espaçados ($X_i = a + ih$). Podemos representá-lo pelo polinômio:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(i - \bar{i}) + \alpha_2 P_2(i - \bar{i}) + \ldots + \alpha_p P_p(i - \bar{i}) + \ell_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.2)$$

onde:

$P_t(i - \bar{i})$: é um polinômio do t-ésimo grau em $i - \bar{i}$, e $\bar{i}$ como já vimos é igual a $\frac{n+1}{2}$

Podemos representá-lo por:

$$P_t = P_t(i - \bar{i}) = P_t\left(i - \frac{n+1}{2}\right) = a_{0t} + a_{1t}\left(1 - \frac{n+1}{2}\right) + \ldots +$$

$$+ a_{tt}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^t \qquad (3.3)$$

onde: a_{0t}, a_{1t}, ... a_{tt} são constantes, que devemos determinar de modo que a matriz X'X seja diagonal e tal que todos os elementos em P_t são números inteiros.

Se substituitmos em (3.1) X_i por a + ih e igualmente os coeficientes de mesmo grau em (3.1) e (3.2) obtemos um sistema de equações onde podemos determinar os β_i em função dos α_i.

As equações são:

Coeficientes de i:

$$A_{oo}\,\alpha_0 + A_{01}\,\alpha_1 + \ldots + A_{0p}\,\alpha_p = B_{00}\,\beta_0 + B_{01}\,\beta_1 + \ldots + B_{0p}\,\beta_p$$

Coeficiente de i :

$$A_{11}\,\alpha_1 + \ldots + A_{1p}\,\alpha_p = B_{11}\,\beta_1 + \ldots B_{1p}\,\beta_p$$

....

Coeficiente de i^p:

$$A_{pp}\,\alpha_p = B_{pp}\,\beta_p \qquad (3.4)$$

onde:

A_{st} : é o coeficiente de i^s no polinômio $P_t\left[i - \frac{n+1}{2}\right]$

B_{st} : é o coeficiente de i^s na quantidade $(a + ih)^t$

Podemos escrever:

$$A\,\alpha = B\,\beta$$

onde: α é o vetor dos α_i, β é o vetor dos β_i e A e B são matrizes$(p+1)\times$ $\times\,(p + 1)$ cujos elementos ij-ésimos são A_{ij} e B_{ij} respectivamente . Desde que $A_{ii} \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$ e $B_{ii} \neq 0$ $(i = a, 1, \ldots, p)$ e como A e B são matrizes triangulares, existem A^{-1} e B^{-1}. Podemos então escrever:

$$\beta = B^{-1}\,A\alpha = C\alpha$$

Sabemos ainda que:

$$\hat{\beta} = C\hat{\alpha}$$

Usando polinômios ortogonais estamos estimando ou testando hipóteses com referência aos α_i. Para dizermos algumas coisa em relação aos β_j nós podemos usar as equações (3.4)..

Devemos observar um fato muito importante:

$$\alpha_p = 0 \Longleftrightarrow \beta_p = 0$$

onde: p é o termo de mais alto grau (ver equação 3.4). Isto significa que, se nós ajustamos um polinômio linear, o coeficiente de X é zero se e só se α_1 é zero. Se ajustamos um ao 2º grau o coeficiente do termo do 2º grau é zero se e só se $\alpha_2 = 0$, e assim por diante. Devemos nos lembrar que cada vez que nós mudamos o grau do polinômio, nós mudamos todos os coeficientes. Isto não se verifica para os α_j; o coeficiente do polinômio ortogonal de 1º grau é α_1 não importa quantos termos tenhamos ajustado. Isto acontece com o coeficiente de um polinômio ortogonal de grau qualquer. Utilizando o procedimento dos polinômios ortogonais podemos, portanto, sempre adicionar um termo de grau mais alto até determinarmos o grau do polinômio que represente adequadamente os dados. Com a utilização dos polinômios ortogonais determinamos assim o grau do polinômio que melhor se ajusta. Para determinar o polinômio devemos utilizar as equações (3.4).

Podemos, voltando à equação (3.2) escrever o modelo como:

$Y = X\alpha + \ell$ onde:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & P_1(1 - \frac{n+1}{2}) & \cdots\cdots & P_p(1 - \frac{n+1}{2}) \\ 1 & P_1(2 - \frac{n+1}{2}) & \cdots\cdots & P_p(2 - \frac{n+1}{2}) \\ & \vdots & & \\ \vdots & & & \\ 1 & P_1(n - \frac{n+1}{2}) & \cdots\cdots & P_p(n - \frac{n+1}{2}) \end{bmatrix}$$

Chamando $\sum_{i=1}^{p} P_r\ (i - \frac{n+1}{2})\ P_s\ (i - \frac{n+1}{2})$ de $\sum P_r P_s$, temos:

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum P_1 & \sum P_2 & \sum P_p \\ \sum P_1 & \sum P_1^2 & \sum P_1 P_2 & \sum P_1 P_p \\ & \vdots & & \\ \sum P_p & \sum P_p P_1 & \sum P_p P_2 & \sum P_p^2 \end{bmatrix}$$

Como já foi dito devemos escolher os coeficientes A_{st} tais que X'X seja diagonal. Estes coeficientes já forma calculados até n = = 104 e existem tabelas aonde obtemos diretamente o valor do polinômio no ponto desejado. Usando estas tabelas os cálculos tornam-se extremamente fáceis. Desde que:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i P_1 \\ \sum y_i P_2 \\ \vdots \\ \sum y_i P_p \end{bmatrix}$$

e $\quad X'X\hat{\alpha} = X'Y \qquad \hat{\alpha} = (X'X)^{-1}\ X'Y$

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum y_i \\ \frac{\sum y_i\ P_1}{\sum P_1^2} \\ \frac{\sum y_i\ P_2}{\sum P_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\sum y_1\ P_p}{\sum P_p{}^2} \end{bmatrix}$$

também

$$R(\alpha_q \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p) = R(\alpha_q) = \frac{(\sum y_1\ P_q)^2}{\sum P_q^2}$$

$\text{Var}\ (\hat{\alpha}_q) = \dfrac{\sigma^2}{\sum P_q^2}$. As quantidades $\sum P_q^2$ encontram-se também tabuladas. As únicas quantidades que devemos calcular são: $\sum y_i^2$, $\sum y_i$ e $\sum P_q y_i (q=1,2,\ldots$ $\ldots p)$.

Exemplo:

Nos anos abaixo verificaram-se os seguintes níveis de precipitação pluviométrica:

ANO	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952
Precipitação	30.2	32.2	35.1	34.2	39.1	41.3	36.1	30.1	30.5

ANO	1953	1954	1955
Precipitação	26.1	24.8	28.2

Desejamos determinar o polinômio que melhor se ajusta a estes dados com um nível de significância de 0.02.

Tentaremos ajustar um polinômio do 4º grau. Da tabela dos polinômios ortogonais obtemos:

i (ANO)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum P^2$
Precipitação	30.2	32.2	35.1	34.2	39.1	41.3	36.1	30.1	30.5	26.1	24.8	28.2	
P_1	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	572
P_2	-55	25	1	-17	-29	-35	-35	-29	-17	1	25	55	12.012
P_3	-33	3	21	25	19	7	-7	-19	-25	-21	- 3	33	5148
P_4	33	33	-33	-13	12	28	28	12	-13	-33	-27	33	8008

Portanto:

$$X'X = \begin{bmatrix} 12 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 0 & 572 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 12012 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & & 0 & 5148 \ldots & 0 \\ 0 & & & 0 & 8008 \end{bmatrix}$$

$\bar{y} = 32{,}325 \qquad \sum P_i\, y_i = 202{,}30 \qquad \sum P_2\, y_i = -\,1.117{,}5$

$\sum P_3 y_i = 445{,}10 \qquad \sum P_4\, y_i = 525{,}10$

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 32{,}325 \\ \dfrac{202{,}30}{572} \\ \dfrac{-1.117{,}5}{12.012} \\ \dfrac{445{,}10}{5148} \\ \dfrac{525{,}10}{8.008} \end{bmatrix}$$

O quadro de análise de variância é:

FONTE	GL	SQ	MSQ	F
TOTAL	12	12.815,99		
Redução d. β_0	1	12.538,87		
Resíduo	11	272,12		
Redução d. β_1	1	71,55	71,55	
Resíduo	10	205,57	20,56	3,48
Redução d. β_2	1	103,96	103,96	
Resíduo	9	101,61	11,29	9,21
Redução d. β_3	1	38,48	38,48	
Resíduo	8	63,13	7,89	4,88
Redução d. β_4	1	34,43	34,43	
Resíduo	7	28,70	4,10	8,40

$\frac{71.55}{20.56} > F_{0.02}\,(1,10) \Rightarrow$ aceita-se hipótese que $\beta_1 = 0$

$\frac{103.96}{11.29} < F_{0.02}\,(1,\ 9) \Rightarrow$ rejeita-se hipótese que $\beta_2 = 0$

$\frac{38.48}{7.89} > F_{0.02}\,(1,\ 8) \Rightarrow$ aceita-se hipótese que $\beta_3 = 0$

$\frac{34.43}{4.10} > F_{0.02}\,(1,\ 7) \Rightarrow$ aceita-se hipótese que $\beta_4 = 0$

O polinômio que melhor se ajusta aos dados é então um polinômio do 2º grau

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \ell_i$$

os valores de β_0, β_1 e β_2 podem ser determinados através das equações (3.4).

<u>Conclusão</u>:

É desejável obter dois resultados não significativos consecutivos antes de decidir o grau do polinômio. Isto porque, se um polinômio do 3º grau se ajusta aos dados, é provável que o termo linear de uma redução significativa, mas não o termo quadrado. De fato, se um polinômio do grau par se ajusta aos dados, qualquer polinômio do grau ím par provavelmente em nada contribuirá. Portanto se paramos no 1º re sultado não significativo nós podemos perder resultados importantes.

APÊNDICE III

ANÁLISE PÓS-ÓTIMA

1.0 - INTRODUÇÃO

Em muitos problemas práticos não queremos apenas encontrar uma solução ótima, mas estamos também interessados em determinar o que acontece com esta solução ótima quando ocorrem certas mudanças no Sistema. Gostaríamos de determinar os efeitos dessas mudanças sem ter de resolver um novo problema ou uma série de novos problemas. As mudanças a que o sistema está sujeito podem representar ou mudanças reais no sistema físico que o modelo de programação representa, ou mudanças fictícias que são feitas para investigar os efeitos da incerteza nos dados básicos. A aplicação da programação linear pode ser prejudicada pelo conhecimento imperfeito dos dados necessários ou por uma completa falta de dados. Para ter confiança nos resultados finais, devemos investigar como estes resultados dependem dos dados originais. Analisaremos aqui as duas principais mudanças que podem ocorrer no modelo de programação linear, ou seja: mudanças no lado direito e mudanças nos coeficientes da função objetivo.

1.1 - MUDANÇAS NO LADO DIREITO

Consideremos dois casos:

a) Determinação de intervalos em que podem variar as restrições permanecendo inalterada a base anteriormente encontrada.

b) Determinação de mudanças ocorridas no sistema quando variamos o lado direito continuamente (programação paramétrica).

Caso A

Suponhamos que resolvemos um problema de programação linear (P.P.L.) e encontramos a solução ótima, mas agora nós queremos mudar um dos b_i por uma quantidade θ. Temos então o seguinte problema modificado:

$$Ax = b + \theta b^* \qquad (1)$$

onde: θ : escalar

b^* : um vetor com coeficiente unitário na na r-ésima linha e zero em todas as outras linhas.

Seja B a matriz formada pelos coeficientes originais dos variáveis que estão na base na solução ótima. Multiplicando (1) pela esquerda por B^{-1}, obtemos

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b + \theta B^{-1}b^*$$

Fazendo:

$$\beta = B^{-1}b$$

$$\beta^* = B^{-1}b^* \qquad \text{(r-ésima coluna de } B^{-1}\text{)}$$

$$B^{-1}Ax = \beta + \theta\beta^* \qquad (2)$$

Isto pode ser representado em forma de tableau da seguinte maneira:

$$X_0 = \bar{a}_{00} + \theta\, \bar{a}_{00}^* + \sum_j \bar{a}_{0j}\ (-X_j)$$

$$X_i = \bar{a}_{i0} + \theta\bar{a}_{i0}^* + \sum_{j=m+1}^{n} \bar{a}_{ij} (-X_j) \tag{3}$$

A condição de otimalidade continua satisfeita, uma vez que os coeficientes da função objetivo não são alterados pela variação do vetor $\underline{b}$. Portanto para ver se a solução anterior continua ótima é necessário apenas verificar a sua viabilidade.

Procuraremos agora determinar um intervalo de variação para os θ.

De (3), tiramos, como condição de viabilidade:

$$X_i = \bar{a}_{i0} + \theta\bar{a}_{i0}^* \geq 0$$

Para $\bar{a}_{i0}^* < 0$, vem:

$$\theta_1 = \min_{i,\, a_{i0}^* < 0} \frac{\bar{a}_{i0}}{|\bar{a}_{i0}^*|}$$

Obtemos assim um limite superior para θ. Se $\bar{a}_{i0}^* > 0$, $\forall_i$, teremos: $\theta_1 = \infty$, ou seja, a variação do lado direito será aberta.

Se $\bar{a}_{io}^* > 0$ podemos determinar o limite inferior para θ, que será dado por: $-\theta_2$, tal que

$$\theta_2 = \min_{i, \bar{a}_{i0}^* > 0} \frac{\bar{a}_{i0}}{\bar{a}_{i0}^*}$$

Se $\bar{a}_{io}^* < 0$, $\forall_i$, então $\theta_2 \Rightarrow \infty$

Portanto um intervalo de variação para b_r , de modo a não alterar a base anteriormente encontrada será

$$(b_r - \theta_2 \; , \; b_r + \theta_1)$$

CASO B

Nós agora estamos interessados em observar as transições que ocorrem a medida que os b_i são mudados continuamente.

Se os b_i devem mudar continuamente nós podemos escrever:

$$b_i\ (\theta) = b_i + \alpha_i\theta \ , \quad \theta \geqslant 0 \ (1) \ ,$$

se as mudanças são linearmente relacionadas. O lado direito é considerado como uma função linear de um parâmetro não negativo θ e os α_i são constantes que são os dados de entrada.

Consideremos agora o que acontece com as variáveis básicas da solução ótima a medida que θ aumenta. Quando $\theta = 0$ nós temos o ótimo original. A medida que θ aumenta as varáveis básicas mudarão seus valores. Enquanto estes valores permanecerem não negativos a base original continua ótima. Eventualmente contudo atinge-se um valor $\theta = \theta_{max}$, no qual uma variável básica, digamos X_r, se anula. Isto significa que para levar θ além de θ_{max} devemos remover X_r da base e substitui-la por X_s que é alguma outra variável que também é nula para $\theta = \theta_{max}$, mas que aumenta em valor θ vai além de θ_{max} e que mantém a otimalidade.

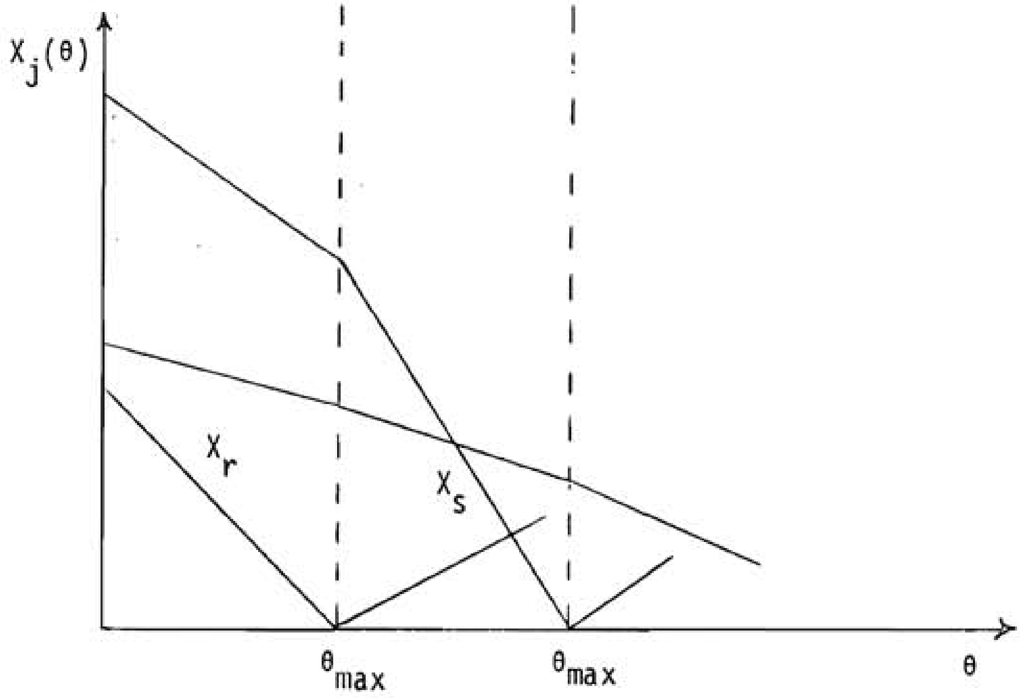


FIGURA III.1

Plotando os valores de X_j (θ) como função de θ nós obtemos o gráfico mostrado na figura III.1. A nova solução ótima obtida ao substituir X_r por X_s terá o seu próprio domínio de validade. Este domínio começará para $\theta = \theta_{max}$ e se estenderá até θ'_{max} onde outra variável ameaça tornar-se negativa.

<u>Determinação de</u> X_r

Conhecemos os valores dos variáveis básicas na solução ótima original, que são:

$$X_i = \sum_{\kappa=1}^{m} \beta_{i\kappa} b_\kappa \qquad \beta_{i\kappa} : \text{elemento de } B^{-1}$$

Como b_κ é uma função de θ , podemos escrever:

$$X_i(\theta) = \sum \beta_{i\kappa} b_\kappa + \theta \sum \beta_{i\kappa} \alpha_\kappa$$

Podemos ter duas situações

$$\sum \beta_{i\kappa} \alpha_\kappa \gtrless 0 \quad \text{para todo i}$$

$$\sum \beta_{i\kappa}\alpha_\kappa < 0 \quad \text{para alguns ou todos i's}$$

No primeiro caso podemos dar a θ qualquer valor positivo sem alterar a viabilidade ($\sum \beta_{i\kappa}b_\kappa \geqslant 0$). Portanto a solução ótima original independente dos valores tomados por θ . Neste caso o processo do PLP termina pois nada mais há a fazer . No segundo caso, teremos um limite para θ que será dado por:

$$\theta_{máx} = \min_{i, \sum \beta_{i\kappa}\alpha_\kappa < 0} \frac{\sum \beta_{i\kappa}b_\kappa}{\left| \sum \beta_{i\kappa}\alpha_\kappa \right|} = \frac{\sum \beta_{r\kappa}b_\kappa}{\left| \sum \beta_{r\kappa}\alpha_\kappa \right|}$$

Quando $\theta = \theta'_{max}$, $X_r = 0$ e deve ser removida da base e outra deverá tomar seu lugar.

<u>Determinação de</u> X_s

Se X_s substitue X_r , temos que os novos custos reduzidos serão:

$$C_j^* = C_j - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} C_s$$

ou

$$a_{0j}^* = a_{0j} - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} a_{0s}$$

Se a nova base deve ser ótima, s deve ser escolhido de tal modo que:

$$a_{0j}^* - \frac{a_{rj}}{a_{rs}} a_{0s} \geqslant 0 \quad \forall_j$$

O novo valor de X_s será:

$$X_s(\theta) = \frac{a'_{r0}(\theta)}{a'_{rs}}$$

Temos que:

$a'_{r0}(\theta) < 0$ para $\theta > \theta_{max}$ e nós queremos $X_s(\theta) \geqslant 0$. Logo as candidatas a X_s são aquelas variáveis que tem elementos negativos na r-ésima linha do tableau. Podemos então reescrever

$$a'_{0j}{}^{*} = a'_{0j} + \frac{a'_{rj}}{|a'_{rs}|} a'_{0s} \geqslant 0 \qquad a'_{rs} < 0 , \quad \forall_j$$

Se $a'_{rj} > 0$ isto permanecerá válido desde que a'_{0j} e a'_{0s} são maiores que zero. Para $a'_{rj} < 0$:

$$a'_{0j} - \frac{|a'_{rj}|}{|a'_{rs}|} a'_{0s} > 0 \rightarrow \frac{a'_{0s}}{|a'_{rs}|} \leqslant \frac{a'_{0j}}{|a'_{rj}|}$$

<u>S</u> será determinado então, de modo a que:

$$\frac{a'_{0s}}{|a'_{rs}|} = \min \frac{a'_{0j}}{|a'_{rj}|}$$

onde a'_{rj} é obtido da seguinte maneira:

$$a'_{rj} = \sum_{\kappa=1}^{m} \beta_{r\kappa} a_{\kappa j}$$

Temos então uma nova base com X_s substituindo X_r. Este processo tem apenas dois possíveis términos:

1. O lado direito torna-se <u>aberto</u>

2. Não encontramos um a_{rj} negativo, o que significa que não podemos aumentar θ além do máximo atual sem violar as viabilidades.

O valor de Z muda, quando θ cresce.

$$Z(\theta) = - \sum bi\pi i - \theta \sum \alpha i\pi i$$

1.2 - Mundanças nos Coeficientes da Função Objetivo

Vamos mas uma vez considerar dois casos:

a) Determinação de intervalos em que podem variar os coeficientes da f. objetivo permanecendo ótima a solução anteriormente encontrada.

b) Programação Paramétrica.

Caso A

Consideremos inicialmente uma variação no coeficiente de uma variavel não básica (X_c) na função objetivo.

Sabemos que em cada iteração se soma um múltiplo de uma linha ã f objetivo.

Seja a_{0c} o coeficiente de X_c na f. objetivo original e $\overline{a_{0c}}$ o seu valor na solução ótima. Aumentando a_{0c} de δ teremos $\overline{a}_{0c} + \delta$ com seu valor na solução ótima.

Para que a base continue ótima devemos ter:

$$\bar{a}_{0c} + \delta > 0$$

$$\delta > - \bar{a}_{0c}$$

$$\infty > \delta > - \bar{a}_{0c}$$

$$\infty > a_{oc} + \delta > a_{0c} - \overline{a_{0c}}$$

Então o novo coeficiente da função objetivo a^*_{0c} = a_{0c} + δ pode variar no intervalo $(a_{0c} - \overline{a_{0c}}, \infty)$ sem alterar a otimalidade da base.

Consideremos agora que a variação seja no coeficiente de uma variável básica (X_r).

O coeficiente que era nulo na solução ótima passa a ser δ. Queremos anular este coeficiente, devemos portanto multiplicar a linha que contem X_r por δ e subtrair da função objetivo.

O termo geral será então:

$$\bar{a}^*_{0j} = \bar{a}_{0j} - \delta \bar{a}_{rj}$$

Para que a solução permaneça ótima devemos ter:

$$\bar{a}_{0j} - \delta \bar{a}_{rj} \geqslant 0$$

Para $\bar{a}_{rj} > 0$, vem:

$$\delta_1 = \min_{\bar{a}_{rj} > 0} \frac{\overline{a_{0j}}}{\overline{a_{rj}}}$$

δ_1 = máximo valor para θ.

Se $\bar{a}_{rj} < 0 \quad \forall_j \rightarrow \delta_1 = \infty$

Para $\bar{a}_{rj} < 0$

$$- \delta_2 = \min_{\overline{a_{rj}} < 0} \frac{\overline{a_{0j}}}{|\overline{a_{rj}}|}$$

Se $a_{rj} > 0 \quad \forall_j \quad \delta_2 = \infty$

O intervalo de variação será:

$(a_{0r} - \delta_2 \,,\; a_{0r} + \delta_1)$

<u>Caso B</u>

O caso de programação paramétrica para os coeficientes da função objetivo, é análogo ao para o lado direito considerando-se o problema dual.

APÊNDICE IV

UM MODELO MATEMÁTICO PARA OPERAÇÃO ÓTIMA DE ARMAZÉNS

1.0 - INTRODUÇÃO

Na análise padrão de operação de armazéns costuma-se otimizar os níveis de estoque em relação a um critério de custo. Tal análise baseia-se na hipótese de que a oferta e a demanda dos produtos é previsível e não estocástica.

O modelo matemático aqui apresentado considera o caráter aleatório das funções de oferta e demanda.

Para operar um armazém no nível de estoque que denominaremos capacidade ótima deve-se investigar a probabilidade de esgotar-se o estoque. Esta probabilidade, para um dado período, depende do nível de estoque no início do intervalo de tempo e é determinada por funções probabilísticas de oferta e demanda, no mesmo intervalo.

Nesta análise a oferta de novos produtos é tomada como uma função probabilística, dependente do tempo. A demanda consiste de uma função probabilística composta de uma demanda diária flutuante e de demandas excessivas no intervalo de tempo dado.

2.0 - ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA

Suponha que num dado intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$, a operação do armazém passa por um ciclo completo. Desejamos garantir que neste ciclo a probabilidade de se esgotar o estoque não é maior do que um valor determinado, digamos $\bar{P}(S_0)$. Daí podemos calcular o nível mínimo de estoque S_0, necessário para operar o armazém com a capacidade desejada. O custo ótimo de operação do armazém, que denotaremos por C_A^*, será então função de S_0 e outras variáveis x_i que determinam o custo de operação.

Temos pois: $C_A^* = C_A^*(S_0, x_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$.

C_A^* é determinado através da análise determinística já padronizada. No que se segue o nível ótimo de estoque será calculado baseando-se numa análise probabilística da oferta e da demanda.

A probabilidade de esgotar o estoque, para um dado ítem estocado, é uma função composta do nível de estoque no início do ciclo e das variáveis aleatórias para a demanda e oferta de estoque.

Logo: $\overline{P} = \overline{P}\ (S_i, P_D, P_s)$,

onde:

S_i é o nível inicial de estoque para o ítem estocado i,

P_D é a probabilidade de que a demanda total em t dias seja maior ou igual a D,

P_s é a probabilidade de que em t dias o número de unidades que chegam seja no máximo S.

2.1 - ANÁLISE DA DEMANDA

Calcularemos P_D, a probabilidade de que a demanda total em t dias, para cada ítem, seja maior ou igual a D.

A demanda é uma função composta de uma demanda diária flutuante f_D e de uma excesso de demanda f_E que é uma função aleatória do tempo e da quantidade.

A demanda diária para um único dia pode ser representada por uma função de distribuição de Poisson deslocada para a direita e truncada num ponto de demanda mínima d_0:

Ou seja:

$$f_D\ (d,\ d_0) = 0 \qquad\qquad d < d_0$$

$$f_D\ (d,\ d_0) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{(d\ -\ d_0)}}{(d\ -\ d_0)!} \qquad d \geqslant d_0 \tag{2.1}$$

A demanda diária média $\bar{\lambda}$ é dada por:

$$\bar{\lambda} = d_0 + \lambda \tag{2.2}$$

A demanda para t dias pode ser obtida substituindo-se d_0 por d_0t em (2.1).

De (2.1) e (2.2), obtemos:

$$\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{(d\ -\ d_0\ )}}{(d\ -\ d_0)!} = \frac{e^{-(\bar{\lambda}\ -\ d_0)}\ (\bar{\lambda}\ -\ d_0)^{(d\ -\ d_0)}}{(d\ -\ d_0)\ !}$$

Susbstituindo d_0 por d_0t:

$$f_D(d,\ d_0t) = \frac{e^{-(\bar{\lambda}\ -\ d_0t)}(\bar{\lambda}\ -\ d_0t)^{(d\ -\ d_0t)}}{(d\ -\ d_0t)\ !}$$

e

$$\bar{\lambda} = t(d_0 + \lambda) \tag{2.3}$$

Portanto:

$$f_D\ (d,\ d_0t) = 0 \qquad\qquad d < d_0t$$

$$f_D\ (d,\ d_0t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{d-d_0t}}{(d\ -\ d_0t)!} \qquad d \geqslant d_0t \tag{2.4}$$

A demanda excessiva é representada por uma função de distribuição marginal bidimensional $f_E(j,\ t)$.

$$f_E(j,\ t) = \sum_n f(n,\ t)\ f\ (j/n) \tag{2.5}$$

$f_E(j,t)$ é a função de densidade que indica que a demanda excessiva em t dias será exatamente igual a j.

$f\ (n,t)$ é a densidade de probabilidade de que serão feitas exatamente n requisições excessivas em t dias.

$f\ (j/n)$ é a densidade de probabilidade condicional de que o número de unidades requisitadas em excesso será j, dado que n requisições foram feitas.

Agora:

$$f(n,t) = \frac{e^{-kt}\ (kt)^n}{n!} \tag{2.6}$$

Seja δ_0 a demanda excessiva mínima para uma requisição . Então $n\delta_0$ é a demanda excessiva mínima para n requisições.

Portanto:

$$f(j/n) = 0 \qquad j < n\delta_0$$

$$f(j/n) = \frac{e^{-n\delta}(n\delta)^{j-n\delta_0}}{(j\ -\ n\delta_0)!} \qquad j \geqslant n\delta_0 \tag{2.7}$$

e o valor esperado de j é:

$$\bar{j} = n(\delta_0 + \delta)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5):

$$f_E\ (j,\ t) = \sum_{n=0}^{[j/\delta_0]} \frac{e^{-kt}\ kt^n}{n!} \cdot \frac{e^{-n\delta}(n\delta)^{j-n\delta_0}}{(j\ -\ n\delta_0)!} \tag{2.8}$$

onde:

$[j/\delta_0]$ é o máximo inteiro menor que j/δ_0.

A expressão (2.8) é muito complicada para os cálculos. Para simplificá-la, introduziremos uma aproximação.

Inicialmente, mudaremos a notação:

De:	Para:
kt	m
n	x
$n\delta$	z
$j - n\delta_0$	y

Denotemos: $p = \frac{z}{n} = \frac{n\delta}{n} = \delta$

Com esta nova notação, obtemos:

$$f_E(j, t) \simeq \sum_x \frac{e^{-m} m^x}{x!} \left\{\frac{x!}{(x-y)!y!} p^y q^{x-y}\right\} \tag{2.9}$$

Onde:

$$\lim_{x\to\infty} \left\{\frac{x!}{(x-y)!y!} p^y q^{x-y}\right\} \to \frac{z^y e^{-z}}{y!}$$

A expressão (3.9) pode ser simplificada do seguinte modo:

Deslocando os limites de integração:

$$\sum_{x=y}^{\infty} \frac{e^{-m} m^x}{x!} \frac{x!}{(x-y)!y!} p^y q^{x-y} = \frac{p^y e^{-m}}{y!} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{q^{x-y} m^x}{(x-y)!} =$$

$$= \frac{p^y e^{-m}}{y!} \left(m^y + m^{y+1} q + \frac{m^{y+2} q^2}{2!} + \ldots + \frac{m^{y+i} q^i}{i!} \cdots\right) =$$

$$= \frac{m^y p^y e^{-m}}{y!} \underbrace{\left(1 + (mq) + \frac{(mq)^2}{2!} + \ldots\right)}_{e^{mq}} = \frac{(mp)^y e^{-m} e^{m(1-p)}}{y!} = \frac{(mp)^y e^{-mp}}{y!}$$

Substituindo novamente as variáveis originais:

$$f_E(j,t) \simeq \frac{e^{-k\delta t} (k\delta t)^{j - n\delta_0}}{(j - n\delta_0)!} \tag{2.10}$$

Desejamos calcular a probabilidade de que a demanda total em t dias seja no mínimo igual a D. (P_D).

Inicialmente, para encontrar a distribuição conjunta das variáveis de Poisson indenpendentes, d e j, devemos formar:

$$f(d, j, t) = f_D\ (d, d_0 t)\ f_E\ (j, t) \tag{2.11}$$

Substituindo $\underline{n}$ por seu valor esperado $\bar{n} = kt$, de (2.6) vem:

$$f(d, j, t) = \left|\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{d - d_0 t}}{(d - d_0 t)!}\right| \left|\frac{e^{-k\delta t}\ kt\delta^{\ j-k\delta_0 t}}{(j - k\delta_0 t)!}\right| \tag{2.12}$$

Sabemos que a soma de duas variáveis de Poisson independentes $(d - d_0 t)$ e $(j - k\delta_0 t)$ se distribue como uma única variável de Poisson, com média igual à soma das duas médias simples.

Portanto a distribuição de probabilidade é uma função de uma única variável $|d+j - (d_0+k\delta_0)t^2|$ com média $(\lambda + k\ \delta)$.

A probabilidade de que a demanda total em $\underline{t}$ dias seja no mínimo igual a D é:

$$P_D(t, d_t \geq D) = \sum_{n=|D-Ct|}^{\infty} \frac{e^{-Mt}(Mt)^n}{n!} \tag{2.13}$$

Onde:

$$D = d + j$$

$$C = d_0 + k\delta_0$$

$$M = \lambda + k\delta$$

e $|D - Ct|$ denote o menor inteiro maior que: $D - Ct$.

2.2 - ANÁLISE DA OFERTA

Desejamos calcular $P_s(t, s < S)$, ou seja, a probabilidade de que em t dias o número de unidades que chegam seja no máximo igual a S.

Seja $P_u(t)$ a probabilidade de que haja ao menos um carregamento que chegue em t dias.

Denotemos por $P_{s/u}$ a probabilidade condicional de que a quantidade de um produto que chegue num carregamento seja no máximo igual a S, dado que chega um carregamento.

$P'_{s/u}$ é a probabilidade condicional de que a quantidade no carregamento seja no máximo igual a S, se não chega nenhum carregamento.

Claramente:

$$P'_{s/u} = 1 \qquad \text{para todo } t \tag{2.14}$$

e

$$P_{s/u} = \begin{cases} 0 & \text{se } S < \text{quantidade pedida} \\ 1 & \text{se } S > \text{quantidade pedida} \end{cases}$$

$$P_u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_0 \\ 1-2^{-\alpha(t-t_0)} & \text{para } 0 < t_0 < t \end{cases} \qquad (2.15)$$

A figura IV.1 representa $P_u(t)$

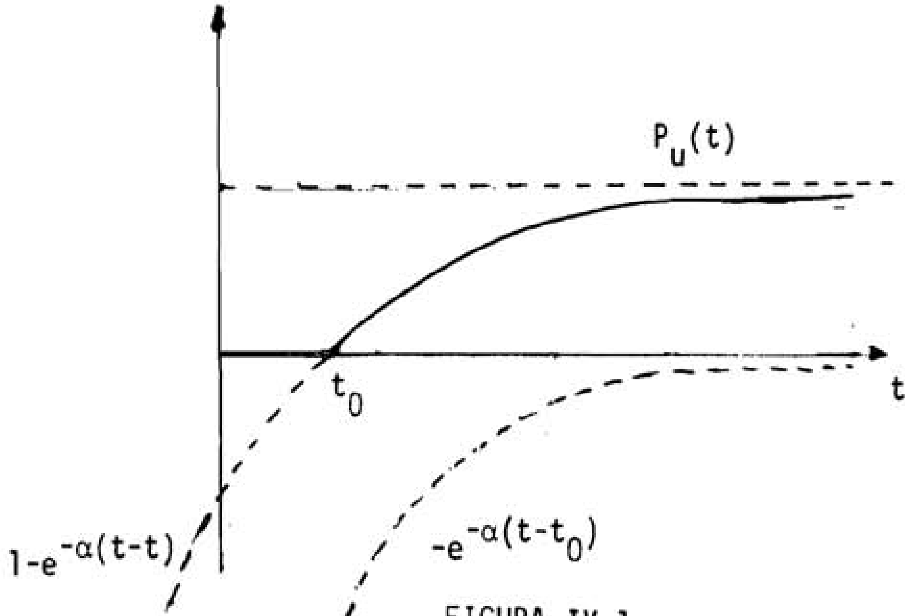


FIGURA IV.1

Como t e s são eventos não independentes, a probabilidade de que ambos ocorram é:

$$P(t, s) = P_u(t)\, P_{s/u}(t, s).$$

Seja:

$$P'(t, s) = P'_u(t)\, P'_{s/u}(t, s) \qquad (2.16)$$

Onde:

$$P'(t) = 1 - P_u(t)$$

Já que P(t, s) e P'(t,s) são as probabilidades de dois eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de um ou outro ocorrer é a soma de suas respectivas probabilidades.

Portanto:

$$P_S(t, s) = P(t, s) + P'(t, s)$$

ou:

$$P_S(t, s < S) = P_u \, P_{s/u} + |1 - P_u| \, P'_{S/u} \qquad (2.17)$$

Então:

$$P_S(t, s \leq S) = 1 \qquad t < t_0$$

$$P_S(t, s < S) = \begin{cases} e^{-(t-t_0)} & \text{para } S < \text{quantidade ordenada} \\ 1 & \text{para } S > \text{quantidade ordenada} \end{cases}$$

$$0 < t_0 < t \qquad (2.18)$$

2.3 - PROBABILIDADE DE ESGOTAR O ESTOQUE:

A probabilidade de esgotar o estoque é uma função composta do nível de estoque inicial S_i no início do ciclo e das variáveis aleatórias da demanda e da oferta de estoque

$$\overline{P} = \overline{P}(S_i, P_D, P_S) \qquad (2.19)$$

Seja n_t o estoque no armazém no tempo t.

Então:

$$n_t = S_i + S_t - D_t \qquad (2.20)$$

onde:

S_i = nível de estoque inicial no armazém no início do ciclo

S_t = quantidade que entra devido a novos carregamentos em t dias

S_t = quantidade que sai devida à demanda até t dias

Seja P_N a probabilidade de que o estoque líquido no armazém seja no máximo N unidades.

$$n_t = S_i + S_t - D_t < N \tag{2.21}$$

Então P_N é:

$$P_N(n_t < N) = \int_{S_t} P_D(t;\ D_t \geq S_i + S_t - N)\ d\ P_S(t;\ s \leq S_t) \tag{2.22}$$

Suponhamos que a oferta de produtos é muito grande. Então a probabilidade de que P_D dependa de S_t é muito pequena. Podemos, portanto, substituir $P_D\ (t;\ D_t > S_i + S_t - N)$ por $P_D(t;\ D_t > S_i - N)$ e por para fora do sinal de integral, obtendo:

$$P_N = P_D \cdot P_S \tag{2.23}$$

Substituindo (2.15) e (2.20) em (2.24), vem:

$$P_N(n_t < N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=S_i-N-Ct} \frac{e^{-Mt}\ (Mt)^n}{n!} & \text{para } t < t_0 \\ \displaystyle e^{-\alpha(t-t_0)} \sum_{n=S_i-N-Ct} \frac{e^{-Mt}\ (Mt)^n}{n!} & \text{para } t > t_0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Fazendo N = 0 em (2.24), obtemos

$P_N(n_t < 0)$, ou seja, a probabilidade de esgotar o estoque em t dias

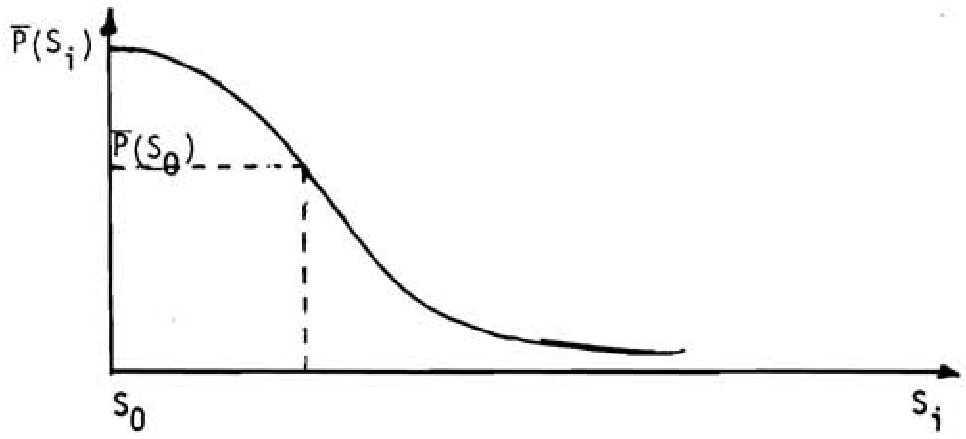
Para determinar o nível de estoque adequado, façamos:

$$\bar{P}\ (S_i) = \max_t\ P_N(n_t < 0) \tag{2.25}$$

De onde o valor de S_i pode ser obtido para um valor prescrito de $\overline{P}(S_i)$, (ver figura IV.2).

Denotemos este valor de S_i por S_0

S_0 é portanto o nível mínimo de estoque inicial necessário para garantir que a probabilidade de esgotar o estoque não é maior que $\overline{P}_N$ (S_0).



NÍVEL DE ESTOQUE ADEQUADO

FIGURA IV.2

A curva de $\overline{P}_N(S_i)$ é obtida calculando-se para cada valor de S_i o valor de t para o qual $P_N(n_t < D)$ é máximo e então fazendo $\overline{P}_N$ (S_i) igual a este na equação (2.25).

APÊNDICE V

RESUMO SOBRE PROGRAMAÇÃO LINEAR

O objetivo da programação linear é determinar os pontos extremos (ponto de mínimo ou ponto de máximo) de uma função linear de várias variáveis, sujeitas a um conjunto de restrições lineares e com a condição de não negatividade.

A formulação clássica de um problema de programação linear é:

$$\min_{X_i} \{ Z = Z_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n \} \tag{5-1}$$

Sujeito a:

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots + a_{1n} X_n \leq b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots + a_{2n} X_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots + a_{mn} X_n \leq b_m \end{array} \tag{5-2}$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \ldots\ldots, X_n \geq 0 \tag{5-3}$$

As desigualdades [1] representadas em (5-2) são as restrições e (5-3) as condições de não negatividade. A função Z é denominada de <u>função objetivo</u>. Podemos representar o sistema de (5-1) a (5-3) de uma maneira mais condensada como:

$$\min_{X_i} \{ Z = Z_0 + \sum_{1}^{n} C_i X_i \} \tag{5-4}$$

1. As desigualdades podem ser do tipo de "maiores ou iguais", "menores ou iguais", podemos ter também igualdades.

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_j \leqslant b_i \qquad i = 1, \ldots\ldots m \tag{5-5}$$

$$X_i \geqslant 0 \ \forall\ i \tag{5-6}$$

Os coeficientes "a_{ij}" são denominados de coeficientes tecnológicos, enquanto os C_i e os b_i são chamados respectivamente de custos reduzidos e disponibilidades. Todos estes valores são fixos.

Adicionando variáveis às expressões (5-5) de modo a transformá-las em igualdades, obtemos:

$$\sum_j a_{ij}\ X_j + S_i = b_i \tag{5-7}$$

as variáveis S_i são denominadas de variáveis de folga.

Definições:

Definição 1 : Solução viável: qualquer conjunto de valores que satisfaça (5-5) e (5-6).

Definição 2 : Solução básica: uma solução obtida colocando-se n - m variáveis iguais a zero e resolvendo-se para as restantes m variáveis. Resaltamos que o determinante da matriz dos coeficientes dos m variáveis deve ser não singular.

Definição 3 : Base: conjunto das m variáveis que são diferentes de zero na obtenção de uma solução básica.

Definição 4 : Solução básica viável: uma solução básica de (5-5) que também satisfaz (5-6)

Definição 5 : Solução ótima: solução viável que satisfaz (5-4)

Definição 6 : Solução básica ótima : solução básica viável que satisfaz (5-4)

Apresentamos em seguida alguns teoremas básicos:

Teorema 1: "O conjunto de soluções viáveis constitue um conjunto convexo cujos pontos correspondem a soluções básicas viáveis".

Teorema 2: "Se uma solução viável existe, então uma solução básica viável existe"

Teorema 3: "Se a função objetivo possui um ponto extremo finito, então pelo menos uma das soluções ótimas é uma solução básica viável"

Na resolução de problemas de programação linear é utilizado o método "Simplex".

O procedimento do simplex é um processo iterativo que partindo de uma solução básica viável determina a solução ótima do problema ou indica a inexistência de solução. |8 |, |12| e |13|.

Problema Dual: associado com todo problema de programação linear (chamado problema primário) existe outro problema de programação linear que é denominado de problema dual.

Se o problema primário é enunciado tal como em (5-4), (5-5) e (5-6) o problema dual tem a forma:

$$\max_{u}\{ v = \sum b_i u_i \} \tag{5-8}$$

Sujeito a:

$$\sum_i a_{ij}\, u_j \geqslant C_j \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad (5\text{-}9)$$

$$u_i \geqslant 0 \qquad (5\text{-}10)$$

Desta forma o problema dual é obtido em (5-5) mudando-se o índice sobre o qual se aplica a somatória e invertendo-se o sinal de desigualdade. Os custos reduzidos e as disponiblidades do primário passam a ser as disponibilidades e os custos reduzidos do dual,respectivamente. Se o primário procura minimizar sua função objetivo, a função objetivo do dual deverá ser maximizada.

O problema dual é muito útil para a interpretação econômica do primário.

Teoremas:

Teorema 1: O dual do dual é o primário

Teorema 2: Se existem soluções viáveis para o primário e para o dual,existe solução ótima para ambos os problemas. Temos ainda:

min Z = máx v

Teorema 3:a)Se existe solução viável para o primário, mas não para o dual, existe uma classe de soluções para o primário tal que

$Z \to -\infty$

b)Se existe solução viável para o dual, mas não para o primário, então existe uma classe de soluções para o dual,tal que:

$v \to +\infty$

Pelo teorema 2, sabemos que na solução ótima se tem:

min Z = máx v

Ou seja:

$$Z = \sum_j C_j X_j = \sum_i b_i u_i$$

Obtemos assim Z como uma função das disponibilidades.

Derivando Z em relação a cada uma das disponibilidades ob temos a utilidade marginal destas últimas. Temos pois:

$$\frac{\partial Z}{\partial b_i} = \frac{\sum_i b_i u_i}{b_i} = u_i$$

Isto nos diz que na solução ótima a i-ésima variável do dual representa a utilidade marginal da i-ésima disponibilidade.

Em geral nos problemas de programação linear a função Z sempre representa ou um custo ou um lucro. As variáveis do dual indicarão portanto ou um custo marginal ou um lucro marginal.

Decomposição em Programação Linear

Para muitos problemas o conjunto de restrições consiste de sub-conjuntos independentes de equações. Estes sub-conjuntos por sua vez aparecem ligados por um pequeno conjunto de equações. Um exemplo de problema deste tipo é:

$$\min\{ Z = \sum_i C_i X_i + \sum d_j y_j \} \qquad (5\text{-}11)$$

Sujeito a:

$$\sum_j \bar{a}_{ij} X_j + \sum_k T_{ik} y_k = \bar{b}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (5\text{-}12)$$

$$\sum_h a_{fh} X_k = b_{1f} \qquad f = 1, 2, \ldots, m_1 \qquad (5\text{-}13)$$

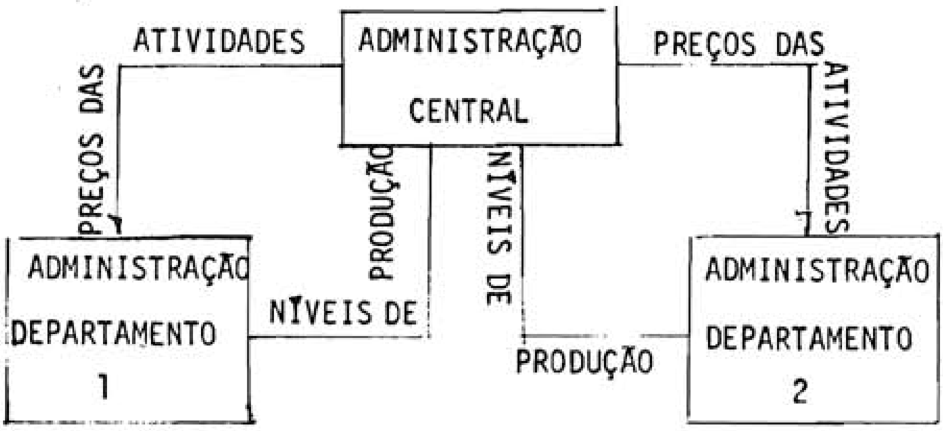
$$\sum l_{rs} y_s = b_{2r} \qquad r = 1, 2, \ldots, m_2 \qquad (5\text{-}14)$$

$$X_j \geq 0, \quad Y_k \geq 0 \quad \forall\ i, k$$

Podemos encarar este tipo de problema como um número de problemas de programação linear separados que devem satisfazer a um conjunto adicional de restrições.

Para solução deste tipo de problema existe o algorítmo da decomposição |8|, que tem uma interessante interpretação econômica em termos de planejamento descentralizado.

Como exemplo de um problema deste tipo consideremos o caso de uma organização industrial que possui dois departamentos, onde existe uma função objetivo comum e um conjunto de restrições que se aplica simultâneamente aos dois departamentos, ao lado de dois conjuntos de restrições impostas a cada departamento isoladamente.



ESQUEMA DE DECOMPOSIÇÃO

FIGURA V.1

Os administrados dos departamentos deverão, além de procurar otimizar o funcionamento de suas próprias unidades, considerar a existência da outra. As administrações dos departamentos serão coordenadas por uma administração central.

Podemos resumir as informações de que dispõe cada administração, bem como suas atribuições, da seguinte maneira:

Administração Central: conhece os valores de $\bar{a}_{ij}$, l_{ik} e $\bar{b}_i$ em (5-12) e a função objetivo Z (5-11). Recebe das administrações dos departamentos valores para os níveis de produção (X's e Y's) que em caráter provisório usará para otimizar o sistema, determinando a proporção em que serão divididos os recursos sob sua responsabilidade. Determinará com isto um conjunto de preços que devem ser atribuidos às atividades dos departamentos.

Administrações Departamentais: conhecem os valores de a_{fh} e b_{if} (l_{rs}, b_{2n}) e recebem da administração central o conjunto de preços que devem ser atribuidos às atividades sob sua responsabilidade. Com estes valores deverão maximizar, de maneira provisória, a utilidade associada ao seu programa de produção. Com isto obterão novos valores dos níveis de produção que enviarão à administração central.

O fluxo de informações entre a administração central e a administração dos departamentos é mostrado na figura V-1.

Um outro tipo de problema que deve ser citado é aquele onde as disponiblidades devem satisfazer a um conjunto de restrições.

Seu enunciado é:

$$\min \{Z_0 = \sum_i C_i X_i\}$$

Sujeito a:

$$\sum_i a_{ij} X_j \leq y_j \qquad j = 1, \ldots\ldots, m_1$$

$$\sum_r b_{rs} y_s \leq p_s \qquad s = 1, \ldots\ldots, m_2$$

$$X_j \geq 0 \quad \forall j$$

No caso em que este modelo representa um sistema de produção, devemos determinar os níveis das atividades produtivas (X's) e das disponiblidades dos recursos de produção (b's) que otimizem o sistema.

Considerando que o poder de decisão é dividido entre dois responsáveis, podemos dar uma interpretação econômica a este tipo de problema.

Suponhamos que existe uma administração dos produtos e uma administração dos recursos, com atribuições e informações assim definidas:

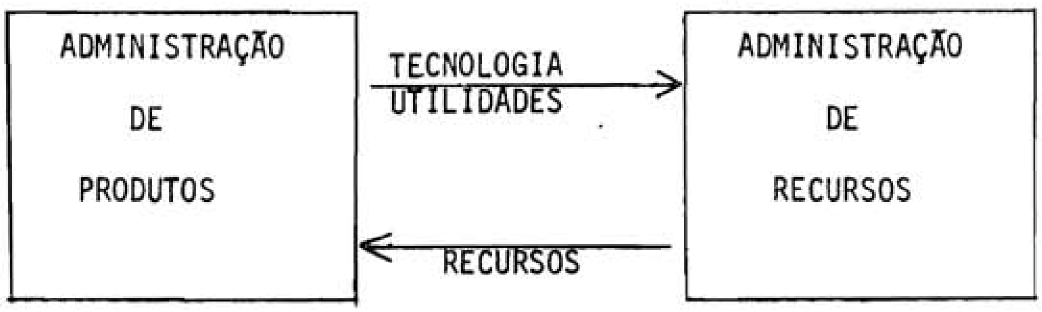
Administração dos produtos:

Conhece os valores de a_{ij} e a função objetivo. Recebe da administração de recursos valores particulares para as disponibilidades destes recursos (b's) e deve otimizar o seu problema de produção. Determinará com isso as utilidades marginais das disponibilidades, que enviará à administração dos recursos. Deverá também enviar para a administração de recursos os valores de a_{ij} associados aos níveis de produção(X_j) diferentes de zero na solução ótima, de modo a que os novos valores das disponibilidades, determinandos por aquela administração, não tornem inviável o problema de produção.

Administração de Recursos

Conhece os valores de b_{rs} e de p_s. Recebendo da administração dos produtos as utilidades marginais associadas aos recursos de produção pela solução ótima mais recente do problema de produção, deve otimizar a escolha das disponiblidades dos recursos. Feito isso enviará estes valores à administração dos produtos e o processo se repetirá até atingirmos a solução ótima global. Um algorítmo para solução deste tipo de problema encontra-se no livro "Programação Linear" |13|, de Girão e Ellenrieder.

Na figura V-2 apresentamos o fluxo de informações entre a administração de recursos e a administração de produtos.



FLUXO DE INFORMAÇÕES
FIGURA V-2

RELAÇÃO DOS SÍMBOLOS UTILIZADOS

		pag.*
a	: número de mes em que se processa a colheita	21
A^*	: matriz dos coeficientes tecnológicos relativos aos vetores X e Y	49
A_1	: idem, relativos ao vetor X	48
A_{1j}	: idem, relativos ao vetor X_j	53
A_2	: idem, relativos ao vetor Y	48
A_{2j}	: idem, relativos ao vetor Y_j	53
$\bar{A}_1$	: idem, relativos ao vetor X na restrição que envolve simultâneamente os vetores X e Y	56
$\bar{A}_2$	: idem, idem, relativos ao vetor Y	56
$\bar{A}_{1j}$	: idem, relativos ao vetor X_j na restrição que envolve simultâneamente os vetores X_j e Y_j	63
$\bar{A}_{2j}$	: idem, idem, relativos aos vetor Y_j.	63
A^*_{11}	: matriz dos coeficientes tecnológicos das variáveis básicas na solução ótima	50
$\bar{b}$	: vetor dos termos independentes na restrição que envolve simultâneamente os vetores X e Y	56
b^*	: idem, nas restrições impostas a X^*	49
b_1	: vetor cujos elementos são as produções e as disponibilidades médias de estocagem	48
b_2	: vetor cujos elementos são as disponibilidades médias de estocagem e das demandas nos centros de consumo	48

* Número da página onde o símbolo aparece pela primeira vez.

SIGLAS

BIBLIOGRAFIA

[1] - ABDEL Meguid El-Shaieb *Optimal Activity Locations* Berkeley - Operations Research Center - University of Berkeley, Califõrnia February 1968.

[2] - ACKOFF, Sasieni *Fundamentos de Investigacion Operaciones* Mexico, Buenos Aires, Centro Regional de Ayuda Tecnica, 1971

[3] - AVASDESH, K. Nigam *Optimal Strategies in Capacity Expansions* Berkeley, Operation Research Center, 1970

[4] - BONETT, R.M. *Metodos de Optimizacion* Mexico, Buenos Aires, Centro de Ayuda Tecnica.

[5] - BURSTALL, R.M. LEAVER, R.A. *Evaluation of Transport Costs for Alternative Factory Sites* Operational Research Quartterly, Vol.13, nº 4, December 1962.

[6] - CHESTNUT, H., *Systems Engineering Methods* New York, John Wiley e Sons, Inc., 1967

[7] - CHRIST, C.F., *Econometric Models and Methods* New York, John Wiley e Sons, Inc., 1966.

[8] - DANTZIG, G.B. *Linear Programming and Extensions* New Jersey, Princeton University Press, 1963.

[9] - EFROYMSON, M. e RAY, T., *A Branch and Bound Algorithm for Plant Location* Operations Research, Vol 14, 1966

[10] - EVANS, Michael K. *Macroeconomic Activity.* New York, Harper e Row, Publishers, Harper International Ed. 1969.

[11] - FORD, L.R. Jr. e FULKERSON, D.R., *Flows in Networks* Princeton, Princeton University Press, 1962

[12] - GARVIN, W.W. *Introduction To Linear Programming.* New York, McGraw-Hill, 1960.

[13] - GIRÃO, S.E., ELLENRIEDER, A.R. *Programação Linear.* Rio de Janeiro, Almeida Neves Editora, 1971.

[14] - GOMORY, R.E. e HU, T.C., *Synthesis of a Communication Network* I. Soc. Indust. Appli. Math. Vol 12, nº 2, junho, 1964 - Philadelphia.

[15] - GRAYBILL, F.A. *An Introduction To Linear Statistical Models.* New York, McGraw-Hill, 1961.

[16] - KLEIN, L.R., *Introduccion a la Econometria,* Aguilar, S.A. de Ediciones.

[17] - MARKS, D.H., *Facility Location and Routing Models in Solid Waste Collection Systems* Ph.D. Tesis, The John Hopkins University, November, 1969

[18] - MARTINEZ, F. *Curso de Comercializacion Agricola* Santiago, Instituto de Desarrollo Agropecuario, 1969.

[19] - MOOD, A.M. e GRAYBILL, F.A., *Introduction to the Theory of Statistics* New York, McGraw-Hill Book Co., Inc., International Student Edition, 1963.

[20] - PONSARD,Claude - *Modelo de Localização Ótima de uma Unidade de Produção em Estrutura de Concorrência.* Paris - Revue Europee 1966.

[21] - *Pesquisa Básica sobre Armazenagem Intermediária*

[22] - TINTNER, Gerhard. *Econometrics* New York, John Wiley e Sons, Inc., Science Editions, 1965.