



AUTORES AUTHORS	PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS <i>DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS FILTRO DE KALMAN SUAVIZAÇÃO DE ESTADO</i>		AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY <i>Ralf Gielow Pres. Cons. Pós-Grad.</i>
	AUTOR RESPONSÁVEL RESPONSIBLE AUTHOR <i>Hélio Koiti Kuga</i>	DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION <input type="checkbox"/> INTERNA / INTERNAL <input checked="" type="checkbox"/> EXTERNA / EXTERNAL <input type="checkbox"/> RESTRITA / RESTRICTED	REVISADA POR / REVISED BY <i>Valcir Orlando</i>

COU/UDG <i>521.3:629.7.076.6</i>	DATA / DATE <i>Novembro, 1989</i>
-------------------------------------	--------------------------------------

TÍTULO/TITLE	PUBLICAÇÃO Nº PUBLICATION NO <i>INPE-4959-TDL/388</i>	ORIGEM ORIGIN <i>PG/DEM</i>	
	AUTORES/AUTHORSHIP  <i>Hélio Koiti Kuga</i>		PROJETO PROJECT <i>FRH/CEA</i>
Nº DE PAG. NO OF PAGES <i>249</i>			ULTIMA PAG. LAST PAGE <i>C.9</i>
VERSÃO VERSION			Nº DE MAPAS NO OF MAPS

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

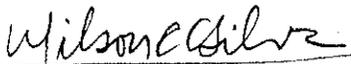
*Este trabalho apresenta técnicas de filtragem e suavização aplicadas à determinação de órbitas de satélites terrestres. O filtro de Kalman é implementado na forma fatorizada UD, em conjunto com uma técnica adaptativa para estimar o nível de ruído dinâmico, para prevenir a divergência das estimativas devido ao modelo impreciso do movimento orbital. O suavizador utilizado é uma versão numericamente eficiente do suavizador de Rauch-Tung-Striebel, proposto por Bierman em 1983. Este suavizador, desenvolvido na forma UD, mostra-se econômico e competitivo para implementação em computador. Simulações digitais foram realizadas para duas situações de determinação de órbita: i) curtos arcos com geometria de rastreamento favorável; ii) longos arcos com estações de rastreamento existentes. Testes contendo vários níveis de degradação de modelagem foram produzidos. O filtro UD adaptativo se comporta de forma a contornar estes problemas de modelagem e não permite a ocorrência de divergência. O suavizador UD é usado para melhorar a precisão, sendo assim uma ferramenta útil em reconstituição de trajetórias do movimento orbital.*

OBSERVAÇÕES/REMARKS

*Tese de Doutorado em Ciência Espacial / Mecânica Orbital, aprovada em 17 de maio de 1989.*

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Doutor  
em Ciência Espacial

Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva

  
\_\_\_\_\_  
Presidente

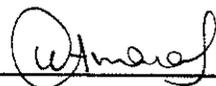
Dr. Valcir Orlando

  
\_\_\_\_\_  
Orientador

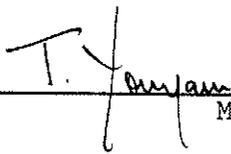
Dr. Atair Rios Neto

  
\_\_\_\_\_  
Orientador

Dr. Wagner Caradori do Amaral

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Takashi Yoneyama

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Agenor de Toledo Fleury

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
-convidado-

Candidato: Hélio Koiti Kuga

São José dos Campos, 17 de maio de 1989

Aos meus pais.

## Agradecimentos

Aos orientadores Dr. Valcir Orlando e Dr. Atair Rios Neto pelas orientações não só ao longo da evolução da tese, mas também durante a convivência acadêmica e profissional.

Ao INPE pelas facilidades oferecidas e, em particular, à secretaria de pós-graduação, à biblioteca e à coordenação acadêmica do curso de Ciência Espacial/Mecânica Orbital pelo apoio humano e material colocado a disposição.

Aos demais membros da banca: Prof. Takashi Yoneyama (ITA), Prof. Wágner C. do Amaral (UNICAMP), Prof. Agenor de Toledo Fleury (Embraer), e Prof. Wilson C. C. Silva (INPE) pelas valiosas sugestões apresentadas, bem como pelas discussões e apreciação desinteressada do trabalho.

Aos colegas Roberto V. F. Lopes, Valdemir Carrara, Kondapalli Rama Rao, Luís Danilo D. Ferreira e Danton Nunes, que com o apoio e palavras de incentivo não deixaram o desânimo predominar nas fases adversas. Aos demais que, embora não citados injustamente nestas linhas rascunhadas apressadamente, colaboraram direta ou indiretamente para a realização do trabalho.

### Abstract

This work presents filtering and smoothing techniques applied to orbit determination of earth satellites. A Kalman filter is implemented in the UD factorization form along with an adaptive procedure for estimating the dynamic noise level, which prevents the divergence of estimates due to inaccurate modelling of the orbital motion. The smoother used is a numerically efficient version of the Rauch-Tung-Striebel smoother as proposed by Bierman in 1983. This smoother, developed in the UD form, has proven to be economical, compact and competitive for computer implementation. Digital simulations were performed for 2 situations of orbit determination: i) short arcs with favorable tracking geometry; ii) long arcs with existing tracking stations. Tests containing many levels of modelling degradation were carried out. The adaptive UD filter behaves so as to deal with these modelling nuisances and does not allow the divergence phenomenon to occur. The UD smoother is used to improve the accuracy of the estimates and of the covariances. The results show that in general the UD smoother enhances the accuracy, being therefore a useful tool to reproduce accurately the trajectory of the orbital motion.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS .....	xiii
LISTA DE TABELAS .....	xv
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xvii
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO 2 - MÉTODOS NUMÉRICOS DE ESTIMAÇÃO ESTATÍSTICA DE ESTADO</u> .....	7
2.1 - Mínimos quadrados .....	7
2.1.1 - Solução convencional .....	8
2.1.2 - Solução através de transformações ortogonais ..	10
2.1.3 - Mínimos quadrados para sistemas não lineares ..	13
2.2 - Filtro de Kalman .....	18
2.2.1 - Solução convencional, filtro de covariância ..	19
2.2.2 - Filtro de informação .....	22
2.2.3 - Filtros de raiz quadrada .....	23
2.2.4 - Filtro UD .....	29
2.2.5 - Filtro estendido de Kalman .....	33
<u>CAPÍTULO 3 - SUAVIZAÇÃO DE ESTADO DE INTERVALO FIXO</u> ..	43
3.1 - Suavizadores convencionais .....	47
3.2 - Suavizadores de raiz quadrada .....	52
<u>CAPÍTULO 4 - TÉCNICAS ADAPTATIVAS</u> .....	57
4.1 - Ruído adaptativo .....	63
4.1.1 - Equação de pseudo-medidas .....	64
4.1.2 - Implementação sequencial do ruído adaptativo..	67
4.1.3 - Implementação em lote ("batch") do ruído adaptativo .....	69

	<u>Pág.</u>
4.1.4 - Cálculo do resíduo para o ruído adaptativo ...	70
4.1.5 - Cálculo da matriz G .....	72
4.1.6 - Controlabilidade e a matriz G .....	76
4.2 - Filtro adaptativo UD .....	86
4.2.1 - Cálculo da pseudo-medida .....	87
4.2.2 - Implementação sequencial UD do ruído adaptati- vo .....	90
4.2.3 - Implementação em lote do ruído adaptativo atra- vés de ortogonalização .....	93
4.2.4 - Análise do custo adicional da implementação adaptativa .....	96
4.3 - Suavização UD .....	100
4.3.1 - Suavizador de Bierman .....	102
4.3.2 - Suavizador na forma UD .....	108
 <u>CAPÍTULO 5 - NOÇÕES DE OBSERVABILIDADE E CONTROLABI- DADE</u> .....	 115
5.1 - Sistemas lineares invariantes no tempo .....	116
5.2 - Sistemas lineares estocásticos .....	120
5.3 - Observabilidade em determinação de órbita .....	121
 <u>CAPÍTULO 6 - MODELAGEM DA DINÂMICA DE ÓRBITA</u> .....	 127
6.1 - Dinâmica dos dois corpos .....	128
6.2 - Perturbações agentes .....	128
6.3 - Matriz de transição de estado .....	131
6.4 - Modelagem das observações .....	135
6.5 - Formulação das equações diferenciais do movimen- to .....	140

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 7 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</u> .....	143
7.1 - Formulação normal do problema de determinação de órbita .....	143
7.2 - Implementação do filtro adaptativo UD em determinação de órbita .....	145
7.3 - Implementação do suavizador UD em determinação de órbita .....	149
 <u>CAPÍTULO 8 - SIMULAÇÕES E TESTES DE DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA</u> .....	 153
8.1 - Sensibilidade numérica dos algoritmos de filtragem .....	153
8.2 - Testes de robustez do filtro adaptativo UD .....	159
8.2.1 - Tendência no modelo dinâmico .....	166
8.2.2 - Modelo dinâmico simplificado .....	174
8.2.3 - Manobra não modelada .....	180
8.3 - Avaliação dos custos computacionais dos algoritmos de filtragem .....	185
8.4 - Testes do suavizador UD .....	188
8.4.1 - Tendência no modelo dinâmico .....	189
8.4.2 - Modelo dinâmico simplificado .....	190
8.4.3 - Manobra não modelada .....	193
8.5 - Avaliação dos custos computacionais do suavizador UD .....	195
8.6 - Determinação de órbita de longos arcos .....	197
8.6.1 - Modelo dinâmico dos dois corpos .....	203
8.6.2 - Modelo dinâmico considerando o fator $J_2$ .....	205
8.6.3 - Análise computacional do filtro adaptativo UD para longos arcos .....	211
8.7 - Suavização de órbita em longos arcos .....	212

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 9 - CONCLUSÕES GERAIS</u> .....	215
9.1 - Retrospecto .....	215
9.2 - Contribuições .....	215
9.3 - Conclusões .....	217
9.4 - Desenvolvimentos futuros .....	218
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	 219
 APÊNDICE A - TRANSFORMAÇÃO DE HOUSEHOLDER	
APÊNDICE B - ALGORITMOS UD COMPLEMENTARES	
APÊNDICE C - PROVAS DO SUAVIZADOR DE BIERMAN	

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Os três tipos de suavizadores: (a) intervalo fixo, (b) ponto fixo, (c) janela fixa .....	44
8.1 - Erros reais para os filtros FKPS (filtro de Kalman em precisão simples), UDPS (filtro UD em precisão simples), e FKPD (filtro de Kalman em precisão dupla) .....	158
8.2 - Geometria da órbita em relação às 3 estações de rastreamento .....	161
8.3 - Erros sem aumento da covariância das medidas ...	167
8.4 - Erros com aumento da covariância das medidas ...	168
8.5 - Erros do filtro UD convencional para tendências no modelo dinâmico .....	170
8.6 - Resíduos normalizados do filtro UD convencional para tendências no modelo dinâmico .....	171
8.7 - Erros do filtro UD adaptativo para tendências no modelo dinâmico .....	172
8.8 - Resíduos normalizados do filtro UD adaptativo para tendências no modelo dinâmico .....	173
8.9 - Erros do filtro UD convencional para modelo simplificado .....	175
8.10 - Resíduos normalizados do filtro UD convencional para modelo simplificado .....	176
8.11 - Erros do filtro UD adaptativo para modelo simplificado .....	177
8.12 - Resíduos normalizados do filtro UD adaptativo para modelo simplificado .....	178
8.13 - Comparação entre as acelerações não modeladas e o nível de ruído .....	179
8.14 - Erros do filtro UD convencional para manobra não modelada .....	181
8.15 - Resíduos normalizados do filtro UD convencional para manobra não modelada .....	182

	<u>Pág.</u>
8.16 - Erros do filtro UD adaptativo para manobra não modelada .....	183
8.17 - Resíduos normalizados do filtro UD adaptativo para manobra não modelada .....	184
8.18 - Erros em posição do filtro e do suavizador para modelo tendencioso .....	191
8.19 - Erros em velocidade do filtro e do suavizador para modelo tendencioso .....	191
8.20 - Erros em posição do filtro e do suavizador para modelo simplificado .....	192
8.21 - Erros em velocidade do filtro e do suavizador para modelo simplificado .....	192
8.22 - Erros em posição do filtro e do suavizador para manobra não modelada .....	194
8.23 - Erros em velocidade do filtro e do suavizador para manobra não modelada .....	194
8.24 - Geometria entre a órbita do satélite GIOTTO e as estações de rastreamento (projeção de Mercator) .....	200
8.25 - Geometria entre a órbita do satélite GIOTTO e a Terra girante (projeção ortográfica) .....	201
8.26 - Erros do filtro adaptativo UD para modelo kepleriano puro .....	204
8.27 - Resíduos normalizados do filtro adaptativo UD para modelo kepleriano puro .....	206
8.28 - Erros do filtro adaptativo UD para modelo com $J_2$ .....	209
8.29 - Resíduos normalizados do filtro adaptativo UD para modelo com $J_2$ .....	210
8.30 - Erros em posição do filtro e do suavizador para a órbita do satélite GIOTTO .....	213
8.31 - Erros em velocidade do filtro e do suavizador para a órbita do satélite GIOTTO .....	213
A.1 - Reflexão de Householder .....	A2

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 - "Flops" para preparação de variáveis do ruído adaptativo .....	90
4.2 - Implementação sequencial do ruído adaptativo ...	93
4.3 - Implementação em lote do ruído adaptativo .....	96
4.4 - Operações para implementação do ruído adaptativo	97
4.5 - Custo adicional para implementação do ruído adaptativo .....	99
4.6 - Custo adicional na fase de filtragem convencional .....	104
4.7 - Operações aritméticas para estimativa suavizada.	106
4.8 - Operações aritméticas para covariância suavizada convencional .....	107
4.9 - Custo adicional na fase de filtragem UD .....	110
4.10 - Operações aritméticas para covariância suavizada UD .....	113
6.1 - Precisão das medidas de "range" e "range-rate" .	136
6.2 - Precisão das medidas de azimuth e elevação .....	137
8.1 - Tempos de CPU .....	186
8.2 - Armazenamento necessário por passo .....	195
8.3 - Gastos de CPU do suavizador e filtros UD .....	196
8.4 - Tempos de CPU do filtro UD para os 2 modelos dinâmicos .....	211
8.5 - Tempos de CPU incluindo o processo de suavização .....	214

## LISTA DE SÍMBOLOS

- a - Semi-eixo maior da órbita
- $\dot{a}$  - Derivada temporal da aceleração
- $\vec{a}_{nm}$  - Vetor de acelerações não-modeladas, dimensão 3
- A - Matriz simétrica de derivadas parciais da aceleração em relação à posição, dimensão 3x3; ou matriz auxiliar do suavizador de raiz quadrada
- A(k) - Escalar resultado do processo de ortogonalização nos estimadores de raiz quadrada
- b - Vetor pseudo-estado do suavizador de raiz quadrada, dimensão n; ou vetor resultado do processo de ortogonalização, dimensão nx1
- B - Matriz de inclusão do ruído dinâmico contínuo, dimensão nxr; ou matriz de inclusão do termo forçante em sistemas contínuos, dimensão nxr; ou matriz auxiliar do suavizador de raiz quadrada
- B(k) - Vetor linha resultado do processo de ortogonalização nos estimadores de raiz quadrada, dimensão 1xn
- c - Escalar resultado do processo de ortogonalização
- C - Matriz de controlabilidade
- $C_i^*$  - Ganho recursivo da fase de suavização, dimensão nxn
- C(k) - Ganho do suavizador RTS, dimensão nxn; ou matriz auxiliar do suavizador BF e 2 filtros
- d - Vetor pseudo-estado do filtro de informação, dimensão n
- D - Matriz diagonal, dimensão nxn, usualmente parte da fatorização UD

$\hat{D}_i^*$	- Matriz diagonal recursiva da fase de suavização, dimensão $n \times n$
$e$	- Excentricidade da órbita
$E$	- Matriz auxiliar do suavizador de 2 filtros
$E[\cdot]$	- Operador esperança
$f$	- Função não-linear vetorial do estado, dimensão $n$
$F$	- Matriz de evolução do estado contínuo, dimensão $n \times n$ ; ou matriz de derivadas parciais em relação ao estado $F = \partial f / \partial x$ , dimensão $n \times n$ ; ou matriz de ganho do ruído no estado do suavizador RTS, dimensão $r \times r$
$g_i$	- Vetor contendo as componentes das colunas da matriz $G = (g_1, g_2, \dots, g_r)$ , dimensão $n \times 1$
$G$	- Matriz de inclusão do ruído discreto no estado, dimensão $n \times r$
$h$	- Função não-linear vetorial das observações, dimensão $m$
$H$	- Matriz que relaciona observações ao estado, dimensão $m \times n$ ; ou altitude a partir da superfície da Terra
$H_1$	- Matriz triangular superior, dimensão $n \times n$ , usualmente resultado de triangularização
$i$	- Inclinação da órbita
$I$	- Matriz de observabilidade
$J$	- Função de custo, índice de desempenho
$J_2$	- Coeficiente do harmônico esférico que representa o achatamento terrestre
$K$	- Ganho de Kalman, dimensão $n \times m$
$K_q$	- Ganho de Kalman do ruído adaptativo, dimensão $r \times 1$
$K(\cdot)$	- Número de condição da matriz .
$L$	- Matriz auxiliar do suavizador de 2 filtros
$m$	- Dimensão das observações

M	- Vetor que relaciona a pseudo-medida ao vetor q de ruído, dimensão $r \times 1$ ; ou anomalia média da órbita
n	- Dimensão do estado
$p[\cdot]$	- densidade de probabilidade da variável .
P	- Matriz de covariância dos erros no estado, dimensão $n \times n$
$P_i^*$	- Matriz de covariância recursiva da fase de suavização, dimensão $n \times n$
$\vec{p}$	- Vetor de perturbações agentes na órbita, dimensão 3
$P^{-1}$	- Matriz de informação do erro no estado, dimensão $n \times n$
$P_q$	- Matriz de covariância do erro em q, dimensão $r \times r$
q	- Vetor contendo as componentes da diagonal da matriz Q, dimensão r
Q	- Covariância do ruído no estado; ou densidade espectral do ruído no estado, dimensão $r \times r$ ;
r	- dimensão do ruído no estado; ou resíduo da observação
$\vec{r}$	- Vetor de posição, dimensão 3
$r_n$	- resíduo normalizado
$r_v$	- resíduo verdadeiro da observação
R	- Covariância do erro nas observações, dimensão $m \times m$ ; ou matriz genérica definida positiva
S	- Matriz raiz quadrada triangular superior
$S_0$	- Matriz de informação a priori $S_0 (= P_0^{-1})$ , dimensão $n \times n$
T	- Matriz de transformação ortogonal (usualmente da transformação de Householder)
u	- Vetor de entrada, termo forçante de sistemas contínuos, dimensão $r \times 1$
U	- Matriz triangular superior unitária, dimensão $n \times n$ , usualmente parte da fatorização UD; ou matriz ortonormal da SVD, dimensão $n \times n$

- $\hat{U}_i^*$  - Matriz U triangular superior unitária recursiva da fase de suavização, dimensão  $n \times n$
- $v$  - Vetor de erros de observação, dimensão  $m$
- $\vec{v}$  - Vetor de velocidade, dimensão 3
- $v_i$  - Vetor auxiliar do suavizador de Bierman, dimensão  $n \times 1$
- $V$  - Matriz raiz quadrada de  $R (=VV^T)$ , dimensão  $m \times m$ ; ou matriz ortonormal da SVD, dimensão  $(n+r) \times (n+r)$
- $x$  - Vetor de estado, dimensão  $n$
- $\bar{x}(\cdot)$  - Vetor de estado propagado no instante  $\cdot$  da fase de filtragem, dimensão  $n$
- $\hat{x}(\cdot)$  - Vetor de estado atualizado no instante  $\cdot$  da fase de filtragem, dimensão  $n$
- $\hat{x}(\cdot/N)$  - Vetor de estado suavizado no instante  $\cdot$  da fase de suavização, dimensão  $n$
- $\hat{x}_i^*$  - Vetor de estado recursivo da fase de suavização, dimensão  $n$
- $y$  - Vetor de observações, dimensão  $m$
- $y_1$  - Partição  $n \times 1$  do vetor  $y$ , usualmente resultado da triangularização
- $y_2$  - Partição  $(m-n) \times 1$  do vetor  $y$ , usualmente resultado da triangularização
- $Y$  - Matriz de informação do erro no estado, dimensão  $n \times n$ , usado no suavizador de 2 filtros
- $z$  - pseudo-medida
- $w$  - Vetor de ruído no estado, dimensão  $r$
- $W$  - Matriz de peso das observações, dimensão  $m \times m$ ; ou matriz raiz quadrada de  $Q=WW^T$ , dimensão  $r \times r$ ; ou matriz composta para aplicação do algoritmo de Gram-Schmidt, dimensão  $n \times (n+r)$ ; ou matriz de covariância do ruído dinâmico em  $q$  (ruído adaptativo), dimensão  $r \times r$
- $\alpha$  - Variância do resíduo predito; ou escalar auxiliar do ruído adaptativo

$\beta$	- Escalar auxiliar da matriz de controlabilidade; ou escalar auxiliar do ruído adaptativo
$\gamma$	- Escalar auxiliar da matriz de controlabilidade
$\delta_i$	- Escalar auxiliar do suavizador de Bierman
$\epsilon$	- Número "epsilon" do computador utilizado
$\eta$	- ruído da pseudo-medida
$\theta$	- Longitude sideral da estação de rastreamento
$\lambda$	- Auto-valor; ou variável adjunta do suavizador BF; ou longitude leste
$\lambda_i$	- Escalar auxiliar do suavizador de Bierman
$\Lambda$	- Matriz adjunta do suavizador BF
$\mu$	- Constante geogravitacional
$\rho$	- medida de alcance ("range")
$\dot{\rho}$	- medida de variação do alcance ("range-rate")
$\sigma$	- Parâmetro constante para cálculo da matriz G
$\Sigma$	- Matriz retangular diagonal da SVD, dimensão $n \times (n+r)$
$\phi$	- matriz de transição, dimensão $n \times n$ ; ou latitude geodésica
$\phi_q$	- Matriz de transição do ruído adaptativo, dimensão $r \times r$
$\psi$	- Latitude geodésica da estação de rastreamento
$\omega$	- Argumento do perigeu da órbita
$\Omega$	- Ascensão reta do nodo ascendente da órbita

### Índices superiores

$T$	- Transposta da matriz ou vetor
$-$	- Variáveis propagadas do filtro de Kalman
$\wedge$	- Estimativa ou variáveis atualizadas do filtro de Kalman
$-1$	- Inversa de matriz
$-T$	- Inversa e transposta de matriz = $((.)^{-1})^T$

## Índice inferior

- o - Informação a priori

## Especiais

- $\delta$ . - Variação ou perturbação em .
- $\delta(\cdot)$  - Delta de Dirac
- $\delta_{ij}$  - Delta de Kronecker
- $\delta P$  - Erro global acumulado na matriz de covariância
- $\Delta K^*$  - Erro de truncamento no pseudo-ganho
- $\Delta P$  - Erro de truncamento na matriz de covariância
- $\Delta r$  - Erro real em posição
- $\hat{\Delta r}$  - Erro estimado em posição
- $\Delta r^*$  - Erro suavizado em posição
- $\hat{\Delta r}^*$  - Desvio-padrão suavizado em posição
- $\Delta v$  - Erro real em velocidade
- $\hat{\Delta v}$  - Erro estimado em velocidade
- $\Delta v^*$  - Erro suavizado em velocidade
- $\hat{\Delta v}^*$  - Desvio-padrão suavizado em velocidade
- $\Delta x$  - Erro de truncamento na estimativa do estado
- $\|\cdot\|$  - Norma euclidiana ou norma 2
- $\|\cdot\|_A$  - Norma ponderada =  $\cdot^T A \cdot$
  
- CPU - Unidade central de processamento ("Central Processor Unit")
- flops - Operações de ponto flutuante ("Floating Point Operations")
- rank - Posto da matriz ("rank")
- SVD - Decomposição de valor singular ("Singular Value Decomposition")

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Em missões espaciais, a reconstituição e previsão da trajetória orbital a partir de medidas de rastreamento permitem o acompanhamento do satélite, e com isso a execução de todas as tarefas operacionais de manutenção e exploração deste em sua vida útil. Dentre estas tarefas podem-se citar as correspondentes aos sistemas de operação da carga útil, telemetria, telecomando e o monitoramento dos subsistemas de bordo que podem, quando a órbita é bem determinada, ser executadas sem contratempos evitando prejuízos para a missão. Nesse contexto, a determinação de órbita adquire primordial destaque, pois fornece condições para cumprimento destes requisitos. A precisão da determinação de órbita depende do sistema de rastreamento em conjunto com a metodologia de estimação utilizada. A correta utilização do sistema de rastreamento, por sua vez, depende da precisão na determinação, já que os resultados são realimentados para o apontamento da antena e acompanhamento do satélite durante cada passagem deste pela estação de rastreio. Além disso, o conhecimento preciso da órbita fornece valiosas informações acerca dos desvios em relação à trajetória nominal desejada, permitindo correções de órbita, manobras de transferência orbital, e previsão de problemas como os de deterioração da missão, redução do tempo de vida útil, e de problemas que tais desvios podem acarretar na atitude do satélite.

Com a crescente tendência em direção à computação a bordo, e o avanço tecnológico dos sistemas de micro-computadores cada vez mais potentes e com maior capacidade, cresce a demanda por programas (software) de determinação de órbita em tempo real a bordo. Mesmo para

determinação de órbita em solo, estimadores de tempo real estão sendo mais utilizados, à medida que se desenvolvem técnicas que garantem confiabilidade e robustez a falhas. Aspectos numéricos de estabilidade, robustez, complexidade computacional, e economia na memória de armazenamento são cada vez mais enfatizados no processo de desenvolvimento de métodos e algoritmos de determinação de órbita. Raol e Sinha (1985), por exemplo, compilam várias aplicações em determinação de órbita nas quais se abordam técnicas adaptativas, algoritmos numéricos, e formulações do problema. Importantes aspectos da determinação de órbita são criticamente discutidos, com especial ênfase para características de confiabilidade, precisão e eficiência dos algoritmos normalmente utilizados.

A principal motivação para este trabalho é a aplicação de técnicas modernas de estimação de estado ao problema específico de determinação de órbita. Dois aspectos devem ser enfocados: o aspecto determinístico que engloba a modelagem do sistema e a formulação do problema em termos da adequação do sistema de equações adotado para representar a dinâmica, e o aspecto estocástico no qual a teoria de estimação estatística deve ser manuseada de forma a tornar plausível sua utilização. A determinação de órbita em particular, apresenta um grande inconveniente adicional imposto pela característica não-linear tanto da dinâmica do movimento orbital, como das observações.

A modelagem do movimento orbital consiste em aplicar teorias de Mecânica Celeste para formular as equações que regem sua dinâmica, num sistema de coordenadas convenientemente escolhido. O grau de complexidade e sofisticação da modelagem dependem da precisão com que se deseja a previsão do movimento. Estimadores para funcionarem em tempo real, devido a este vínculo, exigem

modelos simples porém precisos o suficiente para não degradar seu desempenho. Não obstante, um dos principais focos de divergência das estimativas provém da modelagem incorreta, o que comumente ocorre nos estimadores para aplicações em tempo real, devido a necessidade de simplificação do modelo.

Para o procedimento de estimação, entretanto, propõe-se a utilização de uma técnica adaptativa de estimação do nível de ruído no estado (Rios Neto e Kuga, 1982a, 1982b, 1985), para sanar o problema de divergência das estimativas aumentando a robustez do filtro de Kalman. Algoritmos computacionais algebricamente equivalentes ao filtro de Kalman (como o filtro UD por exemplo), mas com propriedades de estabilidade numérica superior (Bierman, 1977), são adaptados para o problema particular de determinação de órbita.

Propõe-se também a utilização de um método de suavização de estado eficiente e de baixo custo computacional (Bierman, 1983), para o refinamento e a reconstituição completa da órbita. Com isso, reconstitue-se com grande precisão a trajetória orbital em todo o intervalo onde observações foram coletadas, de forma a permitir análises pós-vôo e reconstituição de eventos ocorridos durante este período. O suavizador adotado (Bierman, 1983) é modificado para formas computacionais estáveis (suavizador UD), de modo a apresentar características de estabilidade numérica e manter consistência com os algoritmos estáveis utilizados na fase de filtragem, além de ser adaptado para aplicação em problemas não-lineares. Não se tem conhecimento até o presente, sobre a aplicação de suavizadores de estado para o problema não-linear completo de determinação de órbita, e em particular do suavizador adotado.

Em geral, requisitos de tempo real geram "per se" a pesquisa de algoritmos econômicos que mecanizam sua implementação, através de artifícios de programação, recursões e manipulação algébrica apropriada de equações. O livro de Bierman (1977) e a tese de Kaminski (1971) são considerados referências representativas que incentivaram investigações cada vez mais profundas ponderando análise numérica, técnicas de programação, teoria de programação dinâmica, e álgebra linear para problemas de estimação e controle linear. Advém daí um dos principais enfoques do presente trabalho: análises detalhadas de implementações computacionais eficientes e numericamente estáveis. Portanto, o trabalho pode também ser considerado algorítmicamente orientado, pois além de desenvolvimentos teóricos, existe a preocupação com aspectos computacionais tais como complexidade computacional (ou medida da quantidade de operações aritméticas), economia de memória, otimização da mecanização, eficiência e estabilidade numérica.

O trabalho foi dividido em capítulos abrangendo fundamentos teóricos, técnicas adaptativas de filtragem, suavização, modelagem do processo e das observações, implementação e testes. Os Capítulos 2 e 3 apresentam uma compilação do estado da arte dos métodos de estimação e suavização estocástica de estado. O Capítulo 4 apresenta a teoria para o desenvolvimento da técnica adaptativa, o filtro adaptativo UD, o suavizador de Bierman (1983), e o suavizador na forma UD, com particular ênfase à metodologia algorítmica para implementação eficiente em computadores digitais. O Capítulo 5 revê noções de controlabilidade e observabilidade úteis para a análise do problema. Em particular, exemplifica-se o problema de observabilidade em determinação de órbita. O Capítulo 6

descreve aspectos da modelagem do processo (dinâmica) e das observações em determinação de órbita. Aspectos gerais de implementação também são discutidos. O Capítulo 7 descreve a formulação do problema, e as implementações algorítmicas do procedimento de filtragem adaptativa UD e da suavização UD. O Capítulo 8 apresenta simulações realísticas de várias situações que podem ocorrer durante o processo de determinação de órbita, e resultados de testes dos procedimentos propostos. À luz dos resultados obtidos, tanto para a filtragem quanto para a suavização, comenta-se sobre as características dos algoritmos analisados em termos de robustez, precisão, estabilidade numérica, complexidade computacional, economia de memória, e aplicabilidade prática. Por fim, o Capítulo 9 apresenta um retrospecto das contribuições, conclusões gerais, recomendações, e propostas de prosseguimento do trabalho.



## CAPÍTULO 2

### MÉTODOS NUMÉRICOS DE ESTIMAÇÃO ESTATÍSTICA DE ESTADO

Este capítulo descreve os métodos numéricos de estimação estatística de estado normalmente utilizados.

#### 2.1 - MÍNIMOS QUADRADOS

O método de mínimos quadrados é um dos mais tradicionais métodos de estimação de estado. Este método clássico tem grande popularidade entre os especialistas em determinação de órbita e atitude, economistas, engenheiros e estatísticos. Sua simplicidade, em conjunto com o fato de ser um dos mais antigos métodos de estimação ótima o tornam provavelmente o mais utilizado atualmente.

Basicamente, o método resolve, segundo o critério de minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, sistemas do seguinte tipo:

$$y = H x + v , \quad (2.1)$$

onde  $y$  é um vetor de  $m$  observações,

$x$  é um vetor de  $n$  variáveis a serem estimadas,

$H$  é uma matriz  $m \times n$  de coeficientes, e

$v$  é um vetor  $m$ -dimensional dos erros de observação.

Para aplicação em determinação de órbitas, algumas considerações devem ser feitas:

a) Normalmente, em um dado instante de amostragem têm-se  $m < n$ , ou seja, a quantidade de observações é menor que as variáveis de estado e o sistema é localmente indeterminado. Isto é usualmente solucionado através do acúmulo de observações de instantes distintos reportando-as

após, com auxílio de um modelo dinâmico, a um único instante de referência, de maneira a obter-se nesse instante  $m \geq n$ . Neste caso, considera-se obviamente que o posto ("rank") da matriz H seja n.

b) Como as observações de rastreamento ("range", "range-rate", azimuth, elevação) são funções não-lineares do estado (elementos orbitais), o modelo das observações é colocado na forma da Equação 2.1 através da aplicação de processo de linearização em torno de um estado de referência. A matriz H será então dada pela matriz de derivadas parciais das observações em relação ao estado. A órbita é determinada num esquema tipo Newton-Raphson e normalmente o método adaptado para este problema leva o nome de correção diferencial de órbitas.

c) Os erros de observações diferentes podem ser considerados por meio de uma matriz de peso. Tal matriz permite a ponderação adequada da informação fornecida pela observação, i.e., observações mais precisas tem maior peso no processo de estimação e vice-versa.

Textos específicos podem ser encontrados na literatura, mostrando a aplicação do método de mínimos quadrados em determinação de órbitas (e.g. Cappelari et al., 1976; Rama Rao and Kuga, 1987).

### 2.1.1 - SOLUÇÃO CONVENCIONAL

A solução do Sistema 2.1 é escolhida de forma a minimizar a função custo J, que consiste na somatória dos erros de observação (resíduos) quadráticos:

$$J = \| y - Hx \|^2 = \sum_{j=1}^m v^2(j) = v^T v \quad (2.2)$$

onde  $\| \cdot \|$  é a norma ou comprimento euclidiano do vetor, i.e.:

$$J = (y - Hx)^T (y - Hx) ,$$

$T$  representa transposição do vetor ou da matriz em questão, e  $v(j)$  representa a  $j$ -ésima componente do vetor  $v$ . Prova-se facilmente que a solução deve satisfazer as ditas equações normais:

$$H^T H x = H^T y \quad . \quad (2.3)$$

Nota-se que quando  $m \geq n$  e  $H$  tem posto ("rank")  $n$ , então  $H^T H$  é (teoricamente) não singular, de modo que a solução é única:

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T y ,$$

onde  $P = (H^T H)^{-1}$  é a covariância do erro na estimativa. No caso de haver informação estatística a priori, viz.  $\hat{x}_0$  (estado) e  $P_0$  (covariância), a equação normal torna-se:

$$(P_0^{-1} + H^T H) x = P_0^{-1} \hat{x}_0 + H^T y ,$$

e a solução é:

$$\hat{x} = (P_0^{-1} + H^T H)^{-1} (P_0^{-1} \hat{x}_0 + H^T y) ,$$

e, desde que o ruído da observação e a covariância a priori sejam independentes, a covariância do erro é dada por:

$$P = (P_0^{-1} + H^T H)^{-1}$$

Além disso, no caso da função custo ser a norma euclidiana ponderada por uma matriz de peso  $W$ , em conjunto com a informação a priori, i.e.:

$$J = \| y-Hx \|_W^2 + \| \hat{x}_0 - x \|_{P_0^{-1}}^2 \quad (2.4a)$$

$$= (y-Hx)^T W (y-Hx) + (\hat{x}_0 - x)^T P_0^{-1} (\hat{x}_0 - x) \quad (2.4b)$$

a minimização da função custo produz:

$$\hat{x} = P (P_0^{-1} \hat{x}_0 + H^T W y), \quad (2.5a)$$

$$P = (P_0^{-1} + H^T W H)^{-1} \quad (2.5b)$$

onde  $\hat{x}$  é a estimativa final e P a matriz de covariância do erro.

### 2.1.2 - SOLUÇÃO ATRAVÉS DE TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS

A resolução das Equações normais 2.3 deve necessariamente inverter uma matriz  $n \times n$ . É sabido que essas inversões são uma fonte potencial de erros numéricos principalmente quando a matriz é quase singular. No entanto, a literatura já contém inúmeros trabalhos que visam a melhorar o desempenho numérico do método de resolução. Dentre os mais citados estão:

- a) Decomposição de Cholesky
- b) Transformação de Householder
- c) Transformação modificada de Gram-Schmidt
- d) Rotações de Givens

A decomposição de Cholesky fatora uma matriz R da seguinte forma:

$$R = S S^T$$

onde S é uma matriz triangular (superior ou inferior) e é chamada de matriz raiz quadrada de R). A condição de  $R > 0$

(definida positiva) é necessária para se aplicar o método. Deve-se lembrar que a inversão de uma matriz triangular é trivial. Então a solução para o mínimos quadrados poderia ser por exemplo:

$$R = H^T H = S S^T,$$

com S obtido via decomposição de Cholesky,

$$(S S^T) \hat{x} = H^T y,$$

$$\hat{x} = (S S^T)^{-1} H^T y, \text{ ou}$$

$$\hat{x} = (S^{-T} S^{-1}) H^T y .$$

Algoritmos computacionais para decomposição de Cholesky podem ser encontrados em Bierman (1977).

Uma abordagem bastante popular para resolução de problemas de mínimos quadrados é através de técnicas de triangularização de matrizes. Uma vez obtida a triangularização da matriz H, o problema de mínimos quadrados é imediatamente resolvido. Dado:

$$J(x) = \| y - Hx \|^2, \text{ H é } m \times n, \text{ m} \geq n$$

Seja T uma matriz  $m \times m$  ortogonal. Como a multiplicação por matrizes ortogonais não altera a norma, pode-se escrever:

$$J(x) = \| T(y - Hx) \|^2 = \| Ty - THx \|^2 \quad (2.6a)$$

Se, em particular, T é a transformação que triangulariza H:

$$T H = \begin{bmatrix} \overset{n}{\downarrow} \\ H \\ \hline 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow n \\ \leftarrow m-n \end{matrix}, T y = \begin{bmatrix} \overset{1}{\downarrow} \\ y_1 \\ \hline y_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow n \\ \leftarrow m-n \end{matrix} \quad (2.6b)$$

onde  $H_1$  é triangular superior (resultado da triangularização), é fácil notar que:

$$J(x) = \| y_1 - H_1 x \|^2 + \| y_2 \|^2 \quad (2.7a)$$

e  $J(x)$  é mínimo para:

$$H_1 x = y_1, \quad (2.7b)$$

e cujo mínimo vale  $J(x) = \| y_2 \|^2$ . A solução, se obtida pelo desenvolvimento descrito, é a solução de mínimos quadrados. Notar que, na Equação 2.7b, a solução  $\hat{x} = H_1^{-1} y_1$  não necessita da inversa explícita de  $H_1$ , pois esta é triangular superior. A solução  $\hat{x}$  é obtida trivialmente por substituição regressiva.

Uma das formas reconhecidamente eficiente e precisa de triangularização existentes é a transformação (ou ortogonalização) de Householder. A transformação de Householder triangulariza as matrizes via transformações ortogonais, e são baseadas em reflexões de vetores em planos convenientes (ver Apêndice A). Algoritmos computacionais de ortogonalização de Householder estão propostos em Lawson e Hanson (1974), e Businger e Golub (1965). O Apêndice A apresenta a implementação computacional de Lawson e Hanson (1974), a ser utilizada neste trabalho.

As transformações de Gram-Schmidt também são métodos de triangularização de matrizes por meio de transformações ortogonais. Atualmente utiliza-se o algoritmo modificado de Gram-Schmidt que foi proposto por ser numericamente superior ao algoritmo clássico e requerer menor capacidade de armazenamento. A precisão também se tem mostrado comparável às transformações de Givens e de Householder. A solução de mínimos quadrados é análoga ao

caso da transformação de Householder. Algoritmos podem ser encontrados por exemplo em Bierman (1977), Bjorck (1967), e Lawson e Hanson (1974).

A transformação ou rotação de Givens é basicamente uma rotação que introduz elementos nulos (zeros) na matriz de forma seletiva, nas posições desejadas. Portanto, uma matriz ortogonal  $T$ , que triangulariza  $H$  da mesma forma que nas Equações 2.6b, sempre pode ser formada por uma sequência de rotações de Givens convenientes. Algoritmos podem ser encontrados por exemplo em Lawson e Hanson (1974), e Golub e Van Loan (1983).

Para resolução de problemas de mínimos quadrados, a preferência recai sobre o método de Householder, pois pode obter zeros em grande quantidade durante o processo de triangularização, sendo mais econômico que o método de Gram-Schmidt modificado ou as rotações de Givens, embora todas com precisões aproximadamente equivalentes. A decomposição de Cholesky perde precisão na montagem da matriz da equação normal a ser decomposta, apesar da decomposição em si ser bastante precisa. Veja detalhes da transformação de Householder e sua implementação algorítmica no Apêndice A.

### 2.1.3 - MÍNIMOS QUADRADOS PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES

Em problemas não-lineares, o método de mínimos quadrados é modelado de forma a ajustar os dados segundo um modelo não-linear do tipo:

$$y = h(x) + v \tag{2.8}$$

onde  $h(x)$  é uma função não-linear vetorial de dimensão  $m$  do estado  $x$ . A linearização em torno de uma trajetória de referência produz:

$$y - h(\bar{x}) = H \delta x + v$$

onde  $\bar{x}$  é a referência,  $\delta x$  é uma perturbação definida por:

$$\delta x = x - \bar{x}$$

e  $H$  é uma matriz de derivadas parciais calculada em torno da referência:

$$H = \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$$

A solução do problema para este sistema linearizado é, por analogia à equação normal, dada por:

$$\hat{\delta x} = (H^T H)^{-1} H^T [y - h(\bar{x})] \quad (2.9)$$

onde  $\hat{\delta x} = \hat{x} - \bar{x}$  é a correção na referência que produz uma estimativa  $\hat{x}$  que ajusta os dados no sentido de minimizar a norma euclidiana dos resíduos. O método se torna iterativo pois essa estimativa  $\hat{x}$  pode ser tomada como uma nova referência  $\bar{x}$ , calculando-se então novo valor para  $\delta x$ , sucessivamente, até que essa correção  $\delta x$  se torna desprezível, indicando a convergência do processo iterativo. O método também é chamado de correção diferencial devido à característica de correção da estimativa por diferenciais (perturbações).

A fórmula completa incluindo a informação a priori e a ponderação dos resíduos se torna:

$$\hat{\delta x} = (P_0^{-1} + H^T W H)^{-1} (P_0^{-1} \delta x_0 + H^T W \delta y), \quad (2.10a)$$

$$\delta x_0 = \hat{x}_0 - \bar{x} \quad (2.10b)$$

$$\delta y = y - h(\bar{x}) \quad (2.10c)$$

A mecanização do método para se proceder à ortogonalização é análogo ao caso linear, considerando no entanto perturbações devido ao processo de linearização. Para descrever a implementação em computador, proceder-se-á à dedução da equação final à qual deve ser aplicado o processo de ortogonalização.

A função custo genérica para sistemas não-lineares é definida por:

$$J = \| \delta y - H \delta x \|_W^2 + \| \delta x_0 - \delta x \|_{S_0}^2 \quad (2.11a)$$

onde  $\hat{x}_0$  e  $S_0 = P_0^{-1}$  são a informação a priori, e as variáveis  $\delta x$  e  $\delta y$  são agora perturbações (desvios) ao longo de uma referência, i.e.:

$$\delta y = y - h(\bar{x}) \quad (2.11b)$$

$$\delta x = x - \bar{x} \quad (2.11c)$$

$$\delta x_0 = \hat{x}_0 - \bar{x} \quad (2.11d)$$

com

$$H = \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$$

Inclui-se em seguida as matrizes de ponderação  $W$  e  $S_0$  explicitamente na função custo:

$$J = \| W^{1/2} (\delta y - H \delta x) \|^2 + \| S_0^{1/2} (\delta x_0 - \delta x) \|^2 \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle [S_o^{1/2}(\delta x_o - \delta x)]^T \mid [W^{1/2}(\delta y - H\delta x)]^T \rangle \\
 &= \left\| \frac{S_o^{1/2}(\delta x_o - \delta x)}{W^{1/2}(\delta y - H\delta x)} \right\|^2 \\
 &= \left\| \frac{S_o^{1/2} \delta x_o - S_o^{1/2} \delta x}{W^{1/2} \delta y - W^{1/2} H \delta x} \right\|^2 \\
 &= \left\| \begin{bmatrix} S_o^{1/2} & \delta x_o \\ W^{1/2} & \delta y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_o^{1/2} \\ W^{1/2} H \end{bmatrix} \delta x \right\|^2 \quad (2.12b)
 \end{aligned}$$

Lembrando que uma transformação ortogonal não altera a norma, acha-se a matriz de transformação  $T$  tal que:

$$J = \left\| T \begin{bmatrix} S_o^{1/2} & \delta x_o \\ W^{1/2} & \delta y \end{bmatrix} - T \begin{bmatrix} S_o^{1/2} \\ W^{1/2} H \end{bmatrix} \delta x \right\|^2 \quad (2.13a)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta x \right\|^2 \quad (2.13b)$$

onde  $H_1$  é uma matriz  $n \times n$  triangular superior. Então:

$$J = \left\| \delta y_1 - H_1 \delta x \right\|^2 + \left\| \delta y_2 \right\|^2 \quad (2.14a)$$

e a solução de mínimos quadrados satisfaz:

$$H_1 \hat{\delta x} = \delta y_1 \quad (2.14b)$$

cuja resolução é trivial. O mínimo da função custo é portanto:

$$J_{\min} = \left\| \delta y_2 \right\|^2. \quad (2.14c)$$

O método é iterativo porque a estimativa  $\hat{x}$  se torna a nova estimativa de referência:

$$\hat{x} = \bar{x} + \delta\hat{x} \quad (\text{estimativa atual})$$

$$\bar{x} \leftarrow \hat{x} \quad (\text{nova referência})$$

É interessante notar alguns aspectos numéricos. Para que a transformação seja bem sucedida, necessita-se que:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} S_0^{1/2} & \\ & W^{1/2} H \end{bmatrix} = n$$

de forma que a matriz  $H_1$  resultante da transformação ortogonal seja  $n \times n$  triangular superior. Se a matriz  $n \times n$  de informação a priori  $S_0$  é definida positiva, então  $S_0^{1/2}$  existe e tem "rank"  $n$ . Logo a garantia de "rank"  $n$  é obtida simplesmente através da informação a priori. Este é um aspecto interessante: a informação a priori garante a solução através de ortogonalização desde que  $S_0^{1/2}$  tenha "rank"  $n$ . Após a transformação,  $\delta y_2$  fornece o vetor de resíduos final e sua norma fornece o valor da função de custo minimizada. A ortogonalização pode ser efetuada através de métodos estáveis numericamente como os citados na Seção 2.1.2 (Gram-Schmidt, Householder, Givens). Se as matrizes de ponderação  $W$  e  $S_0$  são definidas positivas, então é possível fatorá-los via decomposição de Choleski em:

$$W = W^{1/2} (W^{1/2})^T, \quad S_0 = S_0^{1/2} (S_0^{1/2})^T$$

onde  $W^{1/2}$  e  $S_0^{1/2}$  são triangulares. Como normalmente  $W$  e  $S_0$  são adotados como sendo matrizes diagonais com elementos positivos, a fatoração não apresenta dificuldades. Note-se

ainda que nenhuma inversão explícita de matrizes é requerida no método completo, e a solução  $\hat{\delta x}$  é obtida por substituição regressiva, já que  $H_1$  é triangular superior.

## 2.2 - FILTRO DE KALMAN

O filtro de Kalman é um dos estimadores recursivos mais utilizados atualmente devido à facilidade de implementação e utilização em computador. Desde sua formulação por Kalman (1960), ele tem sido utilizado em áreas tão diversificadas como medicina, estatística, economia, engenharia espacial, eletrônica e processamento de sinais entre outras. O filtro de Kalman é um processo multi-estágio que permite considerar erros no modelo da dinâmica, por meio da inclusão de ruídos de estado. O caráter recursivo implica numa economia de memória de armazenamento já que observações podem ser processadas à medida que vão sendo coletadas. Esta característica torna-o ideal para aplicações em tempo real, onde iterações sobre o total de observações não precisam ser realizadas, e a convergência é obtida à medida que uma certa quantidade de observações é processada. Atualmente, as pesquisas sobre a utilização do filtro de Kalman abrangem as seguintes áreas:

- aplicação em sistemas não-lineares,
- propriedades de robustez, estabilidade e tolerância a falhas,
- análise numérica.

Para aplicação em sistemas não-lineares, a versão "filtro estendido de Kalman" (Jazwinski, 1970) parece ser já amplamente aceita pela comunidade de usuários, com ligeiras modificações e propostas de iterações locais que, no entanto, não mudam o corpo básico das equações.

Propriedades de robustez, estabilidade e tolerância a falhas são ainda um campo aberto de pesquisas, uma vez que metodologias genéricas (no sentido de serem aplicáveis a qualquer processo) não tem sido obtidas. O Capítulo 4 tratará de algumas técnicas para lidar com problemas advindos da aplicação do filtro de Kalman com relação a esses aspectos.

Outra área de estudos trata das propriedades numéricas das equações de Kalman. Devido ao comprimento finito da palavra do computador (erros de truncamento), o filtro está sujeito a erros cumulativos que produzem aberrações nos resultados, tais como covariâncias não-simétricas e não definidas positivas, e comprometem seriamente o desempenho do filtro. Inúmeros algoritmos modificados equivalentes com propriedades numéricas superiores tem sido propostos. As Seções 2.2.3 e 2.2.4 irão compilar resumidamente a essência desses algoritmos.

### 2.2.1 - SOLUÇÃO CONVENCIONAL, FILTRO DE COVARIÂNCIA

O filtro de Kalman processa as medidas e obtém estimativas de estado de maneira recursiva e sequencial. Basicamente, trata-se de um algoritmo contendo uma sequência de propagações ("time update") e atualizações ("measurement update") das estimativas do estado do sistema. Na fase de propagação, os valores do estado e da matriz de covariância do erro, no próximo instante de amostragem, são estimados com auxílio de um modelo da dinâmica do sistema, ou seja, são propagados entre os instantes de amostragem. Na fase de atualização as estimativas do estado e da matriz de covariância do erro, propagadas para o instante da observação atual, são estimadas com base no processamento das observações. Apresentam-se, a seguir, as equações do filtro de Kalman

onde é introduzida a notação a ser utilizada no restante do trabalho.

-dinâmica do processo:

$$x(k+1) = \phi(k) x(k) + G(k) w(k) \quad (2.15)$$

onde  $x(k)$  é o vetor de estado de dimensão  $n$  a ser estimado,  $\phi(k)$  é a matriz  $n \times n$  de transição de estado entre os instantes  $k$  e  $k+1$ ,  $G(k)$  é uma matriz  $n \times r$ , e  $w(k)$  é o vetor de ruídos dinâmicos de dimensão  $r$ , composto por sequências gaussianas puramente aleatórias satisfazendo:

$$E[w(k)] = 0, \quad E[w(k) w^T(j)] = Q(k) \delta_{kj} \quad (2.16)$$

onde  $E[.]$  representa o operador esperança, e  $\delta_{kj}$  é o delta de Kronecker.

-modelo de observação:

$$y(k) = H(k) x(k) + v(k) \quad (2.17)$$

onde  $y(k)$  é o vetor  $m$ -dimensional contendo as observações,  $H(k)$  é uma matriz  $m \times n$ , e  $v(k)$  é um vetor de erros das observações, de dimensão  $m$ , de sequências gaussianas puramente aleatórias satisfazendo:

$$E[v(k)] = 0, \quad E[v(k) v^T(j)] = R(k) \delta_{kj}, \quad R(k) > 0 \quad (2.18)$$

Lembrar ainda as hipóteses normais de não-correlação:

$$E[w(k) v^T(k)] = 0, \quad E[w(k) x_0] = 0, \quad E[v(k) x_0] = 0$$

onde  $x_0$  é o estado inicial assumido normal de média  $\hat{x}_0$  e covariância  $\hat{P}_0$ .

-fase de propagação do filtro:

$$\bar{x}(k+1) = \phi(k) \hat{x}(k) \quad (2.19)$$

$$\bar{P}(k+1) = \phi(k) \hat{P}(k) \phi^T(k) + G(k) Q(k) G^T(k) \quad (2.20)$$

onde a barra superior representa o resultado da fase de propagação do filtro para as estimativas do estado e da covariância.

-fase de atualização do filtro:

$$K(k) = \bar{P}(k) H^T(k) [R(k) + H(k) \bar{P}(k) H^T(k)]^{-1} \quad (2.21)$$

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + K(k) [y(k) - H(k) \bar{x}(k)] \quad (2.22)$$

$$\hat{P}(k) = [I - K(k) H(k)] \bar{P}(k) \quad (2.23)$$

onde  $K(k)$  é a matriz  $n \times m$  do ganho de Kalman,  $\hat{x}(k)$  é a estimativa do estado atualizada, e  $\hat{P}(k)$  é a matriz de covariância atualizada dos erros na estimativa. Notar que as equações de atualização podem ser aplicadas a uma observação escalar.

A Equação 2.23 é susceptível a erros numéricos. A matriz  $P$  que deve ser definida positiva pode, devido a erros numéricos, perder essa característica. Uma forma mais conveniente proposta para a Equação 2.23 é a forma de Joseph (Bucy and Joseph, 1968):

$$\hat{P}(k) = [I - K(k) H(k)] \bar{P}(k) [I - K(k) H(k)]^T + K(k) R(k) K^T(k) \quad (2.24)$$

válida para um ganho arbitrário  $K$ , e em particular para o ganho de Kalman. A justificativa para esta forma é que um

erro de primeira ordem no ganho K teria um impacto menor na Equação 2.24. Para a Equação 2.23:

$$\hat{\delta P} = - \delta K H \bar{P}$$

com erro de primeira ordem; e para a Equação 2.24:

$$\hat{\delta P} \cong \alpha \delta K \delta K^T,$$

com erro de segunda ordem.

### 2.2.2 - FILTRO DE INFORMAÇÃO

O filtro de informação trabalha com o inverso da matriz de covariância P e um pseudo-estado d a serem estimados. Este filtro pode ser aplicado quando a não existência de informação a priori ou a pobreza destas produzem dificuldades para inicializar o esquema de utilização do filtro de Kalman convencional. A matriz  $P^{-1}$  é chamada de matriz de informação e pode ter valor inicial nulo, bem como o pseudo-estado d a ser definido pela Equação 2.31. Após o processamento de várias observações, P se torna não-singular e pode ser invertida para a obtenção das estimativas da matriz P e do estado x. As equações do filtro de informação são derivadas da forma básica das equações do filtro de Kalman (Seção 2.2.1), após a aplicação de alguma álgebra matricial e lemas de inversão de matrizes (e.g. Maybeck, 1979). No filtro de informação, as fases de propagação e atualização podem ser descritas por (e.g. Kaminski, 1971):

-propagação:

$$\bar{d}(k+1) = [I - L(k) G^T(k)] \phi^{-T}(k) \hat{d}(k) \quad (2.25)$$

$$\bar{P}^{-1}(k+1) = [I - L(k) G^T(k)] F(k) \quad (2.26)$$

$$F(k) = \phi^{-T}(k) \hat{P}^{-1}(k) \phi^{-1}(k) \quad (2.27)$$

$$L(k) = F(k) G(k) [Q^{-1}(k) + G^T(k) F(k) G(k)]^{-1} \quad (2.28)$$

-atualização:

$$\hat{d}(k) = \bar{d}(k) + H^T(k) R^{-1}(k) y(k) \quad (2.29)$$

$$\hat{P}^{-1}(k) = \bar{P}^{-1}(k) + H^T(k) R^{-1}(k) H(k) \quad (2.30)$$

com:

$$\bar{d}(k) = \bar{P}^{-1}(k) \bar{x}(k) \quad (2.31)$$

$$\hat{d}(k) = \hat{P}^{-1}(k) \hat{x}(k) \quad (2.32)$$

Neste filtro, somente o pseudo-estado  $d$  e a matriz de informação  $P^{-1}$  são estimados. A explicitação de  $x$  e  $P$  necessita da inversão da matriz de informação. Às vezes, pode ser conveniente iniciar o procedimento de estimação com o filtro de informação, na falta de informação a priori, e depois comutar para o filtro convencional de covariância.

### 2.2.3 - FILTROS DE RAIZ QUADRADA

A idéia básica dos filtros de raiz quadrada é a substituição da matriz de covariância  $P$  pela matriz raiz quadrada  $S$  dessa covariância definida por  $P = SS^T$ . A motivação para esta modificação leva em conta 2 fatos:

1) O produto  $P = SS^T$  nunca é indefinido (os elementos da diagonal não se tornam negativos) mesmo na presença de erros de truncamento ou arredondamento. Por vezes, esses

erros tornam o valor calculado de P indefinido, quando algoritmos numericamente instáveis são utilizados.

2) O condicionamento numérico de S é geralmente muito melhor que o de P.

Esta melhora (Kaminski et al., 1971) pode ser evidenciada pelo exame do número de condição K de uma matriz A, definido por:

$$K(A) = \lambda_1 / \lambda_n \quad (2.33)$$

onde  $\lambda_1^2$  é o maior auto-valor de  $A^T A$  e  $\lambda_n^2$  é o menor. Por exemplo, em cálculos na base 10 com p dígitos significativos, dificuldades numéricas são previstas quando  $K(P)$  se aproxima de  $10^p$ . O melhor condicionamento numérico se torna evidente pela análise de  $K(P)$  e  $K(S)$ :

$$K(P) = K(SS^T) = [K(S)]^2 .$$

Em outras palavras, operações numéricas exibindo problemas para  $K(P) = 10^p$ , somente mostrariam problemas quando  $K(P) = 10^{2p}$ , se a covariância de raiz quadrada S fosse utilizada nas equações do filtro em substituição à covariância P. Portanto, no cálculo da covariância, o filtro de raiz quadrada é equivalente ao filtro convencional com precisão dupla no computador.

Em termos de filtros de raiz quadrada explícita, ou seja, filtros que exigem a operação de raiz quadrada em seus cálculos, existem duas variantes possíveis:

- filtro de raiz quadrada da covariância,
- filtro de raiz quadrada da informação.

Em ordem de importância, apareceu o filtro de Potter (Battin, 1964) que processa uma observação escalar por vez, mas com o limitante de não poder incluir ruído no estado. Bellantoni e Dodge (1967) propuseram uma modificação no algoritmo para processar as  $m$  observações de uma vez, já que na época considerava-se uma desvantagem o processamento escalar de observações, pois não se poderia lidar com ruídos de medida correlacionados. Hoje, sabe-se que o processamento escalar de observações correlacionadas entre si, e portanto com  $R$  não diagonal, pode ser facilmente efetuado. O processo é chamado de branqueamento ("whitening"), que torna a matriz  $R$  (covariância do ruído das medidas) diagonal. Portanto, se o modelo de observações é descrito por:

$$y(k) = H(k) x(k) + v(k),$$

$$E[v(k)] = 0, \tag{2.34}$$

$$E[v(k) v^T(k)] = R(k) > 0 \text{ (definida positiva)}$$

com  $R$  definida positiva porém não diagonal, fatora-se  $R$  (usualmente por decomposição de Cholesky) de forma que  $R = V V^T$  com  $V$  matriz raiz quadrada triangular (superior ou inferior) de  $R$ . Definindo (sem o índice de tempo  $k$  para simplificar a notação):

$$\tilde{y} = V^{-1} y, \quad \tilde{H} = V^{-1} H, \quad \tilde{v} = V^{-1} v, \tag{2.35}$$

resulta:

$$\tilde{y} = \tilde{H} x + \tilde{v}, \text{ com } E[\tilde{v} \tilde{v}^T] = I. \tag{2.36}$$

---

Posteriormente, Schmidt (1970) mostrou que o ruído dinâmico pode ser levado em conta ao considerar matrizes convenientes e aplicar transformações de

Householder no processo de propagação. Finalmente, Carlson (1973) propôs que a matriz raiz quadrada fosse triangular superior, de modo a economizar cálculos aritméticos em computador.

Utilizando-se as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{S} \bar{S}^T, & \hat{P} &= \hat{S} \hat{S}^T \\ Q &= W W^T, & R &= V V^T \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde as matrizes do lado esquerdo das igualdades são não-singulares, e as matrizes do lado direito são raízes quadradas triangulares superiores, o filtro de raiz quadrada da covariância pode, por exemplo, ser resumido por (Kaminski, 1971):

-propagação (usar todo o vetor de ruído):

$$\bar{x}(k+1) = \phi(k) \hat{x}(k) \tag{2.38}$$

$$\begin{array}{l} n \rightarrow \\ r \rightarrow \end{array} \left[ \begin{array}{c} \bar{S}^T(k+1) \\ \hline 0 \end{array} \right] = T \left[ \begin{array}{c} \hat{S}^T(k) \phi^T(k) \\ \hline W^T G^T \end{array} \right] \tag{2.39}$$

onde T é a matriz ortogonal de triangularização (e.g. de Householder).

-atualização (supondo R diagonal, processar sequencialmente as m observações escalares):

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + K(k) [y(k) - H(k) \bar{x}(k)] \tag{2.40}$$

$$\begin{array}{l} i \rightarrow \\ n \rightarrow \end{array} \left[ \begin{array}{c|c} A(k) & B(k) \\ \hline 0 & \hat{S}^T(k) \end{array} \right] = T \left[ \begin{array}{c|c} V(k) & 0 \\ \hline -\bar{S}^T(k)H^T(k) & \hat{S}^T(k) \end{array} \right] \tag{2.41}$$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 1 & n \end{array}$

onde  $K$  é o ganho de Kalman dado por:

$$K(k) = -B^T(k) / A(k) \quad (2.42)$$

Notar o aparecimento das novas variáveis  $A$  e  $B$  que ocorre devido ao processo de triangularização. Pela fórmula do ganho de Kalman  $K$ , percebe-se o significado dessas variáveis. As Equações 2.40-2.42 devem ser calculadas  $m$  vezes para cada componente do vetor de observações. No restante do trabalho,  $T$  será utilizado para denotar a transformação de Householder que produz a triangularização desejada. É importante lembrar que o algoritmo computacional não necessita calcular explicitamente  $T$ , e produz diretamente a triangularização requerida (veja e.g. Golub, 1965). A raiz quadrada  $S_0$  inicial pode ser obtida pela decomposição de Cholesky de  $P_0$ , bem como as matrizes  $W$  e  $V$ . A matriz de covariância não é explicitamente estimada, e pode ser formada por  $P = SS^T$  nos instantes desejados. A forma contínua de propagação também foi proposta por Tapley e Choe (1976) mas, devido à maior complexidade, dependência de passo e precisão de integração, não tem sido reportada significativa quantidade de artigos similares na literatura.

Já o filtro de raiz quadrada de informação foi derivado da solução de mínimos quadrados dada por Golub (1965), e Businger e Golub (1965), através de triangularização de matrizes pelo método de Householder. Na Seção 2.1.2 foi mostrada a solução de mínimos quadrados via transformação de Householder. Hanson e Lawson (1969) adaptaram o algoritmo de Householder para o método de mínimos quadrados sequencial. Então, Dyer e McReynolds (1969) incluíram o ruído dinâmico e mostraram as equações de propagação e atualização para o filtro de raiz quadrada da informação, através de transformação de Householder. Definindo  $P^{-1}$  como a matriz de informação e:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{-1} &= \bar{S}^{-1} \bar{S}^{-T}, \quad \hat{P}^{-1} = \hat{S}^{-1} \hat{S}^{-T}, \\ \bar{b} &= \bar{S}^{-1} \bar{x}, \quad \hat{b} = \hat{S}^{-1} \hat{x}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

e mantendo a notação já utilizada previamente, o filtro de raiz quadrada da informação pode ser descrito por (Dyer and McReynolds, 1969):

-propagação (usar r ruídos escalares):

$$\begin{aligned} \begin{matrix} 1 \rightarrow \\ n \rightarrow \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} A(k+1) & B(k+1) \\ \hline 0 & \bar{S}^{-1}(k+1) \end{array} \right] = \\ & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 1 & n \end{matrix} \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$T \left[ \begin{array}{c|c} 1 / W(k) & 0 \\ \hline -\hat{S}^{-1}(k) \phi^{-1}(k) G(k) & \hat{S}^{-1}(k) \phi^{-1}(k) \end{array} \right]$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 1 & n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow \\ n \rightarrow \end{matrix} \left[ \begin{array}{c} c(k+1) \\ \hline \bar{b}(k+1) \end{array} \right] = T \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \hline \hat{b}(k) \end{array} \right] \tag{2.45}$$

onde novamente surgem novas variáveis A e B devido ao processo de triangularização. Neste caso, cada componente do ruído deve ser processada a cada vez, lembrando que  $Q = WW^T = \text{diagonal}(q_i), i=1, \dots, r$  sem perda de generalidade. Portanto as Equações 2.44-2.45 são calculadas r vezes, onde  $W = \text{diagonal}(W_i), i=1, \dots, r$ .

-atualização (usar todo o vetor de observações):

$$\begin{matrix} n \rightarrow \\ m \rightarrow \end{matrix} \left[ \begin{array}{c} \hat{S}^{-1}(k) \\ \hline 0 \end{array} \right] = T \left[ \begin{array}{c} \bar{S}^{-1}(k) \\ \hline V^{-1}(k) H(k) \end{array} \right], \tag{2.46}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n \rightarrow \\ m \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \hat{b}(k) \\ \hline e(k) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \bar{b}(k) \\ \hline V^{-1}(k) y(k) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Neste caso, a atualização processa todo o vetor de m medidas y em um "batch" único. É importante observar que o filtro de informação (também na forma de raiz quadrada) exige que a matriz de transição seja inversível. Este pode ser um fator complicador para aplicação deste tipo de filtro em certos sistemas dinâmicos, além das dificuldades inerentes para se inverter matrizes em computadores, ou obter esta inversão via integração numérica ("backward"). Convém notar também que para se obter a estimativa x é necessário a resolução do sistema  $b = S^{-1} x$  que se torna trivial, já que  $S^{-1}$  é triangular superior e não exige inversão explícita de  $S^{-1}$ . Portanto, a reconstituição de x e P deve ser realizada somente nos pontos de interesse, já que representa um custo adicional em termos de cálculos aritméticos.

#### 2.2.4 - FILTRO UD

Uma outra abordagem que vem tendo bastante sucesso atualmente, é o filtro de fatorização UD ou, simplesmente, filtro UD. Neste método, a matriz P é fatorada em:

$$P = U D U^T \quad (2.48)$$

onde U é triangular superior unitária (na sua diagonal), e D é uma matriz diagonal. Esta fatorização pode ser encarada como sendo de raiz quadrada pois:

$$P = U D^{1/2} (D^{1/2})^T U^T = S S^T \quad (2.49)$$

e, portanto, mantém as vantagens de estabilidade numérica dos filtros de raiz quadrada. Outra vantagem é a não-necessidade de operações aritméticas de raiz quadrada que sobrecarregam o tempo de processamento em relação às 4 operações fundamentais. Estas características, apesar do fato de ser pouco mais oneroso que o filtro convencional em termos de tempo de processamento, fazem-no ideal para utilização em tempo real e em computadores com capacidade limitada de operações e com poucos dígitos significativos. Vários artigos tem sido escritos sobre este filtro. Acredita-se que o crédito pela descoberta da aplicação desta forma deve-se a Bierman (1977). Outros artigos correlatos e relevantes são os de Thornton e Bierman (1977, 1980), Tapley e Peters (1980), e Bierman (1981).

Para propagação do estado  $x$  e dos fatores  $U$  e  $D$ , Thornton e Bierman (1977, 1980) propõem o algoritmo modificado ponderado de Gram-Schmidt. Nesta forma, o estado e a covariância são propagados na forma discreta, através da matriz de transição. Bierman (1981a) propõe utilizar a estrutura por vezes esparsa, bloco diagonal ou triangular da matriz de transição, para aumentar a eficiência do algoritmo. Tapley e Peters (1980) propuseram a propagação na forma contínua. Porém, quando as medidas ocorrem em instantes discretos, a forma contínua é equivalente à forma discreta. Além disso, na forma contínua exige-se a integração da equação de Riccati em termos dos fatores  $UD$ , que tornam a precisão do filtro dependente do passo e precisão do integrador utilizado. Bierman clama que a propagação  $UD$  na forma discreta é sempre mais eficiente (veja discussões sobre esta questão em Bierman, 1981 e Tapley e Peters, 1981).

O algoritmo ponderado modificado de Gram-Schmidt-MWGS (Modified weighted Gram-Schmidt) pode ser descrito por (Bierman, 1977):

Sejam  $w_1, \dots, w_N$ ,  $N$  vetores linearmente independentes com  $N \geq n$  e seja  $D = \text{diagonal}(D_1, \dots, D_N) > 0$ . As recursões seguintes implementam o algoritmo:

$$\begin{aligned}
 v_k^n &= w_k \quad k=1, \dots, n \\
 \text{para } j &= n-1, \dots, 1 \\
 \bar{D}_{j+1} &= [v_{j+1}^{j+1}]^T D v_{j+1}^{j+1} \\
 \bar{U}(k, j+1) &= [v_k^{j+1}]^T D v_{j+1}^{j+1} / \bar{D}_{j+1} \quad k=1, \dots, j \\
 v_k^j &= v_k^{j+1} - \bar{U}(k, j+1) v_{j+1}^{j+1} \quad k=1, \dots, j \\
 \text{fim da malha} \\
 \bar{D}_1 &= [v_1^1]^T D v_1^1
 \end{aligned}$$

então  $v_j^j = v_j$ ,  $j=1, \dots, n$  onde os  $v_j$  são os vetores ortogonais de peso e:

$$\begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} D [w_1, \dots, w_n] = \bar{U} \bar{D} \bar{U}^T$$

onde  $\bar{U}$  triangular superior unitária e  $\bar{D}$  diagonal. Segue-se a fase de propagação do filtro UD utilizando este algoritmo.

-fase de propagação UD (Thornton and Bierman, 1977):

Dados  $\hat{U}$  e  $\hat{D}$ ,  $\phi$ ,  $G$  e  $Q$  (diagonal),  $\bar{P} = \phi \hat{P} \phi^T + GQG^T$  é calculado em termos dos fatores  $U$  e  $D$  por:

$$\bar{P} = W \tilde{D} W^T$$

onde:

$$W = [ \begin{matrix} \phi & \hat{U} & G \end{matrix} ] \leftarrow n, \quad \tilde{D} = \text{Diagonal} \left( \begin{matrix} \hat{D} & \\ & Q \end{matrix} \right) \quad (2.50)$$

Após a montagem da matriz  $W$ , aplica-se o algoritmo modificado ponderado de Gram-Schmidt em  $W$  e  $\tilde{D}$  para obter  $\bar{U}$  e  $\bar{D}$ . O problema é essencialmente equivalente a tornar  $\bar{P} = W \tilde{D}^{1/2} (\tilde{D}^{1/2})^T W^T$ , de modo que a triangularização de  $P$  via o algoritmo ponderado de Gram-Schmidt produz:

$$\bar{U} \bar{D}^{1/2} = T [ W \tilde{D}^{1/2} ] .$$

onde  $T$  é a matriz de transformação ortogonal ponderada de Gram-Schmidt,  $\bar{U}$  é triangular superior unitária e  $\bar{D}$  é diagonal. Apenas o algoritmo foi adaptado para ser aplicado a esta situação, e também para manter precisão numérica compatível com a fase de atualização de  $U$  e  $D$ . A propagação do estado não sofre alteração; dado  $\hat{x}$ , a estimativa propagada  $\bar{x}$  é calculada por:

$$\bar{x} = \phi \hat{x}$$

A fase de atualização UD (processamento das medidas) é implementada pelo algoritmo UD:

-fase de atualização UD (processamento sequencial da observação escalar, viz. Bieman, 1977):

Dados a observação escalar  $y$ , os fatores  $\bar{U}$ ,  $\bar{D}$  a priori,  $H$  e  $R$ , onde  $y=Hx+v$  (escalar), e  $E[vv^T]=R>0$  escalar, os fatores atualizados  $\hat{U}$  e  $\hat{D}$  são obtidos via:

$$\begin{aligned} f^T &= H \bar{U} \quad , \quad f^T = (f_1 \dots f_n) \\ e &= \bar{D} f \quad , \quad e_i = \bar{D}_i f_i \quad , \quad i=1, \dots, n \\ \text{para } j &= 1, n \\ \alpha_j &= \alpha_{j-1} + f_{j-1} e_j \quad , \quad \alpha_0 = R \\ \hat{D}(j) &= ( \alpha_{j-1} / \alpha_j ) \bar{D}(j) \\ K_j &= e_j \\ \lambda &= - f_j / \alpha_{j-1} \end{aligned}$$

(2.51)

$$\begin{aligned} &\text{para } i = 1, j-1 \\ &\hat{U}(i, j) = \bar{U}(i, j) + K_i \lambda \\ &K_i = K_i + \bar{U}(i, j) K_j \\ &\text{fim da malha interna} \\ &\text{fim da malha externa} \\ &\hat{x} = \bar{x} + \frac{K_n}{\alpha_n} (y - H \bar{x}) \end{aligned}$$

No final,  $K_n/\alpha_n$  é o ganho de Kalman,  $\alpha_n$  é a variância do resíduo, e  $\hat{U}$  e  $\hat{D}$  são os fatores atualizados devido à observação  $y$ . Este algoritmo atualiza os fatores UD para uma medida escalar. Explorando-se o fato de U ser triangular superior unitária e D diagonal, o algoritmo torna-se bastante competitivo, com complexidade computacional (quantidade de "flops"-floating point operations) levemente superior ao filtro convencional de Kalman, porém mantendo a estabilidade numérica dos filtros de raiz quadrada, sem no entanto exigir operações aritméticas de raiz quadrada. Ver Bierman (1977) para comparações sobre as operações aritméticas necessárias em cada filtro.

### 2.2.5 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

O filtro de Kalman é diretamente aplicável a sistemas com dinâmica e observações lineares. No entanto, os problemas práticos são normalmente de natureza não-linear e, portanto, a implementação computacional deve ser modificada para o filtro de Kalman ser aplicável a esse tipo de problema. Duas extensões são as mais comumente utilizadas: o filtro linearizado e o filtro estendido de Kalman. Recapitula-se nesta seção o filtro estendido de Kalman bem como os diferentes aspectos de implementação em comparação com o filtro linearizado de Kalman. Para tanto, considere-se que o modelo linear não descreve adequadamente o comportamento do sistema. Seja então um sistema que

satisfaz a seguinte equação não-linear diferencial estocástica:

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t)] + B(t)w(t) \quad (2.52)$$

onde  $x$  é o vetor  $n$ -dimensional do estado,  $f$  é uma função vetorial do estado e do tempo de dimensão  $n$ ,  $B$  é uma matriz  $n \times r$ , e  $w(t)$  é o processo gaussiano branco de média nula e covariância:

$$E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t) \delta(t-\tau), \quad (2.53)$$

onde  $Q(t)$  é a covariância  $r \times r$  do ruído dinâmico  $w$  (ou densidade espectral de potência, ou difusão), e  $\delta$  é o delta de Dirac.

A condição inicial  $x(t_0)$  para a Equação 2.52 é suposta ser aleatória gaussiana com média  $\hat{x}_0$  e matriz de covariância do erro  $\hat{P}_0$ . Sejam também as observações discretas no tempo modeladas como uma função não-linear do estado, na seguinte forma:

$$y(k) = h[k, x(k)] + v(k) \quad (2.54)$$

onde  $k$  representa o instante  $t_k$ ,  $h[\dots]$  é uma função vetorial  $m$ -dimensional do estado e do instante, e  $v$  é uma sequência gaussiana de ruído branco de média nula e covariância:

$$E[v(k)v^T(j)] = R(k) \delta_{kj}, \quad (2.55)$$

Outras considerações adotadas são as não-correlações entre o estado inicial e o ruído  $w$ , entre o ruído  $w$  e a sequência  $v$ , e entre a sequência  $v$  e o estado  $x$ :

$$E[x(t_0)w(t)] = 0, E[w(t_k)v^T(k)] = 0, E[x(t_k)v^T(k)] = 0$$

O que se deseja é a aplicação da teoria linear do filtro de Kalman para este problema não-linear. Tal problema deve então ser linearizado em torno de uma trajetória de referência  $x_n(t)$ , iniciando com  $x_n(t_0) = x_{n0}$  e que satisfaz a equação diferencial determinística:

$$\dot{x}_n(t) = f[t, x_n(t)] \quad (2.56)$$

Da mesma forma, supõe-se que tal trajetória nominal gere uma sequência de observações nominais:

$$y_n(k) = h[k, x_n(k)] \quad (2.57)$$

A linearização da Equação 2.52 em torno da trajetória de referência  $x_n$ , através de expansão de Taylor até primeira ordem produz:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & f[t, x_n(t)] + \left[ \frac{\partial f[t, x(t)]}{\partial x} \right]_{x(t)=x_n(t)} [x(t) - x_n(t)] \\ & + B(t) w(t) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \dot{x}_n(t) = & \left[ \frac{\partial f[t, x(t)]}{\partial x} \right]_{x(t)=x_n(t)} [x(t) - x_n(t)] \\ & + B(t) w(t) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Desse modo, a linearização resultante produz uma equação variacional (de perturbação) linear descrita por:

$$\delta \dot{x}(t) = F[t, x_n(t)] \delta x(t) + B(t) w(t) \quad (2.60)$$

onde  $\delta x(t)$  é uma aproximação de primeira ordem do processo  $x(t) - x_n(t)$  e  $F[t, x_n(t)]$  é a matriz  $n \times n$  de derivadas

parciais de  $f$  em relação a  $x$ , avaliada em torno da trajetória nominal:

$$F[t, x_n(t)] \triangleq \left[ \frac{\partial f[t, x(t)]}{\partial x} \right]_{x(t)=x_n(t)} \quad (2.61)$$

Analogamente, as observações podem ser modeladas em termos de perturbações:

$$y(k) - y_n(k) = H[k, x_n(k)] \delta x(k) + v(k) \quad (2.62)$$

onde  $y_n(k) = h[k, x_n(k)]$ , e  $H[k, x_n(k)]$  é a matriz  $m \times n$  de derivadas parciais de  $h$  em relação a  $x$ , avaliada ao longo da trajetória nominal:

$$H[k, x_n(k)] = \left[ \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right]_{x(k) = x_n(k)} \quad (2.63)$$

Portanto, agora pode-se aplicar as equações do filtro linear para as equações linearizadas 2.60 e 2.62. Existem duas maneiras de se implementar essas equações: uma delas consiste em computar a trajetória de referência  $x_n(t)$  para todo o intervalo de aplicação do filtro, e calcular as matrizes de derivadas parciais  $F$  e  $H$  ao longo dessa referência. Então, a saída do filtro produz uma estimativa do desvio  $\delta x$ , ou seja  $\delta \hat{x}$ , de modo que a solução é calculada através de:

$$\hat{x}(t) = x_n(t) + \delta \hat{x} \quad (2.64)$$

Este é o chamado filtro linearizado de Kalman, que tem como vantagem o fato de permitir a computação a priori de várias variáveis relevantes no filtro de Kalman (i.e.  $F$  e  $H$ , e por consequência  $K$  e  $P$ ), mas pode apresentar problemas se a trajetória nominal estiver distante da trajetória real, pois então a linearização pode não ser mais válida.

A segunda maneira de implementar as equações do filtro para o sistema linearizado é através do filtro estendido de Kalman. O filtro estendido de Kalman (Maybeck, 1982; Jazwinski, 1970) adota a política de relinearizar a trajetória nominal sempre em torno da estimativa corrente. Assume-se portanto que, se o filtro estiver funcionando adequadamente, a estimativa corrente está cada vez mais próxima da real e portanto a linearização é com certeza válida. Como aqui a trajetória de referência muda (relinearização) cada vez que o vetor de observações de um dado instante é processado, o filtro estendido de Kalman não permite pre-computação de variáveis do filtro, como no filtro linearizado.

Sejam as seguintes definições:

$$\bar{x}(t) \triangleq x_n(t) + \delta\bar{x}(t) \quad (2.65)$$

$$\hat{x}(t) \triangleq x_n(t) + \delta\hat{x}(t) \quad (2.66)$$

onde a barra superior representa a estimativa obtida durante a fase de propagação do filtro, e o circunflexo representa a estimativa obtida na fase de atualização do filtro. A relinearização implica em gerar a trajetória de referência através de:

$$\dot{\bar{x}}_n(t) = f[t, x_n(t)] , t > k \quad (2.67)$$

com condição inicial:

$$x_n(k) = \hat{x}(k) \quad (2.68)$$

onde  $\hat{x}(k)$  é a estimativa do instante  $k$  imediatamente após o processamento das medidas do mesmo instante. Portanto, esta é a estimativa mais atual disponível. Por consequência

dessa relinearização, a melhor estimativa de  $\delta x(k)$  no instante da relinearização é:

$$\delta \hat{x}(k) = \hat{x}(k) - x_n(k) = 0 \quad (2.69)$$

Para propagar esta perturbação para o instante  $k+1$ , a matriz  $F$  deve ser computada para  $t=t_k$  considerando  $x_n(k) = \hat{x}(k)$ . A equação de propagação da perturbação no intervalo  $[k, k+1)$  é:

$$\dot{\delta \bar{x}}(t) = F[t, x_n(t)] \delta \bar{x}(t) \quad (2.70)$$

com condição inicial:

$$\delta \bar{x}(k) = \delta \hat{x}(k) = 0 \quad (2.71)$$

de forma que a estimativa propagada da perturbação  $\delta \bar{x}$  é identicamente nula no intervalo  $[k, k+1)$ , ou seja,  $\delta \bar{x}(t) \equiv 0$  para  $t \in [k, k+1)$ . O modelo das observações em  $k+1$  também deve ser relinearizado em torno da estimativa mais corrente,  $\bar{x}(k+1) = x_n(k+1)$ . A observação nominal estimada vale:

$$y_n(k+1) \triangleq h[k+1, x_n(k+1)] \quad (2.72)$$

Logo, a fase de atualização do filtro estendido fica:

$$\delta \hat{x}(k+1) = \delta \bar{x}(k+1) + K(k+1) \cdot (y(k+1) - y_n(k+1) - H[k+1, x_n(k+1)] \delta \bar{x}(k+1)) \quad (2.73)$$

e lembrando que  $\delta \bar{x}(k+1) \equiv 0$  vem:

$$\delta \hat{x}(k+1) = K(k+1) (y(k+1) - h[k+1, x_n(k+1)]) \quad (2.74)$$

onde o ganho de Kalman  $K$  é calculado usando  $P$  e  $H$  avaliados ao longo da trajetória de referência, e  $\hat{x}(k+1)$  é a perturbação antes da próxima relinearização, Equação 2.68. Finalmente, de acordo com a Definição 2.66 anterior vem:

$$\hat{x}(k+1) - x_n(k+1) = \delta\hat{x}(k+1) \quad (2.75)$$

e lembrando que  $x_n(k+1) = \bar{x}(k+1)$  resulta:

$$\hat{x}(k+1) = \bar{x}(k+1) + K(k+1)(y(k+1) - h(k+1, \bar{x}(k+1))) \quad (2.76)$$

Portanto, o filtro estendido de Kalman pode ser resumido da seguinte forma:

Propagação:

Estado:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f[t, \bar{x}(t)] \quad (2.77)$$

Transição:

$$\dot{\phi}(t) = F[t, \bar{x}(t)] \phi(t), \quad (2.78)$$
$$F[t, \bar{x}(t)] \triangleq \left[ \frac{\partial f[t, x]}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$$

Condições iniciais:

$$\bar{x}(k) = \hat{x}(k) \text{ (relinearização)}, \quad \phi(k) = I$$

Covariância:

$$\bar{P}(k+1) = \phi(k) \hat{P}(k) \phi^T(k) + G(k) Q(k) G^T(k) \quad (2.79)$$

$$G(k) Q(k) G^T(k) = \int_k^{k+1} B(t) \phi(t) Q(t) \phi^T(t) B^T(t) dt$$

Atualização:

Ganho:

$$K(k+1) = \bar{P}(k+1) H^T[k+1, \bar{x}(k+1)] \quad (2.80)$$

$$\{ H[k+1, \bar{x}(k+1)] \bar{P}(k+1) H^T[k+1, \bar{x}(k+1)] + R(k+1) \}^{-1}$$

Estado:

$$\hat{x}(k+1) = \bar{x}(k+1) \quad (2.81)$$

$$+ K(k+1) \{ y(k+1) - h[k+1, \bar{x}(k+1)] \}$$

Covariância:

$$\hat{P}(k+1) = \{ I - K(k+1) H[k+1, \bar{x}(k+1)] \} \bar{P}(k+1) \quad (2.82)$$

$$H[k+1, \bar{x}(k+1)] = \left[ \frac{\partial h(k+1, x)}{\partial x} \right]_{x = \bar{x}(k+1)}$$

É prática comum integrar-se 2.77 e 2.78 simultaneamente, no mesmo conjunto de equações diferenciais, para se assegurar que as derivadas parciais estão sendo calculadas na trajetória de referência  $\bar{x}$ . Para o cálculo da matriz  $GQG^T$ , normalmente adota-se a hipótese do processo  $w$  (ruído branco) ser constante por trechos ("step-process"), de modo que o processo  $w(t)$  é considerado uma sequência  $w(k)$ . Então,  $E[w(k)w^T(k)] = Q(k)$  correspondente a  $Q(t)$ , e a matriz  $G$  pode ser calculada de várias maneiras. Vide o Capítulo 4, Seção 4.1, para discussões dessa natureza. Na fase de atualização, as Equações 2.80, 2.81, e

2.82 são implementados para processamento de medida escalar, de modo que desaparece o problema de inversão de matriz da Equação 2.80.

A aplicação do método de fatorização UD para o filtro estendido de Kalman também é bastante simples.

Na fase de propagação, o estado e a matriz de transição são obtidos conforme descrito no filtro estendido (Equações 2.77, 2.78). Já para a equação de propagação da covariância, Equação 2.79, deve ser utilizado o algoritmo ponderado modificado de Gram-Schmidt para obter os fatores  $\tilde{U}$  e  $\tilde{D}$  propagados, conforme descrito na Seção 2.2.4.

Na fase de atualização, o estado  $x$  e os fatores  $U$  e  $D$  são obtidos pelo algoritmo UD descrito anteriormente (Seção 2.2.4) com a única exceção de que o resíduo linear  $y - H\bar{x}$  deve ser substituído pelo seu equivalente resíduo não-linear  $y - h(\bar{x})$ , para atualizar a estimativa do estado.



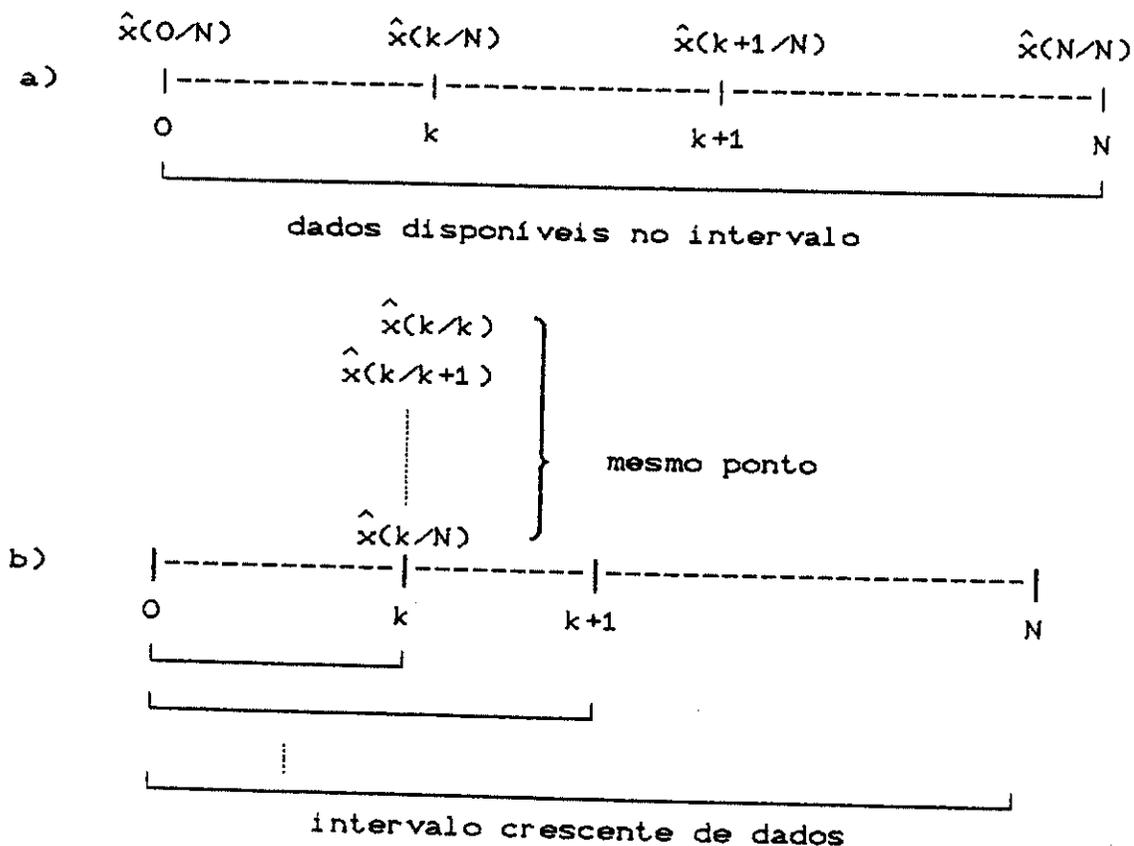
### CAPÍTULO 3

#### SUAVIZAÇÃO DE ESTADO DE INTERVALO FIXO

A suavização de estado ("smoothing") deve ser entendida no conceito de estimação estatística de estado, e não ser confundida com técnicas de suavização de dados como técnicas de ajuste de curvas, filtros digitais, "splines" por exemplo. A fim de se introduzir o conceito de suavização de estado, considere-se que se dispõe de um conjunto de medidas da saída de um sistema dinâmico correspondentes aos instantes  $t_0$  a  $t_N$ :  $Y_N = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_N)$ . O problema de estimação de estado se divide em 3 ramos a saber: filtragem, onde a estimativa  $\hat{x}(k)$  é baseada nas medidas desde o instante 0 até o instante  $k$ ; predição, onde  $\hat{x}(k)$  é baseado nas medidas desde o instante 0 até o instante  $j < k$ ; e suavização, onde  $\hat{x}(k)$  é baseado nas medidas desde o instante 0 até o instante  $k < j < N$ . Isto equivale a dizer que, considerando-se técnicas sequenciais recursivas de estimação de estado, os chamados filtros sequenciais (tipo Kalman) podem obter as estimativas correspondentes a um determinado instante de amostragem imediatamente após o processamento das medidas deste instante. Já os preditores permitem a obtenção da estimativa do estado do sistema em instantes futuros em relação ao da observação disponível mais recente. Estes tipos de estimadores de estado se utilizam de modelos dinâmicos estocásticos para extrapolar as estimativas futuras. Os estimadores do terceiro tipo, os chamados suavizadores de estado, requerem que todas as medidas correspondentes ao intervalo 0 a N estejam disponíveis para se permitir a obtenção da estimativa do estado em qualquer instante dentro desse intervalo. Aceita-se atualmente a divisão dos tipos de suavizadores em (Meditch, 1973):

- intervalo fixo,
- ponto fixo,
- janela fixa.

Considere-se um conjunto de medidas  $Y_j = (y_0, y_1, \dots, y_j)$  correspondentes aos instantes  $t_0, t_1, \dots, t_j$  e defina-se  $\hat{x}(k/j) = E[x(k)/Y_j]$ , onde  $E[x(k)/Y_j]$  representa o valor esperado de  $x(k)$  condicionado às medidas relativas aos instantes  $t_0, t_1, \dots, t_j$ . A suavização de intervalo fixo obtém  $\hat{x}(k/N)$  ou seja, uma estimativa do estado do sistema no instante  $k$  baseada no conjunto completo de medidas do intervalo  $[t_0, t_N]$ , para qualquer  $k$  tal que  $0 \leq k \leq N$ . A suavização de ponto fixo obtém a estimativa  $\hat{x}(k/j)$  sempre no mesmo instante  $k$ , com  $j$  podendo porém assumir valores inteiros tais que  $k+1 \leq j \leq N$ . A suavização de janela fixa obtém  $\hat{x}(k/j)$  onde  $k$  e  $j$  mantêm um intervalo fixo de diferença, ou seja  $k+l = j$ . A Figura 3.1 extraída de Maybeck (1982) ilustra os 3 tipos de suavizadores:



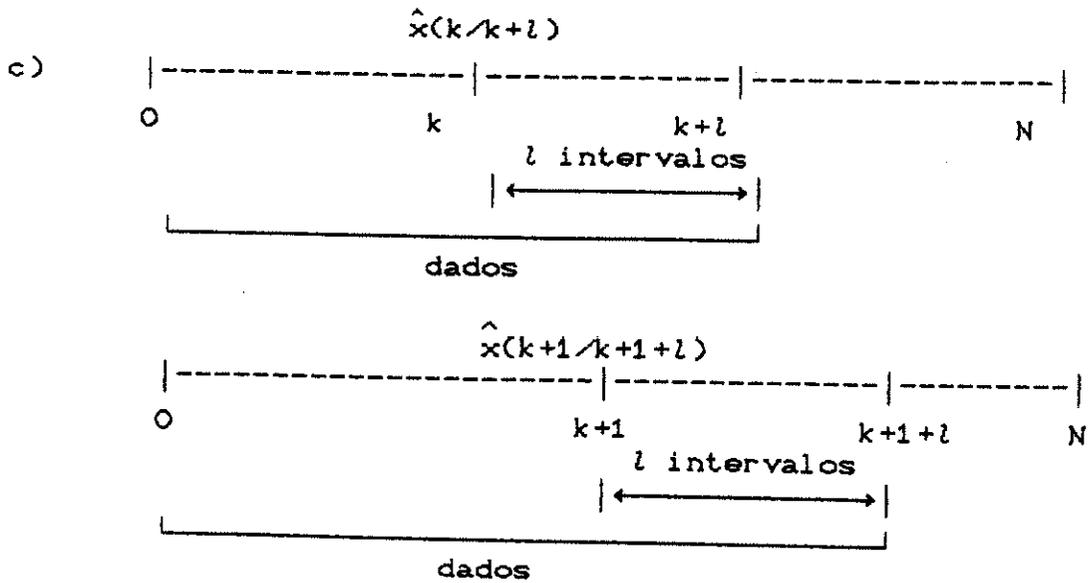


Fig. 3.1 - Os três tipos de suavizadores: (a) intervalo fixo, (b) ponto fixo, (c) janela fixa.

O suavizador de estado de intervalo fixo é normalmente utilizado em redução de dados "off-line", para obter estimativas refinadas de melhor qualidade do que as obtidas pelos filtros "on-line", já que a estimativa suavizada passa a incorporar as informações contidas em todas as medidas do intervalo considerado e não apenas até a presente medida. Uma característica marginal é que ele permite também obter as estimativas para as excitações de entrada (ruídos dinâmicos, sinais de controle) além das estimativas do estado. Desse modo, pode-se verificar por exemplo se os controles atuaram de fato com a magnitude desejada, em problemas com termos forçantes. Exemplos típicos são as análises pós-vôo de mísseis que produzem estimativas suavizadas da trajetória e do empuxo (variável de controle) fornecidos pelos propulsores.

Suavizadores de estado de ponto fixo permitem a obtenção de estimativas refinadas correspondentes a um determinado instante de tempo, no qual um bom conhecimento

do estado é importante. Como exemplo de situação em que a utilização de suavizadores deste tipo é interessante cite-se a estimação do estado num determinado instante de queima de combustível de um veículo espacial, ou ainda, o estado no ponto de injeção de um satélite em órbita.

O suavizador de janela fixa propõe a obtenção de estimativas refinadas em instantes sucessivos porém com um certo atraso em relação ao instante atual das medidas. Se existe a preemência de uma estimativa ser obtida rapidamente, embora não necessariamente em tempo real, podendo-se atrasar o cálculo do estado em um ou mais intervalos de amostragem, então este suavizador pode ser utilizado. Ele permite obter estimativas mais refinadas que um filtro de tempo real, às custas de um atraso em sua computação, já que processa observações posteriores àquela do instante em que o estado é estimado, dentro da janela considerada para a obtenção da estimativa.

Para o problema de determinação de órbita, se está aqui particularmente interessado no suavizador de intervalo fixo. A intenção é a obtenção de estimativas mais refinadas dentro do intervalo coberto pelos dados, e a aferição da adaptatividade e da robustez do filtro sequencial a partir dos resultados do suavizador. Além da estimativa refinada da órbita, a estimativa do nível de ruído dinâmico e sua covariância dadas por este suavizador podem ser importantes para calibrar melhor os parâmetros do filtro e para verificar se o ruído dinâmico utilizado no filtro foi convenientemente dosado.

Para diferenciar a aplicação da suavização de estado à determinação de órbita, utilizar-se-á a nomenclatura reconstituição de órbita para quando algum processo de suavização tiver sido aplicado após um processo de filtragem, que seria a determinação de órbita usual. A

dificuldade na aplicação deste refinamento reside no fato do problema (determinação de órbita) ser não-linear, de maneira que as equações de suavização devem ser "estendidas", em analogia com o filtro estendido de Kalman.

### 3.1 - SUAUZADORES CONVENCIONAIS

Os suavizadores convencionais de intervalo fixo normalmente aproveitam algumas variáveis calculadas durante o processo de filtragem para produzir o refinamento das estimativas. Os filtros percorrem um processo de varredura para frente ("forward") no tempo. Já os suavizadores usualmente percorrem o caminho inverso ("backward") no tempo. Dentro deste esquema destacam-se dois suavizadores: RTS de Rauch, Tung e Striebel (1965); e BF de Bryson e Frazier (1963).

As equações para o suavizador discreto RTS, para  $k = N-1, \dots, 0$ , são:

$$\hat{x}(k/N) = \hat{x}(k) + C(k) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ], \quad (3.1)$$

$$\hat{P}(k/N) = \hat{P}(k) + C(k) [ \hat{P}(k+1/N) - \bar{P}(k+1) ] C^T(k), \quad (3.2)$$

$$C(k) = \hat{P}(k) \phi^T(k) \bar{P}^{-1}(k+1), \quad (3.3)$$

$$\hat{w}(k/N) = F(k) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ], \quad (3.4)$$

$$\hat{Q}(k/N) = Q(k) + F(k) [ \hat{P}(k+1/N) - \bar{P}(k+1) ] F^T(k), \quad (3.5)$$

$$F(k) = Q(k) G^T(k) \bar{P}^{-1}(k+1), \quad (3.6)$$

com condições iniciais:

$$\hat{x}(N/N) = \hat{x}(N), \quad \hat{P}(N/N) = \hat{P}(N), \quad \hat{Q}(N/N) = Q(N).$$

onde as variáveis  $\bar{x}$ ,  $\hat{x}$ ,  $\bar{P}$  e  $\hat{P}$  são a estimativa do estado propagada, a estimativa do estado atualizada, a covariância propagada, e a covariância atualizada respectivamente, advindos do processo de filtragem. As variáveis  $Q$  e  $\phi$  representam a covariância do ruído dinâmico e a matriz de transição. A nomenclatura é a mesma adotada na descrição do filtro convencional de Kalman, Seção 2.2. As estimativas suavizadas são denotadas pela barra "/" de condição para diferenciá-las das estimativas filtradas. Assim,  $\hat{x}(. / N)$  é a estimativa de estado suavizada,  $\hat{P}(. / N)$  é a covariância suavizada,  $\hat{w}(. / N)$  é o ruído dinâmico suavizado,  $\hat{Q}(. / N)$  é a covariância do ruído dinâmico suavizada, e  $C(k)$  e  $F(k)$  são matrizes de ganho do suavizador (para o estado e para o ruído dinâmico).

Nota-se claramente que as variáveis  $\bar{x}$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{P}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\phi$ ,  $G$ ,  $Q$  devem ser armazenadas durante o processo de filtragem, ou recalculadas novamente. Neste caso, podem ser restaurados (recalculados) os valores de  $\bar{x}$  e  $\bar{P}$  por meio das equações dinâmicas, especificamente por meio da Equação 2.20 de propagação da covariância (Seção 2.2.1). Observar que neste suavizador RTS não é necessário o armazenamento das medidas, já que as estimativas filtradas do estado e da covariância contém as informações fornecidas pelas medidas. Deve-se também notar a necessidade de inversão de uma matriz (Equações 3.3 e 3.6), e subtração de duas covariâncias entre colchetes (Equações 3.2 e 3.5). Estas operações reconhecidamente produzem problemas numéricos em computador. Algoritmos computacionais de raiz quadrada tem sido propostos para contornar o problema, e serão descritos na Seção 3.2.

O suavizador discreto de Bryson e Frazier BF pode ser descrito pelas seguintes equações (Bryson and Ho, 1969):

$$\hat{x}(k/N) = \hat{x}(k) + \hat{P}(k) \phi^T(k) \lambda(k), \quad (3.7)$$

$$\lambda(k-1) = C(k) [ \phi^T(k) \lambda(k) + H^T(k) R^{-1}(k) (y(k) - H(k) \bar{x}(k)) ], \quad (3.8)$$

$$\hat{w}(k/N) = Q(k) G^T(k) \lambda(k), \quad (3.9)$$

$$\hat{P}(k/N) = \hat{P}(k) [ I - \phi^T(k) \Lambda(k) \phi(k) \hat{P}(k) ], \quad (3.10)$$

$$\Lambda(k-1) = C^T(k) \phi^T(k) \Lambda(k) \phi(k) C(k) + H^T(k) R^{-1}(k) H(k) C(k), \quad (3.11)$$

$$\hat{Q}(k/N) = Q(k) - Q^T(k) G^T(k) \Lambda(k) G(k) Q(k), \quad (3.12)$$

$$C(k) = I - \hat{P}(k) H^T(k) R^{-1}(k) H(k), \quad (3.13)$$

com condições iniciais:

$$\lambda(N) = 0; \quad \Lambda(N) = 0.$$

onde as seguintes variáveis foram definidas no filtro de Kalman (Seção 2.2.1):  $H$  é a matriz do modelo das observações,  $R$  é a covariância do ruído de medidas,  $y$  é o vetor de medidas, e  $\bar{x}$  é a estimativa de estado propagada. As variáveis  $\lambda$  e  $\Lambda$  são variáveis adjuntas auxiliares. Nota-se que esta transformação não exige a inversão da covariância. Basta lembrar que a nova variável  $\lambda$  tem a seguinte interpretação matemática:

$$\lambda(k) = \bar{P}^{-1}(k+1) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ]$$

o que mostra onde a inversão foi implicitamente embutida e brilhantemente evitada. Por outro lado, o termo  $\hat{P}(k)H^T(k)R^{-1}(k)$  na Equação 3.13 é o próprio ganho de Kalman, de modo que, ou a matriz  $R(k)$  é invertida, ou armazena-se os valores do ganho durante a aplicação anterior do processo de filtragem. A restauração do ganho de Kalman novamente exigiria uma inversão (ver Equações do filtro de Kalman, Seção 2.2.1). No entanto, nota-se também que se  $R(k)$  é diagonal, as medidas podem ser processadas uma componente de cada vez, transformando a inversão de matriz em inversões de escalares.

Por outro lado, Bierman (1973) propôs modificações no algoritmo original BF de modo a se utilizar relações de dualidade entre o filtro e o suavizador possibilitando a utilização de subrotinas no suavizador, que foram escritas para o filtro de Kalman. Esta versão, batizada de MBF (suavizador modificado de Bryson e Frazier), não requer restauração de estimativas e covariâncias, e utiliza os ganhos, os resíduos preditos e as covariâncias dos resíduos. As estimativas suavizadas podem ser calculadas a partir das variáveis adjuntas  $\lambda$  e  $\Lambda$ , nos instantes desejados e não necessariamente em todos os instantes de medidas.

Uma outra versão de suavizador compõe o resultado de dois filtros (Fraser and Potter, 1969). Indiretamente, isto prova que a estimativa suavizada é o resultado da informação obtida por dois filtros, um que abrange os dados desde o instante 0 até o instante  $k$ , e outro desde  $N$  até  $k$ , cobrindo o intervalo de dados de 0 a  $N$ . A interpretação do suavizador ótimo como combinação de dois filtros, um que trabalha para a frente ("forward") em relação aos dados, e outro que corre para trás ("backward"), é bastante fácil. O filtro para frente produz a melhor estimativa até o instante  $k$  baseado em dados desse

intervalo. Entretanto, se um filtro para trás processa medidas do instante final até o instante  $k$ ; i.e., de  $N$  a  $k$ , ele produzirá a melhor estimativa baseado em dados de  $N$  a  $k$ . Juntos esses dois filtros processam toda a informação disponível, de modo que a combinação das 2 estimativas produz a estimativa suavizada que abrange todo o intervalo de  $0$  a  $N$ .

O suavizador com 2 filtros pode ser descrito por (Kaminski and Bryson, 1972):

$$\hat{x}(k/N) = [I + \hat{P}(k)\bar{Y}(k)]^{-1}\hat{x}(k) + \hat{P}(k/N)\bar{d}(k), \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}(k/N) = & [I - C(k)\bar{Y}(k)] \hat{P}(k) [I - C(k)\bar{Y}(k)]^T \\ & + C(k)\bar{Y}(k)C^T(k), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$C(k) = \hat{P}(k) [I + \hat{P}(k)\bar{Y}(k)]^{-T}, \quad Y(k) = P^{-1}(k). \quad (3.16)$$

No filtro para frente pode-se utilizar as equações do filtro convencional de Kalman (Seção 2.2.1). No filtro para trás, a condição inicial em  $N$  é dada por  $\bar{d}(N) = 0$  e  $\bar{Y}(N) = 0$ . As equações de atualização para trás são as mesmas do filtro de informação (Seção 2.2.2, Equações 2.29 e 2.30). Já as equações para propagação no tempo podem ser descritas por:

$$\bar{d}(k) = \phi^T(k) \hat{d}(k+1) - L(k) G^T(k) \hat{d}(k+1), \quad (3.17)$$

$$\bar{Y}(k) = \phi^T(k) E(k) - L(k) G^T(k) E(k), \quad (3.18)$$

$$E(k) = \hat{Y}(k+1) \phi(k), \quad (3.19)$$

$$L(k) = E^T(k)G(k)[G^T(k)\hat{Y}(k+1)G(k)+Q^{-1}(k)]^{-1}. \quad (3.20)$$

Notar que o filtro para trás está na forma do filtro de informação já que  $d$  e  $Y$  são definidas conforme tal filtro (Seção 2.2.2). Neste método varre-se o filtro convencional para frente e armazena-se  $\hat{x}$  e  $\hat{P}$ , em seguida varre-se o filtro de informação para trás e armazena-se  $\hat{d}$  e  $\hat{Y}$ . Então utilizam-se as Equações 3.14-3.16 para ponderar as estimativas dos dois filtros e obter as estimativas suavizadas  $\hat{x}(.|N)$  e  $\hat{P}(.|N)$ .

### 3.2 - SUAUZADORES DE RAIZ QUADRADA

A idéia de aplicar técnicas de fatorização de raiz quadrada da matriz de covariância em suavização de estado, surge naturalmente como consequência da utilização dessas técnicas no processo de filtragem. Se a filtragem é feita utilizando-se algoritmos de raiz quadrada, por lógica e por razões de consistência impõe-se que o suavizador deve manter o mesmo nível de precisão e estabilidade no processo de refinamento das estimativas. Dentro desse quadro destacam-se os suavizadores de raiz quadrada da informação (SRIS ou "Square Root Information Smoother") que se originam a partir da idéia de Dyer e McReynolds (1969) de se utilizar o filtro de raiz quadrada da informação (Seção 2.2.3). Kaminski e Bryson (1972) e Bierman (1974) apresentam uma excelente revisão do assunto.

A versão SRIS pode ser implementada via triangularização de Householder ou outra qualquer, usando-se a mesma nomenclatura do filtro de raiz quadrada da informação (Kaminski and Bryson, 1972), onde a matriz de informação é fatorada como  $P^{-1} = (SS^T)^{-1}$ , com  $S^{-1}$  triangular superior:

condições iniciais:

$$\hat{x}(N|N) = \hat{x}(N) ; \quad \hat{S}^{-1}(N|N) = \hat{S}^{-1}(N)$$



onde  $T$  é a matriz ortogonal que produz a triangularização, e  $B^*(k-1/N)$  e  $\hat{W}^{-1}(k-1/N)$  são matrizes triangulares superiores. Então:

$$\hat{W}^{-1}(k-1/N) \hat{w}(k-1/N) = c^*(k-1/N), \quad (3.23)$$

$$B^*(k-1/N) \hat{x}(k-1/N) = b^*(k-1/N) - A^*(k-1/N) \hat{w}(k-1/N), \quad (3.24)$$

$$\hat{Q}(k-1/N) = \hat{W}(k-1/N) \hat{W}^T(k-1/N). \quad (3.25)$$

Apesar da nomenclatura aparentemente confusa e incontrolável, estes algoritmos são facilmente implementáveis em computador, necessitando apenas de um método de triangularização estável e robusto como a transformação ortogonal de Householder. É interessante notar que na literatura ainda não apareceram explicitamente suavizadores de raiz quadrada da covariância (ao invés da matriz de informação), e a contrapartida do filtro UD (Seção 2.2.3), o suavizador UD. Este suavizador UD foi delineado em Bierman (1983) mas as equações explícitas em termos dos fatores UD não foram publicadas. Além disso, uma análise da modificação proposta rapidamente leva à conclusão da dificuldade de aplicação a sistemas não-lineares, além de exigir inversão de matrizes de transição.

Um trabalho bastante interessante porém peculiar foi publicado por Watanabe (1986). Ele fatora a matriz de informação em termos dos fatores UD e usa um suavizador para a frente ("forward pass"). Em outros termos, o filtro utilizado varre os dados para trás no tempo ("backward"), e o suavizador os faz para frente, portanto numa abordagem totalmente diferente da usual. Esta estratégia produz um suavizador de "rank" 2 mais rápido, com menor uso de memória, e sem necessidade de inversão da

matriz de transição. A desvantagem evidente desta abordagem é que o suavizador impõe um tipo específico de filtro para trás, que impossibilita o uso das estimativas do filtro em tempo real.



## CAPÍTULO 4

### TÉCNICAS ADAPTATIVAS

Filtros robustos tem sido projetados devido a problemas na aplicação das equações matemáticas aos casos práticos. Teoricamente, assume-se uma dinâmica corretamente modelada, observações idem, e os ruídos tanto na dinâmica quanto nas observações são considerados brancos gaussianos com média nula e covariância conhecida. A idealização de modelo de ruído branco dificilmente é verificada de fato, porém na prática este modelo funciona de maneira bastante satisfatória, obedecidas as devidas restrições (e.g. Lopes, 1989). O ruído de observações geralmente contém tendências ("bias") que devem ser retiradas para torná-lo de média nula, ou estimadas durante o processo de filtragem. O ruído dinâmico não pode ser mensurado mais que aproximadamente na prática e a restrição de média nula torna-se virtualmente impossível de ser comprovada. Como se verá, no entanto, o ruído dinâmico é algo desejável em muitos casos pois pode ser dosado de modo adaptativo ou não, com o que podem ser evitados problemas de divergência, facilitando a regulação do filtro. A independência entre ruídos dinâmicos e de observação pode ser considerada uma hipótese correta em determinação de órbita, devido às diferentes naturezas entre as modelagens dinâmicas de órbita e de observações. Já a correlação das observações no tempo é um fato concreto, porque normalmente as medidas são efetuadas por equipamentos eletromecânicos e dificilmente pode-se aceitar uma não-correlação temporal. Na prática, assume-se normalmente a não-correlação, pela dificuldade de se medir os coeficientes de correlação, bem como a pequena relação benefício/custo que se obtém quando estes são utilizados no filtro. É usual supor-se a matriz de covariância dos ruídos diagonal aumentando-se o nível das variâncias para levar em conta este fato.

No caso concreto de determinação de órbita, conhece-se muito bem o modelo das observações, e as medidas são cada vez mais precisas devido aos avanços tecnológicos na área. Já a modelagem dinâmica constitui-se no maior problema. Dados os vínculos impostos ao tempo de processamento em computador (tempo real ou quase-real), de memória e de I/O (entradas/saídas), é comum em estimadores sequenciais do tipo filtro de Kalman, simplificar-se o modelo dinâmico em relação ao estágio do conhecimento atual. Em dinâmica de órbitas, o modelo não pode ser reduzido ou descentralizado, mas simplificado, para levar em conta somente os efeitos principais. Neste caso, o efeito primário a ser modelado é o movimento kepleriano. A inclusão de outros efeitos gera uma sobrecarga ("overhead") computacional em escala praticamente exponencial. Por exemplo, a inclusão do coeficiente de perturbação de primeira ordem, que representa o achatamento dos polos (zonal  $J_2$ ), no modelo do geopotencial, no mínimo dobra o número de "flops" (floating point operations ou operações de ponto flutuante) sem contar o incremento adicional no cálculo da matriz de transição de estado e as avaliações adicionais correspondentes de derivadas parciais.

Já que por vezes o modelo não é fiel à realidade, gera-se não raro um fenômeno conhecido como divergência das estimativas (Fitzgerald, 1971; Schlee et al., 1967). Basicamente, à medida que mais e mais observações são processadas, o filtro tende a convergir, ou seja, as novas observações passam a ter pouca influência na estimação do estado. A covariância se torna pequena e o ganho, proporcional a esta, similarmente pondera pouco as novas observações. Então, se o filtro sofre o efeito de não-linearidades, erros numéricos, e modelagem incorreta, ele passa a seguir (estimar) o estado errado. Os procedimentos para combater a divergência normalmente

procuram meios de abrir o ganho para que novas informações não sejam desprezadas, ou seja, o filtro passa a ter uma memória mais curta, dando origem a procedimentos sub-ótimos. Admite-se que a divergência pode-se originar devido aos seguintes fatos:

- não-linearidades,
- modelagem dinâmica incorreta,
- erros numéricos.

Erros de linearização são minimizados quando estas são efetuadas em torno de estimativas próximas da solução. Os filtros linearizado e estendido de Kalman (e.g. Jazwinski, 1970) são aplicações do filtro linear de Kalman a problemas não-lineares. O filtro estendido tem sido mais utilizado, pois as linearizações são sempre efetuadas em torno dos valores correntes das estimativas. Como supõem-se que estas estejam cada vez mais próximas à solução, esta é aparentemente a melhor alternativa.

Para se evitar problemas numéricos devidos aos erros de truncamento impostos pelo comprimento finito de palavra dos computadores digitais, vários algoritmos equivalentes ao filtro de Kalman do ponto de vista teórico mas com muito melhor estabilidade numérica, tem sido propostos, tais como os filtros de raiz quadrada e o filtro UD (ver Seção 2.2).

A modelagem incorreta tem sido uma das fontes de divergência mais difíceis de se corrigir. Nota-se uma profusão de propostas para resolver a divergência causada por erros de modelagem. A idéia básica consiste em tirar proveito da informação fornecida pela sequência de inovação (resíduos) para suprir e estimar os erros de modelagem. Esta solução pode parecer óbvia pois os resíduos são a única fonte física de informação sobre o comportamento do

sistema cujo estado é estimado. Porém vários tipos de abordagem titulados de estimadores adaptativos tem sido utilizados. Uma das abordagens consiste em estimar os erros de modelagem dinâmica aumentando a dimensão original do estado. No caso de órbita, estimam-se as acelerações não-modeladas (Tapley and Ingram, 1973; Rios Neto, 1973; Jazwinski, 1975; Negreiros de Paiva, 1982). Outra abordagem procura estimar o nível adequado de ruído no estado para compensar o efeito de modelagem imperfeita. Neste grupo situam-se os trabalhos de Jazwinski (1969), e Rios Neto e Kuga (1982a, 1982b, 1985), que procuram estimar o ruído forçando os resíduos a se tornarem consistentes estatisticamente. Existem também filtros de memória limitada que forçam o filtro a esquecer as antigas informações e ponderar mais pesadamente as novas informações fornecidas pelos resíduos (Jazwinski, 1968). Outra abordagem procura calcular algebricamente as variâncias dos ruídos tanto de medida quanto de estado, e os realimenta no filtro (Myers and Tapley, 1976). Também a ponderação do ganho de Kalman por um valor (estimado segundo algum critério) impossibilita sua diminuição, e portanto pondera melhor as informações. Para o cálculo destes pesos, vários métodos tem sido propostos, veja por exemplo Schmidt (1968) ou Tarn e Zaborzky (1970). Evidentemente todos esses métodos supõem condições de observabilidade.

O que se conclui de imediato é que algoritmos genéricos que tratem quaisquer tipos de dinâmica não tem sido empregados, e aplicações de caráter mais específicos são as que tem sido registradas mais frequentemente na literatura. Outra observação importante refere-se à utilização, como uma constante, da sequência de inovação como geradora de informações para os filtros adaptativos. Eles são também utilizados para detecção de falhas em filtros robustos e tolerantes a falhas (Willisky, 1976).

O presente trabalho não tem a pretensão de "criar" algoritmos genéricos mas sim algoritmos adequados para o problema de determinação de órbita e similares. Os requisitos básicos que se impõem são os de permitir o processamento em tempo real e possuir robustez e precisão em igual grau de importância. Nesta sequência, o autor propõe-se a revisar a técnica de ruído adaptativo (Rios Neto e Kuga, 1982a, 1982b, 1985), sua área de atuação mais familiar, e a propor seu uso conjunto com o algoritmo UD, mostrando o impacto e os custos desse procedimento em relação ao filtro convencional de Kalman. A técnica de ruído adaptativo pode ser considerada como consolidada, tendo sido utilizado em áreas tão heterogêneas como: estimação de atitude de satélites (Lopes, 1982; Cardenuto et al., 1984; Ferraresi et al., 1986; Trabasso, 1986), estimação de órbita de satélites (Kuga, 1982), controle de atitude de satélites (Moro, 1983; Moro e Rios Neto, 1984), estimação de parâmetros (Orlando et al., 1986), identificação (Larangeira, 1986), estimação de estado baseada no conceito de dualidade (Rios Neto e Fleury, 1985; Fleury, 1985), e aplicações marítimas (Nunes e Gueler, 1984). Um artigo comparativo foi também realizado (Nascimento e Yoneyama, 1986) para um problema simplificado de órbita. Um dos objetivos do presente trabalho é mostrar que, apesar da aparente complexidade teórica, a implementação da técnica adaptativa não requer grande custo adicional, mesmo quando utilizado em conjunto com o filtro UD. Duas implementações praticamente equivalentes são propostas.

O presente capítulo também propõe o suavizador UD, derivado do suavizador de Bierman (1983), que modifica convenientemente as equações do suavizador RTS para melhorar o desempenho numérico e economizar a quantidade de operações aritméticas em sua implementação em

computadores. Daí, ênfase é também propositadamente colocada nos suavizadores de estado, que podem reconstituir o estado, e fornecer subsídios importantes para o aperfeiçoamento do projeto do filtro de Kalman.

Atualmente, a maioria dos artigos tende a enfatizar a complexidade computacional dos algoritmos propostos, de maneira a permitir a comparação com os vários procedimentos existentes. Este tipo de análise é objeto de estudos de pesquisadores interessados em implementações eficientes com propriedades numéricas favoráveis. Uma lista representativa deve conter pelo menos os seguintes trabalhos:

na área de estimação de estado:

Bierman (1974, 1977, 1981a), Thornton e Bierman (1977, 1980), Kaminski (1971), Kaminski et al. (1971), Lawson e Hanson (1974), Schmidt (1966), e Verhaegen e Van Dooren (1986).

na área de suavização de estado:

Kaminski (1971), Kaminski e Bryson (1972), Bierman (1974, 1983), e Watanabe (1986).

O aspecto algorítmico é particularmente importante quando se está interessado em requisitos de tempo real, onde tanto a quantidade de operações aritméticas quanto a memória de armazenamento devem ser minimizados, levando em conta qualidades desejáveis como estabilidade numérica, robustez e tolerância a falhas. A busca de algoritmos econômicos tem gerado procedimentos que mecanizam os algoritmos através de truques e artifícios de programação, recursões e manipulação algébrica conveniente de equações.

Um dos objetivos do presente trabalho é analisar detalhes de implementação para mostrar a relação custo/benefício ao se utilizar o procedimento adaptativo, além de propor implementações eficientes de algoritmos estáveis numericamente. Não é por outro motivo que ao longo deste capítulo, além do desenvolvimento teórico, existe a preocupação com a descrição de aspectos computacionais tais como quantidade de operações ("flops"), economia de memória, otimização da mecanização, e eficiência (precisão) numérica dos algoritmos empregados.

#### 4.1 - RUÍDO ADAPTATIVO

O objetivo do procedimento de estimação adaptativa do ruído no estado é eliminar a divergência. A questão é como adequar o nível de ruído para evitar a divergência; ou seja, como estimar, de modo a eliminar este problema, a matriz de covariância  $Q(k)$  a ser adicionada à matriz de covariância do erro no estado, durante o processo de propagação do filtro de Kalman:

$$\bar{P}(k+1) = \phi(k) \hat{P}(k) \phi^T(k) + G(k) Q(k) G^T(k). \quad (4.1)$$

onde  $\phi$  é a matriz de transição de estado, e  $G$  é uma matriz de dimensão compatível com o vetor de ruídos dinâmicos (ver Seções 4.1.5 e 4.1.6). A matriz  $Q(k)$  estimada adaptativamente, em cada passo do processo de filtragem, deve impedir que a covariância se torne demasiadamente pequena e, conseqüentemente, forneça uma avaliação otimista, não correspondente à realidade. Por conseguinte, o ganho também não se torna irrealisticamente pequeno, permitindo que as novas medidas forneçam informações para o filtro, aumentando a confiança na estimativa do erro. No que se segue, deduz-se a técnica adaptativa para o cálculo

do nível de ruído  $Q(k)$ , conforme Rios Neto e Kuga (1982, 1985).

#### 4.1.1 - EQUAÇÃO DE PSEUDO-MEDIDAS

Em princípio, assume-se que a matriz  $Q(k)$  é diagonal (sem perda de generalidade) com componentes  $q(k+1)$ :

$$Q(k) = \text{diag. } [ q(k+1) ] \quad (4.2)$$

onde a defasagem no índice (de  $k$  para  $k+1$ ) é imposta para tornar coerente a nomenclatura, como se verá a seguir. Para estimar  $Q(k)$ , impõe-se a condição de consistência entre o resíduo ocorrido e sua estatística (Jazwinski, 1970). Supondo-se que o resíduo verdadeiro das observações (definido como a diferença entre o valor verdadeiro da observação e seu valor estimado) tem distribuição gaussiana, determinam-se as variâncias  $q(k+1)$  do ruído que ajustam o resíduo verdadeiro ocorrido,  $r_v(k+1)$ . Algebricamente esta idéia é expressa por:

$$\text{maximizar } p [r_v(k+1)], \text{ com } q(k+1) \geq 0 \quad (4.3)$$

ou seja, a idéia é maximizar a probabilidade de ocorrência do resíduo verdadeiro pois, nesta expressão,  $p [r_v(k+1)]$  representa a densidade de probabilidade do resíduo verdadeiro. O vínculo  $q(k+1) \geq 0$  é coerente com a propriedade de positividade das variâncias. A aplicação desta operação para o resíduo verdadeiro escalar leva à hipótese generalizada de consistência estatística (Rios Neto e Kuga, 1982) dada por:

$$\left[ r_v^2(k+1) \right]_c = E [ r_v^2(k+1) ], \quad (4.4)$$

onde o subscrito  $c$  indica realização, valor ocorrido. As seguintes definições devem ser consideradas:

- resíduo calculado (realização):

$$r(k+1) = y(k+1) - H(k+1) \bar{x}(k+1) \quad (4.5)$$

- resíduo verdadeiro:

$$r_v(k+1) = r(k+1) - v(k+1) \quad (4.6)$$

Neste ponto, convém recapitular as equações dinâmicas completas para um sistema linear (ou linearizado) discreto, conforme o Capítulo 2:

dinâmica:  $x(k+1) = \phi(k) x(k) + G(k) w(k)$

observação escalar:  $y(k) = H(k) x(k) + v(k)$

estatísticas:  $E[w(k)] = 0, E[w(k)w^T(j)] = Q(k) \delta_{kj}$

$$E[v(k)] = 0, E[v(k)v^T(j)] = R(k) \delta_{kj}$$

$$E[w(k)v(j)] = 0, E[x(k)w(k)] = 0$$

A seguir, mostra-se a álgebra para a obtenção da equação final de pseudo-medidas. A equação do resíduo da observação é dada por:

$$r(k+1) = H(k+1) [ \phi(k)[x(k) - \hat{x}(k)] + G(k)w(k) ] + v(k+1) \quad (4.7)$$

Então, considerando-se a Equação 4.6, o resíduo verdadeiro  $r_v(k+1)$  é dado por:

$$r_v(k+1) = H(k+1) [ \phi(k)[x(k) - \hat{x}(k)] + G(k)w(k) ] \quad (4.8)$$

e portanto:

$$E[r_v^2(k+1)] = H(k+1) [ \phi(k)P(k)\phi^T(k) + G(k)Q(k)G^T(k) ] H^T(k+1) \quad (4.9)$$

Quadrando-se a Equação 4.6 obtém-se:

$$r_v^2(k+1) = r^2(k+1) - 2 r(k+1)v(k+1) + v^2(k+1) \quad (4.10)$$

As parcelas na Equação 4.10, devidas ao erro de observação, são consideradas através da definição do ruído:

$$\eta(k+1) \triangleq - 2r(k+1)v(k+1) + v^2(k+1) - R(k+1) \quad (4.11)$$

onde  $R(k+1)$  é a variância da observação. O ruído  $\eta$  assim definido é caracterizado estatisticamente (Rios Neto e Kuga, 1982a) por:

$$E[ \eta(k+1) ] = 0 \quad (4.12)$$

$$E[ \eta^2(k+1) ] = 4 r^2(k+1) R(k+1) + 2 R^2(k+1)$$

Impondo-se a hipótese de consistência estatística formalizada na Equação 4.4 pode-se então escrever:

$$r^2(k+1) + \eta(k+1) + R(k+1) = H(k+1)\phi(k)P(k)\phi^T(k)H^T(k+1) + H(k+1)G(k)Q(k)G^T(k)H^T(k+1) \quad (4.13)$$

Supondo-se que  $Q(k)$  é diagonal, a Equação acima pode ser colocada na forma:

$$z(k+1) = M(k+1) q(k+1) + \eta(k+1) \quad (4.14)$$

com

$$z(k+1) = r^2(k+1) + R(k+1) - H(k+1) \phi(k) P(k) \phi^T(k) H^T(k+1) \quad (4.15)$$

$$M(k+1) = [(\sum_{j=1}^n H_j G_{j1})^2 : (\sum_{j=1}^n H_j G_{j2})^2 : \dots \dots : (\sum_{j=1}^n H_j G_{jr})^2] \quad (4.16)$$

onde  $H_j$  e  $G_{ji}$ ,  $i=1, \dots, r$  são elementos do vetor  $H(k+1)$  e da matriz  $G(k)$  respectivamente. A Equação 4.14 será doravante denominada de equação de pseudo-medidas do estimador de ruído adaptativo. O valor numérico da pseudo medida é calculado, para um instante  $k+1$ , pela Equação 4.15. Lembrar que os  $r(k+1)$  nas Equações 4.12 e 4.15 são realizações, calculadas através da Equação 4.5.

#### 4.1.2 - IMPLEMENTAÇÃO SEQUENCIAL DO RUÍDO ADAPTATIVO

A equação de pseudo-medidas contém todas as informações necessárias para estimar as variâncias  $q(k+1)$ . Se a quantidade de pseudo-medidas  $m$  num dado instante é maior que a dimensão  $r$  do vetor  $q(k+1)$ , pode-se estimar  $q(k+1)$  processando-se todas as pseudo-medidas em lote ("batch"), com um estimador por exemplo do tipo mínimos quadrados, já que a matriz  $M(k+1)$  neste caso tem "rank" igual a  $r$ . No entanto, isso nem sempre ocorre, de forma que é necessário ter-se algum critério para gerar a informação a priori, permitindo então o processamento das pseudo-medidas sequencialmente via filtro de Kalman. Esta é uma via lógica, pois as rotinas de Kalman que já estão sendo usadas para processar as medidas, podem ser também usadas para processar as pseudo-medidas. As equações do filtro de Kalman aplicadas à estimação do vetor de variâncias do ruído no estado,  $q(k+1)$ , através do

processamento das chamadas pseudo-medidas  $z(k+1)$ , são dadas por:

$$K_q(k+1) = \bar{P}_q(k+1) M^T(k+1) / (M(k+1) \bar{P}_q(k+1) M^T(k+1) + E[\eta^2(k+1)]) \quad (4.17)$$

$$\hat{q}(k+1) = \bar{q}(k+1) + K_q(k+1) [z(k+1) - M(k+1) \bar{q}(k+1)] \quad (4.18)$$

$$\hat{P}_q(k+1) = \bar{P}_q(k+1) - K_q(k+1) M(k+1) \bar{P}_q(k+1) \quad (4.19)$$

onde  $\bar{q}(k+1)$  e  $\bar{P}_q(k+1)$  são a estimativa a priori de  $q(k+1)$  e a covariância do erro na estimativa a priori, respectivamente. A informação a priori é gerada por:

$$\bar{q}(k+1) = \phi_q(k) \hat{q}(k) \quad (4.20)$$

$$\bar{P}_q(k+1) = \phi_q(k) \hat{P}(k) \phi_q^T(k) + W(k) \quad (4.21)$$

onde  $\phi_q(k)$  é a matriz de transição da evolução de  $q$  entre os instantes  $k$  e  $k+1$ , e  $W(k)$  pode ser identificada como um nível de ruído devido à precisão de máquina. Normalmente, na falta de conhecimento sobre a evolução temporal de  $q$ , assume-se  $\phi_q(k) = I$  e  $W(k) = \gamma I_{r,r}$  onde  $\gamma \geq 0$  escalar. Usualmente  $\gamma = 0$ , mas pode-se por exemplo usar  $\gamma = 10^{-2p}$ , onde  $p$  é o número de dígitos decimais significativos do computador. É também comum adotar-se  $\hat{q}(0) = 0$  na falta de maior conhecimento do sistema.

Após o processamento de todas as pseudo-medidas do instante  $k+1$ , a montagem final do vetor  $q(k+1)$ , e consequentemente da matriz  $Q(k) = \text{diag.}(q_i)$ ,  $i=1,2,\dots,r$  é efetuada considerando-se:

$$q(k+1) = \begin{cases} \hat{q}(k+1) & \text{para } \hat{q}(k+1) \geq 0 \\ 0 & \text{para } \hat{q}(k+1) < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

#### 4.1.3 - IMPLEMENTAÇÃO EM LOTE ("BATCH") DO RUÍDO ADAPTATIVO

Esta é uma forma alternativa proposta neste trabalho, que fundamentalmente seria equivalente à implementação sequencial quando se assume que não há ruído dinâmico na estimativa de  $q$  ( $W(k)=0$ ) e que a matriz de transição  $\phi_q(k)$  é a identidade. Portanto, trata-se de um problema de estimação de parâmetros. Neste caso, admite-se um atraso na estimativa de  $q(k+1)$ , pelo menos até que o "rank" da matriz  $M(k+1)$  seja igual a  $r$ , ou em outras palavras, suficiente observabilidade seja obtida. Conhecendo-se a taxa de medidas no tempo, pode-se acumular as pseudo-medidas e então processá-las em lote ("batch"), via mínimos quadrados:

$$m \begin{bmatrix} z(k) \\ \text{-----} \\ z(k+1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ z(k+p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(k) \\ \text{-----} \\ M(k+1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ M(k+p) \end{bmatrix} q(k+p) + \begin{bmatrix} \eta(k) \\ \text{-----} \\ \eta(k+1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ \eta(k+p) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Aquí, nota-se que o ruído está com índice temporal  $k+p$ . Relaxando-se o formalismo normal, assume-se  $q(k) = q(k+1) = \dots = q(k+p)$ . Então, às custas de um atraso inicial correspondente ao índice  $p$ , estima-se  $q(k+p)$  que pode ser considerado válido até o acúmulo de novas  $(p+1)m \geq r$  pseudo-medidas, ou seja, até o instante  $k+2p$ . Neste intervalo  $k+p$  a  $k+2p$  usa-se  $\hat{q}(k+p)$  como estimativa do ruído  $q$ , sem esquecer o teste da Equação 4.22 (positividade das variâncias). Pode-se também incluir a estimativa anterior de  $q$  e sua covariância como informação a priori, tornando o esquema recursivo a cada  $p$  instantes. Detalhes da implementação podem ser vistos na Seção 4.2.

Algumas considerações específicas do problema de determinação de órbita fazem supor que existe uma certa economia computacional ao se utilizar este método. Por exemplo a transformação ortogonal de Householder ou de Givens pode ser usada no método de mínimos quadrados. Isso será objeto de discussões posteriormente (Seção 4.2.3).

#### 4.1.4 - CÁLCULO DO RESÍDUO PARA O RUÍDO ADAPTATIVO

A aplicação da técnica de estimação adaptativa do ruído em sistemas não-lineares não apresenta maiores dificuldades. Considere-se os seguintes modelos não-lineares de estado (contínuo) e de observação (discreto):

$$\dot{x} = f(x,t) + B(t) w(t) \quad (4.24)$$

$$y(k) = h[x(k),k] + v(k) \quad (4.25)$$

Normalmente, as equações de estado do sistema são linearizadas e discretizadas para a aplicação, no caso do filtro de Kalman, à estimação de seu estado a partir das informações contidas nas observações. Este procedimento gera o chamado filtro estendido de Kalman, onde a linearização das equações de estado em torno de uma trajetória de referência  $\bar{x}(t)$  leva a equações do tipo:

$$\dot{\delta x}(t) = F(t)\delta x(t) + B(t)w(t) \quad (4.26)$$

onde

$$F(t) = \left[ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right]_{x(t)=\bar{x}(t)} \quad (4.27)$$

Neste caso, o estado  $\delta x$  passa a ser expresso em termos de

desvios em torno de trajetórias de referência. Da mesma forma, a linearização em torno de  $\bar{x}(t)$  do modelo de observações, Equação 4.25, fornece equações do tipo:

$$\delta y(k) = H(k)\delta x(k) + v(k) \quad (4.28)$$

onde

$$H(k) = \left[ \frac{\partial h[x(k),k]}{\partial x(k)} \right]_{x(k)=\bar{x}(k)} \quad (4.29)$$

onde  $\delta y$  são desvios em torno de uma referência  $\bar{y}$ . Considerando que no filtro estendido de Kalman se utiliza como trajetória de referência a estimativa mais recente do estado, o resíduo de observação calculado a partir da estimativa em um dado instante  $k$  é dado por:

$$r(k) = y(k) - h[\bar{x}(k),k] \quad (4.30)$$

Um ponto importante a ser ressaltado é o de que normalmente a informação a priori inicial  $\hat{x}(0)$  não está próxima da trajetória solução de forma que o valor do resíduo inicial é grande. O filtro sequencial converge com o tempo, e o ruído adaptativo deve evitar a divergência quando o filtro já operou nos dados relativos aos instantes iniciais. Entretanto, se nos instantes iniciais o estimador de ruído é utilizado, ele tende a estimar um nível de ruído inadequadamente alto e a provocar instabilidades, por analisar os resíduos e assumir que o filtro está divergindo quando tal não está ocorrendo efetivamente. Deve-se portanto dosar o estimador de ruídos e conseqüentemente o filtro de forma que o estimador não tente corrigir em um único passo uma suposta divergência. Rios Neto e Kuga (1982) propõe o seguinte simples teste:

$$r(k) = \min [ r(k) , 3 R^{1/2}(k) ] \quad (4.31)$$

Dessa forma, o residuo calculado a ser utilizado pelo estimador de ruído tem um valor adequado pois seu valor máximo corresponde a 3 desvios-padrão do erro de medida. Este problema se manifesta mais pronunciadamente em sistemas não-lineares conforme experiências anteriores. Como a solução é simples, eficaz, e não apresenta praticamente nenhum custo computacional adicional (um comando IF em Fortran), convém mantê-lo mesmo para problemas lineares quando a incerteza no estado inicial é grande, ou as condições iniciais são desconhecidas e, portanto, exageradamente superdimensionadas.

#### 4.1.5 - CÁLCULO DA MATRIZ G

Um outro fato importante que pode passar despercebido é o acoplamento existente entre a matriz  $G(k)$  e o vetor  $H(k)$  definido na Equação 4.29. Considere que a discretização de sistemas contínuos (lineares ou linearizados) leva a sistemas do tipo:

$$\begin{aligned} \delta x(k+1) &= \phi(k+1, k) \delta x(k) \\ &+ \int_k^{k+1} \phi(k+1, t) B(t) w(t) dt \end{aligned} \quad (4.32)$$

sendo  $\phi(\dots)$  a matriz de transição de estado do sistema. Aqui, a matriz  $\phi$  tem seus índices temporais ligeiramente modificados em relação à notação convencional. A adoção de dois índices, por motivos de clareza, permite expressar a dependência temporal da matriz. Assim,  $\phi(k+1, t)$  é a matriz de transição entre os instantes  $t$  e  $k+1$ .

Uma primeira abordagem para resolução da integral consiste em considerar  $w(t)$  como um "step-process", isto é, constante durante um intervalo de

discretização. Esta aproximação é válida desde que este intervalo seja suficientemente pequeno. Tem-se então:

$$w(t) = w(k) = \text{constante para } k \leq t \leq k+1 \quad (4.33)$$

Considerando-se válida a suposição acima, a integral do segundo membro da Equação 4.32 pode então ser colocada na seguinte forma:

$$I = \int_k^{k+1} \phi(k+1, t) B(t) dt \cdot w(k) = G(k) w(k) \quad (4.34)$$

A integral para  $G(k)$  raramente é ou necessita ser avaliada exatamente. O importante é deduzir como ela deve ser para que o procedimento de estimação funcione corretamente. Duas simplificações possíveis dentre as mais comuns serão analisadas a seguir.

Lembrando a expansão para a matriz de transição:

$$\phi = I + F \Delta t + \frac{1}{2} F^2 \Delta t^2 + \dots \quad (4.35)$$

a aproximação mais simples seria adotar  $\phi = I$  (somente para o cálculo de  $G$ ). Lembrando também que usualmente  $B(t)$  é invariante no tempo (constante), ter-se-á então:

$$G(k) = B \Delta t \quad (4.36)$$

É claro que esta aproximação para ser válida na prática, depende altamente da dinâmica do sistema, pois se esta for muito rápida, ela só poderá ser considerada válida para  $\Delta t$  muito pequeno, o que pode ser fisicamente não realizável. No caso de determinação de órbita de satélites artificiais terrestres, a forma mais comum da matriz  $B$  é:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & n-r \times r \\ \text{---} & \\ I & r \times r \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

onde 0 é a matriz nula, I é a matriz identidade, e  $r=3$  já que, considerando-se o estado orbital do satélite expresso em coordenadas retangulares (3 coordenadas de posição e 3 de velocidade), as 3 primeiras equações de estado são cinemáticas e portanto exatas.

A segunda simplificação custa um pouco mais computacionalmente porém não possui complexidade matemática adicional. Basta lembrar que  $\phi(k+1, k+1) = I$ , que  $\phi(k+1, k)$  já foi calculado para ser usado na fase de propagação do filtro, e utilizar a regra do trapézio para aproximar a integral de convolução:

$$G(k) \cong \frac{1}{2} [I + \phi(k+1, k)] B \Delta t \quad (4.38)$$

onde  $\phi(k+1, k)$  é a matriz cheia que propaga a covariância do instante  $k$  ao instante  $k+1$ .

Não raramente, o vetor  $H(k)$  contém muitos elementos nulos e pode ser particionado na forma:

$$H(k) = \begin{bmatrix} H & | & 0 \\ 1 \times l & & 1 \times n-l \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

No caso de determinação de órbita, as observações de alcance ("range"), azimute e elevação não possuem derivadas parciais com respeito às componentes de velocidade do vetor de estado expresso em coordenadas retangulares (ver Capítulo 6), tendo-se portanto  $l=3$  e  $n=6$ , ou seja:

$$H(k) = \begin{bmatrix} H_{1 \times 3} & | & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

A análise do termo  $\alpha = H(k+1) G(k) Q(k) G^T(k) H^T(k+1)$  (vide Equação 4.13) lançará luz à questão da aplicação da técnica

adaptativa e o acoplamento entre as matrizes H e G.

Supondo a primeira das simplificações expostas acima para o cálculo de G, e considerando o caso específico de determinação de órbita, vem:

$$G(k) = B \Delta t \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & & \\ -\frac{n-r, r}{r, r} & & \\ I_{r, r} & & \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Esquecendo momentaneamente os índices temporais, para simplificar a escrita, vem:

$$\alpha = [H|0] \begin{bmatrix} 0 & & \\ -\frac{n-r, r}{r, r} & & \\ I_{r, r} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{bmatrix} [0 \quad r, n-r \quad I_{r, r}] \begin{bmatrix} H^T \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Para facilitar a compreensão, supõe-se  $l=r$  ( $=3$  no caso específico considerado) e então:

$$\alpha = [0 \quad 1, r] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{bmatrix} = 0 \quad (4.43)$$

ou seja,  $q$  é indeterminado, pois neste caso o vetor  $M(k+1)$  é nulo. A aproximação  $G = B \Delta t$  deve ser utilizada com cuidado pois pode desfazer o acoplamento que deveria existir entre as matrizes G e H, e retirar a observabilidade da equação de pseudo-medidas.

A segunda simplificação, porém, pode ser aplicada para o mesmo problema. Primeiro, particiona-se a matriz de transição:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

onde  $\phi_{11}$  é de dimensão  $n-r \times n-r$ ,  $\phi_{12}$  é  $n-r \times r$ ,  $\phi_{21}$  é  $r \times n-r$ , e  $\phi_{22}$  é  $r \times r$ . Desse modo, pela Equação 4.38 tem-se:

$$G = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ I_{n-r, n-r} + \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Logo

$$\alpha = \sum_{j=1}^r [ (\sum_{i=1}^r H_i G_{ij})^2 ] q_j \quad (4.46)$$

onde  $H_i$  são as componentes não nulas de  $H$ , e  $G_{ij}$  são as componentes da matriz formada por  $\phi_{12} \Delta t / 2$ , de modo que o vetor  $M(k+1)$  é "cheio" e depende das componentes não nulas de  $H$  e da submatriz  $\phi_{12}$ . Desta forma, o acoplamento existe e não desaparece virtualmente como no caso da primeira simplificação.

Portanto, recomenda-se a segunda forma de cálculo para a obtenção da matriz  $G$  em sistemas contínuos discretizados (lineares ou linearizados), que além de calcular a integral para  $G$  com melhor aproximação, apresenta uma economia de  $2r(n-r)$  "flops" (operações de ponto flutuante) para  $l=r$ , em relação à fórmula completa para  $M$ , Equação 4.16, devido à quantidade de cálculos do somatório interno ser menor.

#### 4.1.6 - CONTROLABILIDADE E A MATRIZ G

Sabe-se na prática que, quando o intervalo de discretização é grande, a aproximação proposta na Seção 4.1.5 (regra do trapézio) para o cálculo da matriz  $G$  torna-se inválida. De fato, isto acarreta na quebra das hipóteses de linearização, que aliada ao crescimento dos erros relativos à aproximação da integral pela regra do trapézio, tornam o crescimento da matriz de covariância  $P$

incontrolável na fase de propagação. Para uma taxa de amostragem de 1 Hz (1/seg), tal aproximação mostra-se perfeitamente válida para o problema de determinação de órbita. Porém, o mesmo não se pode inferir se o intervalo de discretização for da ordem de minutos. A primeira alternativa que vem à mente, é a diminuição do intervalo de discretização para cálculo da matriz  $G$ , para em seguida proceder-se à obtenção da matriz  $G$  acumulada, correspondente ao intervalo total. Isto pode ser feito devido ao fato de que a propagação da matriz de covariância entre os instantes de discretização é linear, e o efeito global em  $n$  intervalos de amostragem corresponde àquele que seria obtido com a aplicação de uma matriz de transição de estado equivalente, correspondente ao produto das matrizes relativas aos  $n$  intervalos. Para tanto, subdivide-se o intervalo de propagação  $\Delta t = t_{k+n} - t_k$  em  $n$  intervalos genéricos suficientemente pequenos. Mudando ligeiramente a notação, por motivos de clareza, a covariância propagada no intervalo completo  $\Delta t$  é dada por:

$$\bar{P}(k+n) = \phi(k+n, k) \hat{P}(k) \phi^T(k+n, k) + G(k+n, k) Q(k) G^T(k+n, k)$$

com  $\phi(k+n, k)$  sendo a matriz de transição de estado entre os instantes  $t_k$  e  $t_{k+n}$ ,  $\bar{P}(k+n)$  sendo a matriz de covariância propagada para o instante  $k+n$ , e com  $Q(k)$  considerado constante durante este intervalo. Supondo-se que nestes  $n$  instantes intermediários não há atualização da covariância, i.e., nenhuma observação é processada, nota-se a seguinte recursão:

$$\begin{aligned} \bar{P}(k+1) &= \phi(k+1, k) \hat{P}(k) \phi^T(k+1, k) \\ &+ G(k+1, k) Q(k) G^T(k+1, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(k+2) &= \phi(k+2, k+1) \bar{P}(k+1) \phi^T(k+2, k+1) \\
 &+ G(k+2, k+1) Q(k) G^T(k+2, k+1) \\
 &= \phi(k+2, k) \hat{P}(k) \phi^T(k+2, k) \\
 &+ \phi(k+2, k+1) G(k+1, k) Q(k) G^T(k+1, k) \phi^T(k+2, k+1) \\
 &+ G(k+2, k+1) Q(k) G^T(k+2, k+1) \\
 &\vdots \\
 \bar{P}(k+n) &= \phi(k+n, k) \hat{P}(k) \phi^T(k+n, k) \\
 &+ \phi(k+n, k+1) G(k+1, k) Q(k) G^T(k+1, k) \phi^T(k+n, k+1) \\
 &+ \phi(k+n, k+2) G(k+2, k+1) Q(k) G^T(k+2, k+1) \phi^T(k+n, k+2) \\
 &\vdots \\
 &+ \phi(k+n, k+n-1) G(k+n-1, k+n-2) \\
 &\quad Q(k) G^T(k+n-1, k+n-2) \phi^T(k+n, k+n-1) \\
 &+ G(k+n, k+n-1) Q(k) G^T(k+n, k+n-1)
 \end{aligned}$$

Comparando-se estas expressões com a equação de propagação da covariância, a matriz  $G(k+n, k)$  pode ser calculada por:

$$G(k+n, k) = \sum_{i=1}^n \phi(k+n, k+i) G(k+i, k+i-1)$$

Supondo-se ainda que cada  $G(k+i, k+i-1)$  pode ser aproximada pela regra do trapézio (em outras palavras,  $\Delta t_i$  intermediário é suficientemente pequeno para que seja válida neste intervalo esta aproximação), vem (vide Seção 4.1.5):

$$G(k+i, k+i-1) = [I + \phi(k+i, k+i-1)] B \Delta t_i / 2$$

Logo, a matriz  $G(k+n, k)$ , que contém o efeito da acumulação dos intervalos intermediários, pode ser computada por:

$$\begin{aligned}
 G(k+n, k) &= \sum_{i=1}^n [\phi(k+n, k+i) + \phi(k+n, k+i-1)] B \Delta t_i / 2 \\
 &= [\phi(k+n, k) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \phi(k+n, k+i) + I] B \Delta t_i / 2
 \end{aligned}$$

Nota-se portanto, que esta subdivisão em intervalos menores requer o cálculo das matrizes de transição intermediárias e o produto dessas matrizes, além de acumular erros de truncamento ou arredondamento. Para dar uma idéia da dimensão do montante de cálculos, suponha-se um intervalo  $\Delta t_i = 1s$ , que é considerado suficientemente pequeno na prática (em determinação de órbita). Se o intervalo de propagação (entre observações) for de 5 minutos ou mais (como na aplicação numérica da Seção 8.5), então será necessário o cálculo de  $5 \times 60 = 300$  matrizes de transição  $\phi(k+i, k+i-1)$  intermediárias, além dos produtos internos entre estas matrizes, para calcular, em cada instante de amostragem, a matriz  $G(k+n, k)$  com um mínimo de precisão.

Este montante de cálculos é considerado inaceitável, e amplia a complexidade do projeto do filtro de Kalman. Com esta motivação, propõe-se o cálculo da matriz  $G$  usando noções de controlabilidade. A principal inspiração para o cálculo de  $G$  desta forma vem a partir do artigo de Verhaegen (1988), onde uma subpartição de  $G$  é obtida de forma a tornar os termos de tendências ("bias") do vetor de estado controlável. No caso presente, pretende-se achar uma matriz  $G$  suficientemente pequena (norma 2 pequena) que ainda torne o sistema formado pelo par  $(\phi, G)$  controlável. Para tanto, utiliza-se a particular forma da matriz de transição do sistema, aliada a noções de controlabilidade mínima.

No problema de determinação de órbita, quando a matriz de transição é modelada considerando-se somente os efeitos do geopotencial (força central, coeficientes zonais e tesserais), observa-se que ela apresenta a forma:

$$\phi = \left[ \begin{array}{c|c} I & \Delta t I \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

onde as partições são todas 3x3, e  $\Delta t$  é o intervalo de propagação. Os elementos apresentados como nulos e unitários resultam de cálculos que forneceram estes valores, a menos do valor epsilon do computador utilizado (número  $\epsilon$  que somado a 1 fornece o valor 1). Para precisão simples em computador com palavras de 32 bits,  $\epsilon \cong 10^{-9}$ . Logo, interpreta-se  $0 \cong 0 \pm \epsilon$  e  $1 \cong 1 \pm \epsilon$ . A primeira informação que salta à vista é o autovalor 1 de multiplicidade 6 da matriz  $\phi$ . Nota-se ainda que  $\phi$  tem "rank" 6 já que é não-singular e sua inversa pode ser dada por:

$$\phi^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} I & -\Delta t I \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

onde os "zeros" e "uns" devem ser interpretados da mesma forma.

Neste caso, a controlabilidade do sistema formado por  $(\phi, G)$  pode ser facilmente analisada através dos critérios de controlabilidade expostos no Capítulo 5. O sistema  $(\phi, G)$  é controlável se e só se (Kailath, 1980; Paige, 1981):

$$\text{rank } (C) = \text{rank } [G, \phi - \lambda I] = n$$

onde  $n$  é a dimensão do estado,  $C$  é a matriz de controlabilidade, e  $\lambda$  é o conjunto dos autovalores de  $\phi$ . Como  $\lambda = \langle 1 \rangle$  com multiplicidade 6, a matriz  $C$  se torna:

$$C = \left[ \begin{array}{c|c|c} G_{11} & 0 & \Delta t I \\ \hline G_{21} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

onde todas as submatrizes são 3x3, e  $G_{11}$  e  $G_{21}$  são partições 3x3 de  $G$ . É fácil notar que, independente de  $G$ , a matriz  $C$  tem pelo menos "rank" 3. Se a matriz  $G_{21}$  tiver "rank" 3, então a matriz de controlabilidade  $C$  tem "rank" 6, e a controlabilidade do sistema  $(\phi, G)$  está garantida. Um forma conveniente para a matriz  $G$  é:

$$G = \sigma \begin{bmatrix} I \\ \text{---} \\ I \end{bmatrix}$$

que pode ser justificada pelas seguintes considerações:

- a partição  $G_{11} \neq 0$ , embora não necessária para a controlabilidade do sistema, é necessária devido às considerações feitas na Seção 4.1.5 (observabilidade das pseudo-observações);

- o valor escalar  $\sigma$  possibilita a seleção arbitrária de uma matriz  $C$  próxima da deficiência de "rank", ou seja,  $C$  pode ser escolhida no limite da controlabilidade / incontrolabilidade, através da análise da decomposição de valor singular (Seção 5.1).

A decomposição de valor singular de  $C$  foi realizada através do programa MATLAB (Moler, 1980), e vale:

$$C = U \Sigma V^T$$

onde  $U$  é 6x6 ortonormal,  $V$  é 9x9 ortonormal,  $\Sigma$  é da forma:

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \text{---} \\ & & \sigma_6 & 0 \end{array} \right]$$

e onde  $\sigma_i$  são os valores singulares de  $C$ . Se  $\sigma_6$  é pequeno, então  $C$  está próximo da incontrolabilidade ("rank"( $C$ )  $\rightarrow$  5).

e o sistema  $(\phi, G)$  está próximo da controlabilidade mínima. Para o caso da dinâmica de determinação de órbita,  $\Sigma$  vale:

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{c|c|c} \Delta t \ I & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma I & 0 \end{array} \right]$$

Logo,  $\sigma$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, quanto menos controlabilidade se desejar, ou seja, a matriz  $C$  é quase "rank" deficiente. O valor de  $G$  assim computado pode ser mantido constante durante todo o intervalo de filtragem, economizando drasticamente o tempo de cálculo correspondente. Veja exemplo de aplicação numérica na Seção 8.5.

Uma maneira convencional de abordar o problema, é através do estudo do sistema em sua forma de Jordan agregada. No caso particular em estudo, o limiar de controlabilidade pode ser facilmente determinado notando-se que a equação discretizada do sistema, na forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} (k)$$

pode ser tratado como três sistemas independentes de dimensão 2. Cada variável de posição  $(x_1, x_2, x_3)$  só se relaciona com a respectiva variável de velocidade  $(x_4, x_5, x_6)$  e a respectiva parcela de ruído, sendo independente de todas as outras variáveis de estado e componentes de ruído. Ou seja, a equação a diferenças do sistema é equivalente ao seguinte conjunto de três equações a diferenças bidimensionais:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} w_1(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} w_2(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} w_3(k)$$

ou, em forma mais compacta:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} w_i(k) \quad \begin{array}{l} i=1,2,3 \\ j=4,5,6 \end{array}$$

As equações do sistema linearizado discretizado em estudo, considerando as simplificações efetuadas no modelo matemático adotado para a órbita do satélite, consiste então em um conjunto de três sistemas bidimensionais idênticos, completamente desacoplados entre si. Com isto, a determinação do limiar de controlabilidade do sistema recai na determinação do limiar para um sistema de equações a diferenças de dimensão 2, cuja solução a partir da utilização direta da matriz de controlabilidade é bastante simples. Essa matriz para cada sistema bidimensional é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 + \gamma \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

O sistema é controlável se e somente se o "rank" de C for igual a 2, que no caso é equivalente a:

$$\det(C) = -\gamma \beta_2^2 \neq 0$$

Logo, confirmando o resultado obtido acima, o sistema encontra-se operando no limiar de controlabilidade quando  $\beta_2 \rightarrow 0$ .

Uma outra maneira alternativa de se detectar a fronteira de controlabilidade do sistema seria através da utilização da forma alternativa da condição de controlabilidade completa de estado de sistemas lineares (Ogata, 1970). Se a matriz de transição do sistema possui todos os autovalores  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , distintos, então é possível encontrar uma matriz de auto-vetores  $T$  não singular tal que:

$$T^{-1} \phi T = \text{diag. } [\lambda_i].$$

Definindo  $z = T^{-1}x$ , então por substituição na equação a diferenças do sistema, pode-se escrever:

$$z(k+1) = T^{-1} \phi T z(k) + T^{-1}G w$$

Como a matriz  $T^{-1} \phi T$  é diagonal, então um dado componente do vetor  $z$ , e consequentemente da variável de estado  $x$ , não pode ser controlado caso todos os elementos da linha correspondente da matriz  $T^{-1}G$  sejam nulos. O sistema é completamente controlável deste modo, se nenhuma das linhas de  $T^{-1}G$  possuir todos os elementos nulos.

No caso da matriz  $\phi$  não apresentar todos os auto-valores distintos, então não é possível proceder-se à transformação de variável que leva à obtenção de um sistema com matriz de transição diagonalizada. Pode-se porém efetuar uma transformação para a forma canônica de Jordan. Em tal caso, as condições de controlabilidade completa são as seguintes:

-cada bloco de Jordan deve estar associado com um autovalor distinto de qualquer outro bloco;

-cada linha de  $T^{-1}G$  que corresponda a última linha de

qualquer bloco de Jordan, não possui todos os elementos nulos.

No caso em estudo, a aplicação desta condição alternativa ao sistema de dimensão 2, que compõe o sistema global, resulta em:

$$T^{-1} \phi T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definindo-se:

$$\begin{bmatrix} z_i \\ z_j \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3; \quad j=4,5,6$$

obtem-se:

$$\begin{bmatrix} z_i \\ z_j \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ z_j \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} w_i(k)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} z_i \\ z_j \end{bmatrix} (k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ z_j \end{bmatrix} (k) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \gamma \beta_2 \end{bmatrix} w_i(k)$$

Observa-se então que cada sistema desacoplado é controlável 2 a 2 e, portanto, o sistema global é completamente controlável se:

$$\gamma \beta_2 \neq 0 \Rightarrow \beta_2 \neq 0$$

que concorda com resultados anteriores.

Deve-se destacar que o sistema original é contínuo e não-linear. A controlabilidade foi estudada para o sistema resultante do processo de linearização e discretização do sistema original. Desse modo, quando se diz acima que o sistema é completamente controlável, isto

se refere ao sistema resultante da aplicação do processo de linearização em torno da estimativa mais recente, que supõe-se válido por um intervalo de discretização. Toda a análise de controlabilidade é portanto válida durante cada intervalo de discretização, devendo por isso ser entendida como controlabilidade local do sistema não-linear original.

Estes métodos de formação da matriz  $G$  para sistemas contínuos discretizados de modo a garantir um mínimo de controlabilidade, supõe a utilização conjunta de alguma técnica adaptativa de estimação do nível de ruído dinâmico, pois, desde que  $G$  garante controlabilidade mínima, o estimador adaptativo se encarregará naturalmente de dosar (aumentar ou diminuir) o nível de ruído adequadamente para evitar a divergência. Para o problema em estudo, a peculiar forma aproximada da matriz de transição  $\phi$  facilitou o cálculo de  $G$ . Porém, sabe-se que um critério sistemático para seleção de  $G$  tem sido pesquisado (veja e.g. Fleury, 1985) com certa margem de sucesso, sem no entanto utilizar o conceito de controlabilidade mínima, ou seja, a noção de distância entre um sistema controlável e incontrolável (Paige, 1981). Esta noção, em conjunto com a decomposição de valor singular, pode possibilitar um procedimento metódico para cálculo da matriz  $G$  (que o autor deixará para trabalhos futuros, por força das circunstâncias presentes).

#### 4.2 - FILTRO ADAPTATIVO UD

Esta seção propõe-se a implementar o estimador adaptativo quando utilizado em conjunto com o filtro UD (veja Seção 2.2.3). O filtro UD é considerado um dos algoritmos de filtragem mais estáveis numericamente, e portanto dos mais insensíveis a erros de truncamento devidos a limitação de comprimento de palavra em computadores digitais. Este algoritmo não possui operações

de raiz quadrada, além de ser competitivo com o filtro convencional de Kalman em termos de complexidade (custo) computacional. O custo adicional é menor que 50% na prática e pode vir a ser praticamente equivalente ao do filtro convencional se estruturas peculiares de determinadas aplicações, tais como esparsidade de matrizes envolvidas, matrizes com muitos elementos nulos, matrizes diagonais, são exploradas convenientemente (Bierman, 1981a). Nas fases de propagação e atualização, o filtro UD utiliza os tradicionais algoritmos descritos na Seção 2.2.3. Já com relação ao processamento das pseudo-medidas no procedimento de ruído adaptativo, pode-se tentar explorar com vantagens o modelo adotado para a fase de propagação para diminuir a complexidade computacional.

#### 4.2.1 - CÁLCULO DA PSEUDO-MEDIDA

Em relação ao filtro convencional, alguns cálculos adicionais devem ser efetuados para estimar o ruído  $q$ , quando a técnica de ruído adaptativo é utilizada. A dinâmica completa do sistema (suposta linear ou linearizada) deve ser recapitulada, para lembrar o significado das variáveis:

<u>estado</u>	contínuo:	$\dot{x}(t) = F(t) x(t) + B(t) w(t)$
	discretizado:	$x(k+1) = \phi(k) x(k) + G(k) w(k)$
	estatística:	$E[w(k)] = 0$ , $E[w(k) w^T(j)] = Q(k) \delta_{kj}$
<u>observações</u>	discretizado escalar:	$y(k) = H(k) x(k) + v(k)$
	estatística:	$E[v(k)] = 0$ , $E[v(k) v^T(j)] = R(k) \delta_{kj}$

São dados os fatores  $\hat{U}$ ,  $\hat{D}$  (com  $\hat{P} = \hat{U}\hat{D}\hat{U}^T$ ), a matriz de transição  $\phi$ , a matriz de ruído  $B$  ( $n \times r$ ), o resíduo calculado  $r = y - H\bar{x}$ , o vetor  $H$  do modelo da observação, a variância do ruído de observação  $R$ , a variância do ruído da pseudo-medida  $E[\eta^2]$ , a covariância do erro em  $q$  anterior  $\hat{P}_q$ , e o vetor de ruído dinâmico anterior  $\hat{q}$  (os índices temporais foram omitidos para simplificar a notação, já que aqui não são essenciais). Deve-se inicialmente preparar as variáveis auxiliares para o estimador de ruído adaptativo, onde em notação de programação computacional o símbolo  $x := y$  significa carregar o conteúdo de  $y$  na posição de memória correspondente à variável  $x$ :

$$\beta \triangleq H\hat{\phi}\hat{P}\hat{\phi}^T H^T := H\hat{\phi}\hat{U}\hat{D}\hat{U}^T\hat{\phi}^T H^T \quad (4.47a)$$

$$z := r^2 + R - \beta \quad (\text{pseudo-medida}) \quad (4.47b)$$

$$\begin{aligned} G &\triangleq [g_1, \dots, g_r] \quad (\text{usado no filtro principal}) \\ &:= [I + \phi] B \Delta t / 2 \quad (\text{Seção 4.1.5}) \text{ ou} \\ &:= \sigma \begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \quad (\text{Seção 4.1.6}) \end{aligned} \quad (4.47c)$$

$$\begin{aligned} M &= [ (Hg_1)^2; (Hg_2)^2; \dots; (Hg_r)^2 ] \\ &:= \left[ \left( \sum_{j=1}^n H_j G_{j1} \right)^2; \left( \sum_{j=1}^n H_j G_{j2} \right)^2; \dots; \left( \sum_{j=1}^n H_j G_{jr} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.47d)$$

$$\alpha := M q \quad (4.47e)$$

$$E[\eta^2] := 4r^2 R + 2R^2 \quad (\text{Equação 4.12}) \quad (4.47f)$$

O objetivo das tabelas que se seguem (Tabelas 4.1, 4.2, 4.3) é verificar o impacto adicional ao se implementar a técnica de ruído adaptativo em conjunto com o filtro de Kalman.

A Tabela 4.1 mostra a quantidade de operações ("flops") adicionais para preparar as variáveis para o estimador de ruído adaptativo, correspondentes a  $m$  pseudo-medidas. Um "flop" ("floating point operation") significa 1 operação de multiplicação ou divisão + 1 operação de adição ou subtração + eventualmente troca de valores entre variáveis ( $x:=y$ ). Operacionalmente, conta-se a quantidade de multiplicações e divisões para quantificar o número de "flops", já que estatisticamente comprova-se que a quantidade de adições e subtrações é aproximadamente igual a de multiplicações e divisões (Golub and Van Loan, 1983). A operação  $\phi P \phi^T$  ou  $\phi U D U^T \phi^T$  e a montagem da matriz  $G$  não foram incluídas na contagem, pois esta será avaliada de qualquer forma no filtro principal. Uma das colunas mostra o número de "flops" necessário quando a implementação é convencional, e a outra coluna, quando se utiliza o algoritmo UD. Todas as rotinas foram otimizadas para levar em conta estruturas simétricas, triangulares e diagonais das matrizes. Uma economia adicional pode ser obtida na Equação 4.47d se o vetor  $H$  contiver muitos elementos nulos (Seção 4.1.5), ou a matriz  $G$  for esparsa também com muitos elementos nulos. Nota-se que a implementação UD é mais econômica pois é proporcional a  $0,5mn^2$  "flops" ao passo que a convencional é proporcional a  $mn^2$ .

TABELA 4.1

"FLOPS" PARA PREPARAÇÃO DE VARIÁVEIS DO RUÍDO ADAPTATIVO

Equação	Convencional	UD
4.47a	$n^2 + n$	$0,5n^2 + 1,5n$
4.47b	1	1
4.47d	$(n+1)r$	$(n+1)r$
4.47e	r	r
4.47f	5	5
total para m pseudo-medidas	$m(n^2 + n + 6 + nr + 2r)$	$m(0,5n^2 + 1,5n + 6 + nr + 2r)$

4.2.2 - IMPLEMENTAÇÃO SEQUENCIAL UD DO RUÍDO ADAPTATIVO

Nesta implementação, usam-se as equações do filtro convencional de Kalman para estimar q, por meio do seguinte filtro secundário:

propagação:

$$\hat{q} := \hat{q} \quad (4.48a)$$

$$\hat{P}_q := \hat{P}_q + \gamma I_{r,r} \quad (4.48b)$$

atualização:

$$K_q := \hat{P}_q M^T / (M \hat{P}_q M^T + E[\eta^2]) \quad (4.49a)$$

$$\hat{q} := \hat{q} + K_q (z - \alpha) \quad (4.49b)$$

$$\hat{P}_q := \hat{P}_q - K_q M \hat{P}_q \quad (4.49c)$$

$$\hat{q}_i := \hat{q}_i \geq 0, \quad i=1, \dots, r \quad (4.49d)$$

Pode-se também utilizar o algoritmo UD para estimar  $q$ . A principal motivação para isso, seria a disponibilidade das rotinas que implementam o algoritmo UD para processamento das medidas, sem necessidade de criação de rotinas adicionais; e a manutenção de precisão numérica consistente com o filtro principal, que supõe-se ter sido implementado via fatorização UD. Neste caso, usar-se-iam os fatores  $U_q$  e  $D_q$  ao invés de  $P_q (=U_q D_q U_q^T)$ .

As Equações 4.49a-4.49d de atualização são então implementadas através do algoritmo de atualização UD já descrito (Capítulo 2, Seção 2.2.4).

Já a Equação 4.48b para propagação da covariância  $P_q$  muda então para:

$$\hat{U}_q \hat{D}_q \hat{U}_q^T := \hat{U}_q \hat{D}_q \hat{U}_q^T + \gamma I_{r,r} \quad (4.50)$$

O cálculo dos fatores  $\hat{UD}$ , levando em conta a estrutura particular da Equação 4.50, pode ser bastante otimizado, como se prova a seguir. Seja:

$$Q_r = \gamma \text{diag.} ( \underbrace{0, \dots, 0}_{n_1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2} )$$

onde  $n_1$  é o número de zeros antes do aparecimento da unidade,  $n_2$  é o número de zeros depois da unidade, e  $n_1 + 1 + n_2 = r$ . Sejam os fatores UD particionados apropriadamente:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & u_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow n_1 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow n_3 \end{matrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow n_1 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow n_3 \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n_1 & 1 & n_3 \end{matrix}$

Então, por substituição direta na Equação 4.50 nota-se que:

$$\hat{U}_{33} = U_{33}, \hat{u}_{23} = u_{23}, \hat{U}_{13} = U_{13}, \hat{D}_3 = D_3 \quad (4.51a)$$

$$\hat{d}_2 = d_2 + \gamma, \hat{u}_{12} = \frac{d_2}{\lambda} u_{12} \quad (4.51b)$$

$$\hat{U}_{11} \hat{D}_1 \hat{U}_{11}^T = U_{11} D_1 U_{11}^T + \gamma \frac{d_2}{\lambda} u_{12} u_{12}^T \quad (4.51c)$$

onde as variáveis sem circunflexo são as variáveis originais componentes de U e D. Conclui-se daí que as partições correspondentes às linhas/colunas  $n_3$  não sofrem alteração, e as partições correspondentes às linhas/colunas  $n_1$  podem ser resolvidas pelo algoritmo UD de "rank" 1 (ver Apêndice B), conforme Thornton e Bierman (1980) e Bierman (1977). O algoritmo otimizado que implementa a Equação 4.50, através das Equações 4.51a-4.51c também estão descritas no Apêndice B.

Entretanto, muitas vezes tem-se notado que é desnecessária a inclusão da covariância  $\gamma I_{r,r}$ ; ou seja,  $\gamma = 0$ . Daí, o problema reduz-se a um estimador de parâmetros recursivamente implementado através da forma de Kalman. Deve-se evitar o caso  $\gamma \neq 0$  quando possível, para salvar operações quando se utiliza a implementação UD.

A Tabela 4.2 mostra a quantidade de "flops" necessária para implementar o filtro do ruído adaptativo, para  $\gamma=0$ , correspondentes a m pseudo-medidas. O total de "flops" para a atualização foi retirado de Bierman (1977).

TABELA 4.2  
IMPLEMENTAÇÃO SEQUENCIAL DO RÚIDO ADAPTATIVO

Fase	Convencional	UD
propagação	-	-
atualização	$1,5r^2 + 4,5r + 1$	$1,5r^2 + 6,5r$
total para m pseudo-medidas	$m(1,5r^2 + 4,5r + 1)$	$m(1,5r^2 + 6,5r)$

4.2.3 - IMPLEMENTAÇÃO EM LOTE DO RÚIDO ADAPTATIVO ATRAVÉS DE ORTOGONALIZAÇÃO

Neste tipo de procedimento, acumulam-se as pseudo-observações em uma quantidade referente a  $p+1$  instantes, até que  $(p+1)m \geq r$ , onde  $m$  é o número de pseudo-medidas a cada instante, e  $r$  é a dimensão do vetor de ruído  $q$ :

$$\begin{matrix} m \\ m \\ \vdots \\ m \end{matrix} \begin{bmatrix} z(k) \\ \text{-----} \\ z(k+1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ z(k+p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(k) \\ \text{-----} \\ M(k+1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ M(k+p) \end{bmatrix} q(k+p) + \begin{bmatrix} \eta(k) \\ \text{-----} \\ \eta(k+1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ \eta(k+p) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Suponha que haja informações a priori  $\hat{q}(k-1)$  e  $\hat{P}_q(k-1)$  advindas do processamento anterior. Então, o índice de performance ponderado com informação a priori  $q_0$  e  $S_0$  fica:

$$J = \| z - Mq \|_W^2 + \| q_0 - q \|_{S_0}^2 \quad (4.53)$$

onde as matrizes de peso  $W$  e  $S_0$  são as correspondentes ao ruído da pseudo-medida, e à covariância anterior:

$$W = \text{diag.} ( 1/E[\eta_i^2] ) , i=1, \dots, (p+1)m \quad (4.54)$$

$$S_o = P_q^{-1}(k-1) \quad (4.55)$$

Então, de acordo com o Capítulo 2, aplica-se uma transformação ortogonal T, tal que:

$$J = \left\| T \begin{bmatrix} \overset{1}{\downarrow} S_o^{1/2} q_o \\ \hline W^{1/2} z \end{bmatrix} \right\|_{\leftarrow (p+1)m}^{\leftarrow r} - T \begin{bmatrix} \overset{r}{\downarrow} S_o^{1/2} \\ \hline W^{1/2} M \end{bmatrix} \right\|_{\leftarrow (p+1)m}^{\leftarrow r} q \|^2 \quad (4.56)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \overset{1}{\downarrow} z_1 \\ \hline -\frac{1}{z_2} \end{bmatrix} \right\|_{\leftarrow (p+1)m}^{\leftarrow r} - \begin{bmatrix} \overset{r}{\downarrow} M_1 \\ \hline -\frac{1}{0} \end{bmatrix} \right\|_{\leftarrow (p+1)m}^{\leftarrow r} q \|^2 \quad (4.57)$$

$$= \| z_1 - M_1 q \|^2 + \| z_2 \|^2 \quad (4.58)$$

Portanto, a solução de mínimos quadrados satisfaz:

$$M_1 \hat{q} = z_1$$

onde  $M_1$  é  $r \times r$  triangular superior.

Um ponto importante a ser observado é o cálculo da covariância. A covariância após a ortogonalização, se desejada, pode ser calculada por:

$$P_q = (M_1 M_1^T)^{-1} \quad (4.59a)$$

$$P_q^{-1} = M_1 M_1^T \quad (4.59b)$$

Observando o processo de ortogonalização, nota-se que nunca a covariância explícita é necessária, bastando somente a matriz  $M_1$ , pois  $M_1$  é uma matriz raiz quadrada de  $P_1^{-1}$ . Para o próximo passo, a informação a priori só depende de  $M_1$ :

$$S_0^{1/2} = M_1 \quad (4.60)$$

Deste modo, a montagem das matrizes antes da ortogonalização pode ser efetuada a partir da matriz triangularizada anterior. Este caráter recursivo deve ser explorado. Este fato não é surpreendente quando se faz analogia do método de mínimos quadrados recursivo com o filtro de Kalman. O método de mínimos quadrados é exatamente o filtro de Kalman sem a influência do ruído de estado, com a matriz de transição igual à matriz identidade (um simples estimador de parâmetros). Neste caso, o desenvolvimento das equações de mínimos quadrados leva à forma de Kalman, que nada mais é que a fase de atualização do filtro de Kalman.

Se a informação a priori  $S_0^{1/2}$  ( $r \times r$ ) estiver disponível, pode-se processar cada pseudo-medida sequencialmente (mínimos quadrados recursivo), pois necessariamente a matriz:

$$\begin{bmatrix} \downarrow r \\ S_0^{1/2} \\ \hline W^{1/2} M \end{bmatrix} \begin{matrix} + r \\ + 1 \end{matrix}$$

tem "rank"  $r$ , já que  $S_0$  é definida positiva (ver Capítulo 2). Lembrar também que a preparação para implementar este procedimento exclui o cálculo da Equação 4.47e.

A Tabela 4.3 mostra o número de "flops" gasto para essa implementação em lote do ruído adaptativo, através de ortogonalização de Householder, onde  $l=(p+1)m$  e

o símbolo ( $\sqrt{\quad}$ ) significa operação de raiz quadrada. A quantidade de "flops" para a ortogonalização refere-se à implementação sugerida em Lawson e Hanson (1974), conforme o Apêndice A. Nota-se que o algoritmo é competitivo com a forma sequencial de Kalman (Tabela 4.2).

TABELA 4.3

IMPLEMENTAÇÃO EM LOTE DO RÚIDO ADAPTATIVO

Cálculo	"flops"
montar $S_0^{1/2} q_0$	$0,5r^2 + 0,5r$
montar $w^{1/2} M$	$rl + l(\sqrt{\quad})$
montar $w^{1/2} z$	$l$
ortogonalizar e achar $M_1, z_1, z_2$	$r^3/3 + 2r^2 + 8r/3 + l(r^2 + 2r) + r(\sqrt{\quad})$
Calcular $\hat{q} = M_1^{-1} z_1$	$0,5r^2 + 0,5r + 1$
total para $l$ pseudo-medidas	$r^3/3 + 3r^2 + 11r/3 + 1 + l(r^2 + 3r + 1) + (r+l)(\sqrt{\quad})$

4.2.4 - ANÁLISE DO CUSTO ADICIONAL DA IMPLEMENTAÇÃO ADAPTATIVA

Levando-se em conta todas as operações aritméticas expostas nas Tabelas 4.1 a 4.3, pode-se calcular o custo adicional quando se implementa o estimador de ruído adaptativo. O objetivo é esclarecer que a implementação computacional da técnica de ruído adaptativo, quando realizada de maneira consistente como na sequência proposta, não introduz impacto significativo no processo de estimação global, a ponto de inviabilizar sua utilização. Lembrar que os algoritmos exploram todas as

particularidades do problema, minimizando o número de "flops", e ao mesmo tempo produzindo precisão e estabilidade numérica no caso do filtro UD e da ortogonalização de Householder. A Tabela 4.4 mostra o total de operações necessário para calcular o ruído adaptativamente, onde  $n$  é a dimensão do estado,  $m$  é o número de observações, e  $r$  é a dimensão do ruído dinâmico. Para o cálculo de "flop"s da implementação em lote, supôs-se que o filtro principal está mecanizado na forma UD, e o processamento é recursivo a cada instante, i.e.,  $l=m$  (ver Seção 4.2.3).

TABELA 4.4

OPERACÕES PARA IMPLEMENTAÇÃO DO RUIÍDO ADAPTATIVO

Cálculo	conv.	UD	em lote
preparar pseudo-medidas	$m(n^2+n+6+nr+2r)$	$m(0,5n^2+1,5n+6+nr+2r)$	$m(0,5n^2+1,5n+6+nr+r)$
processar pseudo-medidas	$m(1,5r^2+4,5r+1)$	$m(1,5r^2+6,5r)$	$r^3/3+3r^2+11r/3+1+m(r^2+3r+1)+(r+m)(\surd)$
total	$m(n^2+n+7+nr+1,5r^2+6,5r)$	$m(0,5n^2+1,5n+6+nr+1,5r^2+8,5r)$	$r^3/3+3r^2+11r/3+1+m(0,5n^2+1,5n+7+nr+r^2+4r)+(r+m)(\surd)$

Convém considerar a quantidade de operações para se implementar o filtro principal, segundo Bierman (1977), e Thornton e Bierman (1980):

propagação

convencional:  $1,5n^3+0,5n^2+r(0,5n^2+1,5n)$   
 Gram-Schmidt UD:  $1,5n^3+n^2+0,5n-1+r(n^2+n)$

A fase de propagação não inclui o cálculo da estimativa propagada  $\bar{x} = \hat{\phi}x$ , pois no filtro estendido não-linear ela é obtida por outros meios (analiticamente ou por integração numérica). Para o filtro linear discreto, basta somar  $n^2$  "flops" ao total dessas operações, caso se deseje considerar tal operação.

### atualização

convencional:  $m(1,5n^2 + 4,5n + 1)$   
fatorização UD:  $m(1,5n^2 + 6,5n)$

A Tabela 4.5 mostra o custo adicional em termos percentuais para se implementar a técnica de ruído adaptativo. O custo é calculado pela relação entre a quantidade de "flops" para o ruído adaptativo e a quantidade de "flops" para o filtro principal (propagação + atualização). A operação  $\sqrt{\quad}$  foi assumida como equivalente a 4 "flops", embora esta equivalência possa variar ligeiramente de computador para computador.

Nota-se que o custo adicional naturalmente decresce para  $r \ll n$ . A implementação UD é surpreendentemente tão ou mais econômica que a implementação convencional do ruído adaptativo, devido às particularidades dos fatores UD (triangular superior unitária e diagonal), pois o cálculo da pseudo-medida é mais econômico neste caso, conforme a Tabela 4.4. A implementação em lote do ruído adaptativo é competitiva também com a UD, quando a ortogonalização de Householder é utilizada, principalmente para altos valores de  $m$ . A implementação em lote pode se tornar bem mais econômica se ela for utilizada somente a cada  $l = (p+1)m$  passos; ou seja, somente após se acumularem e se processarem o lote de  $(p+1)m$  pseudo-medidas os valores de  $q$  são renovados (estimados). Neste caso, como a ortogonalização de Householder somente é calculada a cada

$p+1$  passos (cada passo com  $m$  medidas) correspondentes a  $p+1$  instantes discretos, a economia é substancial. O fator que pode tornar desinteressante a implementação em lote do ruído adaptativo é a necessidade de uma rotina adicional de ortogonalização, ao passo que a implementação UD já usaria as próprias rotinas existentes no filtro principal.

TABELA 4.5

CUSTO ADICIONAL PARA IMPLEMENTAÇÃO DO RUÍDO ADAPTATIVO

caso	n	m	r	conv.	UD	lote
1	1	1	1	1,64	1,58	2,50
2	3	3	3	1,00	1,02	1,14
3	3	1	3	0,48	0,53	0,92
4	3	1	1	0,33	0,29	0,41
5	6	6	6	0,84	0,89	0,88
6	6	6	3	0,57	0,52	0,50
7	6	4	3	0,45	0,42	0,43
8	6	2	3	0,28	0,27	0,32
9	6	1	3	0,16	0,15	0,24
10	9	6	6	0,47	0,47	0,46
11	9	4	6	0,35	0,36	0,39
12	9	2	6	0,20	0,21	0,28
13	9	1	6	0,11	0,11	0,21
14	9	6	3	0,36	0,30	0,29
15	9	4	3	0,28	0,23	0,24
16	9	2	3	0,16	0,14	0,16
17	9	1	3	0,09	0,08	0,11

Os casos de 6 a 17 são particularmente interessantes, pois são casos típicos que ocorrem em problemas de determinação de órbita, onde o vetor de estado a ser estimado se compõe das 6 componentes cartesianas da posição e da velocidade do satélite. Os casos 6-9 correspondem às 6 coordenadas cartesianas,  $m$  observações, e 3 ruídos nas componentes de velocidade. Os casos 10-17 correspondem às 6 coordenadas mais 3 parâmetros ("bias",

acelerações não-modeladas por exemplo) a serem estimados, com ruído nos parâmetros e/ou ruídos nas componentes de velocidade.

Conclui-se que, no pior caso, o custo adicional para implementação da técnica de ruído adaptativo é em geral menor que 50% do custo do filtro principal, podendo chegar a  $\approx 15\%$  no melhor caso (caso 9), para problemas de determinação de órbita típicos. Além disso, por vezes a implementação do estimador de ruído adaptativo na forma convencional empata com a forma UD. Não obstante, devido à suas características de precisão, a forma UD é sempre preferível. Análises de tempos de CPU ("Central Processing Unit") gastos efetivamente no problema de determinação de órbita serão descritas no Capítulo 8.

#### 4.3 - SUAVIZAÇÃO UD

O suavizador mais atraente do ponto de vista computacional é o proposto por Bierman (1983), que requer pouco armazenamento de variáveis advindas da filtragem, embora necessite modificar ligeiramente o algoritmo de propagação do filtro de maneira a acomodar e armazenar as variáveis apropriadas. Basicamente, trata-se do suavizador RTS, Rauch-Tung-Striebel, descrito no Capítulo 3, porém com o processo de cálculo modificado convenientemente para produzir um suavizador que necessita de poucas informações do filtro. A recursão resultante para a covariância suavizada torna-se quadrática (Equação 4.67), e é portanto mais estável numericamente e eficiente computacionalmente do que a forma original de RTS para o cálculo da matriz de covariância suavizada. A idéia principal consiste em processar cada componente do ruído dinâmico sequencialmente no filtro, e armazenar certas variáveis intermediárias.

Seja a equação de propagação da covariância no filtro:

$$\bar{P} = \phi \hat{P} \phi^T + G Q G^T \quad (4.61)$$

onde supõe-se  $Q = \text{diag} (q_1, \dots, q_r)$ . É sempre possível colocar  $Q$  na forma diagonal se esta for uma matriz cheia, através de uma fatoração livre de Choleski do tipo UD, com  $Q = A\bar{Q}A^T$ , onde  $A$  é triangular superior unitária e  $\bar{Q}$  é diagonal. Então:

$$G Q G^T = G A \bar{Q} A^T G^T = \bar{G} \bar{Q} \bar{G}^T \quad (4.62)$$

e  $\bar{Q}$  é diagonal, com a matriz  $\bar{G}$  incorporando o efeito da diagonalização.

O processamento sequencial do ruído de estado processa uma componente da diagonal da matriz  $Q$  a cada passo. Primeiro, particiona-se a matriz  $G$  em  $r$  vetores de  $n$  componentes,  $n$  sendo a dimensão do estado:

$$G = [g_1, \dots, g_r] \quad (4.63)$$

Então, percorre-se uma malha ("loop")  $r$  vezes, onde a cada vez que a malha é percorrida, a covariância incorpora o efeito do ruído  $q_i$ ,  $i=1, \dots, r$ , componente da matriz diagonal  $Q$ :

$$\bar{P} = \phi \hat{P} \phi^T$$

$$\bar{P} := \bar{P} + q_i g_i g_i^T, \quad i=1, \dots, r$$

Este processamento sequencial do ruído  $q$  é a principal motivação para o suavizador proposto por Bierman (1983).

#### 4.3.1 - SUAUZADOR DE BIERMAN

A estimativa suavizada do estado,  $\hat{x}(k/N)$ , e a respectiva matriz de covariância do erro,  $\hat{P}(k/N)$ , no suavizador de Rauch-Tung-Striebel (RTS) são calculadas por (Capítulo 3):

$$\hat{x}(k/N) = \hat{x}(k) + C(k) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ]$$

$$\hat{P}(k/N) = \hat{P}(k) + C(k) [ \hat{P}(k+1/N) - \bar{P}(k+1) ] C^T(k)$$

onde  $\bar{x}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\hat{x}$ , e  $\hat{P}$  são o estado e a covariância propagados e atualizados no filtro de Kalman, e  $C(k)$  é chamado de ganho do suavizador.

O ganho do suavizador RTS depende das covariâncias do filtro na seguinte forma (ver Seção 3.1):

$$C(k) = \hat{P}(k) \phi^T(k) \bar{P}^{-1}(k+1) \quad (4.64)$$

A partir daqui, várias passagens algébricas omitidas no texto estão provadas no Apêndice C, pois estas, se colocadas aqui, o que é perfeitamente dispensável, dificultariam a compreensão do texto. Cumpre ressaltar que o artigo de Bierman (1983) não contém nenhuma destas provas mostradas no Apêndice C, que por sinal mostraram-se mais complexas do que o esperado a primeira vista.

Para cada componente do ruído de estado  $q_i$  define-se um ganho recursivo do suavizador (ver Apêndice C):

$$C_{i+1}^* = P_i [ P_i + q_i g_i g_i^T ]^{-1} = I - \lambda_i g_i v_i^T \quad (4.65)$$

com

$$v_i = P_i^{-1} g_i, \quad \lambda_i = q_i / (1 + q_i v_i^T g_i) \quad (4.66)$$

onde o índice  $i$  representa o efeito da inclusão sequencial da componente de ruído  $q_i$ . Esta transformação de "rank" 1 para o ganho  $C_i^*$  aparentemente necessita da inversão de  $P_i$ , porém, como o que se deseja é o vetor  $v_i$ , não se calcula explicitamente a inversa de  $P_i$  (para se resolver sistemas de equações lineares do tipo  $Pv=g$  não se necessita explicitamente de inversão matricial). A estimativa suavizada modificada e a covariância suavizada modificada são então calculadas por (ver Apêndice C para as provas):

$$\hat{x}_i^* = \hat{x}_{i+1}^* + g_i \delta_i \quad (4.67a)$$

$$\delta_i = \lambda_i v_i^T [ \bar{x}(k+1) - \hat{x}_{i+1}^* ] \quad (4.67b)$$

$$\hat{P}_i^* = (I - \lambda_i g_i v_i^T) \hat{P}_{i+1}^* (I - \lambda_i g_i v_i^T)^T + \lambda_i g_i g_i^T \quad (4.67c)$$

para  $i=r, r-1, \dots, 1$ , onde  $\bar{x}$  é a estimativa propagada do filtro para o instante  $k+1$  em questão, o índice  $i$  representa a influência da componente de ruído  $q_i$ ,  $i=r, \dots, 1$ , e as condições iniciais para as recursões são:

$$\hat{x}_{r+1}^* = \hat{x}(k+1/N), \quad \hat{P}_{r+1}^* = \hat{P}(k+1/N) \quad (4.68)$$

Nota-se então, que durante o processo de propagação do filtro, as novas variáveis  $\lambda_i$ ,  $v_i$  devem ser armazenadas dentro do processo de incorporação sequencial do ruído de estado. O processo completo de propagação da covariância na fase de filtragem fica:

$$\bar{P} := \phi \hat{P} \phi^T \quad (4.69a)$$

para  $i=1, r$

$$\text{rotina para achar } v_i \text{ com } \bar{P} v_i = g_i \quad (4.69b)$$

$$\lambda_i := q_i / (1 + q_i v_i^T g_i) \quad (4.69c)$$

armazenar  $\lambda_i, v_i$  (4.69d)

$$\bar{P} := \bar{P} + q_i g_i g_i^T \quad (4.69e)$$

fim da malha

Portanto, armazena-se  $\bar{x}$ , e r vezes  $v_i$  (vetor  $n \times 1$ ) e  $\lambda_i$  (escalar) para utilização no suavizador. Se os vetores  $g_i$  não são constantes, então os  $g_i$  também devem ser armazenados. Como se vê, o gasto computacional adicional está no cálculo dos vetores  $v_i$  e dos escalares  $\lambda_i$ . A Tabela 4.6 mostra o custo adicional na fase de filtragem para calcular e armazenar  $\lambda$  e  $v$ , na implementação convencional (sem fatorização UD) do suavizador de Bierman (1983). A contagem para cálculo de  $v_i$  na Equação 4.69b foi retirada de Bierman (1974). Se o vetor  $g_i$  contiver estruturas peculiares, com "zeros" e "uns", pode-se obter uma economia adicional no cálculo da Equação 4.69b.

TABELA 4.6

CUSTO ADICIONAL NA FASE DE FILTRAGEM CONVENCIONAL

Cálculo	Equação	"flops"
$v_i = \bar{P}^{-1} g_i$	4.69b	$n^3/3 + n^2 - n/3$
$v_i^T g_i$	4.69c	n
$q_i v_i^T g_i$	4.69c	1
$\lambda_i = q_i / (1 + q_i v_i^T g_i)$	4.69c	1
total para r ruídos		$r(n^3/3 + n^2 + 2n/3 + 2)$

No fim da recursão do suavizador, Equações 4.67a-4.67c, as estimativas suavizadas podem ser calculadas por (ver Apêndice C):

$$\hat{x}(k/N) = \phi^{-1}(k) \hat{x}_1^* \quad (4.70)$$

$$\hat{P}(k/N) = \phi^{-1}(k) \hat{P}_1^* \phi^{-T}(k) \quad (4.71)$$

onde  $\hat{x}_1^*$  e  $\hat{P}_1^*$  são o estado e a covariância após a ciclagem do ruído no estado  $r$  vezes, e onde a notação para as variáveis suavizadas foi introduzida no Capítulo 3. A obtenção de  $\hat{x}(k/N)$  por meio da equação acima é válida para dinâmica linear discreta.

No caso de sistemas dinâmicos não-lineares, a equação de suavização de estado deve ser modificada pois  $\phi(k) \hat{x}(k) \neq \bar{x}(k+1)$  para o filtro estendido de Kalman. Lembrando que:

$$\hat{x}(k/N) = \hat{x}(k) + C(k) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ] \quad (4.72a)$$

$$C^*(k) \triangleq \phi(k) C(k) \quad (4.72b)$$

Então:

$$\begin{aligned} \phi(k) \hat{x}(k/N) &= \phi(k) \hat{x}(k) \\ &+ C^*(k) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ] \end{aligned} \quad (4.73)$$

Portanto, a recursão para o estado suavizado não-linear se torna:

$$\hat{x}_{r+1}^* := \hat{x}(k+1/N) \quad (4.74a)$$

para  $i=r, 1$

$$\delta_i := \lambda_i v_i^T [ \bar{x}(k+1) - \hat{x}_{i+1}^* ] \quad (4.74b)$$

$$\hat{x}_i^* := \hat{x}_{i+1}^* + g_i \delta_i \quad (4.74c)$$

fim da malha

$$\hat{x}(k/N) := \phi^{-1}(k) [\hat{x}_1^* - \bar{x}(k+1)] + \hat{x}(k) \quad (4.74d)$$

Neste caso, nota-se a necessidade de armazenamento também de  $\hat{x}(k)$ , diferente do caso linear onde se podia reconstituí-lo através de  $\bar{x}(k+1) = \phi(k) \hat{x}(k)$ . Em resumo, a cada passo do filtro não-linear, as seguintes variáveis devem ser armazenadas:  $\bar{x}(k+1)$ ,  $\hat{x}(k)$ , e  $r$  vezes  $v_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $g_i$  e, obviamente, a matriz de transição  $\phi$ , se sua recomputação for dispendiosa.

A Tabela 4.7 mostra a complexidade computacional para obter a estimativa suavizada, quando se implementa o suavizador de Bierman, tanto na forma convencional quanto na forma UD (as equações para obtenção das estimativas suavizadas são as mesmas em ambas as formas).

TABELA 4.7

OPERACÕES ARITMÉTICAS PARA ESTIMATIVA SUAVIZADA

Cálculo	Equação	"flops"
$\delta_i = \lambda_i v_i^T [\bar{x}(k+1) - x_{i+1}^*]$	4.74b	$(n+1)r$
$x_i^* = x_{i+1}^* + g_i \delta_i$	4.74c	$nr$
$\hat{x}(k/N)$	4.70 ou 4.74d	$n^2$
total para $r$ ruídos		$r(2n+1) + n^2$

A Tabela 4.8 mostra a complexidade computacional para obter a covariância suavizada, no suavizador de Bierman convencional.

TABELA 4.8

OPERACOES ARITMETICAS PARA COVARIANCIA SUAVIZADA  
CONVENCIONAL

Cálculo	Equação	"flops"
$g_i v_i^T$	4.65	$n^2 r$
$C_{i+1}^* = I - \lambda_i g_i v_i^T$	4.65	$n^2 r$
$C_{i+1}^* P_{i+1}^* (C_{i+1}^*)^T$	4.67c	$(1,5n^3 + 0,5n^2)r$
$P_i^* = C_{i+1}^* P_{i+1}^* (C_{i+1}^*)^T + \lambda_i g_i g_i^T$	4.67c	$(2n^2)r$
$\hat{P}(k/N) = \phi^{-1} P_1^* \phi^{-T}$	4.71	$1,5n^3 + 0,5n^2$
total para r ruídos		$r(1,5n^3 + 4,5n^2) + 1,5n^3 + 0,5n^2$

Outro problema crônico em suavizadores é a necessidade da inversa da matriz de transição. A inversa da matriz de transição pode ser obtida integrando-se as equações variacionais da dinâmica para trás no tempo (k+1 a k), já que vale:

$$\phi^{-1}(k+1, k) = \phi(k, k+1)$$

No entanto, é preferível utilizar a estrutura particular do problema em questão para evitar ou simplificar a inversão da matriz de transição.

Felizmente, em problemas de determinação de órbita, devido ao particular modelo da dinâmica, o

conhecimento da matriz de transição (calculado durante o processo de filtragem) permite a obtenção da inversa sem grande algebrismo adicional (ver Seção 6.1.3).

#### 4.3.2 - SUAUZADOR NA FORMA UD

Uma vez que se pretende utilizar o filtro UD, é conveniente que o suavizador mantenha consistência e precisão numérica, utilizando também os fatores UD. Este suavizador recém descrito é especialmente adequado para ser utilizado em conjunto com o filtro UD. Longe de ser uma desvantagem, o suavizador UD reduz drasticamente os cálculos de suavização quando se explora a forma dos fatores UD (matrizes de forma triangular superior unitária e diagonal respectivamente), além de manter as propriedades de estabilidade numérica dos algoritmos de raiz quadrada.

A fase de propagação do filtro UD deve ser convenientemente modificada para armazenar as variáveis  $\lambda_i$  e  $v_i$ . Propõe-se o seguinte esquema computacional (comparar com o esquema para o filtro convencional, Equações 4.69). Dados  $\hat{U}$ ,  $\hat{U}$ ,  $\phi$ ,  $q_i$ , e  $g_i$  deve-se inicialmente calcular os fatores  $\bar{U}$  e  $\bar{D}$  que implementam a operação  $\bar{U}\bar{D}\bar{U}^T = \phi\hat{U}\hat{U}^T\phi^T$  via o algoritmo de Gram-Schmidt tal que:

$$\bar{U}\bar{D}^{1/2} = T [ \phi\hat{U}\hat{U}^{1/2} ] \quad (4.75)$$

onde T é a transformação ortogonal de Gram-Schmidt conforme explicado na Seção 2.2.4. Em seguida, a seguinte malha, que incorpora os efeitos dos ruídos  $q_i$  um de cada vez, deve ser percorrido para  $i=1, \dots, r$ :

$$L := \bar{U}\bar{D} \quad (4.76a)$$

$$\text{rotina para calcular } g_i^* \text{ com } L g_i^* = g_i \quad (4.76b)$$

$$\text{rotina para calcular } v_i \text{ com } \bar{U}^T v_i = g_i^* \quad (4.76c)$$

$$\lambda_i := q_i / (1 + q_i v_i^T g_i) \quad (4.76d)$$

$$\text{armazenar } \lambda_i, v_i \quad (4.76e)$$

rotina de "rank" 1 para incorporar o ruído  $q_i$ :

$$\bar{U}\bar{D}\bar{U}^T := \bar{U}\bar{D}\bar{U}^T + q_i g_i g_i^T \quad (4.76f)$$

Neste algoritmo,  $L$  é triangular superior e portanto  $g_i^*$  e  $v_i$  são trivialmente obtidos, sem necessidade de inversão explícita de matrizes. Este tipo de equação para obter  $v_i$  ou  $g_i^*$  realiza menos operações do que o caso onde  $P v_i = g_i$  com  $P$  matriz cheia.

A Tabela 4.9 mostra o custo adicional na fase de filtragem (propagação) para calcular e armazenar  $\lambda$  e  $v$ , na implementação UD do suavizador de Bierman. Comparando-se os seus valores com os da Tabela 4.8, nota-se que o custo adicional, com o filtro na forma UD, é proporcional a  $1,5rn^2$ , ao passo que com filtro na forma convencional tal custo vai a  $rn^3/3$ .

Para obtenção da estimativa suavizada modificada  $\hat{x}_i^*$ , usam-se as mesmas Equações 4.67 e 4.68 para o suavizador linear (em sistemas lineares), ou as Recursões 4.74 para o suavizador não-linear (em sistemas não-lineares).

TABELA 4.9

CUSTO ADICIONAL NA FASE DE FILTRAGEM UD

Cálculo	Equação	"flops"
$L = \bar{U}\bar{D}$	4.76a	$0,5n^2 - 0,5n$
$g_i^* = L^{-1}g_i$	4.76b	$0,5n^2 + 0,5n + 1$
$v_i = \bar{U}^{-T}g_i^*$	4.76c	$0,5n^2 - 0,5n - 1$
$v_i^T g_i$	4.76d	n
$q_i v_i^T g_i$	4.76d	1
$\lambda_i = q_i / (1 + q_i v_i^T g_i)$	4.76d	1
total para r ruídos		$r(1,5n^2 + 0,5n + 2)$

Para obter os fatores UD suavizados na Equação 4.67c, utiliza-se uma analogia com a fórmula de atualização da covariância do filtro de Kalman. Dado um ganho  $\hat{K}$  arbitrário, H vetor função das observações, e R variância (escalar) do erro de medida, a covariância atualizada é dada pela Equação 2.24, Capítulo 2 (forma de Joseph):

$$\hat{P} = (I - \hat{K}H) P (I - \hat{K}H)^T + \hat{K}R\hat{K}^T$$

Em particular, se  $\hat{K}$  é o ganho de Kalman K, então vale:

$$K = PH^T / \alpha \text{ (ganho de Kalman)}$$

$$\alpha = HPH^T + R \text{ (covariância do resíduo, escalar)}$$

$$\hat{P} = (I - KH) P \text{ (forma convencional)}$$

É interessante lembrar que se  $\hat{K} \neq K$ , então:

$$\begin{aligned}\hat{P} &= (I - \hat{K}H) P (I - \hat{K}H)^T + \hat{K}R\hat{K}^T \\ &= P + \hat{K}H P H^T \hat{K}^T - \hat{K}H P - P H^T \hat{K}^T + \hat{K}R\hat{K}^T \\ &= P + \hat{K}\alpha\hat{K}^T - \hat{K}H P - P H^T \hat{K}^T\end{aligned}$$

e lembrando que  $P H^T = \alpha K$ , vêm:

$$\begin{aligned}\hat{P} &= P + \hat{K}\alpha\hat{K}^T - \alpha\hat{K}K^T - \alpha K K^T \\ &= P + (\hat{K} - K) \alpha (\hat{K} - K)^T - K\alpha K^T \\ &= (\hat{K} - K) \alpha (\hat{K} - K)^T + P - K\alpha K^T / \alpha \\ &= (I - KH) P + (\hat{K} - K) \alpha (\hat{K} - K)^T\end{aligned}\tag{4.77}$$

Se  $\hat{K} = K$ , a fórmula se reduz à forma convencional. No entanto, esta fórmula permite utilizar o algoritmo de atualização UD para calcular os fatores UD suavizados. Para tanto, deve-se lembrar que o algoritmo de atualização UD produz os fatores  $\hat{U}\hat{D}$  correspondentes a  $\hat{P} = (I - KH) P$ . As variáveis correspondentes do suavizador para a fórmula 4.77 são:

$$H = \lambda v^T \tag{4.78a}$$

$$R = \lambda \tag{4.78b}$$

$$\hat{K} = g \tag{4.78c}$$

O algoritmo deve ser implementado por:

- 1 - Dados  $\lambda v^T$ ,  $\lambda$ ,  $U$ ,  $D$ , achar  $\hat{U}$ ,  $\hat{D}$  correspondentes a  $(I - KH)P$ , por meio do algoritmo de atualização UD (Relações

2.51). Além disso, o algoritmo UD fornece também  $K$  e  $\alpha$ , que satisfazem:

$$\hat{U}\hat{D}\hat{U}^T := [I - K\lambda v^T] UDU^T \quad (4.79a)$$

$$\alpha := \lambda v^T UDU^T v \lambda + \lambda \quad (4.79b)$$

$$K := UDU^T \lambda v / \alpha \quad (4.79c)$$

2 - Montar o vetor

$$\hat{K} - K = g - K \quad (4.80)$$

3 - Dados  $\hat{U}$ ,  $\hat{D}$ ,  $\alpha$ ,  $\hat{K} - K$ , calcular os fatores  $U^*$ ,  $D^*$  que satisfazem:

$$U^* D^* U^{*T} = \hat{U}\hat{D}\hat{U}^T + \alpha (\hat{K} - K) (\hat{K} - K)^T \quad (4.81)$$

por meio do algoritmo de "rank" 1 já descrito anteriormente.

Esta implementação é bastante econômica e gasta cerca de  $1,5n^2$  (atualização UD) mais  $n^2$  (algoritmo de "rank" 1) "flops", consideravelmente menos que o método usual de Gram-Schmidt ( $1,5n^3$ ) mais  $n^2$  "flops" (algoritmo de "rank" 1), que seria a implementação natural.

Após a ciclagem dos  $\lambda_i$ ,  $v_i$ ,  $i=r, \dots, 1$ , os resultantes fatores UD são os fatores  $\hat{U}_1^*$  e  $\hat{D}_1^*$  correspondentes à covariância suavizada  $\hat{P}_1^*$ . Por fim, necessita-se aplicar o algoritmo de Gram-Schmidt para obter os fatores  $\hat{U}(k/N)$  e  $\hat{D}(k/N)$  suavizados, correspondentes a  $\phi^{-1} \hat{P}^*(k/N) \phi^{-T}$ , Equação 4.71, ou seja:

$$\hat{U}(k/N) \hat{D}(k/N) \hat{U}^T(k/N) = \phi^{-1} \hat{U}_1^* \hat{D}_1^* \hat{U}_1^{*T} \phi^{-T} \quad (4.82)$$

Este esquema aparentemente complexo, quando traduzido em um algoritmo computacional torna-se bastante simples de implementar, fazendo-se uso do artifício de reutilizar variáveis ("overwriting"), sem criar novas.

A Tabela 4.10 mostra a complexidade computacional para se obter a covariância suavizada ao implementar o suavizador de Bierman na forma UD. Para se calcular a estimativa suavizada, a contagem de operações é a mesma da Tabela 4.5, e a implementação mesmo na forma UD não muda. A contagem para a Equação 4.79 foi extraída de Bierman (1977) e não inclui atualização da estimativa, a montagem para a Equação 4.81 está no Apêndice B, e para a Equação 4.82 a contagem para o algoritmo de Gram-Schmidt está conforme Thornton e Bierman (1977, 1980).

TABELA 4.10

OPERACÕES ARITMÉTICAS PARA COVARIÂNCIA SUAVIZADA UD

Calculo	Equação	"flops"
$\lambda_i v_i^T$	4.78a	nr
achar UD	4.79	$(1,5n^2 + 5,5n)r$
$U^*D^*$	4.81	$(n^2 + 4n - 3)r$
$\phi^{-1} U_1^* D_1^* U_1^{*T} \phi^{-T}$	4.82	$(1,5n^3 + n^2 + 0,5n - 1)$
total para r ruídos		$r(2,5n^2 + 10,5n - 3)$ $+(1,5n^3 + n^2 + 0,5n - 1)$

Nota-se que, para o cálculo da covariância suavizada, o suavizador de Bierman na forma UD gasta aproximadamente  $2,5rn^2 + 1,5n^3$  "flops", e o suavizador na forma convencional (Tabela 4.8) gasta  $1,5rn^3 + 1,5n^3$ . Em resumo, o suavizador UD é mais econômico que o suavizador convencional, tanto no custo adicional durante a fase de

filtragem como na fase de suavização, conforme se pode inferir através das Tabelas 4.6 a 4.10.

## CAPÍTULO 5

### NOÇÕES DE OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE

Um aspecto bastante importante é saber se realmente algo pode ser ganho quando se utiliza um estimador para filtrar os dados de medidas e gerar estimativas do estado. Qual a quantidade de informação que está embutida e pode ser extraída dos dados? Pode de fato o estado ser reconstruído a partir dos dados disponíveis? É evidente que as respostas estão relacionadas ao modelo adotado para o sistema e ao esquema de coleta de observações. Tais questões são importantes e devem de alguma forma ser quantificadas, pois se pouca informação é obtida ou pouco pode ser ganho através da filtragem dos dados, deve-se remodelar o sistema, como por exemplo escolher outros tipos de medidas ou reprojeter a dinâmica do sistema. Com este objetivo, introduzem-se os conceitos de observabilidade e controlabilidade do sistema dinâmico em estudo. Para o filtro de Kalman é interessante abordar o aspecto de observabilidade, pois o estado somente pode ser reconstituído quando é observável. A noção de controlabilidade sempre aparece ao lado da de observabilidade, pois são conceitos duais. Em outras palavras, se um sistema é observável, então seu sistema dual é controlável e vice-versa.

Portanto, as noções de controlabilidade e observabilidade aplicadas aos sistemas em estudo podem fornecer importantes informações sobre o comportamento dinâmico destes sistemas. Esses conceitos foram desenvolvidos para serem aplicados a sistemas lineares em geral, de forma que extrapolações para sistemas não-lineares devem ser judiciosamente efetuadas. Não raramente, na prática, não se testa observabilidade na fase de projeto do filtro, e tende-se a verificar a resposta do

sistema para comprovar observabilidade. Em muitos casos, experiências anteriores bem sucedidas são suficientes para se concluir sobre o sucesso do estimador de estado, de forma que conclusões sobre observabilidade por analogia (prática e não teórica) não são raras.

Neste capítulo introduzem-se inicialmente definições de controlabilidade e observabilidade para sistemas lineares invariantes no tempo. Em seguida, os conceitos são definidos para sistemas lineares variantes no tempo. Aspectos algorítmicos e de análise numérica quando se calcula controlabilidade e observabilidade são também citados, e algumas características do problema de determinação de órbita são analisadas.

A definição genérica para controlabilidade é:

Um sistema linear é controlável se dado um estado  $x_0$ , pode-se levá-lo a um estado arbitrário  $x_f$  num intervalo de tempo de  $t_0$  a  $t_f$  finito, por meio de uma entrada  $u$  contínua por partes ("piecewise continuous"). Se somente uma parte do vetor  $x$  pode ser controlado, então diz-se que o sistema é parcialmente controlável.

Para observabilidade:

Um sistema linear é observável se dado um conjunto de medidas  $y$  cobrindo um intervalo de  $t_0$  a  $t_f$ , todo estado  $x_0$  é passível de ser reconstituído completamente. Se somente uma parte de  $x_0$  é reconstituído, então o sistema é parcialmente observável.

## 5.1 - SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO

Seja um sistema linear com matrizes invariantes no tempo da forma:

$$\dot{x} = Fx + Bu, \quad y = Hx \quad (5.1)$$

onde  $F$  é de dimensão  $n \times n$ ,  $B$  é  $n \times r$ ,  $H$  é  $m \times n$ , compatíveis com as dimensões  $n$ ,  $m$ , e  $r$ , respectivamente, dos vetores  $x$  (estado),  $y$  (saída), e  $u$  (entrada). Sejam também  $\lambda_i$ ,  $i=1, \dots, n$  os auto-valores da matriz  $F$ .

Para sistemas lineares invariantes no tempo, existem 3 maneiras usuais de se provar controlabilidade e observabilidade (Paige, 1981):

Método 1: O sistema 5.1 é controlável se e só se:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & FB & \dots & F^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (5.2)$$

$n \times r \quad n \times r \quad \dots \quad n \times r$

e observável se e só se:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H^T & F^T H^T & \dots & (F^T)^{n-1} H^T \end{bmatrix} = n \quad (5.3)$$

$n \times m \quad n \times m \quad \dots \quad n \times m$

A matriz de controlabilidade possui dimensão  $n \times r$  e a de observabilidade  $n \times m$ . Esta é a forma clássica de cálculo conforme proposta por Kalman.

Método 2: O Sistema 5.1 é controlável se e só se:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & F - \lambda_i I \end{bmatrix} = n, \quad i=1, \dots, n \quad (5.4)$$

$n \times r \quad n \times r$

e observável se e só se:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H^T & F^T - \lambda_i I \end{bmatrix} = n, \quad i=1, \dots, n \quad (5.5)$$

$n \times m \quad n \times m$

Estas matrizes são de menor dimensão (menos colunas) e aparentemente mais fáceis de serem formadas do que no método 1, porém exigem o cálculo dos auto-valores de  $F$

a-priori, o que não é tarefa trivial conforme pode ser atestado pela quantidade de algoritmos existentes em análise numérica que tratam desse assunto. Note-se ainda que a restrição de rank  $n$  deve ser satisfeito para cada um dos auto-valores  $\lambda_i$  da matriz  $F$ .

Método 3: O Sistema 5.1 é controlável e observável se e só se existe uma matriz  $K$  não nula de dimensão  $r \times m$  tal que os auto-valores de

$$F + BKH$$

são todos diferentes de cada auto-valor  $\lambda_i$  da matriz  $F$ .

O método 3 oferece menos atrativos por ser uma maneira menos sistemática e portanto menos codificável (em computador). Os métodos 1 e 2 exigem cálculo de "rank" de matrizes. Um aspecto importante a ser comentado diz respeito à forma de cálculo do "rank". Os engenheiros e projetistas de sistemas de controle em geral aplicam os métodos 1 e 2 e calculam-no de maneira convencional (cálculo de auto-valores), para provarem controlabilidade ou observabilidade. É sabido que soluções analíticas são obtidas somente em casos fortuitos ou em sistemas de pequena dimensão, de forma que geralmente se recorre ao uso de computadores digitais. Como estes trabalham com comprimentos finitos de palavra para representação de números, erros inerentes de truncamento e acumulação estão presentes. Entende-se portanto que a prova definitiva de controlabilidade e observabilidade deve estar vinculada ao algoritmo que realizou os cálculos. Como provar que um sistema é controlável ou observável se o algoritmo computacional empregado é numericamente instável? Se um auto-valor deve ser nulo, qual o zero numérico a ser adotado para testá-lo, em face da magnitude dos outros auto-valores desse sistema? Especialistas em análise

numérica concordam que o melhor meio de calcular "rank" é através da decomposição de valor singular SVD, "Singular Value Decomposition" (veja por exemplo Klema and Laub, 1980; Paige, 1981). Teorias de análise numérica provam que se uma matriz tem  $r$  valores singulares  $\sigma_i$ ,  $i=1, \dots, r$  não-nulos, então a matriz tem "rank"  $r$ . Klema e Laub (1980) observam que a SVD é uma das mais importantes ferramentas de análise numérica, em especial a álgebra linear numérica, sendo provável que em 5 a 10 anos a SVD seja uma das mais importantes e fundamentais ferramentas de trabalho para a comunidade de projetistas de sistemas de controle, particularmente na área de sistemas lineares.

A definição de valores singulares de uma matriz  $A$   $m \times n$  é a seguinte: existem matrizes ortogonais  $U$   $m \times m$  e  $V$   $n \times n$  tal que:

$$A = U \Sigma V^T \quad (5.6)$$

onde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & | & 0 \\ \hline & | & \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \quad (5.7)$$

e  $S = \text{diag.} (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  com  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Os números  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  junto com  $\sigma_{r+1} = 0, \dots, \sigma_n = 0$  são os valores singulares de  $A$ , e são as raízes quadradas positivas dos auto-valores de  $A^T A$ . As colunas de  $U$  são vetores singulares esquerdos de  $A$  (auto-vetores ortonormais de  $AA^T$ ), e as colunas de  $V$  são os vetores singulares direitos de  $A$  (auto-vetores ortonormais de  $A^T A$ ). É claro portanto que o número de valores singulares não-nulos de  $A$  determina o "rank". É reconhecido atualmente que a SVD é o único método genérico confiável para se calcular o "rank" numericamente. Veja exemplos em Klema e Laub (1980) onde o cálculo de

auto-valores em computador falha na determinação do "rank" de matrizes, ao passo que a SVD realiza a tarefa mesmo em sistemas "rank"-deficientes.

## 5.2 - SISTEMAS LINEARES ESTOCÁSTICOS

Seja o sistema estocástico linear onde agora todas as matrizes são variantes no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(t)x(t) + B(t)w(t) , \\ y(t) &= H(t)x(t) + v(t)\end{aligned}\tag{5.9}$$

onde  $x(t)$  é o vetor  $n$ -dimensional do estado,  $F(t)$  é  $n \times n$ ,  $B(t)$  é  $n \times r$ ,  $w(t)$  é o vetor  $r$ -dimensional do ruído dinâmico,  $y(t)$  é o vetor  $m$ -dimensional das saídas (observações),  $H(t)$  é  $m \times n$ , e  $v(t)$  é o vetor  $m$ -dimensional do ruído de observação. Lembrar as estatísticas dos ruídos:

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)\tag{5.10}$$

$$E[v(t)] = 0, \quad E[v(t)v^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)\tag{5.11}$$

onde  $Q(t)$  é a matriz  $r \times r$  de densidade espectral do ruído  $w(t)$ ,  $R(t)$  é a matriz  $m \times m$  definida positiva de densidade espectral do ruído  $v(t)$ , e  $\delta(t-\tau)$  é o delta de Dirac.

Define-se a matriz de informação (ou de observabilidade) por (Jazwinski, 1970):

$$I(t, t_0) \triangleq \int_{t_0}^t \phi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \phi(\tau, t) d\tau\tag{5.12}$$

e a matriz de controlabilidade por (Jazwinski, 1970):

$$C(t, t_0) \triangleq \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B^T(\tau) \phi^T(t, \tau) d\tau \quad (5.13)$$

onde  $\phi$  é a matriz de transição de estado associada ao Sistema 5.9. Diz-se que o Sistema 5.9 é completamente observável (Jazwinski, 1970) se e só se:

$$I(t, t_0) > 0 \text{ para algum } t > t_0 \quad (5.14)$$

e é completamente controlável (Jazwinski, 1970) se e só se:

$$C(t, t_0) > 0 \text{ para algum } t > t_0 \quad (5.15)$$

Nota-se portanto que as matrizes de controlabilidade e observabilidade acumulam informações no intervalo de tempo de  $t_0$  a  $t_f$  por meio da integral (ou somatória no caso discreto). Para isto é fundamental a hipótese de sistema linear. Para sistemas não-lineares, linearizam-se as equações dinâmicas em torno de trajetórias nominais, e examinam-se então as matrizes de controlabilidade e observabilidade. Diz-se que o sistema é localmente controlável ou observável, no espaço (intervalo) em que a linearização é válida. Se em  $N$  intervalos consecutivos o sistema é controlável ou observável, diz-se que o sistema é  $N$ -controlável ou  $N$ -observável. Veja por exemplo Lee e Marcus (1967); Hermann e Krener (1977) para os teoremas correlatos.

### 5.3 - OBSERVABILIDADE EM DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA

Sendo o problema de determinação de órbita não-linear, o teste de observabilidade genérica é, se não difícil, provavelmente impossível de ser realizado. É

preferível utilizar a idéia de observabilidade local (por trechos). Se o sistema é observável a cada passo de linearização, então o sistema é observável no intervalo completo. Na determinação de órbita, normalmente usa-se o filtro estendido de Kalman com a seguinte linearização:

dinâmica:  $\dot{x} = f(x,t) + B(t) w(t)$

linearização:  $\delta\dot{x} = F \delta x + B(t) w(t)$  ;  $F = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$

observação:  $y_k = h_k(x_k) + v_k$

linearização:  $\delta y_k = H_k \delta x_k + v_k$ ;  $H_k = \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}_k}$

onde as dimensões dos vetores/matrizes  $x$ ,  $f$ ,  $F$ ,  $B$ ,  $w$ ,  $y_k$ ,  $h_k$ ,  $v_k$ ,  $H_k$  já foram definidas anteriormente, e  $\bar{x}$  é a estimativa mais atual disponível.

Para o sistema linearizado contínuo, a observabilidade pode ser testada pela matriz de informação local (no instante  $k$ )  $I_k$ :

$$I_k = [H^T, F^T H^T, \dots, (F^T)^{n-1} H^T] \quad (5.16)$$

onde  $F$  e  $H$  são matrizes resultantes da linearização de  $f$  e  $h$  em torno da mesma referência. Em determinação de órbita, a modelagem dinâmica pode ser complexa e levar em conta os efeitos perturbadores, porém, durante o processo de linearização e discretização a ser utilizado na filtragem, usa-se normalmente um modelo simplificado para cálculo da matriz de transição (veja Capítulo 6). Em seguida analisar-se-á um caso simplificado de órbita para ilustração da observabilidade.

Seja um modelo simplificado de dinâmica de órbita e observações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \\ \dot{v} &= -\mu/r^2 \end{aligned} \quad , \quad y = H x = [ 1 \quad 0 ] \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

onde  $r$  e  $v$  são escalares. Nota-se que a observação consiste simplesmente em uma medida direta da posição  $r$ . Então:

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} , \quad \alpha = \frac{\partial \dot{v}}{\partial r} = \frac{2\mu}{r^3} \quad (5.18)$$

A matriz de observabilidade a cada passo vale:

$$I = [H^T, F^T H^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

e portanto tem "rank"  $2=n$ , e pode-se afirmar que o sistema é localmente completamente observável. Como em qualquer intervalo de discretização (instante  $k$ ) não existe dependência entre a matriz  $I$  e a derivada parcial  $\alpha$  (se por exemplo  $\alpha=0$ ), o sistema é observável em todos os intervalos, para o tipo de medida considerado. Com um pouco mais de manipulação algébrica pode-se compreender que no problema completo de determinação de órbita, com 6 componentes retangulares de estado, medidas de distância do tipo "range" produzem observabilidade local. Neste caso, dado uma medida do tipo:

$$y = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (5.20)$$

o vetor  $H$  se torna:

$$H = [ x/r \quad y/r \quad z/r \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] = [ \hat{r} \quad 0_3 ] \quad (5.21)$$

onde  $\hat{r}$  é o versor linha e  $0_3$  é o vetor linha nulo. Considerando-se acelerações perturbadoras que dependem

somente do vetor posição da espaçonave (acelerações do geopotencial, pressão de radiação, lunissolar, ou de marés), a matriz de observabilidade é do tipo:

$$I = \begin{bmatrix} \hat{r}^T & | & O_a^T & | & A\hat{r}^T & | & O_a^T & | & A^2\hat{r}^T & | & O_a^T \\ O_a^T & | & \hat{r}^T & | & O_a^T & | & A\hat{r}^T & | & O_a^T & | & A^2\hat{r}^T \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

onde A é uma matriz 3x3 simétrica dependente do vetor posição  $\vec{r} = (x,y,z)$ . Para uma modelagem simplificada da dinâmica, como por exemplo no problema dos dois corpos, cada elemento da matriz A pode ser calculado por:

$$A_{ij} = \frac{\mu}{r^5} [ 3x_i x_j - r^2 \delta_{ij} ], \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3 \quad (5.23)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, e  $x_1=x$ ,  $x_2=y$ ,  $x_3=z$ .  
Explicitamente:

$$A = \frac{\mu}{r^5} \begin{bmatrix} 3x^2 - r^2 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2 - r^2 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Várias conclusões podem ser extraídas. Todos os vetores coluna da matriz de observabilidade são linearmente independentes se  $A \neq I_{3,3}$  (identidade) e  $A \neq O_{3,3}$ . Se  $A = I_{3,3}$  somente 2 vetores coluna são linearmente independentes ("rank" 2). Analogamente, se  $A = O_{3,3}$  somente 2 vetores coluna são não nulos ("rank" 2). Ao se examinar a matriz A, nota-se que  $A = O_{3,3}$  se  $r \rightarrow \infty$ , e o caso  $A = I_{3,3}$  é impossível de acontecer. Portanto, se o grau de independência linear fosse mensurável dir-se-ia que quanto mais linearmente independentes forem os vetores coluna entre si, mais observável localmente é o sistema. Como a cada instante o vetor posição muda, conclui-se que a cada instante o sistema pode ser mais ou menos observável que os instantes anteriores, dependendo da geometria da órbita em

relação ao observador. Por exemplo, se a órbita for altamente excêntrica, conclui-se que o apogeu ( $r_{\max} = r + \omega$ ) é menos observável pois é o ponto da órbita de maior distância ao observador no centro da Terra. Cumpre notar que já existem propostas de quantificação de observabilidade e controlabilidade (e.g. Paige, 1981; Lourenção, 1988).

Este exemplo, apesar de ser somente ilustrativo pois não existe um observador tão privilegiado, postado no centro da Terra (centro do sistema de coordenadas), permite concluir que medidas de distância do satélite ao observador ("range") produzem observabilidade do sistema orbital. A única diferença desta simplificação ilustrativa em relação à medida de "range" é a translação da origem do observador para a superfície da Terra, no caso de estações de rastreamento terrestres. É fácil concluir que a diferença no cálculo da observabilidade será a introdução dessa translação, por meio das coordenadas das estações, no mesmo sistema de referência do estado. No caso de outros tipos de observação (e.g. "range-rate", azimute, elevação; vide Seção 6.4) pode-se provar a observabilidade de maneira semelhante, com bastante paciência para manipular as equações algébricas. Por ora, basta saber que o sistema é observável na prática, pois estas modelagens para a dinâmica do sistema e das observações vem sendo largamente utilizadas operacionalmente em determinação de órbita (e.g. Cappelari et al., 1976). A real dificuldade consiste em quantificar o grau de observabilidade do sistema, pois é sabido que as vezes a precisão melhora pouco pela filtragem das observações devido à particular geometria entre o observador, a órbita e o tipo de observação coletada.

A melhor maneira de se verificar observabilidade ou o "rank" da matriz de observabilidade  $I$

é através da SVD. Se o menor valor singular da matriz  $I$ ,  $\sigma_n \cong 0$ , a matriz  $I$  pode ser "pensada" como sendo debilmente de "rank"  $n$  pois  $\sigma_n$  pode ser igual ao zero numérico quando a SVD é obtida através de computador digital. Logo, se é levado a pensar que a matriz tende a ser de "rank"  $n-1$  e portanto não seja completamente observável, ou então que seja "fracamente" observável. Em algoritmos numéricos implementados em computador, o "rank" de matrizes pode ser obtido através de comparação com o número  $\epsilon$  de máquina, número que somado a 1 resulta 1, e quantifica grosseiramente o número de dígitos significativos do computador:

$$\text{se } \sigma_i < \epsilon \Rightarrow \sigma_i = 0 \quad ; \quad i=n, \dots, 1$$

até que  $\sigma_r > \epsilon$  com  $1 \leq r \leq n$ , onde então se conclui que a matriz é de "rank"  $r$ . Quando o desempenho do filtro não corresponde ao esperado, estas são algumas idéias que poderiam ser utilizadas para verificar a observabilidade ponto a ponto. No entanto, usualmente assegura-se maior observabilidade pela redundância de informações, como por exemplo coletar outros tipos de medida, colocar duas ou mais estações de rastreamento coletando medidas da órbita simultaneamente (e.g. o sistema GPS-"Global Positioning System"), ou então coletar medidas durante longos arcos de órbita (e.g. 1 dia).

## CAPÍTULO 8

### MODELAGEM DA DINÂMICA DE ÓRBITA

No problema de determinação de órbita de satélites artificiais separam-se nitidamente dois aspectos: a parte determinística que abrange a modelagem dinâmica da órbita e a modelagem das observações, e a parte estocástica que abrange a aplicação da teoria de estimação. Para se obter uma boa eficiência, deve-se modelar o problema da forma mais adequada possível, que atenda os requisitos impostos à sua resolução. Nem sempre a mais sofisticada modelagem dinâmica é a mais conveniente, pois comumente requisitos de processamento em tempo real ou quase real estão presentes. Muitas vezes o modelo pode ser simplesmente simplificado, reduzido ou descentralizado sem prejudicar o desempenho do procedimento. No caso específico de determinação de órbita, uma simplificação comum é a adoção do modelo que representa a maior parcela de magnitude das forças atuantes no sistema: o movimento kepleriano. Deve-se ressaltar que modelos simplificados, embora satisfaçam aos requisitos de processamento em tempo real, podem não ser suficientemente precisos se existirem integrações orbitais por longos períodos. Normalmente os erros introduzidos pelo uso de um modelo simplificado são compensados pela utilização de maior quantidade de observações a serem processadas pelo filtro estimador. Por outro lado, pode-se evitar o aparecimento de divergência das estimativas por meio de técnicas incorporadas ao algoritmo de estimação. No que se segue, descrever-se-á sucintamente as modelagens existentes e possíveis em determinação de órbita.

## 6.1 - DINÂMICA DOS DOIS CORPOS

Caso não houvesse perturbações de quaisquer natureza, a órbita de um satélite artificial terrestre poderia ser modelada como um movimento kepleriano puro, onde somente a força central gravitacional age sobre a espaçonave. Esta é a força de maior magnitude e é da ordem de 1000 vezes maior que quaisquer outras forças perturbadoras atuantes. Neste caso ideal, as equações do movimento são integráveis analiticamente, não havendo assim necessidade de integração numérica. As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que regem este movimento são descritas por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \vec{r} / r^3 \quad (6.1)$$

onde  $\mu$  é a constante geogravitacional,  $\vec{r}$  é o vetor posição do satélite em coordenadas geocêntricas inerciais, e  $r$  é o módulo do vetor posição. Um método comum para se obter a solução analítica diretamente em coordenadas cartesianas é via as funções  $f$  e  $g$  (Goodyear, 1965; Escobal, 1965). O algoritmo computacional válido para órbitas elípticas pode ser implementado como em Kuga (1986), com baixa sobrecarga computacional.

## 6.2 - PERTURBAÇÕES AGENTES

Excluída a força central principal (movimento kepleriano), existem diversas fontes de perturbação sobre a órbita do satélite, tanto de origem conservativa (gravitacionais), como dissipativa (não-gravitacionais). Entre os diversos tipos de perturbações podem-se citar:

- geopotencial,
- arrasto atmosférico,
- pressão de radiação solar direta e indireta,

- atração lunissolar, e
- atração de marés.

As perturbações devidas ao geopotencial se devem basicamente à assimetria de distribuição de massa da Terra. Essa assimetria é modelada por coeficientes de harmônicos esféricos, que são normalmente obtidos através de redução de medidas de satélites, como por exemplo o modelo GEM 10 (Lerch et al., 1979). Essa modelagem causa um alto custo computacional quanto mais complexo e completo for o conjunto de coeficientes harmônicos. O modelo GEM 10, por exemplo, tem cerca de 450 coeficientes. Modelagens para cálculo do efeito do geopotencial podem ser encontradas em Cappelari et al. (1976) e Kuga et al. (1983).

O arrasto (fricção) atmosférico introduz uma perturbação em direção contrária à velocidade do satélite, tendendo a freá-lo no sentido de circularizar e diminuir a altitude da órbita. Um dos problemas para modelá-lo é o cálculo da densidade da atmosfera. Para uma boa precisão necessitam-se de modelos complexos, por vezes empíricos, que causam também um alto custo em computador. Exemplos desses modelos estão nos trabalhos de Jacchia (1971, 1977).

A pressão de radiação, assim denominada impropriamente, traduz o efeito de transferência de momento de fótons. Esses fótons quando vindos diretos do Sol produzem a perturbação de pressão de radiação direta e, portanto, somente agem quando o satélite está iluminado. Quando os fótons provêm de reflexão a partir da superfície da Terra têm-se a perturbação de pressão de radiação indireta, também denominada albedo. A magnitude do albedo pode chegar a 20% da magnitude da perturbação devida à pressão de radiação direta. A área projetada do satélite em relação ao Sol e em relação à Terra é um fator importante

na magnitude desta perturbação, bem como o coeficiente de refletividade da superfície do satélite.

Os efeitos das atrações gravitacionais do Sol e da Lua são normalmente formulados a partir do problema reduzido dos 3 corpos (Kovalevski, 1967). A equação diferencial é simples porém a obtenção das efemérides do Sol e da Lua é a parte mais complexa. Soluções analíticas para as efemérides necessitam ter sua série truncada em uma ordem conveniente para se obter razoável precisão (Van Flandern and Pulkkinen, 1979). Esta é a alternativa normalmente utilizada. Outro meio seria via interpolações de efemérides já tabeladas em arquivos de dados como as existentes no JPL (Jet Propulsion Laboratory dos EUA). O maior obstáculo, porém, é a necessidade de manutenção e atualização frequente desses arquivos, na dependência de outra agência espacial, no caso o JPL.

Os efeitos de marés, embora em menor grau, também afetam a órbita de satélites. O Sol e a Lua, por meio de efeito gravitacional tendem a elevar o nível do mar, de modo que a Terra se deforma, formando um bojo (protuberância). Esta deformação, a exemplo do geopotencial, produz um potencial perturbador cuja série é modelada por coeficientes chamados números de Love.

Diversos tratamentos dessas perturbações podem ser encontradas de maneira bastante espalhada pela literatura, onde modelagens específicas para cada tipo de perturbação são abordadas. Em Cappelari et al. (1976) e Spier (1971) podem ser encontradas compilações bastante completas. Vários programas de computador para gerarem numericamente a órbita têm sido propostos. Como exemplo pode-se citar os trabalhos de Kuga e Silva (1984) e Negreiros de Paiva (1980a).

Modelos complexos normalmente são utilizados para propagação de órbitas por longos períodos, de modo a permitir uma previsão acurada de eventos futuros, previsão de passagens por estações de rastreamento, cálculo de tempo de vida de satélites, simulações numéricas de missões espaciais, etc. Em procedimentos de estimação via filtro de Kalman os modelos utilizados obedecem a um compromisso de complexidade em função de requisitos, para cada caso particular, impostos ao tempo de processamento, memória utilizada, e capacidade de processamento (operações de ponto flutuante). Estes requisitos, em última análise são os fatores decisivos para a escolha adequada do modelo dinâmico a ser utilizado.

### 6.3 - MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADO

O cálculo da matriz de transição de estado é uma das etapas relevantes em procedimentos de estimação de estado. Normalmente esta é uma das tarefas que expende o maior tempo de processamento em computador digital, em procedimentos de determinação de órbita. A matriz de transição é a ferramenta que permite a propagação de erros e de covariâncias entre instantes de amostragem. Para problemas lineares discretos, ela permite também a própria propagação de estado. Formalmente pode-se defini-la como se segue:

Seja uma EDO linear na forma:

$$\dot{x}(t) = F(t) x(t) + B(t) w(t) \quad (6.2)$$

onde  $x$  é o vetor de estado de dimensão  $n$ ,  $F$  é uma matriz  $n \times n$ , e  $B(t)w(t)$  é o termo forçante compatível dimensionalmente. Considerando a equação homogênea correspondente:

$$\dot{x}(t) = F(t) x(t),$$

se  $F(t)$  é contínua para todo  $t$ , a equação homogênea sempre tem solução, que pode ser escrita como:

$$x(t) = \phi(t, t_0) x(t_0) \quad \text{para todo } t.$$

A matriz  $\phi$  é denominada matriz de transição (ou matriz fundamental), e é a solução da ED matricial:

$$\dot{\phi}(t, t_0) = F(t) \phi(t, t_0) \quad \text{para todo } t,$$

$$\phi(t_0, t_0) = I,$$

onde  $I$  é a matriz identidade (veja Lee e Markus 1967, por exemplo). As seguintes propriedades são válidas:

$$1) \phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1) \phi(t_1, t_0) \quad \text{para todo } t_2, t_1, t_0;$$

$$2) \phi(t, t_0) \text{ é não singular para todo } t, t_0;$$

$$3) \phi^{-1}(t, t_0) = \phi(t_0, t) \quad \text{para todo } t, t_0;$$

$$4) \dot{\phi}^T(t_0, t) = -F(t) \phi^T(t_0, t) \quad \text{para todo } t, t_0.$$

A solução geral da Equação 6.2 é então dada por:

$$x(t) = \phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) w(\tau) d\tau.$$

Para sistemas não-lineares na forma:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + B(t) w(t) \tag{6.3}$$

onde  $f$  é uma função vetorial de dimensão  $n$ , não-linear em  $x$ , a linearização produz:

$$\dot{\delta x}(t) = F(t, \bar{x}) \delta x(t) + B(t) w(t)$$

onde  $F$  é a matriz de derivadas parciais:

$$F(t, \bar{x}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$$

Analogamente ao caso linear, a matriz de transição  $\phi$  é calculada através de:

$$\dot{\phi}(t, t_0) = F(t, \bar{x}) \phi(t, t_0) \quad \text{para todo } t, t_0,$$

$$\phi(t_0, t_0) = I,$$

onde  $F$  é agora dependente do tempo e da trajetória de referência  $\bar{x}$  sobre a qual foi linearizada. Como se vê, sua avaliação por integração numérica implica na integração de  $n \times n$  EDOs em adição às do próprio estado.

Para o movimento kepleriano, existe solução analítica já largamente difundida (Goodyear, 1965; Sconzo, 1963) e otimizada para órbitas elípticas (Kuga, 1986). Para o movimento perturbado deve-se integrar numericamente as equações variacionais incluindo as perturbações a serem consideradas no modelo de propagação de órbita (Seção 6.1.2). Existem alguns estudos interessantes que analisam o fato da modelagem das equações variacionais para a matriz de transição não conterem as mesmas perturbações agentes na modelagem da propagação orbital. O impacto dessa inconsistência foi analisado em Rice (1967), e May (1979). Aparentemente, incluir todas as perturbações na propagação orbital ou incluir somente a influência do achatamento terrestre (coeficiente zonal  $J_2$ ) produz resultados satisfatórios. Porém, o mesmo não acontece ao se levar em conta somente o movimento kepleriano para computar o matrizante (Rice, 1967; May, 1979). Apesar disto, o uso

desta última simplificação parece ser uma prática bastante comum e que simplifica demasiado a propagação, necessitando ainda extensivos estudos para se chegar a algo realmente conclusivo. Em filtros com características de robustez em prejuízo de tempo de processamento, como nos métodos de mínimos quadrados, esta simplificação prática é usual e não produz maiores problemas. Porém, em casos de filtros recursivos sequenciais, nos quais há uma frequência alta de amostragem de medidas, o filtro rapidamente tende a convergir seguindo então o modelo dinâmico, devido à não ponderação das informações das medidas que se seguem. Se o modelo dinâmico for pobre, o filtro passará então a divergir. Neste caso, algoritmos adaptativos e robustos devem ser empregados em contrapartida à modelagem pobre. Portanto, se o modelo de forças for complexo, incluindo perturbações do geopotencial e outros, pelo menos o efeito do achatamento  $J_2$  deve ser incorporado ao modelo da matriz de transição, sempre supondo que as derivadas parciais são avaliadas em torno da trajetória gerada por esse modelo de forças.

Um outro método para se avaliar matrizes com perturbações é o de Peano-Baker (Ditto, 1969). Este método usa a existência de solução analítica para o matrizante do problema dos dois corpos para, por meio de álgebra de matrizes, integrar a perturbação adicional a ser levada em conta. Segundo alguns testes computacionais efetuados, o tempo de processamento em relação ao método variacional normal aumenta, apesar de um ganho em precisão (Walter, 1975). O método variacional normal com um bom integrador, por exemplo o Runge-Kutta 7(8) com coeficientes de Fehlberg (1968), deve produzir resultados satisfatórios sem grande degradação de precisão. De qualquer forma, no caso de haver redundância de informações com grande quantidade de medidas, pode-se utilizar o modelo simplificado dos dois corpos, desde que cuidados (uso de técnicas de

ruído adaptativo por exemplo) sejam tomados para prevenir a divergência e robustecer o filtro. As equações variacionais levando em conta os coeficientes zonais do geopotencial podem ser encontradas por exemplo em Kuga (1986) ou Cappellari et al. (1976).

Por fim, a existência da inversa da matriz de transição é uma característica importante quando suavização de estado é necessária. Em modelos que levam em conta os efeitos do geopotencial, força de natureza conservativa, as equações diferenciais têm natureza canônica (Brouwer and Clemence, 1962) e a inversa da matriz de transição pode ser facilmente estabelecida. Seja a matriz de transição  $\phi$  particionada em submatrizes 3x3:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Então:

$$\phi^{-1} = \begin{bmatrix} \phi_{22}^T & -\phi_{12}^T \\ -\phi_{21}^T & \phi_{11}^T \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Portanto, se as equações variacionais que produzem a matriz de transição contiverem somente os efeitos do geopotencial, então sua inversa é obtida como acima, sem necessidade de cálculo adicional.

#### 6.4 - MODELAGEM DAS OBSERVAÇÕES

As observações normalmente utilizadas em problemas de determinação de trajetória são de dois tipos: métricas e angulares. Atualmente utilizam-se na maioria dos casos as observações métricas, já que possuem maior precisão que as angulares em termos de arcos de órbita. As observações métricas podem ser de distância ("range"), ou

variação temporal da distância ("range-rate"). Basicamente, um sinal eletromagnético é transmitido ao satélite que o retransmite de volta à estação, onde é medido o tempo de percurso ("range") ou o desvio doppler de frequência do sinal devido à velocidade relativa estação-satélite ("range-rate"). Estas medidas são convertidas nas observações da trajetória (ou órbita): distância estação-satélite ("range"), ou no caso do efeito doppler, na velocidade radial do satélite ("range-rate"). Dependendo da frequência da onda portadora, obtém-se maiores precisões nas observações. Valores típicos de precisão para as medidas de "range" e "range-rate" são dados abaixo:

TABELA 6.1

PRECISÃO DAS MEDIDAS DE "RANGE" E "RANGE-RATE"

Frequência	erro em "range"	erro em "range-rate"
VHF	500 m	30 cm/s
S	100 m	10 cm/s
USB	15 m	5 cm/s

As medidas angulares, por dependerem da precisão mecânica dos eixos cardãs ou azimutais da antena, propiciam menor precisão em arco de órbita. Precisões típicas para as observações angulares de azimute e elevação (ou equivalentes) estão listadas abaixo, em segundos de grau ("):

TABELA 6.2

PRECISÃO DAS MEDIDAS DE AZIMUTE E ELEVACÃO

Frequência	erro em azimute	erro em elevação
VHF	3600"	3600"
C	54"	54"
USB	720"	720"

As observações podem ser calculadas em função do vetor de estado orbital em coordenadas retangulares da seguinte forma:

range

$$\rho = [(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]^{1/2} \quad (6.6)$$

range-rate

$$\dot{\rho} = [(x-X)(\dot{x}-\dot{X}) + (y-Y)(\dot{y}-\dot{Y}) + (z-Z)(\dot{z}-\dot{Z})] / \rho \quad (6.7)$$

onde  $\vec{r}=(x,y,z)$ ,  $\vec{R}=(X,Y,Z)$  são coordenadas inerciais de posição do satélite e da estação que faz a observação; e  $\vec{v}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ ,  $\vec{V}=(\dot{X},\dot{Y},\dot{Z})$  são as coordenadas de velocidade do satélite e da estação, calculadas no mesmo sistema de referência.

azimute

$$Az = \tan^{-1}(-y_T/x_T) \quad (6.8)$$

elevação

$$El = \sin^{-1}(z_T/r_T) \quad (6.9)$$

onde  $\vec{r}_T = (x_T, y_T, z_T)$  são as coordenadas de posição do satélite no sistema topocêntrico horizontal. Essas observações são feitas somente por estações de rastreamento localizadas na superfície terrestre. A transformação para o sistema topocêntrico é feita através de:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\psi c\theta & s\psi s\theta & -c\psi \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ c\psi c\theta & c\psi s\theta & s\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - X \\ y - Y \\ z - Z \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} c = \cos \\ s = \text{seno} \end{matrix} \quad (6.10)$$

onde  $\theta$  é a longitude sideral e  $\psi$  é a latitude geodésica da estação. As derivadas parciais dessas observações com relação às coordenadas do satélite também são necessárias no processo de estimação de órbita. Elas podem ser computadas por:

range

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} = \frac{\vec{r} - \vec{R}}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \vec{v}} = \vec{0} \quad (6.11)$$

range-rate

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \vec{r}} = \left[ \vec{v} - \dot{\vec{v}} - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} \right] / \rho, \quad \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}} \quad (6.12)$$

azimute

$$\frac{\partial Az}{\partial x_T} = \frac{y_T}{x_T^2 + y_T^2}, \quad \frac{\partial Az}{\partial y_T} = \frac{-x_T}{x_T^2 + y_T^2}, \quad \frac{\partial Az}{\partial z_T} = 0 \quad (6.13a)$$

$$\frac{\partial Az}{\partial \vec{v}_T} = \vec{0} \quad (6.13b)$$

elevação

$$\frac{\partial E l}{\partial x_T} = \frac{-x_T z_T}{r_T^2 (x_T^2 + y_T^2)^{1/2}}, \quad (6.14a)$$

$$\frac{\partial E l}{\partial y_T} = \frac{y_T z_T}{r_T^2 (x_T^2 + y_T^2)^{1/2}}, \quad (6.14b)$$

$$\frac{\partial E l}{\partial z_T} = \frac{(x_T^2 + y_T^2)^{1/2}}{r_T^2}, \quad (6.14c)$$

$$\frac{\partial E l}{\partial \vec{v}_T} = \vec{0} \quad (6.14d)$$

onde:

$$\frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \vec{r}} = R(\theta, \psi) = \begin{bmatrix} s\psi c\theta & s\psi s\theta & -c\psi \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ c\psi c\theta & c\psi s\theta & s\psi \end{bmatrix}, \quad c = \cos, \quad s = \sin$$

Formalmente, nos problemas de estimação estocástica de estado, as observações podem ser modeladas por:

$$y = h(x) + v \quad (6.15)$$

onde  $y$  é a observação,  $h(x)$  é a função em geral não linear no estado  $x$  que modela a observação, e  $v$  representa os erros cometidos durante o processo de observação. Os erros típicos podem ser obtidos das Tabelas de erros 6.1 e 6.2, e as funções  $h(x)$  foram explicitadas para as observações de "range", "range-rate", azimuth e elevação (Equações 6.6 a 6.10), bem como suas derivadas parciais (Equações 6.11 a 6.14). As tendências ("biases") são supostas terem sido removidas durante o pré-processamento das observações.

de modo que  $v$  representa os erros de caráter puramente aleatório. As derivadas parciais  $\partial h(x)/\partial x$  conforme as Equações 6.11 a 6.14 são necessárias no processo de linearização, no filtro estendido de Kalman.

### 6.5 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO

Existem diferentes maneiras de se formular as Equações Diferenciais Ordinárias -EDOs- do movimento orbital. A mais usual é a formulação newtoniana expressa por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \vec{r} / r^3 + \vec{\beta} \quad (6.16)$$

onde  $\vec{\beta}$  representa o vetor das perturbações.

Outras formulações fazem transformações de coordenadas ou transformações paramétricas, com o objetivo de aumentar a precisão da integração numérica das EDOs (Kuga, 1987). Para uma integração numérica da dinâmica, estas formulações são comprovadamente mais eficientes e precisas (Gomes, 1989), porém, quando aplicadas ao problema específico de determinação de órbita, apresentam desvantagens como contrapartida, e.g. maior quantidade de EDOs, interpolação, recálculo de derivadas parciais, como se verá a seguir.

As transformações de Sundman e congêneres (por exemplo Nacozy, 1974; Baumgarte, 1972) transformam a variável independente de tempo físico  $t$  para um tempo fictício  $s$ , por meio da expressão:

$$dt = c r^l ds. \quad (6.17)$$

onde  $c$  é uma constante,  $r$  é a magnitude do vetor posição, e  $l$  é um inteiro. Em consequência, uma equação diferencial

referente à coordenada de tempo fictício é adicionada ao conjunto original de EDOs. A integração é feita na variável independente  $s$ , e espaçamentos constantes do passo de integração em tempo físico não são mantidos. Exigem-se portanto ferramentas adicionais de interpolação tanto para o estado quanto para a matriz de transição.

A regularização transforma o espaço métrico tridimensional para o espaço paramétrico 4-dimensional  $\vec{u}$ , por meio da transformação KS de Kustannheim-Stiefel (Stiefel and Scheifele, 1971). Excelente precisão numérica é obtida às custas do aumento do número de EDOs. No problema de determinação de órbita, torna-se necessário o recálculo das derivadas parciais das observações, expressas agora em termos das coordenadas  $\vec{u}$  do novo espaço paramétrico. A necessidade de interpolação também persiste, pois a variável independente usualmente é o mesmo tempo fictício  $s$  da transformação de Sundman. Negreiros de Paiva (1980b) resolve o problema de determinação de órbita via transformação KS, usando o modelo dinâmico kepleriano (2 corpos).

As transformações do tipo hodógrafo orbital (Altman, 1972) também exibem excelentes propriedades numéricas, porém o mapeamento para o espaço físico e vice-versa é bastante complexo. Exige-se também a avaliação das parciais no espaço do hodógrafo. Não se tem conhecimento, até o momento, de alguma aplicação deste tipo de coordenadas em determinação de órbita (Raol and Sinha, 1985).

Para o presente trabalho, utilizar-se-á a formulação newtoniana clássica conforme a Equação 6.16, pois não é escopo do trabalho a investigação das diferentes formulações existentes, além de ser difícil a comparação de resultados em outros espaços paramétricos.



## CAPÍTULO 7

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Este capítulo descreve aspectos de implementação dos algoritmos de estimação e suavização UD.

#### 7.1 - FORMULAÇÃO NORMAL DO PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA

O problema de determinação de órbita é essencialmente não-linear, pois o processo dinâmico, ou seja, o movimento orbital, é descrito por EDOs da forma (Capítulo 6):

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad (7.1)$$

$$\dot{\vec{v}} = -\mu \vec{r}/r^3 + \vec{\beta} \quad (7.2)$$

em relação ao sistema inercial, onde  $\vec{r}$  é o vetor contendo as componentes de posição,  $\vec{v}$  é o vetor contendo as componentes de velocidade, e  $\vec{\beta}$  é o vetor contendo a parcela das perturbações agentes na órbita do satélite. No equacionamento do estimador de estado define-se o estado por:

$$x \triangleq \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

e as Equações 7.1 e 7.2 podem ser particionadas de forma que:

$$\dot{x} = f_m(x,t) + f_{nm}(x,t) \quad (7.4)$$

onde  $f_m$  é a função vetorial que expressa a modelagem adotada no estimador, e  $f_{nm}$  é a função vetorial que

expressa a parcela não modelada. Se, por exemplo, o modelo simplificado dos dois corpos é adotado, então  $f_m$  contém a 1ª parcela do lado direito da Equação 7.2, e  $f_{nm}$  contém a parcela correspondente às perturbações  $\tilde{P}$ .

Para a aplicação do filtro de Kalman ao sistema, este é tratado como um processo estocástico através da consideração que a parcela não modelada pode ser tratada como um ruído branco gaussiano:

$$\dot{x} = f_m(x, t) + B(t) w(t) \quad (7.5)$$

com

$$x^T = ( \vec{r}^T, \vec{v}^T ) \quad (7.6)$$

$$f_m^T = ( \vec{v}^T, -\mu \vec{r}^T / r^3 ) \quad (7.7)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3 \times 3}{r^3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t) w^T(\tau)] = Q(t) \delta(t-\tau) \quad (7.9)$$

onde  $\delta(t-\tau)$  é o delta de Dirac, e o vetor de dimensão 3 do ruído branco gaussiano  $w(t)$  é tal que deve cobrir os efeitos não modelados. Um estimador assim formulado necessita ser robusto para não apresentar problemas de divergência devido à modelagem simplificada. Daí a motivação para se utilizar procedimentos adaptativos similares ao exposto no Capítulo 4.

Para efeito de propagação da matriz de covariância do erro no estado  $P$ , é necessário o cálculo da matriz de transição  $\phi$ , devido ao processo de discretização. Recapitulando o filtro estendido de Kalman:

$$\bar{P}(k+1) = \phi(k)\hat{P}(k)\phi^T(k) + G(k)Q(k)G^T(k) ,$$

a matriz de transição  $\phi$  é obtida integrando-se:

$$\dot{\phi} = F \phi , \quad \phi_0 = I , \quad F = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \quad (7.10)$$

onde  $\bar{x}$  é a trajetória de referência. Para o problema dos dois corpos, a matriz F foi explicitada na Seção 5.3.

As observações, discretas no tempo, também possuem modelos não lineares:

$$y(k) = h[x(k)] + v(k) \quad (7.11)$$

$$E[v(k)] = 0 , \quad E[v(k)v^T(j)] = R(k) \delta_{kj} \quad (7.12)$$

onde  $y(k)$  é o vetor de m-observações, h é uma função não-linear de dimensão m que relaciona o estado às observações (Equações 6.6 a 6.9),  $v(k)$  é a sequência branca gaussiana de dimensão m que modela os erros cometidos durante o processo de medição remanescentes após o processo de calibração das medidas, cujas estatísticas estão descritas pelas Expressões 7.12, e  $\delta_{kj}$  é o delta de Kronecker. A função h foi explicitada para os diversos tipos de observação na Seção 6.4, bem como suas derivadas parciais (Equações 6.11 a 6.14).

## 7.2 - IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO ADAPTATIVO UD EM DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA

Após inúmeras experiências do autor, chegou-se a uma implementação algorítmica adequada para o problema de determinação de órbita. Esta maneira permite bastante flexibilidade para alterações, além de ser suficientemente estruturada para evitar erros de programação. A seguinte sequência de cálculos é proposta

para se implementar o filtro estendido UD em conjunto com a técnica de ruído adaptativo na determinação de órbita, para um intervalo típico de amostragem de  $k-1$  a  $k$ :

1 - Integrar o estado e a matriz de transição do instante  $k-1$  até o instante  $k$ :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= f_m(\bar{x}, t), & k-1 < t \leq k \\ \dot{\phi} &= \left[ \frac{\partial f_m}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} \cdot \phi \end{aligned}$$

com condições iniciais:

$$\bar{x}(k-1) = \hat{x}(k-1) \quad \text{e} \quad \phi_0(k-1) = I$$

2 - Propagar a covariância sem inclusão do ruído  $Q$ , ou seja, achar os fatores  $\bar{U}$ ,  $\bar{D}$  correspondentes a  $\bar{P}(k) = \phi(k)\hat{P}(k-1)\phi^T(k)$  através do algoritmo UD de Gram-Schmidt (Seção 2.2.4).

3 - Calcular a matriz  $G = (g_1, g_2, \dots, g_r)$  conforme a Seção 4.1.5:

$$G = [I + \phi(k)] B \Delta t / 2$$

ou conforme a Seção 4.1.6 se  $\Delta t$  é grande o suficiente para destruir o tipo de aproximação acima:

$$G = \sigma \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ -\frac{3 \times 3}{\Delta t} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

4 - Para  $i=1, \dots, m$  observações, realizar os passos 5, 6 e 7.

5 - Calcular a observação nominal  $\hat{y}_i$ , a matriz  $H_i$  de derivadas parciais das observações, e o resíduo  $r_i$  correspondente:

$$\hat{y}_i = h_i(\bar{x}_k) \quad , \quad H_i = \left[ \frac{\partial h_i}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}(k)} \quad , \quad r_i = y_i - \hat{y}_i$$

conforme descrito na Seção 6.4, Equações 6.6 a 6.9 e 6.11 a 6.14, dependendo do tipo de observação.

6 - Preparar variáveis para o procedimento adaptativo (Equações 4.47a a 4.47f):

$$\beta_i := H_i \bar{U} \bar{D} \bar{U}^T H_i^T$$

$$\text{if } |r_i| > 3\sigma_i \text{ então } r_i := 3\sigma_i$$

$$z_i := r_i^2 + R_i - \beta_i$$

$$E[\eta_i^2] := 4r_i^2 R_i + 2R_i^2$$

$$M_i := [(H_i g_1)^2 : (H_i g_2)^2 : \dots : (H_i g_r)^2]$$

$$\alpha_i := M_i q \text{ (não necessário para processamento em lote)}$$

7 - Estimar o ruído  $q$  devido às pseudo-medidas  $z_i$ :

sequencialmente através do algoritmo de atualização UD (Relações 2.51) aplicado à  $U_q$  e  $D_q$ , ou

em lotes. Seja  $m_T$  = total de medidas e  $p+1$  a quantidade de instantes discretos. Então:

$$\text{-calcular e armazenar } W_i^{1/2} z_i \text{ e } W_i^{1/2} M_i,$$

$$\text{-se } m_T < (p+1) \text{ m então } q(k) = q(k-1),$$

$$\text{-se } m_T \geq (p+1) \text{ m então:}$$

- . calcular  $S_o^{1/2} q(k-1)$ ,
- . aplicar o procedimento de ortogonalização de Householder (Equação 4.56),
- . estimar  $q(k)$

8 - Completar a propagação da covariância pelo algoritmo UD de rank 1 (Apêndice B):

$$\bar{U}\bar{D}\bar{U}^T := \bar{U}\bar{D}\bar{U}^T + GQG^T := \bar{U}\bar{D}\bar{U}^T + \sum_{i=1}^r q_i g_i g_i^T$$

lembrando que:

$$Q_i := \text{diag.} \begin{cases} \hat{q}_i & \text{se } \hat{q}_i \geq 0 \\ 0 & \text{se } \hat{q}_i < 0 \end{cases}, \quad i=1, \dots, r$$

9 - Para  $i=1, \dots, m$  medidas, realizar o passo 10.

10 - Atualizar o estado e a covariância através do algoritmo UD de atualização (Seção 2.2.4)

11 - Se existirem mais medidas, recomeçar no passo 1.

O passo 1 propaga o estado e acha a matriz de transição. Lembrar que para o modelo dos dois corpos existe solução analítica tanto para o estado quanto para a matriz de transição (Goodyear, 1965; Sconzo, 1963; Kuga, 1986). Os passos 6 e 7 aplicam a técnica adaptativa e estimam o ruído  $Q$ . Os passos 2 a 8 implementam a fase de propagação do filtro UD. Os passos 9 e 10 implementam a fase de atualização do filtro UD, processando cada medida sequencialmente. No processamento em lote do ruído adaptativo, pode-se aguardar o acúmulo de medidas durante  $(p+1)$  instantes discretos e só então processá-los em lote. Nesse ínterim, o ruído permanece com valor constante igual ao do intervalo anterior. Uma única matriz pode ser

definida para armazenar  $W_i^{1/2} M_i$  e  $S_0^{1/2} q$  em espaços contíguos, ou através do comando Fortran "Equivalence" para compartilhar e economizar memória de armazenamento. O algoritmo acima, filtro adaptativo UD, foi implementado e os resultados de testes serão mostrados no Capítulo 8.

### 7.3 - IMPLEMENTAÇÃO DO SUAVIZADOR UD EM DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA

As equações do suavizador UD foram descritas na Seção 4.3. Em termos de aplicação à determinação de órbita, a implementação exige um custo adicional na fase de filtragem para se armazenar as variáveis de interesse para a suavização.

O passo 8 da fase de filtragem é implementada recursivamente para cada componente do ruído  $q_i$ ,  $i=1, \dots, r$ . A cada  $i$  são dados  $U_i$ ,  $D_i$ ,  $g_i$ ,  $q_i$ , onde  $g_i$  são os vetores coluna da matriz  $G$ . Neste caso, a seguinte implementação deve ser realizada no filtro UD, no passo 8 (ver Seção 7.2):

- 8a - Calcular  $L_i = U_i D_i$
- 8b - Achar  $g_i^*$  tal que  $L_i g_i^* = g_i$
- 8c - Achar  $v_i$  tal que  $U_i^T v_i = g_i^*$
- 8d - Calcular  $\lambda_i = q_i / (1 + q_i v_i^T g_i)$
- 8e - Armazenar  $\lambda_i$ ,  $v_i$
- 8f - Calcular  $U_i$  e  $D_i$  incorporando o ruído  $q_i$ , através do algoritmo UD de rank 1, tal que:

$$U_{i+1} D_{i+1} U_{i+1}^T = U_i D_i U_i^T + q_i g_i g_i^T$$

Além disso, deve-se armazenar  $\phi$  (matriz de transição),  $\bar{x}$  (estimativa propagada),  $\hat{x}$  (estimativa

atualizada), e  $g_i$  se esta não for constante. Os passos 8a, 8b, e 8c equivalem a calcular  $v_i$  de maneira econômica tal que  $P_i v_i = g_i$ .

A fase de suavização supõe que os parâmetros  $\lambda_i$  e  $v_i$  estejam armazenados. O arquivo que contém estes parâmetros deve ser lido no sentido para trás ("backward"). Os valores iniciais da estimativa e da covariância suavizada ( $\hat{x}(N/N)$  e  $\hat{P}(N/N)$ ) são os valores finais  $\hat{x}(N)$  e  $\hat{P}(N)$  do filtro UD:

$$\hat{x}(N/N) = \hat{x}(N) ,$$

$$\hat{U}(N/N)\hat{D}(N/N)\hat{U}^T(N/N) = \hat{U}(N)\hat{D}(N)\hat{U}^T(N) = \hat{P}(N) ,$$

onde  $N$  é o instante final do intervalo de filtragem e suavização. Então procede-se aos seguintes cálculos para o instante (passo)  $k$ :

1 - Para  $i=r, \dots, 1$ , passos 2 e 3.

2 - Calcular a estimativa suavizada  $\hat{x}_i^*$  por:

$$\delta_i = \lambda_i v_i^T [ \bar{x}(k+1) - x_{i+1}^* ]$$

$$\hat{x}_i^* = \hat{x}_{i+1}^* + g_i \delta_i$$

onde  $\bar{x}(k+1)$ ,  $\hat{x}(k)$ ,  $\lambda_i$ ,  $v_i$  são lidos a partir dos dados armazenados durante a filtragem.

3 - Calcular a covariância suavizada por:

a - Com  $\lambda_i v_i^T$ ,  $\lambda_i$  calcular  $K_i$ ,  $\alpha_i$  pelo algoritmo de atualização UD (Seção 2.2.4) tal que:

$$U_i D_i U_i^T = [I - K_i \lambda_i v_i^T] U_{i+1}^* D_{i+1}^* U_{i+1}^{*T}$$

onde  $\alpha_i$  é a variância (ver Seção 4.3.2) dada por:

$$\alpha_i = \lambda_i v_i^T U_{i+1}^* D_{i+1}^* U_{i+1}^{*T} v_i \lambda_i + \lambda_i$$

b - Montar o vetor  $g_i - K_i$ .

c - Calcular  $U_i^*$  e  $D_i^*$  que satisfazem:

$$U_i^* D_i^* U_i^{*T} = U_i D_i U_i^T + \alpha_i (g_i - K_i)(g_i - K_i)^T$$

através do algoritmo UD de "rank" 1 (Apêndice B1).

4 - Calcular a estimativa suavizada final  $\hat{x}(k/N)$ , na versão não-linear, através de:

$$\hat{x}(k/N) = \phi^{-1}(k) [ \hat{x}_1^* - \bar{x}(k+1) ] + \hat{x}(k)$$

onde  $\hat{x}(k)$  é a estimativa atualizada do filtro do instante  $k$ , e a matriz de transição  $\phi$  foi armazenada durante a fase de filtragem.

5 - Calcular a covariância suavizada final  $\hat{U}(k/N) \hat{D}(k/N) \hat{U}^T(k/N)$  ( $=\hat{P}(k/N)$ ) através do algoritmo UD de Gram-Schmidt tal que:

$$\hat{U}(k/N) \hat{D}(k/N) \hat{U}^T(k/N) = \phi^{-1} U_{11}^* D_{11}^* U_{11}^{*T} \phi^{-T}$$

6 - Inicializar as variáveis e ir ao passo 1 se houver mais dados:

$$x_{r+1}^* = \hat{x}(k/N) \quad , \quad U_{r+1}^* = \hat{U}(k/N) \quad , \quad D_{r+1}^* = \hat{D}(k/N)$$

Dado que a matriz de transição foi calculada e armazenada durante a fase de filtragem, o cálculo de sua inversa consiste simplesmente em trocar suas partições

convenientemente, conforme descrito na Seção 6.3, Equações 6.4 a 6.5. Esta implementação do suavizador UD proposta é inclusive mais econômica que a implementação convencional do suavizador RTS de Bierman, além de muito mais eficiente computacionalmente (cerca de  $1,5n^3+2,5n^2r$  contra  $1,5n^3r+1,5n^3$  "flops", conforme Tabelas 4.8 e 4.10). É interessante notar que se só a estimativa suavizada for desejada, os passos 3 e 5, correspondentes ao cálculo da covariância suavizada, podem ser omitidos. Se só uma análise de covariância for desejada, então os passos 2 e 4, correspondentes ao cálculo da estimativa suavizada podem ser omitidos. O algoritmo acima, suavizador UD foi implementado, e os resultados de testes serão descritos no Capítulo 8. A complexidade de programação do suavizador UD é apenas aparente, pois necessitam-se somente das mesmas rotinas UD utilizadas no filtro UD adaptativo.

## CAPÍTULO 8

### SIMULAÇÃO E TESTES DE DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA

Este capítulo apresenta os resultados de simulações digitais realizadas no computador VAX/VMS 780 do INPE (Instituto de Pesquisas Espaciais), cujo compilador Fortran 77 apresenta cerca de 8 dígitos decimais de precisão (7 algarismos significativos e 1 duvidoso) em precisão simples, e 16 dígitos decimais de precisão (15 algarismos significativos e 1 duvidoso) em precisão dupla. Os programas simuladores de órbita e observações, bem como os estimadores e suavizadores de estado foram programados em linguagem Fortran 77.

#### 8.1 - SENSIBILIDADE NUMÉRICA DOS ALGORITMOS DE FILTRAGEM

É sabido que o algoritmo do filtro convencional de Kalman apresenta problemas numéricos em sua implementação. Normalmente, as matrizes de covariância podem deixar de ser definidas positivas, com o surgimento de elementos negativos na diagonal, que passam a apresentar correlações com magnitude irrealisticamente grandes. Mesmo que nenhum destes sintomas esteja presente, uma análise de auto-valores pode revelar a presença de auto-valores negativos. Uma das maneiras de se evitar estes problemas numéricos é a utilização dos filtros de raiz quadrada, que diminuem os efeitos de imprecisão numérica através de extensão artificial da palavra do computador, por meio do uso das chamadas matrizes de raiz quadrada da covariância.

Não obstante, existem alguns pontos importantes na implementação dos algoritmos de filtragem que são normalmente objetos de confusão e controvérsia, devendo portanto ser esclarecidos. Uma análise numérica detalhada revela e esclarece alguns detalhes controversos:

- a estimativa do estado e o ganho de Kalman não são calculados com a mesma precisão da covariância, quando se usam filtros de raiz quadrada;

- a simples simetrização da matriz de covariância no filtro convencional de Kalman remove uma das maiores fontes de erros numéricos;

- a inicialização inadequada do filtro convencional por vezes faz com que a covariância calculada deixe de ser definida positiva, mesmo utilizando precisão estendida no computador (precisão dupla).

Os erros absolutos  $\Delta P$ ,  $\Delta K^*$  e  $\Delta x$  (na covariância, no pseudo-ganho de Kalman e na estimativa) devido a erros de truncamento num passo  $k$  a  $k+1$  do filtro de Kalman são dados por (Verhaegen and Van Dooren, 1986):

$$K^*(k) \triangleq \phi(k) K(k)$$

$$\Delta P \leq \epsilon \frac{\sigma_1^2}{\sigma_m^2} \|\bar{P}(k+1)\| \quad (8.1)$$

$$\Delta K^* \leq \epsilon \frac{\sigma_1^2}{\sigma_m^2} \|K^*(k)\| \quad (8.2)$$

$$\Delta x \leq \epsilon (\|F(k)\| \|\bar{x}(k)\| + \|K^*(k)\| \|y(k)\|) + \Delta K^* (\|H(k)\| \|\bar{x}(k)\| + \|y(k)\|) \quad (8.3)$$

onde  $K$  é o ganho de Kalman,  $x$  é o estado,  $P$  é a matriz de covariância,  $y$  é o vetor de observações,  $H$  é a matriz que relaciona as observações ao estado,  $\epsilon$  é o número epsilon do computador utilizado (número que adicionado a 1 fornece como resultado o valor 1), e  $m$  é o número de observações a serem processadas. Todas as normas são normas 2, e os  $\sigma_i$

são os  $i$ -ésimos valores singulares da matriz  $R^r(k)$  de covariância dos resíduos, com:

$$R^r(k) \triangleq R(k) + H(k) \bar{P}(k) H^T(k) \quad (8.4)$$

onde  $R$  é a matriz dos erros de observação, e a matriz  $F(k)$  é definida por:

$$F(k) \triangleq \phi(k) - K^*(k) H(k) \quad (8.5)$$

A análise das expressões dos erros mostram que se a covariância  $P$  é calculada com precisão (via e.g. filtros de raiz quadrada), essa precisão não necessariamente é repassada para o ganho e as estimativas, embora tal comportamento possa ser observado frequentemente. Além disso, o processamento sequencial das medidas com a diagonalização (branqueamento) diminui os erros, pois  $\sigma_1 \cong \sigma_m$  ( $m$  é o número de medidas). Supondo que o filtro convergiu (está em regime), então as seguintes simplificações podem ser consideradas:

$$\|K(k)\| \rightarrow 0, \Delta K^* \rightarrow 0, F(k) \rightarrow \phi(k)$$

Somente para efeito de ilustração, supõe-se  $\phi(k) = I$  de forma que:

$$\Delta x \leq \epsilon \|\bar{x}(k)\|$$

como era de se esperar. Considere o caso de órbita, com  $x$  contendo as coordenadas de posição ( $\|x\| \geq 6600\text{km}$ ), e um computador com  $\epsilon \cong 10^{-8}$  (no compilador Fortran em precisão simples, uma palavra com 32 bits fornece 7 dígitos decimais significativos e o último é duvidoso). Então:

$$\Delta x \leq 0.07 \text{ m para } \|x\| = 7000 \text{ km}$$

Nota-se, portanto, que a precisão já está prejudicada pelo erro de truncamento no passo correspondente. Somando-se a isto o erro global acumulado, é de se esperar que a estimativa do estado não melhore além de um certo limite, apesar da covariância ter sido calculada com precisão através de filtros de raiz quadrada. Deste fato decorre a razão para deterioração de precisão nas estimativas quando se utiliza computadores com palavra curta. Notar, por exemplo, no artigo de Bierman e Thornton (1977) a utilização de precisão dupla para cálculo das estimativas, apesar da covariância ser calculada em precisão simples via filtros de raiz quadrada.

Seja  $\delta P(k)$  o erro acumulado no cálculo da matriz de covariância até o passo  $k$ . Então, prova-se que a propagação de erros para a covariância obedece a (Verhaegen and Van Dooren, 1986):

$$\begin{aligned} \delta P(k+1) = & F(k)\delta P(k)F^T(k) + \phi(k)[\delta P(k) - \delta P^T(k)]\phi^T(k) \\ & - \phi(k)[\delta P(k) - \delta P^T(k)]F^T(k) + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (8.6)$$

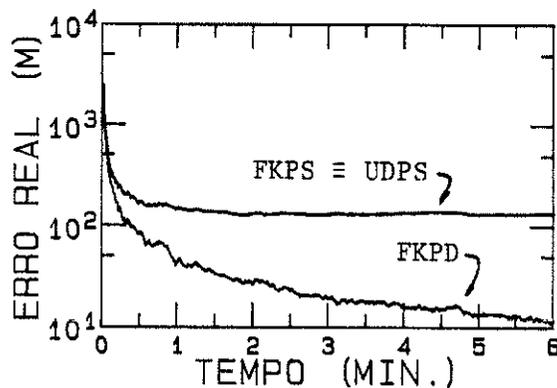
É fácil verificar que se  $P$  for simetrizado, as duas últimas parcelas desaparecem, e a maior fonte de erro (não simetria de  $P$ ) é removida.

O problema da inicialização é de análise complexa, mas pode ser verificado experimentalmente. Como Kaminski (1971) sugere, este problema frequentemente acontece quando a covariância inicial é grande e o erro das observações é pequeno em relação à covariância. As observações sendo quase perfeitas (sem erro) fazem com que a covariância diminua nos primeiros passos, produzindo erros numéricos. No artigo de Bierman e Thornton (1977), este problema é solucionado da seguinte maneira: as covariâncias iniciais do filtro convencional são tomadas

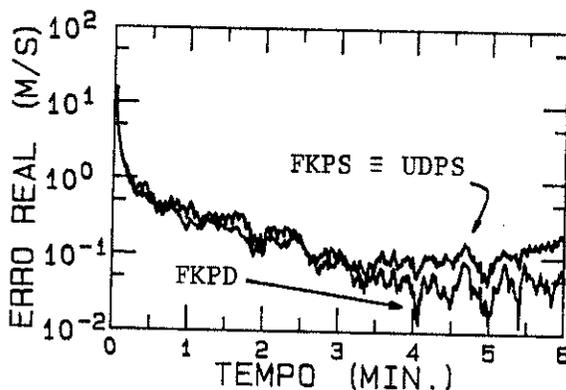
artificialmente menores que os erros iniciais, e o ruído das medidas é arbitrariamente aumentado. Cada vez que termos negativos surgem nas diagonais da covariância, esta é tornada positiva. No caso testado no artigo, dependendo dos valores da covariância inicial, mesmo o filtro convencional em precisão dupla forneceu variâncias negativas.

Foram realizados alguns testes numéricos que corroboram os resultados de experimentos e as conclusões de vários artigos (e.g. o já citado artigo de Bierman and Thornton, 1977). Para o caso de determinação de órbita de satélites terrestres, realizou-se um experimento simples com a órbita do satélite francês SPOT (órbita polar, missão de sensoriamento remoto), com o modelo de simulação igual ao modelo do estimador (movimento kepleriano puro), com observações de "range" e "range-rate" coletadas simultaneamente por 3 estações de rastreamento. As observações foram contaminadas com erro gaussiano aleatório de desvio-padrão de 100 m para o "range" e de 0,1 m/s para o "range-rate", compatíveis com os equipamentos correntemente utilizados (Banda S) na realização destes tipos de medidas.

As simulações foram efetuadas no computador VAX/VMS 780 com os filtros UD e convencional em precisão simples (7 dígitos decimais e 1 dígito duvidoso), e com o filtro convencional em precisão dupla (15 dígitos decimais e 1 duvidoso). A Figura 8.1 mostra os erros em posição e em velocidade para os 3 filtros. Nesta simulação os erros iniciais em posição e velocidade foram da ordem de 2000 m e 1,5 m/s respectivamente, compatíveis com precisões obtidas após uma determinação preliminar de órbita por métodos grosseiros (Escobal, 1965). O nível de ruído no estado foi ajustado para o filtro de precisão dupla e aplicado aos outros filtros.



a) Erros em posição



b) Erros em velocidade

Fig. 8.1 - Erros reais para os filtros FKPS (filtro de Kalman em precisão simples, UDPS (filtro UD em precisão simples), e FKPD (filtro de Kalman em precisão dupla)

Nota-se claramente o erro provocado nas estimativas devido ao erro de truncamento e ao erro global acumulado quando se usa precisão simples em ambos os filtros: convencional e UD. O filtro convencional foi implementado de forma a calcular somente a porção triangular superior da matriz de covariância. Os demais elementos são obtidos impondo-se que a matriz seja simétrica. Desse modo, retirou-se grande parcela do erro de truncamento por passo conforme anteriormente exposto. Em várias outras condições iniciais testadas, o filtro convencional em precisão simples apresentou variâncias negativas do resíduo e/ou elementos negativos nas diagonais da covariância. O filtro UD, entretanto, nunca apresentou tais comportamentos.

## 8.2 - TESTES DE ROBUSTEZ DO FILTRO ADAPTATIVO UD

Foram realizados alguns testes numéricos a fim de comprovar a robustez do procedimento adaptativo de dosagem do nível de ruído no estado (Seção 4.2). O filtro UD foi completamente implementado em precisão dupla. Para os testes considerou-se novamente o satélite francês SPOT de sensoriamento remoto, francês, cuja órbita foi simulada a partir das seguintes condições:

1 - Instante inicial (tempo universal)

1989/08/29 14:24:0.427 (horas, minutos, segundos)

2 - Vetor de estado inicial (coordenadas inerciais)

$x = -4.396.180,6122 \text{ m}$

$y = 4.939.064,7303 \text{ m}$

$z = 2.856.225,0000 \text{ m}$

$\dot{x} = -1.382,151632 \text{ m/s}$

$\dot{y} = 2.677,622930 \text{ m/s}$

$\dot{z} = -6.733,268000 \text{ m/s}$

A Figura 8.2 mostra o traço da órbita na superfície da Terra. Nesta figura estão também traçados os círculos de visibilidade correspondentes a 3 estações de rastreamento fictícias, posicionadas de forma a produzir cerca de 6 minutos de visibilidade simultânea.

Definem-se a seguir alguns parâmetros a serem utilizados na avaliação do comportamento dos estimadores:

erro real em posição:

$$\Delta r \hat{=} [ \sum_{i=1}^3 (x_i - \hat{x}_i)^2 ]^{1/2} \quad (8.7)$$

erro estimado em posição:

$$\hat{\Delta r} \hat{=} [ \sum_{i=1}^3 P_{ii} ]^{1/2} \quad (8.8)$$

erro real em velocidade:

$$\Delta v \hat{=} [ \sum_{i=4}^6 (x_i - \hat{x}_i)^2 ]^{1/2} \quad (8.9)$$

erro estimado em velocidade:

$$\hat{\Delta v} \hat{=} [ \sum_{i=4}^6 P_{ii} ]^{1/2} \quad (8.10)$$

onde  $x_i$ ,  $i=1,2,3$  e  $i=4,5,6$  são respectivamente as componentes de posição e de velocidade do vetor de estado simulado do satélite, considerado como valor real do estado no processo de simulação;  $\hat{x}_i$ ,  $i=1,2,3$  e  $i=4,5,6$  são respectivamente os valores estimados para as componentes de posição e de velocidade do vetor de estado, e  $P_{ii}$ ,  $i=1,2,3$  e  $i=4,5,6$  representam os valores dos elementos da diagonal da matriz de covariância dos erros na estimativa do vetor de estado, correspondentes respectivamente aos elementos de posição e de velocidade.

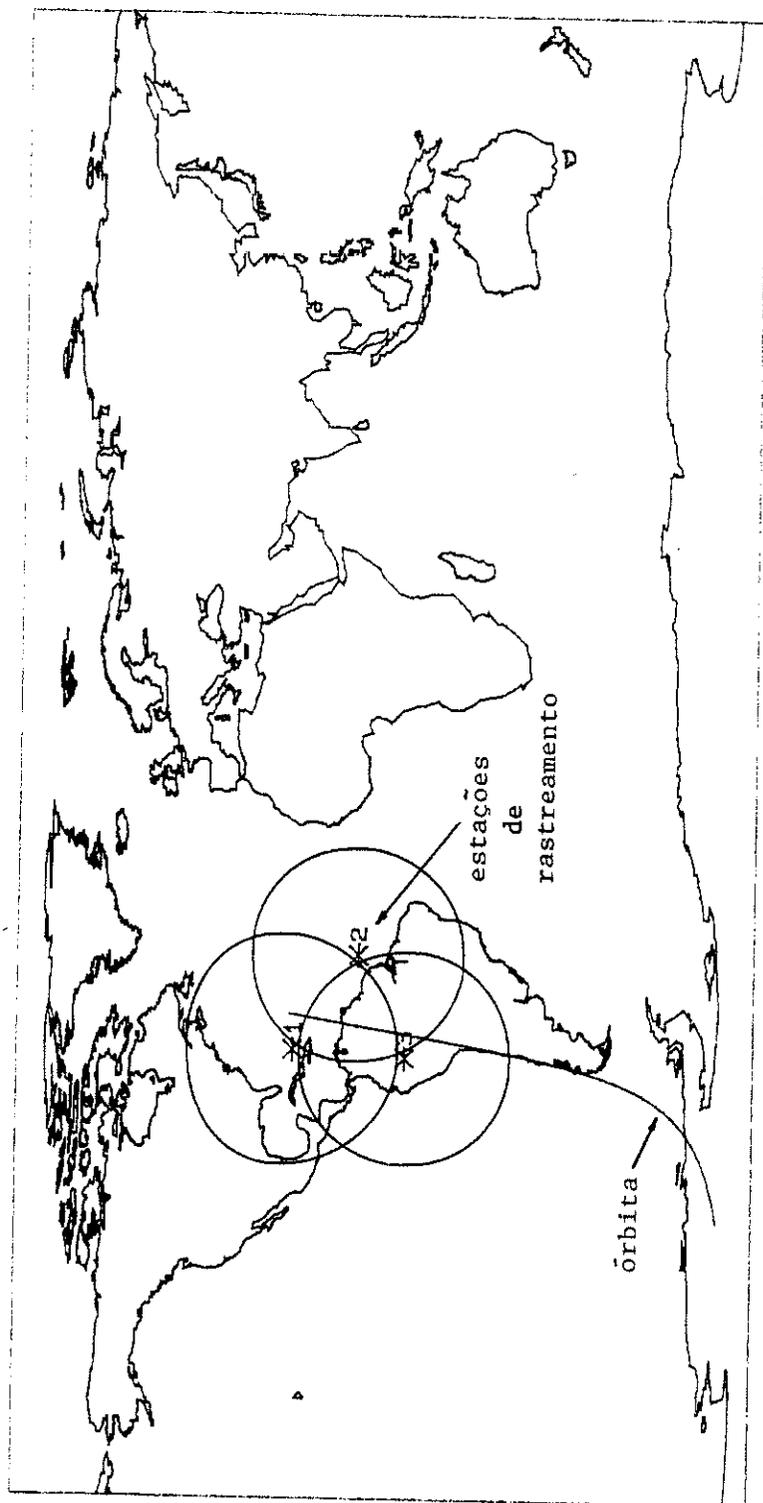


Fig. 8.2 - Geometria da órbita em relação às 3 estações de rastreamento

Define-se ainda o resíduo normalizado por:

$$r_n \triangleq \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{\text{var}^{1/2}(r_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{y_i - h_i(\bar{x}_i)}{(H_i P_i H_i^T + R_i)^{1/2}} \quad (8.11)$$

onde  $m$  é o número de medidas do mesmo tipo.

O filtro adaptativo UD foi inicializado com os seguintes valores para o estado e a covariância, no primeiro instante de visibilidade com as estações fictícias:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(0) &= -4.449.983,23 \text{ m} \\ \hat{x}_2(0) &= 5.044.890,27 \text{ m} \\ \hat{x}_3(0) &= 2.579.397,61 \text{ m} \\ \hat{x}_4(0) &= -1.189,286850 \text{ m/s} \\ \hat{x}_5(0) &= 2.460,225692 \text{ m/s} \\ \hat{x}_6(0) &= -6.853,003044 \text{ m/s} \end{aligned}$$

O erro inicial em posição ( $\Delta r(0)$ ) é de 2094 m e em velocidade ( $\Delta v(0)$ ) é de 1,42 m/s. Tais erros foram gerados aleatoriamente através de um gerador de ruído, e são compatíveis com valores típicos observados na prática. A matriz de covariância inicial é considerada diagonal com valores correspondentes a 3000m e 3m/s de desvios-padrão nas componentes de posição e velocidade respectivamente:

$$\hat{P}(0) = \text{diag.}(9 \cdot 10^6, 9 \cdot 10^6, 9 \cdot 10^6, 9, 9, 9) \text{ m}^2, \text{m}^2/\text{s}^2$$

Já o ruído adaptativo foi inicializado com os seguintes valores:

$$\hat{q}(0) = \text{diag.}(10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}) \text{ m}^2/\text{s}^4,$$

que corresponde grosseiramente a uma magnitude conservadora do quadrado das acelerações não modeladas (ver Figura 8.13

das acelerações não-modeladas na Seção 8.2.2). Na realidade, pode-se inicializar  $\hat{q}$  com valores nulos, e a única diferença nos resultados será uma convergência mais lenta do filtro adaptativo UD, já que o erro inicial em  $\hat{q}$  será maior. Para o valor inicial de  $P_q(0)$  (covariância inicial do estimador do ruído  $q(k)$ ), fez-se uma consideração lógica. A magnitude das acelerações não-modeladas deve ser compatível com o nível de ruído. Assim:

$$q_{\max} \cong |\vec{a}_{nm}|^2 \cong 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^4$$

A favor da segurança, supõe-se  $q_{\max} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^4$ , de modo que a covariância  $P_q(0)$  correspondente a 100% de erro em  $q$  foi adotado como:

$$P_q(0) = \text{diag.} [ (3 \cdot 10^{-4})^2 \text{ m}^4/\text{s}^8 ]$$

Estes valores foram conservados ao longo de todas as simulações e testes realizadas nesta Seção.

Ainda com respeito à inicialização, segundo Kaminski (1971), existem dois tipos de problemas numéricos de mau condicionamento: condicionamento de direção ("direction ill conditioning"), e condicionamento de inicialização ("initialization ill conditioning").

O condicionamento de direção se caracteriza pela ocorrência de quase cancelamento, devido a termos próximos mas de sinal opostos, quando se calcula o fator  $PH^T$ . Lembrar que  $K = PH^T(HPH^T+R)^{-1}$ . Este tipo de cancelamento ocorre quando muitas medidas são processadas enquanto  $H$  permanece constante. Kaminski (1971) fornece um exemplo numérico de aplicação, e mostra que os filtros de raiz quadrada contornam naturalmente o problema. Na prática, este tipo de mau condicionamento revela má escolha

do sistema de coordenadas (escolha das variáveis de estado), que no entanto é difícil de se detectar a partir da saída do filtro. Este problema, devido ao uso de filtros de raiz quadrada (UD no caso), não será discutido aqui.

O condicionamento de inicialização se manifesta quando a covariância inicial é grande em relação à precisão das medidas, fazendo o filtro se comportar como um filtro de medidas exatas. Neste caso, a análise do cálculo da covariância mostra que a incorporação de uma medida acurada produz um substancial decréscimo da covariância, de modo que ela tende a zero já no primeiro passo. Adotando a covariância proposta  $P(0)$  e sendo o desvio-padrão da medida de "range" simulada de 100m, obtém-se (utilizando a Equação 6.11 para H) os seguintes valores para o processamento da primeira medida deste tipo no filtro convencional:

$$H = [ 0,9895; 0,0916; 0,1119 \mid 0_{1 \times 3} ]$$

$$\hat{P}(0) \cong \text{diag.} (9.10^6, 9.10^6, 9.10^6, 9, 9, 9)$$

$$R^{1/2} = 100m$$

$$HPH^T + R \cong HPH^T \cong 9.10^6$$

Portanto, substituindo-se o ganho de Kalman K na fórmula de decaimento da covariância vêm:

$$\hat{P} = (I - KH)\bar{P} = (I - \frac{\bar{P}H^T}{H\bar{P}H^T + R} H)\bar{P} \cong (I - \frac{\bar{P}H^T H}{H\bar{P}H^T})\bar{P} \rightarrow 0$$

Desta forma, o filtro tende a ignorar medidas subsequentes, até que P seja novamente incrementado devido à adição de ruído dinâmico. Uma análise das condições iniciais mostra que uma boa técnica para evitar o rápido

decréscimo da covariância é aumentar artificialmente o erro das medidas nos primeiros instantes. Tal providência impede a diminuição brusca do ganho e, portanto, corrige com mais peso as estimativas no início da filtragem. Kaminski (1971) propõe uma análise das condições iniciais e, se necessário, implementa-se a divisão de medidas ("measurement splitting"). Uma medida com covariância  $R$  é equivalente a duas, uma com covariância  $R/\alpha^2$  e outra com covariância  $R/(1-\alpha^2)$ , com  $|\alpha| \leq 1$ . A escolha de  $\alpha$  é realizada de forma a tornar  $R/\alpha^2$  da ordem de grandeza de  $HPH^T$ . No caso presente de determinação de órbita, a escolha de  $R = (1000m)^2$  torna-o da mesma ordem de grandeza de  $HPH^T = (3000)^2$ .

Adotou-se, então, uma técnica bastante simples para solucionar esse problema de inicialização. Somente no primeiro instante de filtragem, os erros de medida desse instante são assumidos serem 10 vezes maiores que os valores reais:

$$R_{\text{range}} = (10 \times 100m)^2 = (1000m)^2$$

$$R_{\text{range-rate}} = (10 \times 0,1m/s)^2 = (1m/s)^2$$

As Figuras 8.3 e 8.4 mostram os resultados do filtro nos instantes iniciais sem e com o uso dessa técnica respectivamente, para as condições descritas na Seção 8.2.1 na sequência. É sensível a diferença entre as covariâncias nos instantes iniciais. Observe-se que o erro real permanece sempre em valores bem menores quando a técnica é usada, praticamente uma ordem de grandeza menor que o correspondente à não utilização da técnica. Evidentemente, poder-se-ia implementar outros métodos, tais como um decaimento exponencial de  $R$  até seu valor real, ou a técnica "measurement splitting" citada acima. A técnica adotada mostrou-se, no entanto, suficiente para lidar com o problema de inicialização exposto. A não consideração desse

problema acarreta em um tempo de convergência mais longo, pois com a covariância irrealisticamente decrescida após o primeiro passo, o filtro responde mais lentamente (ganho menor) para corrigir as estimativas do estado.

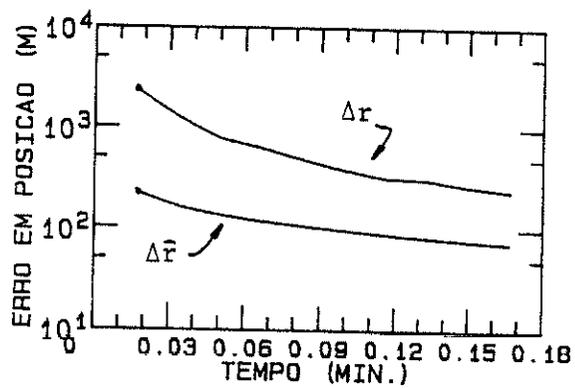
Os testes seguintes ilustram a robustez do filtro adaptativo UD frente a situações onde a modelagem pobre do estimador causa a divergência das estimativas.

### 8.2.1 - TENDÊNCIA NO MODELO DINÂMICO

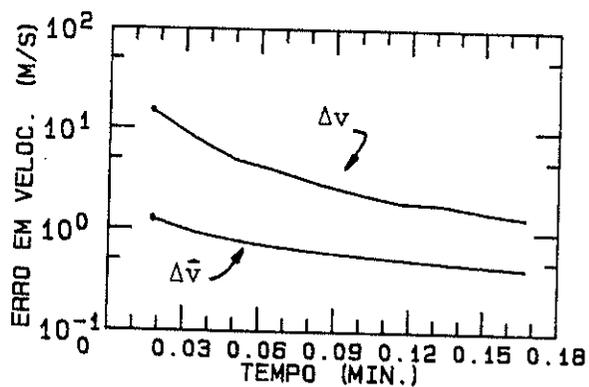
O primeiro teste consiste em introduzir uma tendência proposital no modelo da dinâmica. Neste caso, o simulador de órbita e observações leva em conta somente o movimento kepleriano puro, e simula observações coletadas pelas estações corrompidas com ruído aleatório gaussiano de 100m e 0,1m/s de desvios-padrão para observações de "range" e "range-rate" respectivamente. O modelo da dinâmica adotado no estimador também modela somente o movimento kepleriano puro, mas adota uma constante gravitacional diferente. Lembrando que as acelerações são modeladas por:

$$\dot{\vec{v}} = -\mu \vec{r} / r^3,$$

onde  $\mu$  é a constante geogravitacional ( $3,9860047 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ ), introduziu-se propositamente um erro tendencioso ("bias")  $b_\mu = 5 \times 10^{11} \text{ m}^3/\text{s}^2$  no valor da constante  $\mu$  utilizada pelo estimador. Para satélites com cerca de 700 km de altitude, isto acarreta um erro em magnitude na aceleração da ordem de  $0,01 \text{ m/s}^2$ . Este erro de modelagem nas componentes de aceleração provoca a divergência das estimativas, se nenhum procedimento de compensação for utilizado.

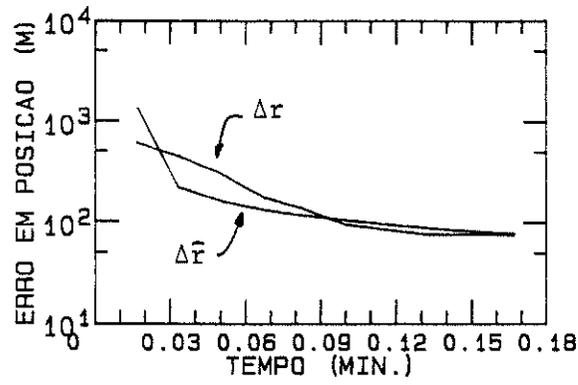


a) Erros em posição

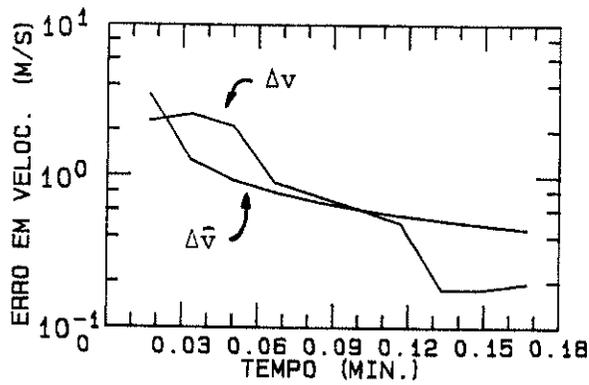


b) Erros em velocidade

Fig. 8.3 - Erros sem aumento da covariância das medidas



a) Erros em posição



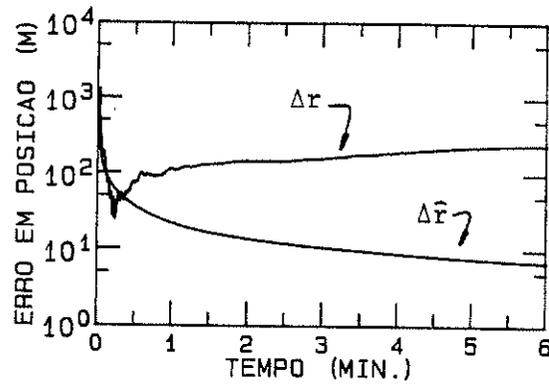
b) Erros em velocidade

Fig. 8.4 - Erros com aumento da covariância das medidas

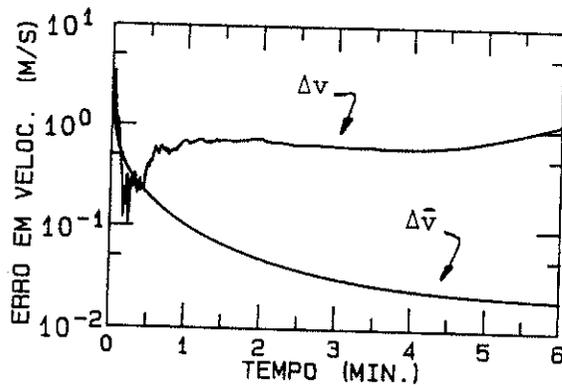
A Figura 8.5 mostra os erros em posição e velocidade quando a matriz  $Q$  de covariância do ruído dinâmico é considerada nula. A Figura 8.6 mostra os resíduos normalizados das observações de "range" e "range-rate". Nota-se claramente a divergência, pois as variâncias obtidas a partir da matriz de covariância indicam que esta se tornou irrealisticamente pequena embora os erros reais estejam crescendo. Os resíduos também crescem em magnitude e diagnosticam a ocorrência de divergência.

Já as Figuras 8.7 e 8.8 mostram os erros e os resíduos normalizados quando se utiliza o procedimento adaptativo UD proposto. Os erros reais são da ordem dos erros estimados ao fim do intervalo de estimação, apresentando-se em decaimento durante todo o intervalo simulado, e os resíduos normalizados não apresentam tendências, mantendo média aproximadamente nula e desvio-padrão na faixa  $\pm 1$ . Desta forma pode-se inferir que o procedimento adaptativo conseguiu extrair toda a informação das observações, além de evitar a divergência.

É interessante ressaltar que é provável que o filtro adaptativo convencional (sem a forma UD) forneça aproximadamente os mesmos resultados, desde que mecanismos para monitorar e modificar o traço da matriz de covariância sejam implementados, quando este apresentar valores negativos. Não obstante, deve-se lembrar que a técnica de ruído adaptativo é mais economicamente codificada na forma UD (veja Tabela 4.5), o que incentiva o uso desta forma, com as vantagens de precisão e estabilidade numérica, além de prescindir de tais mecanismos artificiais.

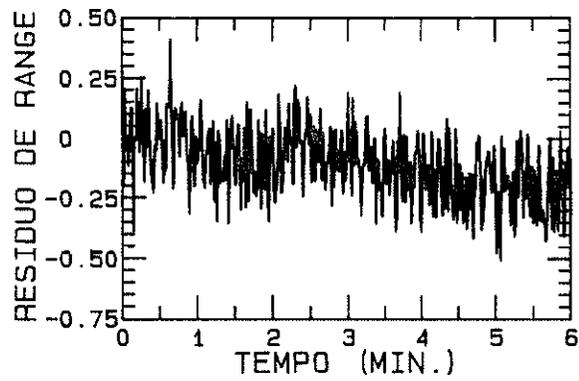


a) Erros em posição

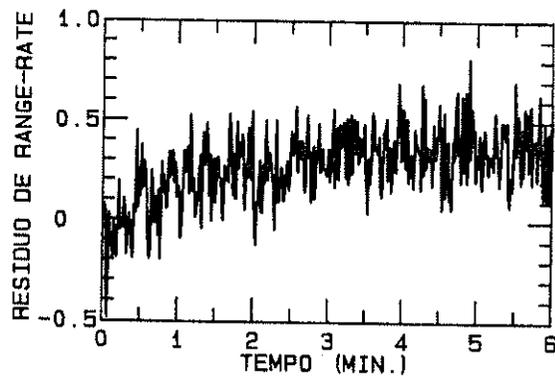


b) Erros em velocidade

Fig. 8.5 - Erros do filtro UD convencional para tendências no modelo dinâmico

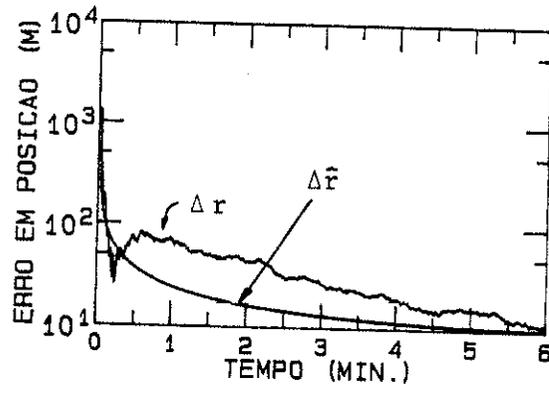


a) Resíduo normalizado de "range"

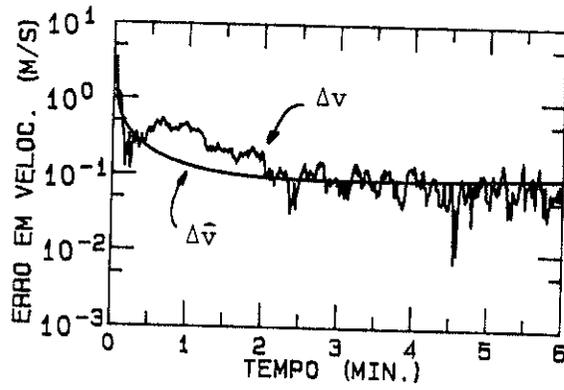


b) Resíduo normalizado de "range-rate"

Fig. 3.6 - Resíduos normalizados do filtro UD convencional para tendências no modelo dinâmico

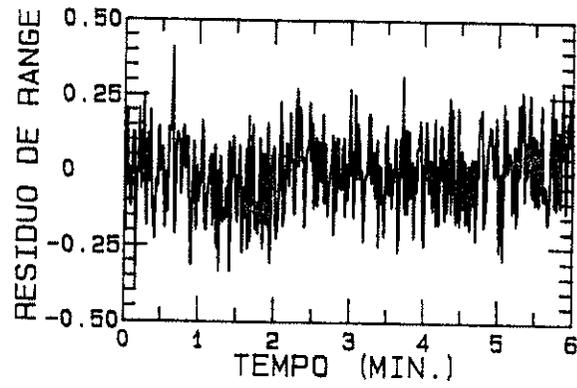


a) Erros em posição

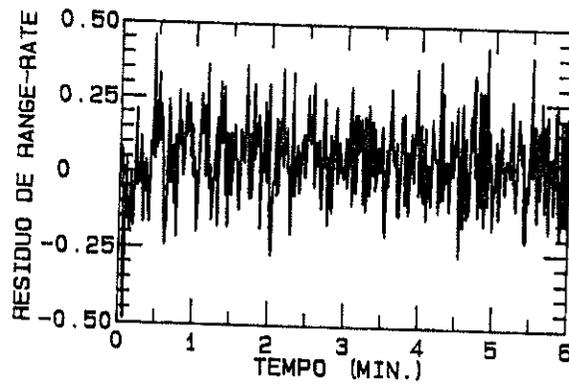


b) Erros em velocidade

Fig. 8.7 - Erros do filtro UD adaptativo para tendências no modelo dinâmico



a) Resíduo de "range"



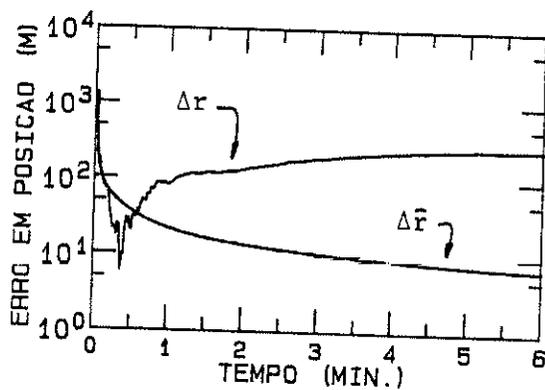
b) Resíduos de "range-rate"

Fig. 8.8 - Resíduos normalizados do filtro UD adaptativo para tendências no modelo dinâmico

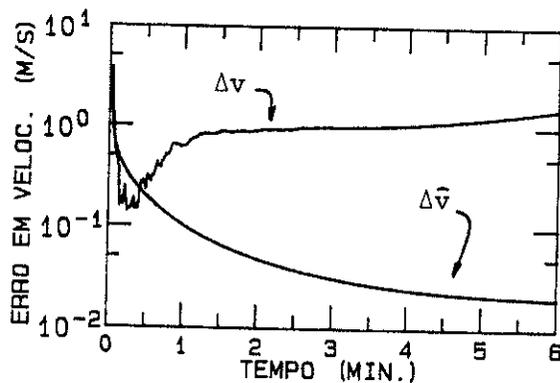
### 8.2.2 - MODELO DINÂMICO SIMPLIFICADO

Neste teste, utilizou-se um modelo complexo de forças para simular a órbita e as observações para o satélite SPOT. O modelo gravitacional, além do movimento kepleriano puro, considera o efeito dos coeficientes zonais e tesserais/setoriais truncados na ordem 6 e 4 respectivamente. Além disso, foram incluídos os efeitos de arrasto atmosférico (área/massa=0,00391m<sup>2</sup>/kg, coeficiente de arrasto=3,1, e atividade solar intensa), pressão de radiação (área/massa=0,00391m<sup>2</sup>/kg, coeficiente de pressão de radiação=1,1), e atrações gravitacionais do Sol e da Lua. O modelo dinâmico do estimador continua sendo o movimento kepleriano puro somente. Este teste é representativo em problemas de determinação de órbita, onde modelos simplificados são adotados por falta de maior conhecimento do sistema, embora não de forma tão exagerada quanto a deste caso.

As Figuras 8.9 e 8.10 mostram a divergência resultante quando a matriz Q é considerada nula. As Figuras 8.11 e 8.12 mostram o resultado do filtro UD adaptativo aplicado ao mesmo problema. Nota-se novamente que a divergência foi evitada. Já a Figura 8.13 mostra um resultado interessante. A ordenada contém as acelerações não-modeladas, i.e., a aceleração total perturbada menos a aceleração devido ao movimento kepleriano puro (modelo adotado no estimador). Na mesma figura está superposto o desvio-padrão do ruído dinâmico ( $\hat{q}^{1/2}$ ), estimado pelo filtro UD adaptativo. Nota-se aí que o estimador adaptativo de ruído dinâmico tenta compensar o efeito das acelerações não modeladas através da dosagem do nível de ruído dinâmico a ser adicionado à matriz de covariância, mantendo-a, como esperado, consistente com a magnitude da parcela não modelada, embora um tanto conservadoramente.

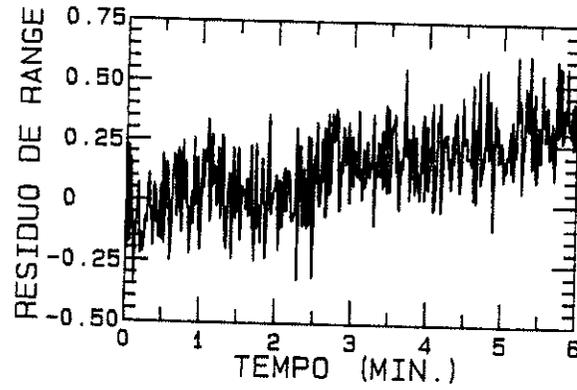


a) Erros em posição

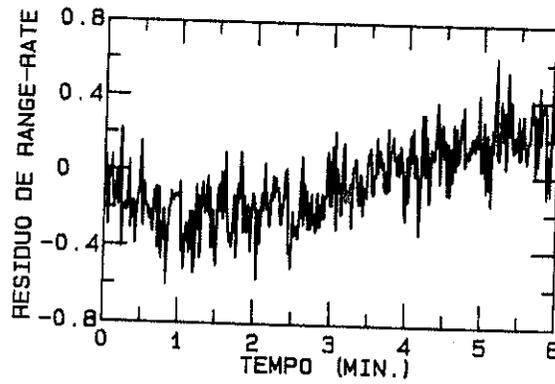


b) Erros em velocidade

Fig. 8.9 - Erros do filtro UD convencional para modelo simplificado

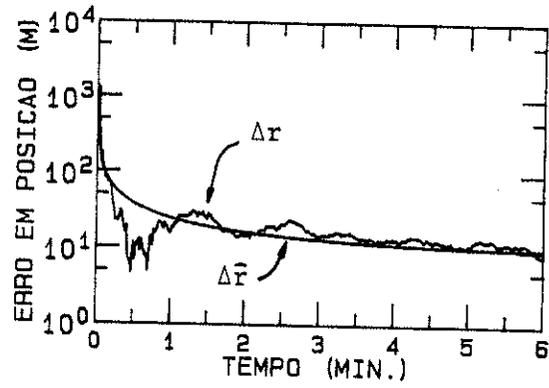


a) Resíduo de "range"

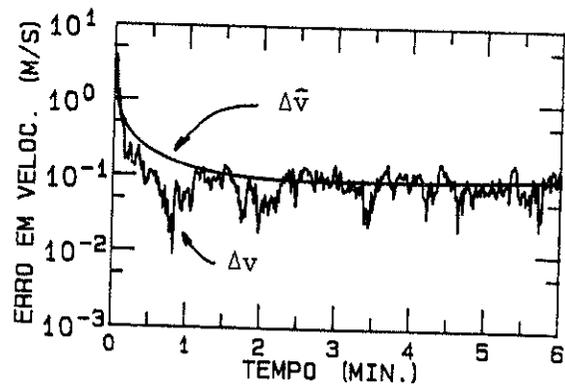


b) Resíduo de "range-rate"

Fig. 8.10 - Resíduos normalizados do filtro UD convencional para modelo simplificado

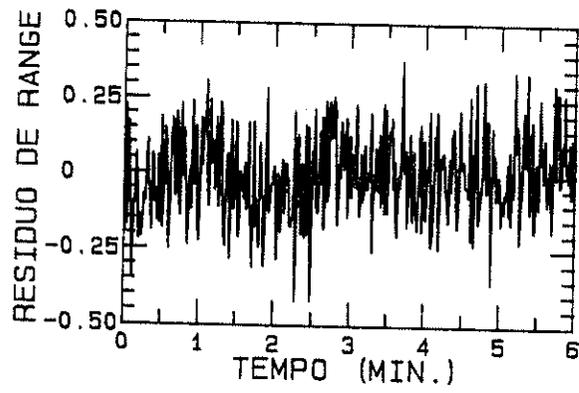


a) Erros em posição

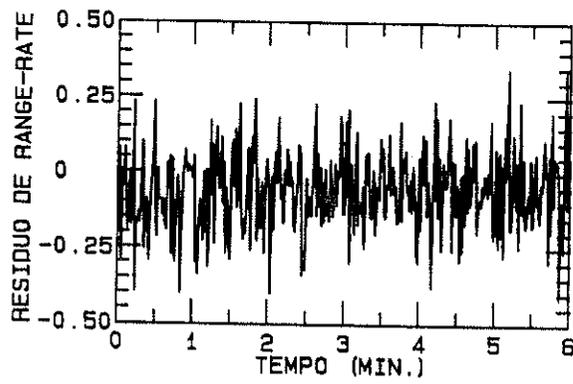


b) Erros em velocidade

Fig. 8.11 - Erros do filtro UD adaptativo para modelo simplificado

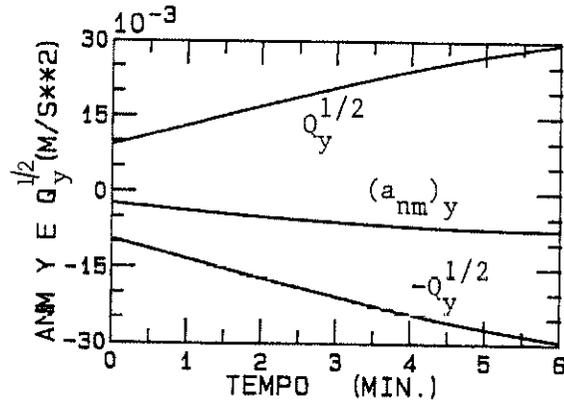


a) Resíduo de "range"

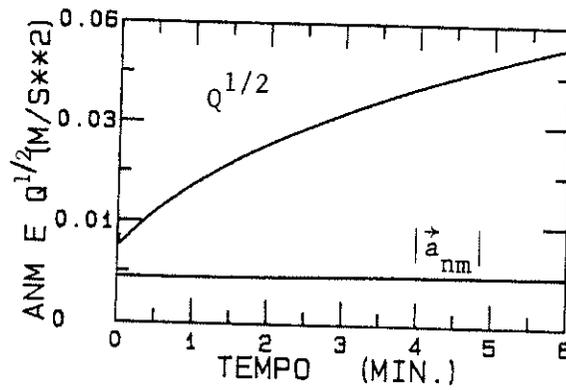


b) Resíduo de "range-rate"

Fig. 8.12 - Resíduos normalizados do filtro UD adaptativo para modelo simplificado



a) Coordenada y



b) Em módulo

Fig. 8.13 - Comparação entre as acelerações não-modeladas e o nível de ruído

### 8.2.3 - MANOBRA NÃO MODELADA

Neste teste, pretende-se analisar o comportamento do filtro adaptativo UD frente a uma situação não prevista, onde uma manobra foi efetuada sem conhecimento do estimador. Após 1min. e 20s de operação do estimador, uma manobra orbital consistindo na elevação em 100 m do semi-eixo maior da órbita é realizada. Esta manobra corresponde a uma correção orbital típica que acontece com certa periodicidade em satélites baixos (até 700km), para compensar o decaimento da altitude devido ao efeito do arrasto atmosférico. Nesse instante, os valores reais de posição e velocidade inerciais sofrem a seguinte variação brusca instantaneamente:

$$\Delta x = -63,9 \text{ m}$$

$$\Delta y = 73,8 \text{ m}$$

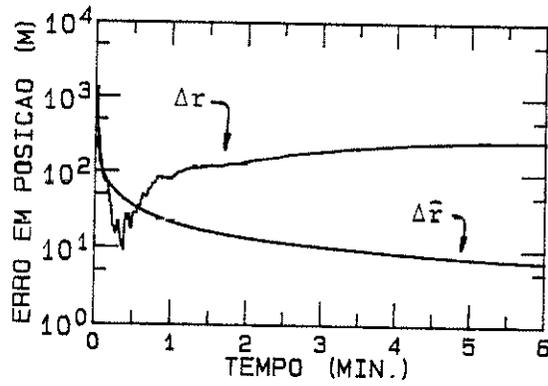
$$\Delta z = 28,6 \text{ m}$$

$$\dot{\Delta x} = 0,006 \text{ m/s}$$

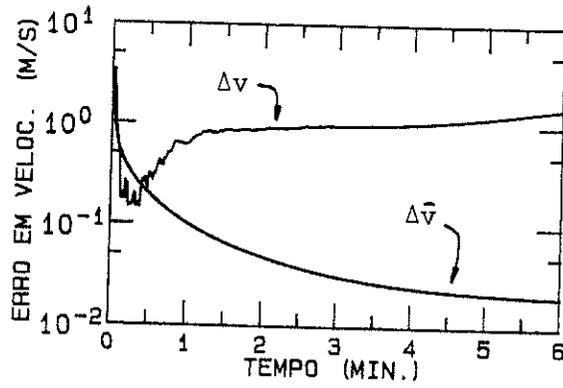
$$\dot{\Delta y} = -0,014 \text{ m/s}$$

$$\dot{\Delta z} = 0,049 \text{ m/s}$$

As Figuras 8.14 e 8.15 mostram o comportamento dos erros e dos resíduos, respectivamente, para o filtro convencional UD com  $Q \equiv 0$ , ilustrando tipicamente um caso de divergência, detectável, na prática, através de monitoração dos resíduos. Já as Figuras 8.16 e 8.17 mostram o resultado para o filtro UD adaptativo. Não existem sinais de divergência, com os resíduos bem comportados. Os erros no estado sofrem um incremento brusco e tendem a decair mais lentamente. Os erros verdadeiros, embora sofram um acréscimo brusco quando da ocorrência da manobra, passam, a seguir, a decair a uma taxa maior que os erros estimados, atingindo valores bem próximos aos estimados no final do período de simulação da aplicação do estimador.

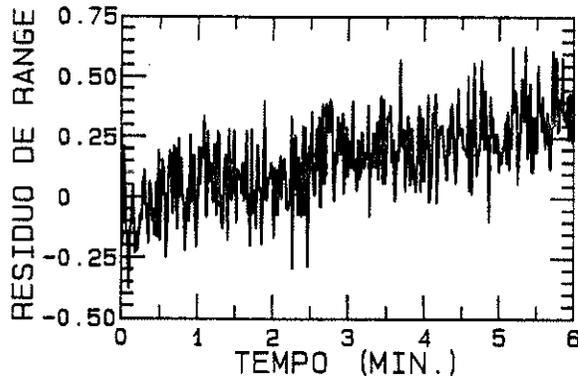


a) Erros em posição

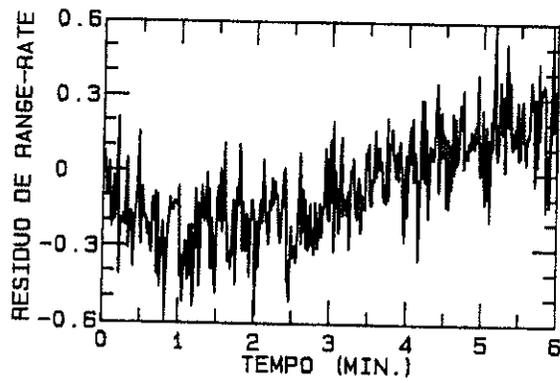


b) Erros em velocidade

Fig. 8.14 - Erros do filtro UD convencional para manobra não modelada

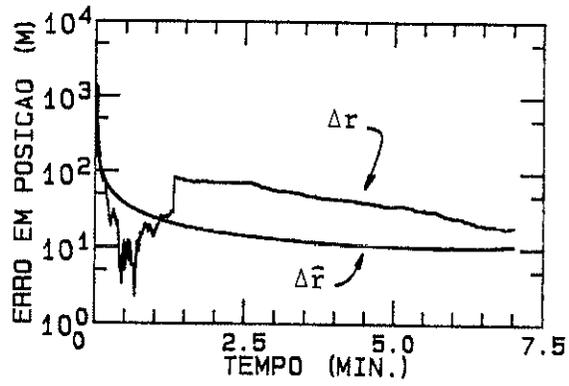


a) Resíduos de "range"

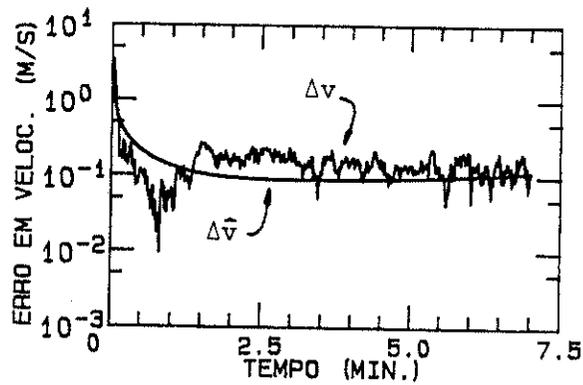


b) Resíduos de "range-rate"

Fig. 8.15 - Resíduos normalizados do filtro UD convencional para manobra não modelada

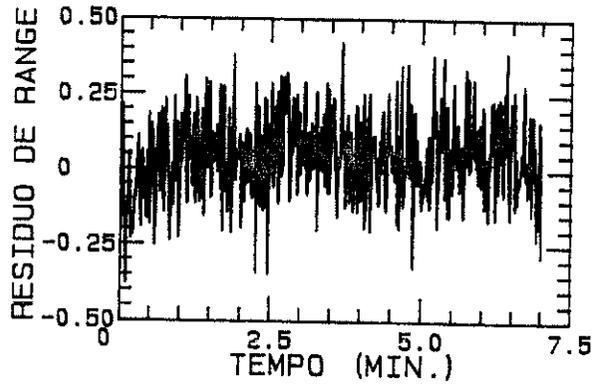


a) Erros em posição

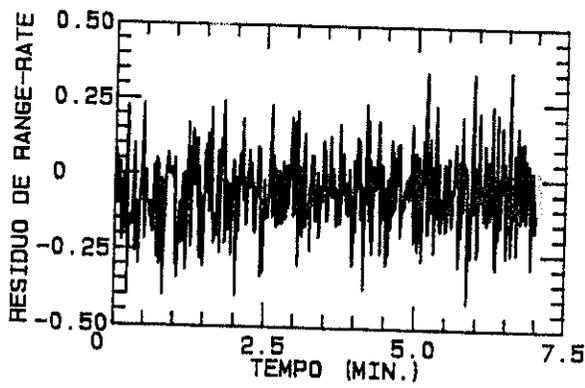


b) Erros em velocidade

Fig. 8.16 - Erros do filtro UD adaptativo para manobra não modelada



a) Resíduos de "range"



b) Resíduos de "range-rate"

Fig. 8.17 - Resíduos normalizados do filtro UD adaptativo para manobra não modelada

As tendências de variação das curvas destes erros, indicadas na Figura 8.18, mostram que se o período simulado fosse um pouco estendido, o erro real passaria a ter valores menores do que o erro estimado em posição, a exemplo do que já ocorre com os erros em velocidade.

### 8.3 - AVALIACÃO DOS CUSTOS COMPUTACIONAIS DOS ALGORITMOS DE FILTRAGEM

Foram realizadas algumas medidas do tempo de "CPU" ("Central Processing Unit") necessário para realizar os cálculos de determinação de órbita através do filtro de Kalman. Deve-se salientar que essas medidas não são precisas, pois incluem um excesso de cálculo ("overhead") devido a troca de variáveis, leitura e escrita de arquivos com formatação, não aproveitamento total das otimizações possíveis oferecidas pelo sistema operacional do computador, modularidade excessiva e, evidentemente, inabilidade do próprio autor em programá-los de maneira ótima. A escolha de programar modularmente (em vários módulos de rotinas), se por um lado permite depurar mais facilmente os erros, estruturar o programa, e fazê-lo legível, por outro lado impõe cálculos desnecessários de inicialização, passagens de argumentos em chamadas inadequadas de rotinas, e superdimensionamento de vetores e matrizes. Considera-se que as contagens do número de operações em ponto flutuante ("flops"), conforme expostas no Capítulo 4, fornecem uma medida mais adequada e confiável do gasto computacional.

Para que se possa obter o real gasto do algoritmo de filtragem "per se", deve-se isolar a parcela referente aos cálculos dinâmicos que são específicos ao problema tratado. Dentro da categoria de cálculos dinâmicos incluem-se a integração de órbita, cálculo do jacobiano da órbita (matriz de parciais), integração da matriz de

transição, transformações de coordenadas, e derivadas parciais das observações. Os cálculos restantes referem-se aos algoritmos de propagação e atualização UD, e ao procedimento adaptativo nas suas duas formas: sequencial UD, ou em lotes via transformação de Householder.

A Tabela 8.1 mostra os tempos de "CPU" em segundos, para os cálculos dinâmicos isoladamente, para o filtro UD convencional, e para o filtro UD adaptativo (sequencial e em lotes). Convém lembrar que neste caso o modelo dinâmico adotado no estimador consiste no movimento kepleriano puro, considerando ainda 6 minutos de intervalo de aplicação do procedimento de estimação, taxa de amostragem de 1 hz, e 6 observações (3 estações) a cada passo, perfazendo um total acumulado de 2160 observações a serem filtradas. Nota-se que o maior gasto de tempo de "CPU" corresponde aos cálculos dinâmicos, que contribui com cerca de 79 % do filtro UD convencional. Devido a este fato, normalmente os especialistas de órbita tentam simplificar o modelo dinâmico ao máximo sem prejuízo da precisão, para obter a mínima sobrecarga de cálculo.

TABELA 8.1

TEMPOS DE "CPU"

algoritmo	"CPU" médio (seg.)	%
cálculos dinâmicos	31,01	78,7
UD convencional	39,40	100,0
UD adaptativo	46,27	117,4
UD em lotes de 6	45,37	115,1
UD em lotes de 24	44,63	113,3

Numa relação percentual, apenas 21% do filtro UD convencional referem-se aos cálculos devidos aos algoritmos UD (UD Gram-Schmidt de propagação, UD de rank 1 de inclusão do ruído dinâmico, e UD de atualização). O filtro adaptativo contribui com um gasto extra de menos de cerca de 18% do filtro UD convencional. Acredita-se que esta margem pode diminuir via melhora da qualidade de programação pois, excluindo-se os cálculos dinâmicos, estes 18 % correspondem a 80 % dos algoritmos UD (sem cálculos dinâmicos) implementados, quando o valor teórico previsto (Seção 4.2.4) para este caso ( $n=6$  estados,  $m=6$  observações,  $r=3$  ruídos) seria de  $\cong 50$  %. Nota-se ainda que o filtro UD em lotes é de fato mais rápido que o método sequencial, porém a economia é irrelevante quando comparada aos gastos dos cálculos dinâmicos. Para um lote normal de 6 observações, o gasto extra é de 15 % do UD convencional, e com a acumulação de um lote de 24 observações, este gasto diminui para 13 %. Para esta situação em particular, a acumulação de lotes grandes de 24 observações não produziu diferenças perceptíveis, em termos de precisão, em relação ao procedimento UD adaptativo sequencial. O único gasto extra de fato, é que no modo de processamento em lotes, existe a necessidade de uma matriz de maior dimensão para armazenar os valores antes da aplicação da ortogonalização de Householder (Seção 4.2.3), além das operações de raiz quadrada exigidas durante o processo.

Em resumo, uma vez que a precisão dos algoritmos está assegurada através do uso de algoritmos estáveis e precisos numericamente, a principal preocupação de um analista de determinação de órbita em tempo real deve voltar-se para a agilização dos cálculos dinâmicos, notadamente a integração de órbita e da matriz de transição, a fim de poder cumprir os requisitos de tempo real. Neste caso, um estudo detalhado dos efeitos de erros de truncamento, e da sofisticação do integrador numérico ou

do método de resolução escolhido (e.g. modelo analítico simplificado), comparado com a precisão exigida, deve orientar a melhor estratégia a ser seguida num projeto de um estimador de órbita em tempo real.

#### 8.4 - TESTES DO SUAVIZADOR UD

Foram realizados vários testes do suavizador UD proposto (Seção 4.3) aplicado ao problema de determinação de órbita. O principal objetivo dos testes é a verificação da viabilidade de utilização do suavizador proposto, levando em conta aspectos de:

- refinamento dos resultados obtidos na fase de filtragem,
- análise dos custos computacionais.

Alguns dos resultados de determinação de órbita obtidos através da aplicação do filtro adaptativo UD (Seção 8.2) foram superpostos e comparados com os resultados obtidos após a aplicação do procedimento de suavização. Os seguintes parâmetros de análise para o suavizador foram considerados:

erro suavizado em posição:

$$\Delta r^* \triangleq \left[ \sum_{i=1}^3 (x_i - x_i^*)^2 \right]^{1/2} \quad (8.12)$$

desvio-padrão suavizado em posição:

$$\hat{\Delta r}^* \triangleq \left[ \sum_{i=1}^3 P_{ii}^* \right]^{1/2} \quad (8.13)$$

erro suavizado em velocidade:

$$\Delta v^* \triangleq \left[ \sum_{i=4}^6 (x_i - x_i^*)^2 \right]^{1/2} \quad (8.14)$$

desvio-padrão suavizado em velocidade:

$$\hat{\Delta v}^* \triangleq \left[ \sum_{i=4}^6 P_{ii}^* \right]^{1/2} \quad (8.15)$$

onde  $x$  é o estado verdadeiro,  $x^*$  é o estado suavizado e  $P^*$  é a matriz de covariância do erro no estado suavizado.

Os testes seguintes retratam o comportamento do suavizador frente a situações idênticas às descritas nas Seções 8.2.1 a 8.2.3.

#### 8.4.1 - TENDÊNCIA NO MODELO DINÂMICO

Para as mesmas condições do teste da Seção 8.2.1, i.e., com a introdução proposital de tendência no modelo dinâmico, armazenaram-se as variáveis advindas da fase de filtragem, e aplicou-se o suavizador UD proposto. Lembrar que para o suavizador ser aplicado ao problema não-linear de determinação de órbita, as seguintes variáveis requerem armazenamento:  $\bar{x}$  (estimativa propagada),  $\hat{x}$  (estimativa atualizada),  $\lambda_i$ ,  $v_i$ ,  $g_i$ ,  $i=1, \dots, r$  (variáveis definidas na Seção 4.3), e  $\phi$  (matriz de transição), a cada instante de amostragem; e a estimativa  $\hat{x}(N)$  e a covariância  $\hat{P}(N)$  do instante final. As Figuras 8.18 e 8.19 mostram os erros e desvios-padrão do filtro e do suavizador superpostos em uma mesma escala, porém com densidade de pontos diminuída apenas para efeito de visualização. Efetivamente, todos os pontos foram percorridos (pelo filtro e pelo suavizador), mas somente uma quantidade de pontos suficiente para permitir análise do perfil das curvas foi plotado. Nota-se uma diminuição dos erros em posição após a suavização, notadamente nos instantes iniciais. Os erros suavizados apresentaram-se mais suaves e menores do que os filtrados. Para os erros de velocidade, a melhora também acontece, porém não é flagrantemente

perceptível, pois o comportamento dos erros reais é bastante oscilatório. O desvio-padrão suavizado manteve-se aproximadamente da mesma ordem de grandeza dos erros suavizados, sofrendo porém o efeito da covariância calculada na filtragem, que em alguns instantes manteve-se menor que os erros reais.

#### 8.4.2 - MODELO DINÂMICO SIMPLIFICADO

O suavizador também foi aplicado após a filtragem, nas mesmas condições descritas na Seção 8.2.2, onde o estimador contém um modelo dinâmico simplificado em relação ao modelo real. A matriz de transição também modela somente o efeito do corpo central (movimento kepleriano puro). As Figuras 8.20 e 8.21 mostram os resultados de filtragem e suavização superpostos.

Este teste é mais representativo do caso prático, onde modelos simplificados são utilizados, tanto no filtro quanto no suavizador (matriz de transição). Os erros suavizados são menores no princípio que os filtrados (que tendem ao final do intervalo a valores da mesma ordem de grandeza dos primeiros), e apresentam comportamento mais suave em todo o intervalo. Os desvios-padrão suavizados também se mostram coerentes com os erros suavizados (da mesma ordem de grandeza). Conclui-se que em operações que não exijam requisitos de tempo real, o uso de suavização pode ser um recurso útil para refinar as estimativas e permitir a reconstituição da órbita com maior precisão.

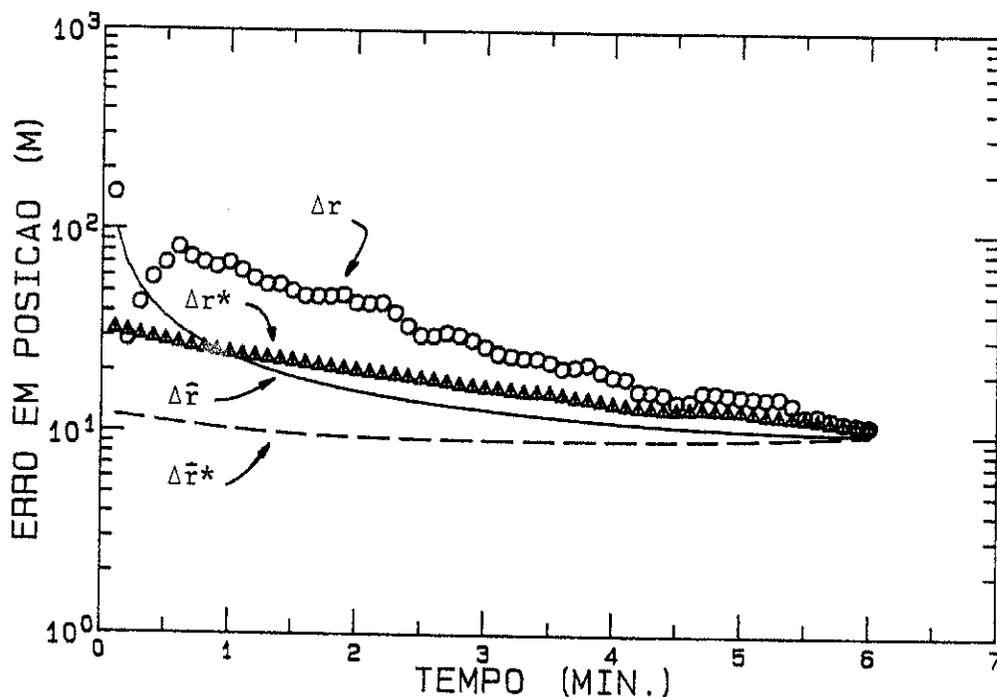


Fig. 8.18 - Erros em posição do filtro e do suavizador para modelo tendencioso

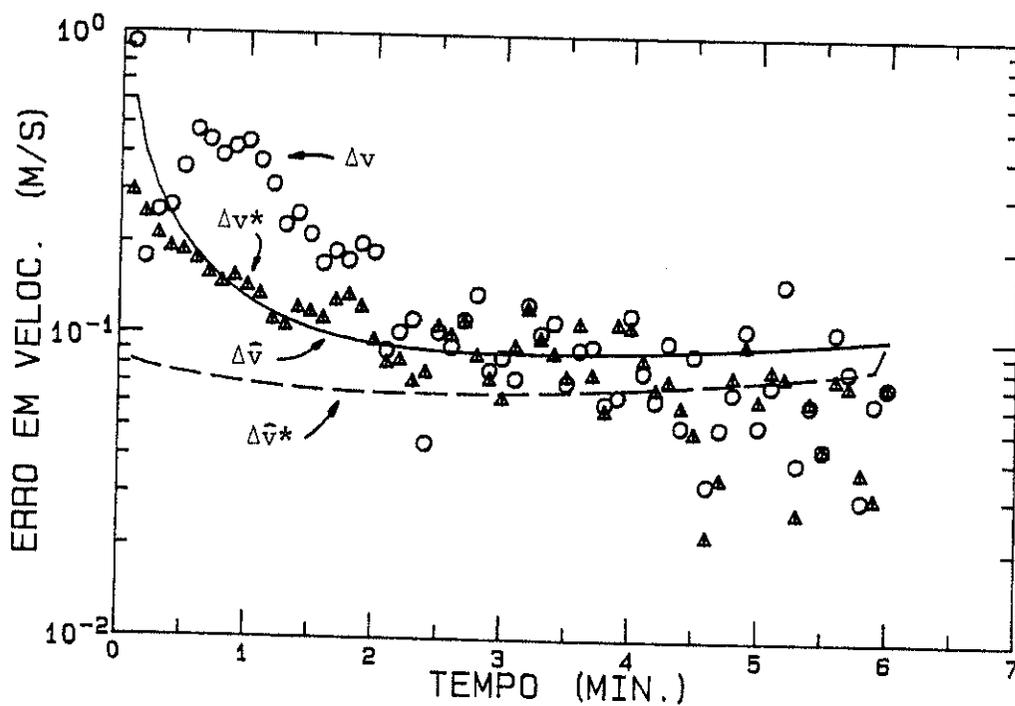


Fig. 8.19 - Erros em velocidade do filtro e do suavizador para modelo tendencioso

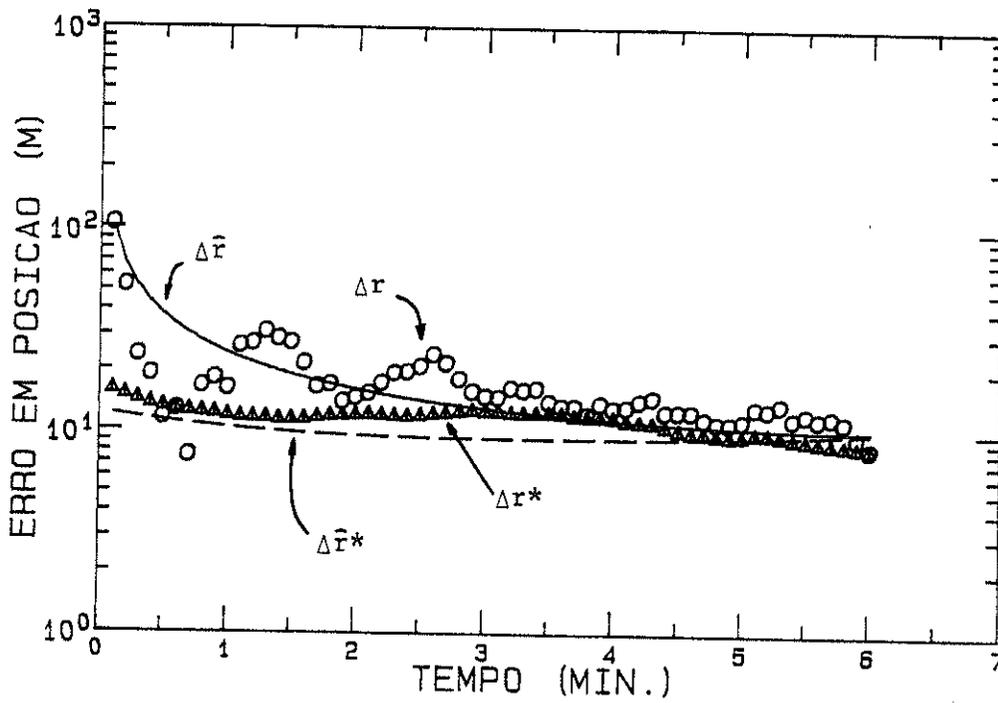


Fig. 8.20 - Erros em posição do filtro e do suavizador para modelo simplificado

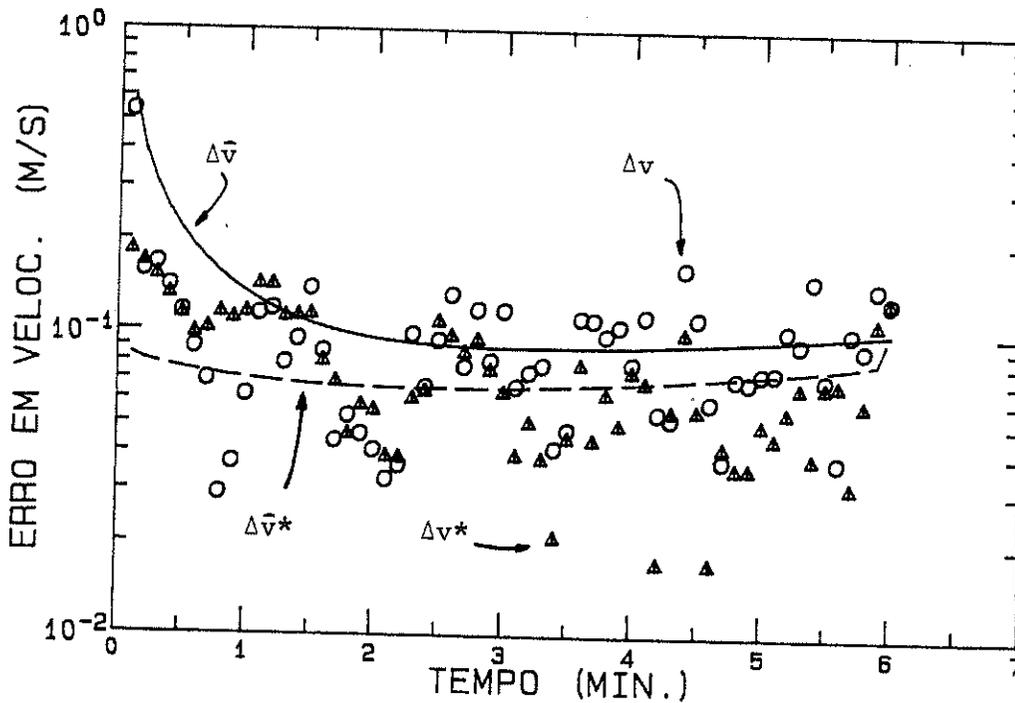


Fig. 8.21 - Erros em velocidade do filtro e do suavizador para modelo simplificado

#### 8.4.3 - MANOBRA NÃO MODELADA

O caso patológico de manobra não modelada (Seção 8.2.3) também foi exposto ao suavizador. As Figuras 8.22 e 8.23 mostram os resultados após a suavização. É interessante o comportamento dos erros suavizados nos instantes próximos à manobra (1 min. e 20 seg.). O suavizador ao processar os pontos para trás ("backward") vem diminuindo gradativamente o nível dos erros em posição. No instante da manobra, os erros mudam de magnitude e passam a aumentar até o instante inicial, quando então coincide com os erros do filtro. Isto se deve, provavelmente, ao fato de que o filtro para trás, implícito no suavizador, só sente efetivamente a manobra quando atinge o instante em que esta ocorreu, indo em direção contrária no tempo ("backward"). Então, o erro do filtro para trás sofre um incremento brusco, que ponderado com o erro menor do filtro para a frente, que ainda não percebeu a manobra, tornam o erro de suavização nos instantes iniciais maiores que os do filtro.

Para os erros em velocidade o comportamento do suavizador se mostrou normal, embora também se observe que o suavizador apresenta erros maiores que o filtro nos instantes precedentes ao da manobra. Isto sugere que em casos anômalos do tipo testado, seria conveniente utilizar-se as estimativas advindas do processo de filtragem antes da manobra, e as advindas do processo de suavização após. Os desvios-padrão das estimativas seriam entretanto sempre os resultantes do processo de suavização. Lembrar no entanto que nem o filtro nem o suavizador foram projetados para atuar sob tais condições, sendo este teste um mero exercício acadêmico para verificar o comportamento do suavizador.

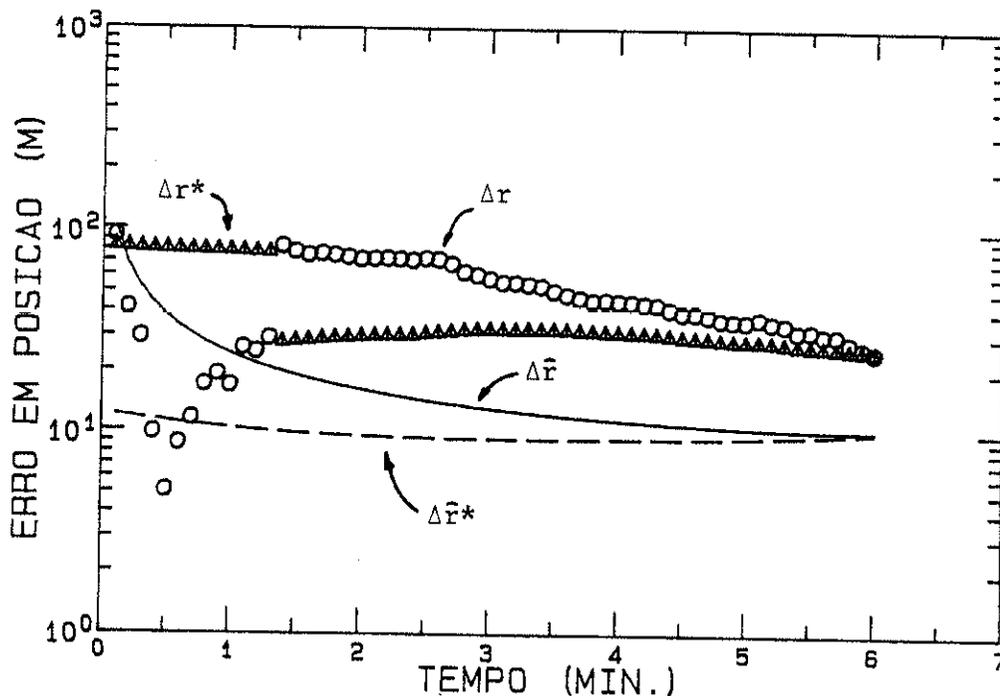


Fig. 8.22 - Erros em posição do filtro e do suavizador para manobra não modelada

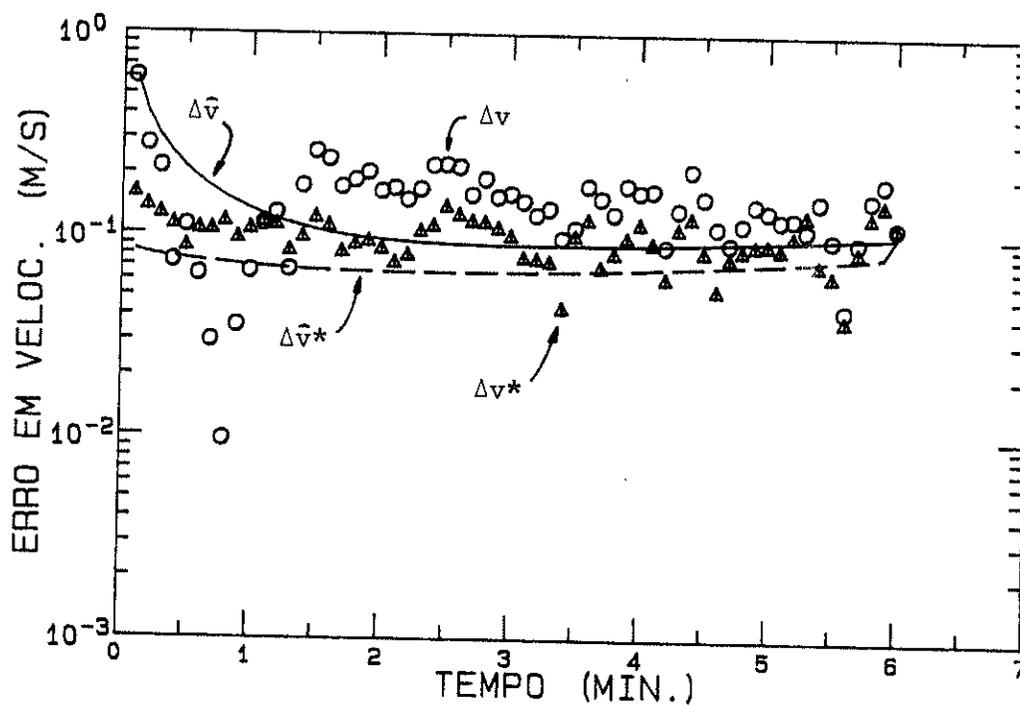


Fig. 8.23 - Erros em velocidade do filtro e do suavizador para manobra não modelada

8.5 - AVALIAÇÃO DOS CUSTOS COMPUTACIONAIS DO SUAVIZADOR UD

O suavizador foi analisado sob 2 aspectos computacionais: memória de armazenamento e gasto de "CPU". No caso de problemas lineares, o suavizador RTS (Capítulo 3) exige o armazenamento de  $\hat{x}$  e  $\hat{P}$  a cada passo, reconstituindo  $\bar{x}$  e  $\bar{P}$  através do conhecimento da matriz de transição e do ruído dinâmico. Já o suavizador UD proposto requer o armazenamento de  $\bar{x}$ ,  $\lambda_i$ , e  $v_i$ ,  $i=1, \dots, r$ . No caso do problema não-linear de determinação de órbita, o suavizador RTS exigiria o armazenamento de  $\bar{x}$ ,  $\hat{x}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\hat{P}$  e  $\phi$ . O suavizador UD proposto requereu o armazenamento de  $\bar{x}$ ,  $\hat{x}$ ,  $\lambda_i$ ,  $v_i$ ,  $g_i$ , e  $\phi$ . A Tabela 8.2 expõe em perspectiva estes valores.

TABELA 8.2

ARMAZENAMENTO NECESSÁRIO POR PASSO

Suavizador	quantidade de variáveis	n=6 r=3
RTS linear	$n(n+3)/2$	27
UD linear	$n+r(n+1)$	27
RTS não-linear	$n(n+3)+n^2$	90
UD não-linear	$2n+r(2n+1)+n^2$	87

Para valores maiores de n e menores de r a vantagem do suavizador UD aumenta consideravelmente, exigindo menos memória de armazenamento, tanto no caso linear quanto não-linear.

Foram realizadas algumas medidas do tempo de processamento ("CPU") do suavizador para o processamento de 360 pontos correspondentes a 6 minutos de intervalo de suavização. A Tabela 8.3 mostra os resultados.

TABELA 8.3

GASTOS DE CPU DO SUAVIZADOR E FILTROS UD

algoritmo	"CPU"(seg.)
UD convencional	39,40
UD adaptativo	46,27
UD adaptativo + armazenamento	54,53
suavizador UD	15,87

Nota-se que o suavizador UD gasta uma porcentagem de "CPU" menor que 35% em relação ao filtro UD convencional, porém incrementa o processo de filtragem em 18% para o cálculo e armazenamento de variáveis a serem utilizadas no suavizador. Ainda assim, este gasto adicional de tempo é irrelevante face ao tempo total de filtragem, e mais importante, face à melhoria geral dos resultados que o suavizador proporciona. O gasto de "CPU" devido ao suavizador pode assim ser considerado marginal em relação ao gasto devido à filtragem. Conclui-se portanto que se requisitos de tempo real não estiverem presentes, é desejável o uso combinado do estimador UD com o suavizador UD, levando em conta que os algoritmos UD necessários são os mesmos para ambas as fases, e que o suavizador UD é facilmente implementado na forma proposta. Além disso deve-se notar que pode-se implementar o suavizador para realizar os cálculos que corrigem (suavizam) somente o estado, ou somente a covariância independentemente, acarretando ainda em maior economia de "CPU".

### 8.6 - DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA DE LONGOS ARCOS

Esta seção tem por finalidade observar o desempenho do filtro adaptativo UD em situações onde se deseja a determinação de órbita durante longos períodos de tempo (longos arcos de órbita). Neste caso, requisitos de tempo real não estão presentes, porém ele corresponde a um caso onde alguns tipos de problemas, diferentes dos do caso de tempo real (seção 8.2), se tornam transparentes. Basicamente, os testes seguintes mostram os resultados do filtro adaptativo UD quando a taxa de amostragem é baixa (observações a cada 5 min.), quando poucas estações de rastreamento coletam dados sobre a órbita do satélite, e quando um longo tempo de filtragem é requerido.

A taxa de amostragem baixa, ou seja, o intervalo de discretização grande de 5 min., modifica o projeto do filtro, pois obriga a um estudo da matriz  $G$  que adiciona o efeito do ruído dinâmico na matriz de covariância. Considerações de controlabilidade foram utilizados, conforme a Seção 4.1.6, para produzir tal matriz.

O efeito de poucas estações monitorarem a órbita simultaneamente, se traduz em impacto na observabilidade local, pois a estação (ou estações) pode estar em posição geométrica desfavorável para observar o arco orbital desejado.

A determinação em longos arcos permite observar o comportamento do filtro, quando longos períodos de filtragem são necessários. Por outro lado, neste caso, requisitos de tempo real não são necessários. Com isto o modelo dinâmico pode ser melhorado para aumentar o desempenho do filtro, como se verá a seguir.

Procurou-se realizar uma simulação realística de determinação de órbita durante a fase de transferência de uma órbita altamente excêntrica para uma órbita circular. Trata-se da órbita do satélite GIOTTO, lançado em meados de 1985, cuja missão primordial foi o encontro com o cometa Halley. A órbita de transferência monitorada corresponde a um arco orbital de aproximadamente  $668^\circ$  (quase 2 revoluções), onde a máxima altitude é de 35809 km (apogeu), e a mínima é de 206 km (perigeu). Os seguintes valores correspondem à definição da órbita:

1 - Instante inicial (tempo universal)

1985/07/02 18:00:00

2 - Elementos orbitais clássicos

$a$  = semi-eixo maior = 24385,403 km

$e$  = excentricidade = 0,73

$i$  = inclinação =  $7^\circ$

$\Omega$  = longitude do nodo ascendente =  $264,54^\circ$

$\omega$  = argumento do perigeu =  $178,23^\circ$

$M$  = anomalia média =  $217,06^\circ$

Três estações de rastreamento participaram da campanha de lançamento e monitoração:

1 - Malindi: longitude  $\lambda = 40,194250^\circ$  E  
latitude  $\phi = 2,995639^\circ$  S  
altitude  $H = -7,4$  m

2 - Carnarvon:  $\lambda = 113,706410^\circ$  E  
 $\phi = 24,866212^\circ$  S  
 $H = 70,0$  m

3 - Kourou:  $\lambda = 52,640405^\circ \text{ W}$

$\phi = 5,098794^\circ \text{ N}$

$H = 157,0 \text{ m}$

As Figuras 8.24 e 8.25 ilustram a geometria da órbita em relação à Terra e às estações de rastreamento. Notar que a aparente deformação do arco da órbita é devida à plotagem da órbita no sistema terrestre.

As principais motivações para a escolha dessa missão como teste foram a existência de dados reais (cedidos pela ESA - European Space Agency) e, conseqüentemente, uma análise de covariância mostrando a precisão esperada, a dificuldade de modelagem (órbita altamente excêntrica com perigeu de cerca de 206 km e apogeu de 35809 km de altitude), a baixa disponibilidade de informação (baixa taxa de amostragem e geometria de estações não ótima), e principalmente a ilustração do desempenho dos algoritmos de filtragem e suavização para um caso prático.

A geração dos dados de observações foi realizada por meio de integração numérica de órbita (Kuga e Silva, 1984) considerando efeitos do geopotencial, cujos coeficientes dos harmônicos esféricos zonais e tesserais/setoriais foram truncados na ordem 6 e 4 respectivamente, efeitos do arrasto atmosférico (atividade solar intensa), efeitos de pressão de radiação, e efeitos da atração gravitacional do Sol e da Lua. As observações de "range" e "range-rate" foram simuladas com uma taxa de amostragem de 5 min. entre observações quando o satélite estava visível às estações, com desvios-padrão de 10m e 0,1 m/s respectivamente, que correspondem aproximadamente às precisões do sistema DSN ("Deep Space Network") da ESA.

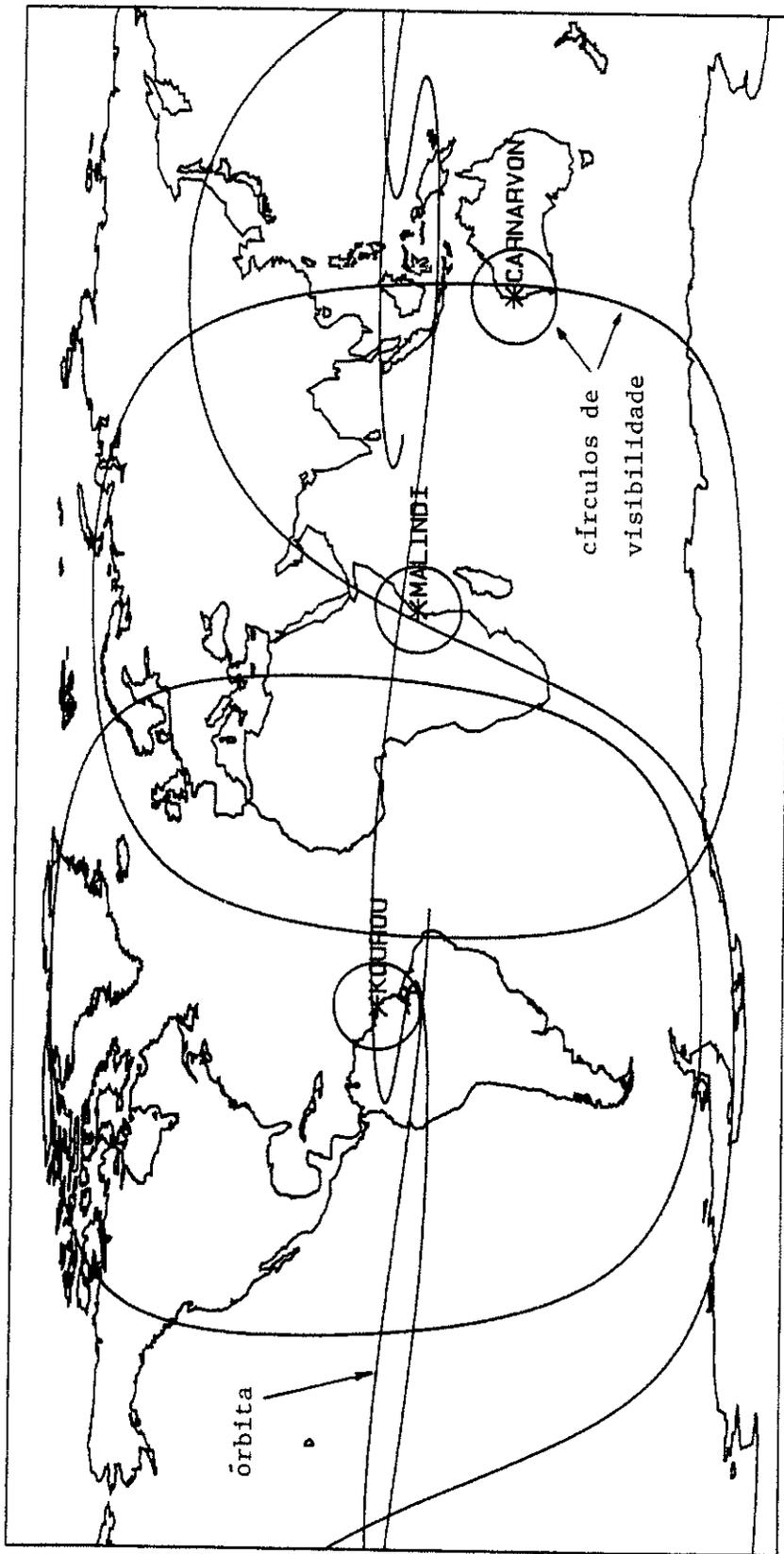


Fig. 8.24 - Geometria entre a órbita do satélite GIOTTO e as estações de rastreamento (projeção de Mercator)

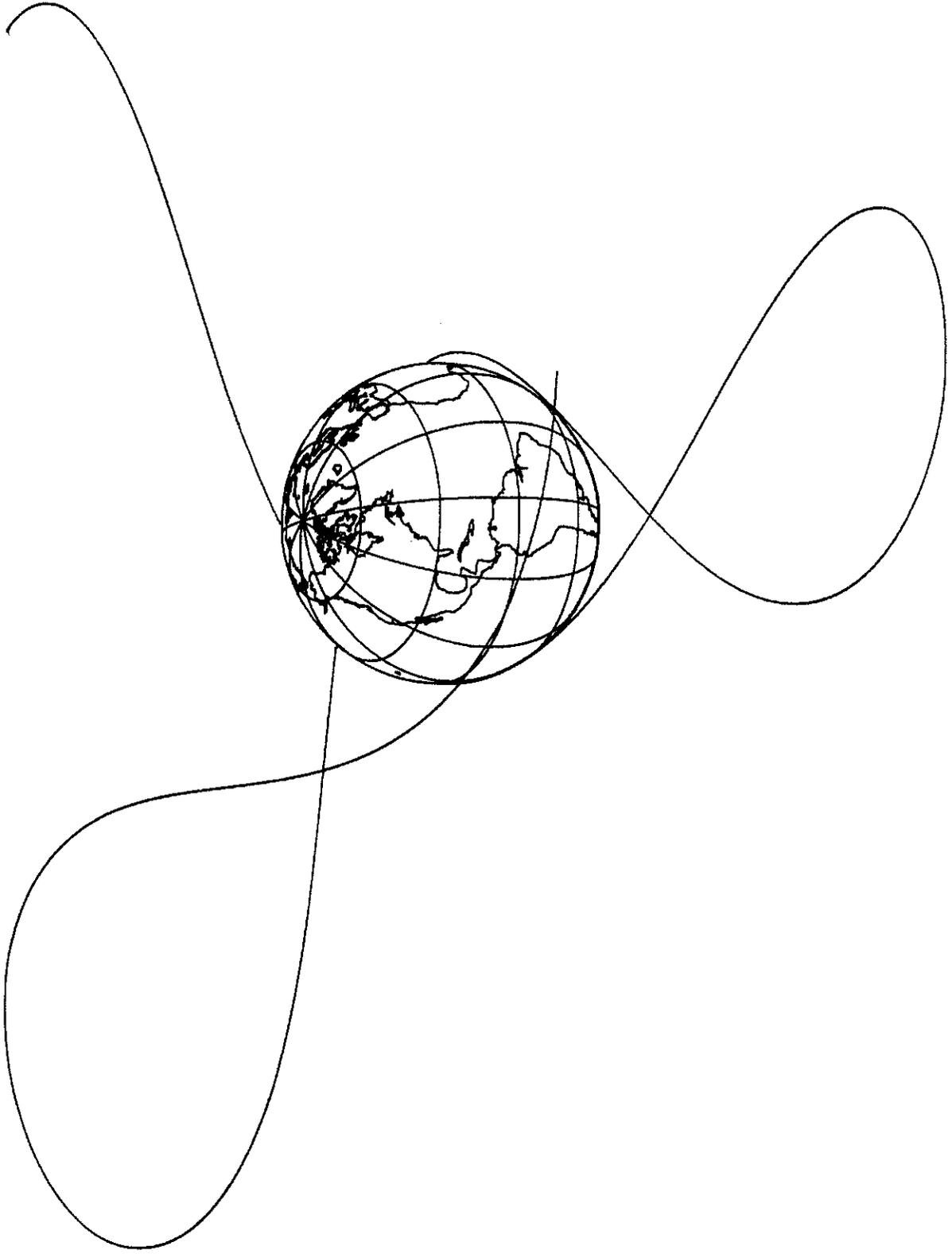


Fig. 8.25 -- Geometria entre a órbita do satélite GIOIIO e a Terra girante (Projeção ortográfica)

Os erros iniciais do estimador são gerados aleatoriamente, de modo que o erro inicial em posição ( $\Delta r(0)$ ) é de 2094m e em velocidade ( $\Delta v(0)$ ) é de 1,42 m/s, consistente com valores típicos observados na prática. A matriz de covariância inicial foi considerada diagonal com os valores, a favor da segurança, correspondentes a 3000m e 3m/s de erros nas componentes de posição e velocidade respectivamente:

$$P(0) = \text{diag.} (9.10^6, 9.10^6, 9.10^6, 9, 9, 9) \text{ m}^2 \text{ e } \text{m}^2/\text{s}^2$$

O ruído adaptativo foi inicializado com os seguintes valores:

$$\hat{q}(0) = \text{diag.} (10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}) \text{ m}^2/\text{s}^4,$$

$$p_q(0) = \text{diag.} (9.10^{-12}, 9.10^{-12}, 9.10^{-12}) \text{ m}^4/\text{s}^8$$

onde os valores de  $\hat{q}(0)$  são mantidos iguais ao do caso de determinação de órbita de curto período em tempo real (Secção 8.2), e os valores de  $p_q(0)$  são justificados na Secção 8.6.2.

A matriz  $G$  não foi calculada pela regra do trapézio (conforme Secção 4.1.5) devido ao intervalo de discretização de 5 min. não permitir tal aproximação. Ao invés, ela foi avaliada, conforme proposto na Secção 4.1.6, através da imposição de controlabilidade ao sistema  $(\phi, G)$ . O último valor singular da matriz de controlabilidade foi assumido unitário, de modo que:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} \\ -11 \\ G_{21} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ -11 \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix}; \quad \sigma = 1$$

O maior valor singular da matriz de controlabilidade corresponde neste caso ao valor do intervalo de

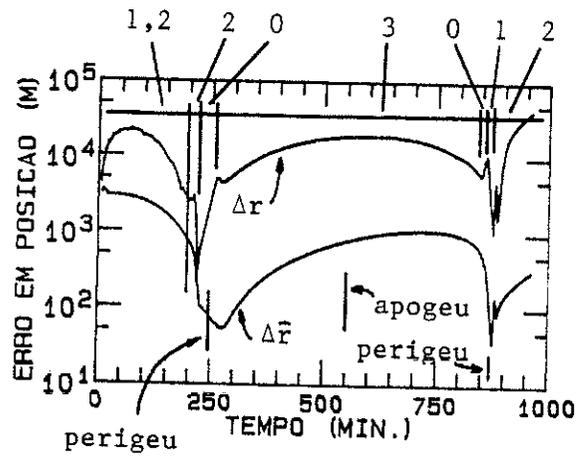
discretização de 300s (5 min.). É interessante notar que essa matriz  $G$  é aproximadamente a que seria obtida para um intervalo de discretização  $\Delta t$  da ordem de 1s, que é o intervalo típico para aplicações de tempo real em determinação de órbita.

Os testes seguintes mostram os resultados da aplicação do estimador adaptativo UD para dois tipos de modelagem dinâmica.

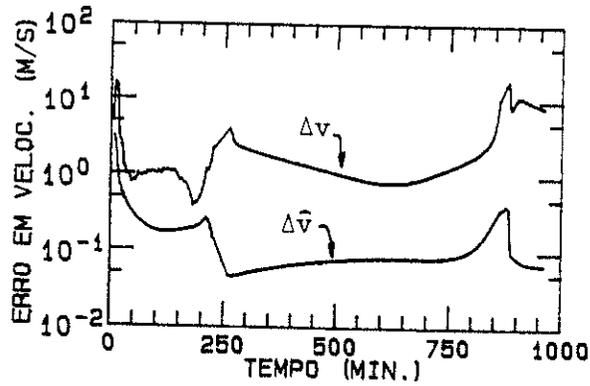
### 8.6.1 - MODELO DINÂMICO DOS DOIS CORPOS

Nestes testes, o modelo dinâmico mais simples, o movimento kepleriano puro, foi utilizado. Convém lembrar que nos testes anteriores, onde havia observações em abundância (Seção 8.2), este modelo foi suficiente para produzir resultados satisfatórios.

A Figura 8.26 mostra os erros em posição e velocidade reais e estimados produzidos pelo filtro. Esta figura mostra também, indicada na parte superior, as estações, a cada instante, observando o satélite. A identificação das estações segue a numeração proposta na introdução da Seção 8.6, e o número zero significa que nenhuma estação observa o satélite. Os tempos de passagem pelo perigeu e apogeu da órbita também estão indicados na mesma figura. Notam-se alguns fatos peculiares: no intervalo onde há 2 estações (0 a 205 min.), os erros reais de posição e de velocidade cresceram inicialmente, e mostram-se algo superiores à covariância correspondente, porém sem aparente indicação de divergência. O perfil de erros é o mesmo da covariância, o que mostra que o filtro está rastreando o erro, porém não sendo bem sucedido em diminuir seu nível aquém de certos limites.



a) Erros em posição



b) Erros em velocidade

Identificação das estações:

- 0 - sem visibilidade
- 1 - Malindi
- 2 - Carnarvon
- 3 - Kourou

Fig. 8.26 - Erros do filtro adaptativo UD para modelo kepleriano puro

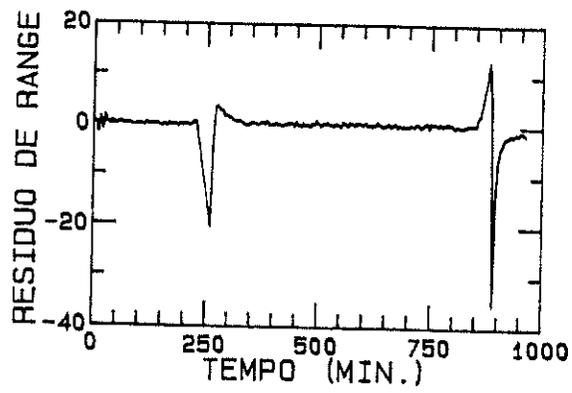
A Figura 8.27 mostra os resíduos normalizados de "range" e "range-rate". O comportamento dos resíduos mostra que de fato nenhuma divergência está presente, pois os resíduos mantêm média nula e estão preferencialmente na faixa de 1 desvio-padrão.

Os picos se referem a instantes imediatamente posteriores a um intervalo sem estações de monitoramento, onde naturalmente os resíduos devem crescer devido à propagação sem atualização das estimativas. Logo, a maior magnitude dos erros em relação à covariância não é devido a ocorrência de divergência. Este fenômeno assemelha-se ao ocorrido quando erros de truncamento, devido ao uso de precisão simples, não permitiram melhor desempenho do filtro (vide Figura 8.1 na Seção 8.1). Como os programas estão codificados em precisão dupla, esta não é a causa do mau desempenho.

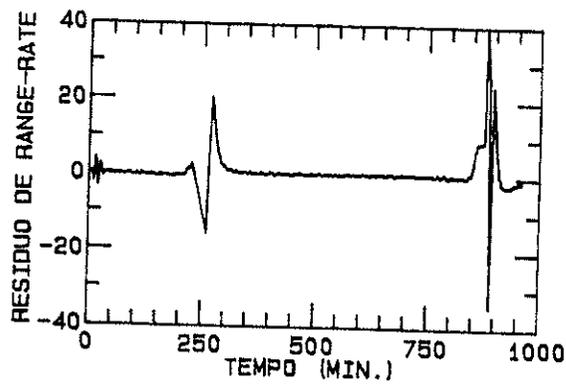
Ressalte-se ainda, que várias condições iniciais do ruído adaptativo foram tentadas sem sucesso, adotando-se por fim os valores descritos na introdução desta Seção 8.6. A justificativa sobre a escolha dessas condições está comentada na seção seguinte, onde mostra-se que o modelo demasiado simples de dois corpos é a causa da não melhoria das estimativas.

#### 8.6.2 - MODELO DINÂMICO CONSIDERANDO O FATOR $J_2$

Nestes testes, o modelo dinâmico dos dois corpos é substituído por um modelo melhor, que retrata aproximadamente perturbações de primeira ordem, devido ao fato da Terra não ser uma esfera homogênea. Tanto para o cálculo de propagação de órbita quanto para o cálculo da matriz de transição, o modelo dinâmico considera o fator de achatamento terrestre, retratado por meio do coeficiente zonal  $J_2$ .



a) Resíduos de "range"



b) Resíduos de "range-rate"

Fig. 8.27 - Resíduos normalizados do filtro adaptativo UD para modelo kepleriano puro

Pelo fato de não existirem soluções analíticas, a órbita e a matriz de transição são integradas numericamente através de um integrador do tipo Runge-Kutta de sétima ordem de passo fixo, com coeficientes de Fehlberg (1968). Melhor precisão do modelo dinâmico é obtida, às custas de um tempo de processamento adicional, sem grandes consequências, devido à não necessidade de operações em tempo real, como já comentado.

Uma análise grosseira mostra que a magnitude da aceleração principal devida ao movimento kepleriano puro, para esta órbita, varia de 0,2 a 9 m/s<sup>2</sup>. A magnitude da aceleração devida ao fator de achatamento terrestre é cerca de 1000 vezes menor. Logo, o modelo considerando o movimento kepleriano puro propicia uma diferença no cálculo da aceleração de  $0,2 \times 10^{-3}$  a  $9 \times 10^{-3}$  m/s<sup>2</sup>, em relação àquela que considera o coeficiente  $J_2$ . Em 5 min., que é o intervalo mínimo de propagação e discretização, o modelo acumularia erros de magnitude tais que explicam os resultados obtidos (Figura 8.26) com o modelo simples dos dois corpos, para tais intervalos de discretização.

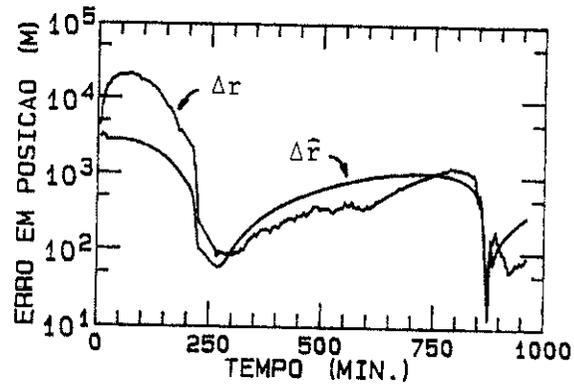
Uma vez que a precisão do modelo dinâmico é aumentada, a magnitude das acelerações não modeladas diminui. Se o coeficiente  $J_2$  acarreta uma aceleração de cerca de  $10^{-3}$  m/s<sup>2</sup> a ser adicionada à aceleração do movimento kepleriano puro, a aceleração não modelada deve certamente ser ao menos inferior a  $10^{-3}$  m/s<sup>2</sup>. Em Kuga (1982) é mostrado, para vários tipos de perturbações agentes na órbita, uma tabela comparativa da magnitude das perturbações, que sugere que a magnitude das acelerações não modeladas deve ser inferior a  $10^{-3}$  m/s<sup>2</sup>. Daí vêm a justificativa para os valores das condições iniciais dos elementos da matriz de covariância para o processo do ruído adaptativo:  $P_q(0) = \text{diag.} [3. (10^{-3})^2]^2 \text{ m}^4/\text{s}^6$ . Os valores

iniciais das estimativas de  $q$ ,  $\hat{q}(0)$ , foram mantidos iguais aos dos testes da Seção 8.2.

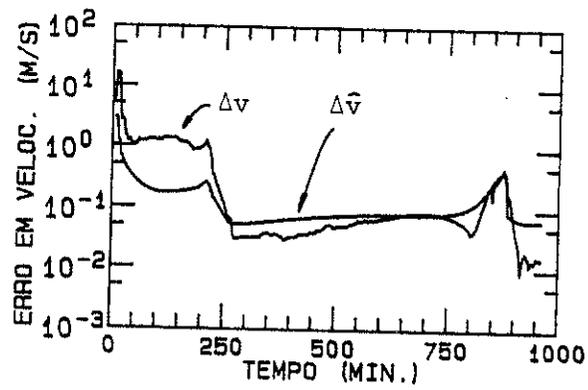
Nota-se, portanto, que o nível de ruído dinâmico para compensar os erros de modelagem e evitar a divergência, deve ser menor neste caso do que no caso anterior de curto período e tempo real (Seção 8.2), devido à modelagem mais sofisticada.

A Figura 8.28 mostra os erros em posição e velocidade reais e estimados (covariância) produzidos pelo filtro. Nota-se aí um considerável aumento de precisão, em relação ao teste da Figura 8.26, devido ao melhor modelo dinâmico. É interessante notar que o perfil da covariância neste caso se assemelha ao caso do filtro com modelo dinâmico simplificado (Seção 8.6.1). Logo, pode-se inferir que não é o cálculo da covariância a causa da degradação das estimativas, e sim a modelagem dinâmica pobre. Outro fato peculiar é a influência das condições de observabilidade. Quando 2 estações rastreiam o satélite (0 a 205 min.), os erros reais se comportam de modo semelhante nos dois casos: modelo simplificado e modelo com o fator  $J_2$ . Esta maior observabilidade neste intervalo compensa o modelo dinâmico pobre. Entretanto, quando só uma estação rastreia o satélite (205 a 220 min., 255 a 855 min., e 870 a 955 min.), a observabilidade é pobre e o modelo dinâmico simplificado introduz erros não captados pelo filtro. Em outras palavras, piores condições de observabilidade devem ser compensados com modelos dinâmicos melhores.

A Figura 8.29 mostra os resíduos normalizados de "range" e "range-rate". O comportamento dos resíduos é normal e os picos pouco acentuados correspondem ao intervalo sem rastreamento do satélite, onde o crescimento dos resíduos é normal. Aquí, porém, mesmo estes picos mantiveram-se na faixa de três desvios-padrão.

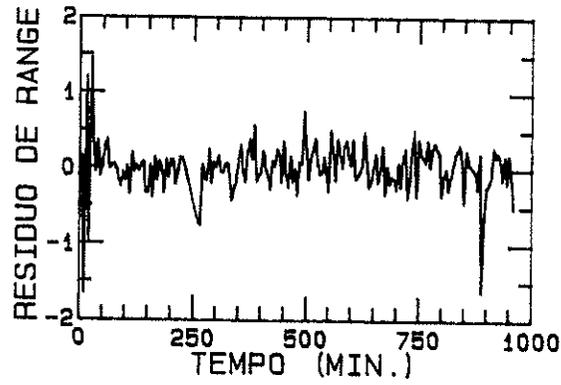


a) Erros em posição

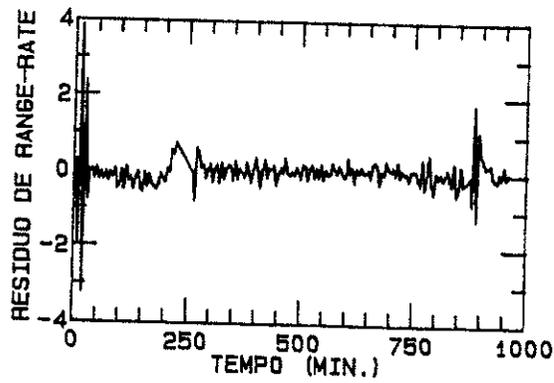


b) Erros em velocidade

Fig. 8.28 - Erros do filtro adaptativo UD para modelo com  $J_2$



a) Resíduos de "range"



b) Resíduos de "range-rate"

Fig. 8.29 - Resíduos normalizados do filtro adaptativo UD para modelo com  $J_2$

8.6.3 - ANÁLISE COMPUTACIONAL DO FILTRO ADAPTATIVO UD PARA LONGOS ARCOS

Neste caso foram processados somente 225 observações, e o maior custo computacional deve-se realmente aos chamados cálculos dinâmicos, em particular, à integração da órbita e da matriz de transição. A Tabela 8.4 mostra o tempo de "CPU" gasto quando se usa o modelo simplificado (solução analítica) e o modelo melhorado com o coeficiente  $J_2$ , integrado numericamente. O modelo com  $J_2$  introduz um gasto adicional de tempo de "CPU" de 11,4 s, ou seja, 65% de incremento percentual de tempo de "CPU".

TABELA 8.4

TEMPOS DE "CPU" DO FILTRO UD PARA OS 2 MODELOS DINÂMICOS

modelo dinâmico	"CPU"(seg. )
simplificado	17,61
considerando $J_2$	29,01

As Seções 8.6.1 e 8.6.2 mostraram o impacto da modelagem dinâmica na precisão do estimador. Observando-se que requisitos de tempo real não são adstringentes, poder-se-ia sofisticar a modelagem até o limite deste requisito (1 ciclo de propagação e atualização em 5 min. neste caso). Estudos poderiam ser realizados para determinar o grau de sofisticação do modelo. Assim, o cálculo da matriz de transição considerando somente a perturbação do achatamento terrestre possivelmente seria suficiente para obter razoável precisão (May, 1979; Rice, 1967), embora esta proposição não esteja consistente com a dinâmica do estado. Algumas observações neste sentido já foram feitas na Seção 6.3.

Em resumo, para este tipo de aplicação, o filtro adaptativo UD deve-se preocupar com o grau de sofisticação do modelo dinâmico dependente do tipo de geometria das estações de rastreamento. Uma situação de observabilidade favorável (mais de 1 estação rastreando o satélite simultaneamente) pode bem permitir o projeto do filtro com um modelo dinâmico menos sofisticado.

### 8.7 - SUAVIZAÇÃO DE ÓRBITA EM LONGOS ARCOS

Este teste foi colocado para verificar se a aplicação do suavizador UD para tal tipo de problema acarreta algum tipo de melhoria, e também para verificar qual o custo computacional adicional envolvido. Foi aplicado o suavizador UD aos resultados da fase de filtragem, cujo modelo dinâmico considerou o achatamento terrestre (Seção 8.6.2).

As Figuras 8.30 e 8.31 mostram os erros e desvios-padrão filtrados e suavizados (Equações 8.7 a 8.10 e 8.12 a 8.15) superpostos, para a posição e a velocidade respectivamente. É surpreendente o ganho de precisão quando se usa o processo de suavização UD. O suavizador praticamente recuperou e melhorou uma ordem de grandeza os erros reais e, em adição, as covariâncias suavizadas se mostraram consistentes e mais próximas dos erros reais cometidos.

Houve o armazenamento de 16008 valores de ponto flutuante (ver Tabela 8.2 para o cálculo), correspondentes a 184 ciclos de propagação e atualização, durante o processo de filtragem. A Tabela 8.5 mostra os tempos de "CPU" do filtro UD adaptativo sem e com armazenamento das variáveis do suavizador, e o tempo de "CPU" gasto pelo suavizador UD para processar estes valores armazenados.

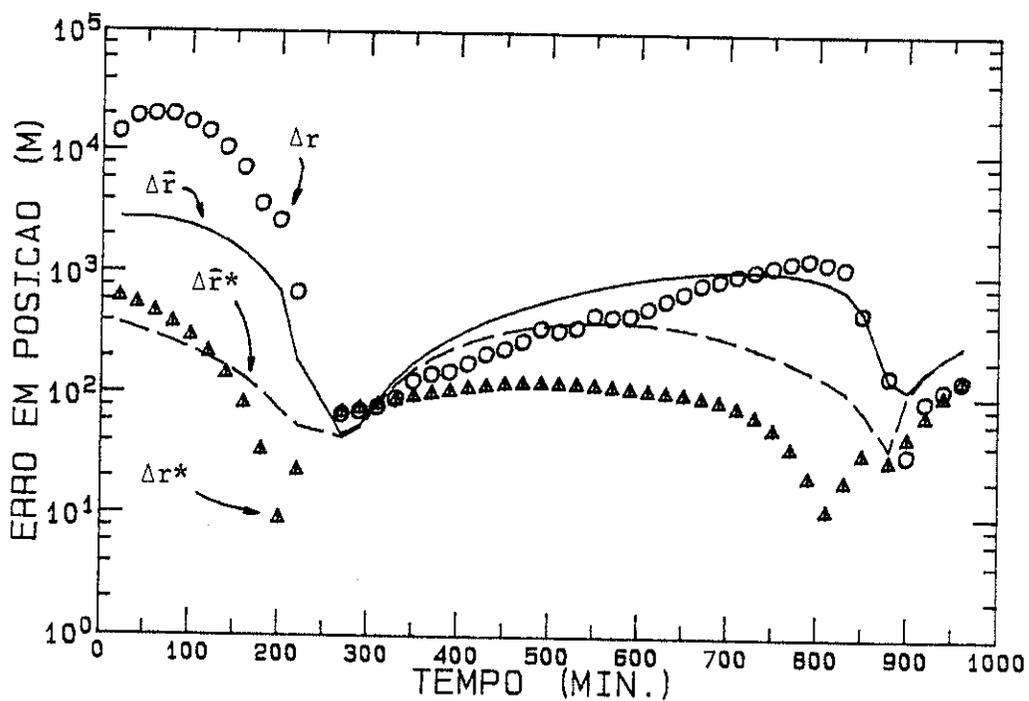


Fig. 8.30 - Erros em posição do filtro e do suavizador para a órbita do satélite GIOTTO

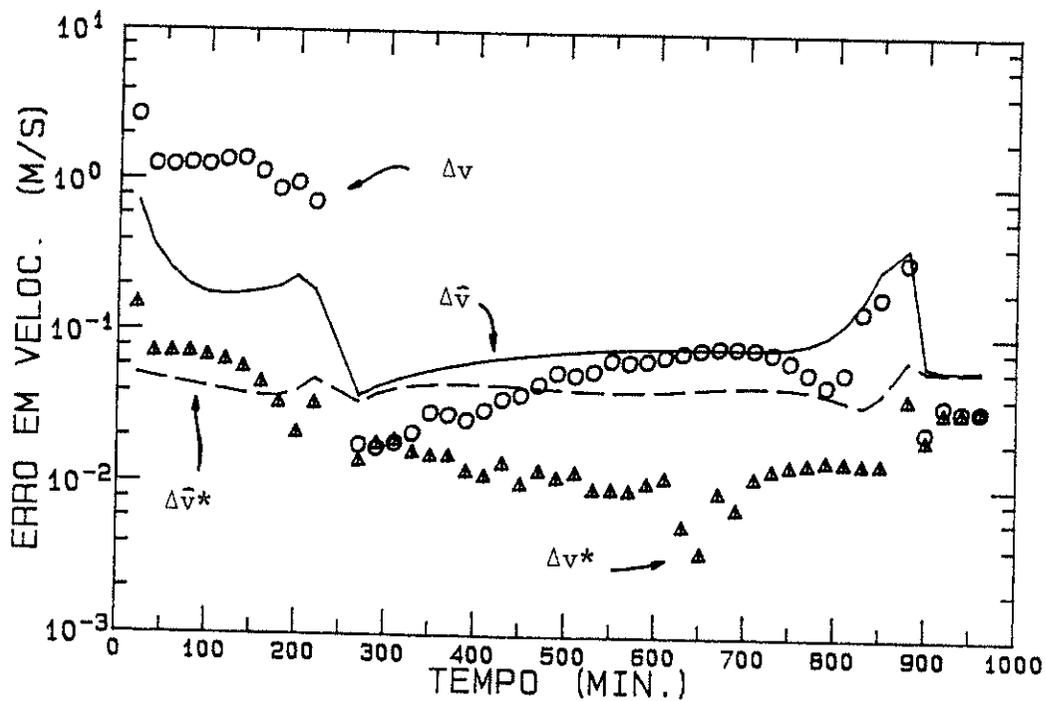


Fig. 8.31 - Erros em velocidade do filtro e do suavizador para a órbita do satélite GIOTTO

TABELA 8.5

TEMPOS DE "CPU" INCLUINDO O PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO

algoritmo	"CPU"(seg.)
UD adaptativo	29,01
UD adaptativo + armazenamento	33,09
suavização UD	8,08

Pode-se notar que o tempo de "CPU" adicional durante a fase de filtragem foi de 14%, e o tempo de "CPU" da fase de suavização é marginal comparado ao da fase de filtragem.

Tendo em vista a flagrante melhoria de precisão com pequeno custo adicional de computação, conclui-se que o suavizador UD pode ser utilizado para refinar tanto as estimativas quanto as covariâncias oriundas do processo de filtragem. É exatamente este custo apenas marginal que permite recomendar enfaticamente a utilização do suavizador UD, apesar da inércia dos analistas em usar técnicas de suavização, devido à não conscientização plena destas capacidades. Novamente, cabe lembrar aqui que o suavizador UD proposto permite a obtenção das estimativas suavizadas somente, ou das covariâncias suavizadas somente, ou ambas, se necessárias.

## CAPÍTULO 9

### CONCLUSÕES GERAIS

#### 9.1 - RETROSPECTO

Foi proposta neste trabalho a determinação de órbitas de satélites artificiais terrestres através de técnicas de estimação combinadas a técnicas de suavização de estado. Inicialmente realizou-se um levantamento bibliográfico do estado da arte em estimação estatística de estado, com especial ênfase a aspectos de implementação computacional. Em seguida, propôs-se um processo de estimação de órbita utilizando o filtro de Kalman em conjunto com técnicas adaptativas, para prevenir a divergência e aumentar as características de robustez do filtro. Algoritmos estáveis numericamente foram desenvolvidos para implementação em computador digital. Também propôs-se um processo de reconstituição definitiva da trajetória orbital, através de técnicas de suavização de estado. Um algoritmo de suavização estável numericamente, eficiente, compacto, e de baixo custo também foi desenvolvido para implementação em computador digital. A utilização conjunta de técnicas de estimação e suavização de estado permitiram não só a determinação de órbita em tempo real, como também a análise pós-vôo e reconstituição precisa da trajetória orbital, aferidos através de extensivas simulações, considerando diversas situações.

#### 9.2 - CONTRIBUIÇÕES

Na linha teórica de estimação, desenvolveu-se o filtro adaptativo UD, aplicável a sistemas lineares, e as modificações necessárias para aplicação a sistemas não-lineares. Desenvolveu-se também o suavizador RTS (Rauch-Tung-Striebel) na versão de Bierman (1983), na forma

fatorizada UD. Esta versão de Bierman do suavizador RTS é considerada a mais compacta e eficiente computacionalmente entre os suavizadores compilados. As modificações do suavizador UD para sistemas não-lineares também foram abordadas. Na linha de análise numérica, o estudo foi orientado para a busca de algoritmos de filtragem e suavização eficientes, compactos, precisos, com particular preocupação com o tempo de "CPU", de memória de armazenamento, e otimização da codificação. Na linha de aplicação, foram realizados estudos dessas técnicas de filtragem e suavização, suas viabilidades, precisões, e custos computacionais, para o problema de reconstituição de órbita em tempo real ou não-real. Neste caso, foi também analisado o impacto de modelagens dinâmicas simples e mais complexas na precisão e no custo computacional. Deve-se lembrar que não se tem, até o momento, conhecimento de algum exemplo do suavizador de Bierman na forma UD aplicado a um problema linear, ou não-linear como o de determinação de órbita.

Tópicos miscelâneos também foram abordados. No Capítulo 2, descreveu-se para sistemas lineares e não-lineares, um modo simples de inclusão da informação a priori no método de mínimos quadrados, quando implementado através de transformações ortogonais. No Capítulo 4 foi analisado em detalhes o cálculo da matriz G que adiciona o ruído dinâmico. Para intervalos de discretização pequenos foi apontada a questão da observabilidade da técnica de ruído adaptativo, dependente da estrutura da matriz H de observações. Para intervalos de discretização maiores desenvolveu-se um método de cálculo da matriz G, através da imposição de controlabilidade mínima, usando noções de controlabilidade e do limiar entre sistemas controláveis e incontroláveis. No filtro adaptativo UD propôs-se a implementação da técnica de ruído adaptativo de 2 maneiras: implementação sequencial UD e implementação em lotes via

ortogonalização de Householder. Foi realizada também uma análise detalhada da complexidade computacional (número de "flops") dos algoritmos de filtragem adaptativa UD e de suavização UD. O Capítulo 8 evidenciou problemas advindos do comprimento finito da palavra do computador, da inicialização mal condicionada do filtro, e complexidade da modelagem dinâmica. Simulações, testes, e comentários dos resultados formaram o restante do capítulo, a fim de mostrar aplicações das mais variadas formas, precisões atingíveis, exequibilidade, e gasto computacional.

### 9.3 - CONCLUSÕES

Em resumo, a técnica de ruído adaptativo, tanto no modo sequencial UD quanto no modo em lotes via ortogonalização de Householder, não é dispendiosa se bem codificada. Em aplicações rotineiras e repetitivas, ela pode ser usada num projeto preliminar para dimensionar o nível de ruído dinâmico adequado a ser utilizado regularmente. No entanto, em aplicações em que o problema de divergência é crítico, é preferível a manutenção permanente dessa técnica adaptativa. Com respeito a técnicas de suavização, o suavizador de Bierman na forma UD é mais preciso, eficiente, e econômico do que o convencional, o RTS original e outros suavizadores. Além disso, o custo computacional do suavizador UD é marginal se comparado com o custo do filtro UD. Este fato, aliado ao fato de melhorar em geral as estimativas do filtro, tornam-no atraente para reconstituição precisa de trajetórias e análises pós-vôo. Espera-se que este trabalho contribua para desmistificar a aparente complexidade dos suavizadores, e quebrar a relutância e descrença de especialistas da área, a fim de incentivar o uso crescente de tais técnicas. Em aplicações de determinação de órbita, o filtro adaptativo UD mostrou-se adequado para requisitos de tempo real. Notou-se, no entanto, que um projeto

cuidadoso exige uma análise do grau de sofisticação do modelo dinâmico em contrapartida à quantidade de informação advinda das observações e da geometria dos observadores. Na reconstituição de órbita, a aplicação do suavizador UD após a filtragem é sempre recomendada caso maior precisão das estimativas seja desejada e se requisitos de tempo real não forem agudos.

#### 9.4 - DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Como é de praxe, descreve-se desdobramentos possíveis do trabalho. A primeira sequência natural seria a aplicação de técnicas de suavização em outras áreas (e.g. determinação de atitude de satélites). Outra idéia interessante, para aplicação na fase de projeto do filtro de Kalman, seria algum tipo de quantificação do grau de observabilidade. Técnicas de decomposição de valor singular, que já são frequentemente utilizados para síntese de sistemas de controle, podem ser úteis para estudar a distância entre sistemas observáveis e não observáveis (análogo à de controlabilidade). Com respeito ao sistema de determinação de órbita, poderia ser analisado o impacto das diferentes formulações das equações do movimento, em relação ao método de integração numérica. Formulações diferentes da newtoniana, tal como a transformação KS (Seção 6.5) para o problema perturbado, poderiam ser aplicados para obter precisão na integração de órbita (Kuga, 1987; Gomes, 1987) e da matriz de transição, diminuindo o custo dos cálculos dinâmicos do processo de determinação de órbita.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALTMAN, S. P. A unified state model of orbital trajectory and attitude dynamics. *Celestial Mechanics*, 6(3): 425-446, May 1972.
- BATTIN, R. H. *Astronautical Guidance*. New York, NY, McGraw Hill, 1964.
- BAUMGARTE, J. Numerical stabilization of the differential equations of keplerian motion. *Celestial Mechanics*, 5(4): 490-501, July 1972.
- BELLANTONI, J. F. ; DODGE, K. W. A square root formulation of the Kalman-Schmidt filter. *AIAA Journal*, 5(4): 1309-1314, July 1967.
- BIERMAN, G. J. A new computationally efficient fixed-interval, discrete time smoother. *Automatica*, 19(5): 503-511, Sept. 1983.
- \_\_\_\_\_ Comment on Sequential estimation algorithm using a continuous UDUT covariance factorization. *Journal of Guidance and Control*, 4(4): 444-446, July-Aug. 1981b.
- \_\_\_\_\_ Efficient time propagation of UD covariance factors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC26(4): 890-894, Aug. 1981a.
- \_\_\_\_\_ *Factorization methods for discrete sequential estimation*. New York, NY, Academic Press, 1977.
- \_\_\_\_\_ Sequential square root filtering and smoothing of discrete linear systems. *Automatica*, 10(2): 147-158, Mar. 1974.

- BIERMAN, G. J. ; THORNTON, C. L. Numerical comparison of Kalman filter algorithms: Orbit determination case study. *Automática*, 13(1): 23-35, Jan. 1977.
- BJORCK, A. Solving least squares problems by Gram-Schmidt orthogonalization. *BIT* 7(1): 1-21, 1967.
- BROUWER, D. ; CLEMENCE, G. M. *Methods of Celestial Mechanics*. New York, NY, Academic Press, 1961.
- BRYSON, A. E. ; HO, Y. C. *Applied optimal control*. Waltham, MA, Blaisdel, 1969.
- BRYSON, A. E. ; FRAZIER, M. Smoothing for linear and nonlinear dynamic systems. In: Optimum System synthesis Conference, 1962, *Proceedings*, 1963.
- BUSINGER, P. ; GOLUB, G. H. Linear least squares solution by Householder transformations. *Numerische Mathematik*, 7(3): 269-276, May 1965.
- BUKY, R. S. ; JOSEPH, P. D. *Filtering for stochastic process with applications to guidance*. New York, NY, John Wiley, 1968.
- CAPPELLARI, J. O. ; VELEZ, C. E. ; FUCHS, A. J. *Mathematical theory of the Goddard trajectory determination system*. Greenbelt, MD, NASA/GSFC, Apr. 1976. (NASA TM X-71106).
- CARDENUTO, N. C. ; RIOS NETO, A. ; KUGA, H. K. Determinação de atitude através de sensores inerciais acoplados ("strapdown") e estimação adaptativa. *Congresso Brasileiro de Automática*, 5., Campina Grande, 3-6 set. 1984. V. 1, p. 420-425.

- CARLSON, N. A. Fast triangular formulation of the square root filter. *AIAA Journal*, 11(9): 1259-1265, Sept. 1973.
- DITTO, F. H. Partial derivatives used in trajectory estimation. *Celestial Mechanics*, 1(1): 130-140, June 1969.
- DYER, P.; MCREYNOLDS, S. Extension of square root filtering to include process noise. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3(6): 444-458, June 1969.
- ESCOBAL, P. R. *Methods of orbit determination*. New York, NY, John Wiley, 1965.
- FEHLBERG, E. *Classical fifth, sixth, seventh, and eighth-order Runge-Kutta formulas with step size control*. Washington, DC, NASA, 1968. (NASA Technical Report R-287).
- FERRARESI, V. A.; RIOS NETO, A.; ORLANDO, V. Utilização conjunta de sensores inerciais e não-inerciais em determinação de atitude de satélites via filtro de Kalman. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 6., Belo Horizonte, MG, 25-28 nov. 1986. *Anais*, Belo Horizonte, UFMG, 1986. V. 2, p. 940-945.5.
- FITZGERALD, R. J. Divergence of the Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC16(6): 736-747, Dec. 1971.
- FLEURY, A. T. *Estimadores de estado de sistemas dinâmicos baseados no conceito de dualidade*. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica. São Paulo, USP. Escola Politécnica, 1985.

- FRASER, D. C. ; POTTER, J. E. The optimum linear smoother as a combination of two optimum filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC14(4): 387-390, Aug. 1969.
- GOLUB, G. Numerical methods for solving linear least squares problems. *Numerische Mathematik*, 7(3): 206-216, May 1965.
- GOLUB, G. H. ; VAN LOAN, C. F. *Matrix computations*. Baltimore, MD, Johns Hopkins University, 1983.
- GOMES, S. C. P. *Investigação sobre os efeitos da transformação de tempo, estabilização e regularização em propagação numérica de órbita*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, São José dos Campos, INPE, dez. 1987. (INPE-4555-TDL/330).
- GOODYEAR, W. H. Completely general closed-form solution for coordinates and partial derivatives of the two-body problem. *The Astronomical Journal*, 70(3): 189-192, Apr. 1965.
- HANSON, R. J. ; LAWSON, C. L. Extensions and applications of the Householder algorithm for solving linear least squares problems. *Mathematics of Computation*, 23(108): 787-812, Oct. 1969.
- HERMANN, R. ; KRENER, A. J. Non linear controlability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC22(5): 728-740, Oct. 1977.
- JACCHIA, L. G. *Revised static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles*. Cambridge, MA, SAO, May 1971. (SAO Special Report no. 332).

- \_\_\_\_\_. *Thermospheric temperature, density and composition: new models*. Cambridge, MA, SAO, Mar. 1977. (SAO Special Report no. 375).
- JAZWINSKI, A.H. Adaptive filtering. *Automatica*, 5: 475-485, 1969.
- \_\_\_\_\_. Limited memory optimal filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC13(5): 558-563, Oct. 1968.
- \_\_\_\_\_. *Stochastic processes and filtering theory*. New York, NY, Academic Press, 1970. .
- JAZWINSKI, A.H. ; HIPKINS, C. J-Adaptive estimation with estimated noise statistics. In: SYMPOSIUM ON SATELLITE DYNAMICS, 4., June 19-21, 1974. [Proceedings]. Berlin, Springer-Verlag, 1975. p. 98-110.
- KAILATH, T. *Linear systems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1970.
- KALMAN, R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME*, 82D(1): 35-50, Mar. 1960.
- KAMINSKI, P.G. *Square root filtering and smoothing for discrete processes*. Doctoral Thesis in Electrical Engineering, Stanford, Stanford University, CA, 1971.
- KAMINSKI, P.G. ; BRYSON JR., A.E. ; SCHMIDT, S.F. Discrete square root filtering: A survey of current techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC16(6): 727-736, Dec. 1971.

- KAMINSKI, P. G. ; BRYSON JR., A. E. Discrete square root smoothing. *AIAA Guidance and Control Conference*, Stanford, CA, Aug. 14-16, 1972. (AIAA Paper no. 72-877).
- KLEMA, V. C. ; LAUB, A. J. The singular value decomposition: Its computation and some applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC25(2): 164-176, Apr. 1980.
- KOVALEVSKI, J. *Introduction to celestial mechanics*. New York, NY, Springer Verlag, 1967.
- KUGA, H. K. *Estimação adaptativa de órbitas aplicada a satélites a baixa altitude*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, São José dos Campos, INPE, fev. 1982. (INPE-2316-TDL/079).
- \_\_\_\_\_ *Matriz de transição do movimento kepleriano elíptico*. São José dos Campos, INPE, jan. 1986. (INPE-3779-NTE/250).
- \_\_\_\_\_ *Métodos numéricos em propagação de órbita de satélites artificiais terrestres*. São José dos Campos, INPE, out. 1987. (INPE-4405-RPE/556).
- KUGA, H. K. ; MEDEIROS, V. M. ; CARRARA, V. *Cálculo recursivo da aceleração do geopotencial*. São José dos Campos, INPE, maio 1983. (INPE-2735-RPE/433).
- KUGA, H. K. ; SILVA, W. C. C. *Gerador numérico de órbitas de satélites artificiais terrestres*. São José dos Campos, INPE, abr. 1984. (INPE-3050-RPE/455).

- LARANGEIRA, J.L. Adaptive system identification via Kalman filter. *Congresso Latino-Americano de Control Automatico*, 2., Buenos Aires, oct. 13-17, 1986. p. 12-16.
- LAWSON, C.L.; HANSON, R.J. *Solving least squares problems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1974.
- LEE, E.B.; MARKUS, L. *Foundations of optimal control theory*. New York, NY, John Wiley, 1967.
- LERCH, F.J.; KLOSKO, S.M.; LAUBSCHER, R.E.; WAGNER, C.A. Gravity model improvement using Geos 3 (GEM 9 and 10) *Journal of Geophysical Research*, 84(B8): 3897-3916, July 1979.
- LOPES, R.V.F. *Determinação de atitude de satélites artificiais através de estimadores de estado*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, São José dos Campos, INPE, dez. 1982. (INPE-2608-TDL/105).
- \_\_\_\_\_ *Estimação adaptativa de estado e análise da taxa de amostragem para sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo*. Tese de Doutorado em Ciência Espacial, São José dos Campos, INPE, 1989. (no prelo).
- LOURENÇÃO, P.T.M. *Otimização do posicionamento de sensores e atuadores visando a obtenção de modelos reduzidos para a síntese de reguladores ótimos em controle de estruturas flexíveis*. Tese de doutorado em Ciência Espacial, São José dos Campos, INPE, dez. 1988. (INPE-4760-TDL/348).

- MAY, J.A. A study of the effects of state transition matrix approximations. Proceedings of a Symposium held at Greenbelt, MD, Oct. 17-18, 1979. Greenbelt, MD, NASA/GSFC, 1980. p.29-48. (NASA CP 2123).
- MAYBECK, P.S. *Stochastic models, estimation and control*. New York, NY, Academic Press, 1979. V.1.
- \_\_\_\_\_ *Stochastic models, estimation and control*. New York, NY, Academic Press, 1982. V.2.
- MEDITCH, J.S. A survey of data smoothing for linear and nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 9(2): 151-162, Mar. 1973.
- MOLER, C.B. *MATLAB User's guide*. Albuquerque, New Mexico, NM, Department of Computer Science, 1980. (Technical Report CS81-1).
- MORO, J. *Modelagem, análise e síntese preliminar de um sistema de controle de atitude ativo em três eixos para satélites artificiais*. Tese de Doutorado em Engenharia Naval, São Paulo, USP. Escola Politécnica, 1983.
- MORO, J.; RIOS NETO, A. Um controlador adaptativo de atitude para satélites artificiais terrestres. In: *Congresso Latino-Americano de Automatica*, 5., Campina Grande, 3-6 set. 1984. V.2., p. 838-843.
- MYERS, K.A.; TAPLEY, B.D. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC21(4): 520-523, Aug. 1976.
- NACOZY, P.E. Time elements. In: SYMPOSIUM ON SATELLITE DYNAMICS, 4., São Paulo, June 19-21, 1974. [Proceedings]. Berlin, Springer Verlag, 1975. p.16-26.

- NASCIMENTO JR., C.L.; YONEYAMA, T. Avaliação de implementações alternativas de filtros de Kalman através do método de Monte Carlo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 5., Belo Horizonte, 25-28 nov. 1986. *Anais*, Vol. 2, p. 610-613.
- NEGREIROS DE PAIVA, R. *Determinação de órbitas de satélites artificiais através de um estimador, na presença de acelerações não-modeladas, usando a transformação KS*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1980b. (INPE-1998-TDL/040).
- \_\_\_\_\_. *Simulação de órbita e de observações de um satélite artificial ao redor da Terra*. São José dos Campos, INPE, dez. 1980a. (INPE-1955-RPE/269).
- NUNES, D.; GUELER, G.F. Recuperação de medidas distorcidas de ondas por meio de estimação de estado. *Congresso Latino-Americano de Automatica*, 5., Campina Grande, 3-6 set. 1984. V.1., p. 149-154.
- OGATA, K. *Modern control engineering*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1970.
- ORLANDO, V.; RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. *Batch and sequential data smoothing and compression by curve fitting using an adaptive state estimation technique*. São José dos Campos, INPE, May 1986. (INPE-3885-PRE/935).
- PAIGE, C.C. Properties of numerical algorithms related to computing controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC26(1): 130-138, Feb. 1981.
- RAMA RAO, K.; KUGA, H.K. *On least squares differential correction method for orbit estimation problem*. São José dos Campos, INPE, July 1987. (INPE-4222-NTI/274).

RAOL, J. R. ; SINHA, N. K. On the orbit determination system.  
*IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*,  
AES21(3): 274-290, May 1985.

RAUCH, H. E. ; TUNG, F. ; STRIEBEL, C. T. Maximum likelihood  
estimates of linear dynamic systems. *AIAA Journal*, 3(8):  
1445-1450, Aug. 1965.

RICE, D. R. An investigation into the effects of using  
simplified force models in the computation of state  
transition matrices. In: AEROSPACE SCIENCES MEETING, 5.,  
New York, NY, Jan. 23-26, 1967. *Papers*. New York, NY,  
AIAA, 1967, p. 1-7. (AIAA Paper-67-123).

RIOS NETO, A. *The estimation of the state and the unmodeled  
atmospheric drag for near earth satellites*. Doctoral  
Thesis in Aeronautical Engineering, Austin, TX,  
University of Texas, 1973.

RIOS NETO, A. ; FLEURY, A. T. State estimation procedure based  
upon the duality concept. In: IASTED INTERNATIONAL  
CONFERENCE ON TELECOMMUNICATION AND CONTROL, 2., Rio de  
Janeiro, Dec. 10-13, 1985. *Proceedings*. Canada, IASTED,  
1985. p. 214-217.

RIOS NETO, A. ; KUGA, H. K. *Estimação adaptativa do ruído no  
estado para estimadores sequenciais*. São José dos  
Campos, INPE, abr. 1982a. (INPE-2385-RPI/069).

\_\_\_\_\_ *Estimação adaptativa do ruído no estado para o  
filtro de Kalman*. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE  
AUTOMÁTICA, 4., Campinas, 14-17 set. 1982b. *Anais*,  
Campinas, UNICAMP, 1982b. p. 101-105.

- \_\_\_\_\_ Kalman filtering state noise adaptive estimation.  
In: IASTED INTERNATIONAL CONFERENCE ON TELECOMMUNICATION  
AND CONTROL, 2., Rio de Janeiro, Dec. 10-13, 1985.  
*Proceedings*. Canada, IASTED, 1985. p. 210-213.
- RIOS NETO, A.; NEGREIROS DE PAIVA, R. An adaptive satellite  
orbit estimation scheme using an analytical approach and  
a dynamical model compensation technique. In: FERRAZ  
MELO, S.; NACOZY, P.E., ed., *The motion of planets and  
natural and artificial satellites*. São Paulo,  
Universidade de São Paulo, IAG, 1983. p. 133-146.
- SCHLEE, F.H.; STANDISH, C.J.; TODA, N.F. Divergence in the  
Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*,  
5(6): 1114-1120, June 1967.
- SCHMIDT, S.F. Application of state space methods to  
navigation problems. In: Leondes, C.T., ed., *Advances in  
Control Systems*. New York, NY, Academic Press, 1966.  
V.16, p. 177-248.
- \_\_\_\_\_ Computational techniques in Kalman filtering. In:  
Theory and Applications of Kalman Filtering, In:  
Leondes, C.T., ed., *Theory and applications of Kalman  
filtering*, Los Angeles, CA, University of California,  
Feb. 1970. p.67-86. (AGARDograph 139).
- SCONZO, P. Explicit expressions for the 36 terms of a  
Jacobian matrix used in orbit computations. *Memorie  
della Societa Astronomica Italiana*, 34(2): 217-232,  
1963.
- SPIER, G.W. *Design and implementation of models for the  
double precision trajectory program (DPTRAJ)*. Pasadena,  
CA, JPL, 1971. (JPL TM-33-451).

- STIEFEL, E. L.; SCHEIFELE, G. *Linear and regular celestial mechanics*. Berlin, Springer Verlag, 1971.
- TAPLEY, B. D.; INGRAM, D. S. Orbit determination in the presence of unmodelled accelerations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC18(4): 369-373, Aug. 1973.
- TAPLEY, B. D.; PETERS, J. G. Reply by authors to G. J. Bierman. *Journal of Guidance and Control*, 4(4): 446-448, July-Aug. 1981.
- \_\_\_\_\_ Sequential estimation algorithm using a continuous UDUT covariance factorization. *Journal of Guidance and Control*, 3(4): 326-331, July-Aug. 1980.
- TARN, T. J.; ZABORSZKY, J. A practical, nondiverging filter. *AIAA Journal*, 8(6): 1127-1133, June 1970.
- THORNTON, C. L.; BIERMAN, G. J. Gram-Schmidt algorithms for covariance propagation. *International Journal of Control*, 25(2): 243-260, Feb. 1977.
- \_\_\_\_\_  $UDU^T$  Covariance factorization for Kalman filtering. In: Leondes, C. T., ed., *Control and Dynamic Systems*. New York, NY, Academic Press, 1980. V.16, p.177-248.
- TRABASSO, L. G. *Anteprojeto de uma unidade de medida inercial não giroscópica*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, maio 1986. (INPE-3887-TDL/220).
- VAN FLANDERN, H. F.; PULKKINEN, K. F. Low precision formulae for planetary positions. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 41(3): 319-411, Nov. 1979.

VERHAEGEN, M. H. Robust adaptive flight-path reconstruction technique for nonsteady longitudinal flight test maneuvers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 11(1): 72-79, Jan.-Feb. 1988.

VERHAEGEN, M. H.; VAN DOOREN, P. Numerical aspects of different Kalman filter implementations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC31(10): 907-917, Oct. 1986.

WALTER, H. G. A comparative study of the calculation of partial derivatives in Space Dynamics. In: SYMPOSIUM ON SATELLITE DYNAMICS, 4., June 19-21, 1974. [*Proceedings*]. Berlin, Springer-Verlag, 1975.

WATANABE, K. A new forward-pass fixed-interval smoother using the UD information matrix factorization. *Automatica*, 22(4): 465-475, July 1986.

WILLSKY, A. L. A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. *Automatica*, 12(6): 601-611, Nov. 1976.



## APÊNDICE A

### TRANSFORMAÇÃO DE HOUSEHOLDER

Uma matriz de transformação ortogonal obedece às seguintes propriedades:

$$T T^T = I \quad (\text{A.1})$$

$$T_1 \text{ e } T_2 \text{ ortogonais então } T = T_1 T_2 \text{ ortogonal} \quad (\text{A.2})$$

$$T^{-1} = T^T \text{ e } T^T T = I \quad (\text{A.3})$$

Dado um vetor  $y$  então:

$$\| Ty \| = \| y \| \quad (\text{A.4})$$

onde  $\| \cdot \|$  é a norma euclidiana.

Dado um vetor  $y$  de dimensão  $m$ , existe uma transformação ortogonal  $T$  tal que:

$$T y = -\sigma \| y \| e_1 \quad (\text{A.5})$$

onde

$$e_1^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{se } y_1 \geq 0 \\ -1 & \text{se } y_1 < 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

A matriz  $T$   $m \times m$  pode ser obtida por (Lawson and Hanson, 1974):

$$T = I_{m,m} - \frac{2uu^T}{u^T u} \quad (\text{A.8})$$

$$u = y + \sigma \|y\| e_1 \quad (A.9)$$

A matriz  $T$  assim calculada chama-se transformação de Householder, matriz de Householder, ou reflexão de Householder. Nota-se que ela obedece às propriedades de uma transformação ortogonal.

Quando um vetor  $y$  é multiplicado por  $T$ , ele é refletido no hiperplano dos vetores perpendiculares a  $u$ , conforme ilustra a figura A1.

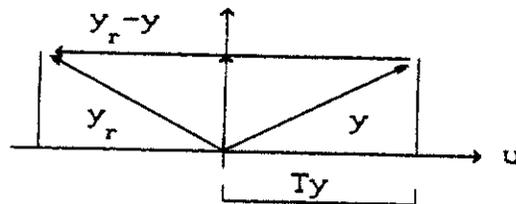


Figura A.1 - Reflexão de Householder.

A escolha apropriada do vetor  $u$  (por exemplo pela Equação A.9), zera elementos da reflexão nas posições convenientes. Portanto, esta observação permite triangularizar uma matriz por meio de uma sequência de transformações de Householder, tratando uma coluna de cada vez e introduzindo zeros nas posições desejadas.

O algoritmo para triangularizar uma matriz  $m \times n$  ( $m \geq n$ ), sem necessidade de calcular explicitamente a matriz de transformação  $T$   $m \times m$ , está descrito em Lawson e Hanson (1974), onde cada transformação introduz zeros ao vetor  $y$  ( $m \times 1$ ) da seguinte forma:

$$T y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ -\sigma (y_p^2 + \sum_{i=l}^m y_i^2)^{1/2} \\ y_{p+1} \\ \vdots \\ y_{l-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \\ \\ \leftarrow p, 1 \leq p \leq m, p < l \\ \\ \\ \leftarrow 1 \\ \\ \leftarrow m \end{matrix} \quad (A.10)$$

O algoritmo seguinte introduz zeros nas posições 1 a m do vetor y e aplica a transformação para a matriz C m x n (Lawson and Hanson, 1974):

Dados p, l, m, y, n, C:

- passo 1:  $s := [y_p^2 + \sum_{i=l}^m y_i^2]^{1/2}$
- passo 2: se  $y_p > 0$  então  $s = -s$
- 3:  $h := y_p - s$ ,  $y_p := s$
- 4:  $b := y_p h$
- 5: se  $b = 0$  or  $n = 0$  fim
- 6: para  $j=1, \dots, n$  passos 7 a 9
- 7:  $s := (C_{pj} h + \sum_{i=l}^m C_{ij} y_i) / b$
- 8:  $C_{pj} := C_{pj} + s h$
- 9: para  $i=1, \dots, m$  faça  $C_{ij} := C_{ij} + s y_i$
- 10: fim

A aplicação desse algoritmo n vezes à matriz C (onde para  $j=1, \dots, n$  e  $l=j+1$ , são introduzidos zeros nas posições de 1 a m à coluna j da matriz), produz a matriz triangular S tal que:

$$T C = \begin{bmatrix} S \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow n,n \\ \\ \leftarrow m-n,n \end{matrix}$$

onde T é o produto das n transformações  $T_j$ . Para resolução da equação de mínimos quadrados:

$$C x = y$$

com C de dimensão  $m \times n$  e y de dimensão m, triangulariza-se C através da matriz T produto, e aplica-se a mesma transformação T ao vetor y. Isto gera uma equação do tipo:

$$\begin{bmatrix} S \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_1 \\ \text{---} \\ y_2 \end{bmatrix}$$

cujas soluções são  $x = S^{-1}y_1$ , e é a de mínimos quadrados, conforme exposto no Capítulo 2.

Em termos de implementação, triangulariza-se uma matriz C aumentada, cuja coluna n+1 contém o vetor y. Assim, a transformação é automaticamente executada também no vetor y, sem necessidade de restaurar T e aplicá-la ao vetor y separadamente. Em FORTRAN, o comando "EQUIVALENCE" permite essa mecanização, com o vetor y compartilhando o mesmo espaço de memória da coluna n+1 da matriz C. Para esta triangularização, este algoritmo de Lawson e Hanson gasta  $n^3/3 + 3n^2 + 8n/3 + (m-n)(n^2 + 2n) + n$  ( $\sqrt{\quad}$ ) "flops", bem menos que a implementação descrita por Kaminski (1971).

## APÊNDICE B

### ALGORITMOS UD COMPLEMENTARES

#### B1 - ALGORITMO UD DE RANK 1

Basicamente, a fatoração UD de rank 1 resolve problemas do tipo:

$$\hat{\hat{U}}\hat{\hat{D}}\hat{\hat{U}}^T := \hat{\hat{U}}\hat{\hat{D}}\hat{\hat{U}}^T + c\lambda\lambda^T \quad (\text{B.1})$$

onde  $c$  é escalar, e  $\lambda$  é um vetor de dimensão compatível com as matrizes  $U$  e  $D$ . O algoritmo é implementado da seguinte forma conforme Bierman (1977), e Thornton e Bierman (1980):

```
para j=n,...,2
  s := λ(j)
  β := cs
  D := d(j) + βs
  se (D ≤ 0) então
    U(i,j) = 0      i=1,...,j
  senão
    β := β/D
    α := d(j)/D
    c := αc
    d(j) := D
    se (α ≥ 1/16) então
      λ(i) := λ(i) - s U(i,j)
      U(i,j) := βλ(i) + U(i,j)      ] i=1,...,j-1
    senão
      D := λ(i) - sU(i,j)
      U(i,j) := βλ(i) + αU(i,j)    ] i=1,...,j-1
    fim
  fim
fim da malha externa
d(1) := d(1) + cλ2(1)
```

onde  $U(\dots)$  e  $d(\dots)$  são elementos das matrizes  $U$  e  $D$  (diagonal) respectivamente. Este algoritmo requer  $n^2 + 4n - 3$  flops para o vetor  $v$  de  $n$  elementos. O vetor  $\lambda$  e o escalar  $c$  são destruídos nesta mecanização.

B2 - FATORIZAÇÃO UD DA EQUAÇÃO 4.50

Visualiza-se facilmente um algoritmo otimizado para calcular os fatores UD da Equação 4.50, com  $n_1$  variando de 0 a  $r-1$ :

```

 $\hat{d}_1 := \hat{d}_1 + \gamma$ 
for  $n_1 = 2, r-1$ 
   $s := \hat{d}(n_1)$ 
   $\hat{d}(n_1) := s + \gamma$ 
   $\beta := s / \hat{d}(n_1)$ 
  for  $i = 1, n_1 - 1$ 
     $U(i, n_1 + 1) := \gamma \beta U(i, n_1 + 1)$ 
  end loop
  rotina rank 1 para resolver a Equação 4.51c:
   $\hat{U}_{n_1-1, n_1-1} \hat{D}_{n_1-1, n_1-1} \hat{U}_{n_1-1, n_1-1}^T := \hat{U}_{n_1-1, n_1-1} \hat{D}_{n_1-1, n_1-1} \hat{U}_{n_1-1, n_1-1}^T$ 
   $+ \gamma \beta \text{col}(U_{1, n_1}) \text{col}(U_{1, n_1}^T)$ 
end loop

```

Equação 4.51b

Este algoritmo otimizado reduz drasticamente a complexidade computacional, pois exige apenas  $r^3/3 + 1,5r^2 - 53r/6 + 9$  flops, quando comparado com o algoritmo de propagação UD via ortogonalização de Gram-Schmidt (Capítulo 2, Seção 2.2.4). Lembrar que o algoritmo de Gram-Schmidt gasta (Thornton e Bierman, 1979, 1980):

$$1,5n^3 + 2n^2 + 0,5n - 1 + (n^2 + n)r \quad \text{"flops"}$$

onde  $n$  é a dimensão do estado e  $r$  é a dimensão do ruído. No presente caso  $n=r$  e portanto este algoritmo gasta:

$$2,5r^3 + 3r^2 + 0,5r - 1 \quad \text{"flops"}$$

## APÊNDICE C

### PROVAS DO SUAVIZADOR DE BIERMAN

Para a confecção deste apêndice, deve-se destacar em particular o auxílio do colega Roberto Vieira da Fonseca Lopes, que colaborou sobremaneira nas provas das recursões aqui presentes. Entretanto, apela-se para os mais "pacientes" que tentem produzir provas mais simples.

A nomenclatura utilizada para as provas sobre as passagens algébricas do suavizador de Bierman (1983), baseadas nas equações de Rauch-Tung-Striebel, RTS, é a seguinte:

- $k$  = instante de tempo discreto
- $\bar{x}(k)$  = estimativa propagada do filtro
- $\hat{x}(k)$  = estimativa atualizada do filtro
- $\hat{x}(k/N)$  = estimativa suavizada
- $x_i^*$  = estimativa suavizada recursiva
- $\bar{P}(k)$  = covariância propagada do filtro
- $\hat{P}(k)$  = covariância atualizada do filtro
- $\hat{P}(k/N)$  = covariância suavizada
- $P_i$  = covariância contendo até a  $i$ -ésima componente de ruído na fase de propagação do filtro de Kalman
- $P_i^*$  = covariância suavizada recursiva
- $C(k)$  = ganho do suavizador RTS (Rauch-Tung-Striebel)
- $C_i$  = ganho recursivo do suavizador
- $\phi$  = matriz de transição entre  $k$  e  $k+1$
- $q_i$  =  $i$ -ésima componente do vetor de ruído  $q(k+1)$
- $g_i$  =  $i$ -ésimo vetor coluna da matriz  $G = (g_1, g_2, \dots, g_r)$

As relações básicas necessárias para o desenvolvimento das provas são as seguintes:

$$\bar{x}(k+1) = \phi \hat{x}(k) \tag{C.1}$$

$$\bar{P}(k+1) = \phi \hat{P}(k) \phi^T + q_1 g_1 g_1^T + \dots + q_r g_r g_r^T \quad (C.2)$$

$$= \phi \hat{P}(k) \phi^T + \sum_{i=1}^r q_i g_i g_i^T$$

$$P_1 \triangleq \phi \hat{P}(k) \phi^T \quad (C.3)$$

$$P_2 \triangleq P_1 + q_1 g_1 g_1^T \quad (C.4)$$

$$P_{r+1} \triangleq P_r + q_r g_r g_r^T = \bar{P}(k+1) \quad (C.5)$$

onde  $\phi$  é tacitamente admitido com índice temporal  $k$ ,  $\phi \triangleq \phi(k)$ . Em seguida, passam-se às provas.

#### C1 - GANHO DO SUAVIZADOR COMO PRODUTÓRIA DE COVARIÂNCIAS

O ganho do suavizador é dado por (Equação 4.64):

$$C(k) = \hat{P}(k) \phi^T \bar{P}^{-1}(k+1) \quad (C.6)$$

Logo, multiplicando a Equação C.6 por  $\phi$  a esquerda, e lembrando as Equações C.2 a C.5, vem:

$$\phi C(k) = \phi \hat{P}(k) \phi^T [ \phi \hat{P}(k) \phi^T + \sum_{i=1}^r q_i g_i g_i^T ]^{-1} \quad (C.7)$$

$$= P_1 P_{r+1}^{-1} \quad (C.8)$$

$$= (P_1 P_2^{-1}) (P_2 P_3^{-1}) (P_3 P_4^{-1}) \dots (P_r P_{r+1}^{-1}) \quad (C.9)$$

Definindo cada  $C_{i+1}$  como:

$$C_{i+1} \triangleq P_i (P_i + q_i g_i g_i^T)^{-1} = P_i P_{i+1}^{-1} \quad (C.10)$$

então:

$$\phi C(k) \triangleq C_2 C_3 C_4 \dots C_{r+1} = \prod_{i=1}^r C_{i+1} \quad (\text{produtório}) \quad (C.11)$$

ou seja,  $\phi C(k)$  é o produtório de  $C_{i+1}$ ,  $i=1, \dots, r$ , onde  $C_{i+1}$ , definido pela Equação C.10, é chamado ganho recursivo do suavizador.

## C2 - GANHO DO SUAVIZADOR USANDO MATRIZES DE "RANK" 1

O ganho  $C_{i+1}$  devido à componente de ruído  $i$  pode ser colocado como o produto:

$$C_{i+1} = P_i ( P_i + q_i g_i g_i^T )^{-1}$$

conforme definido anteriormente (Equação C.10). Pela fórmula de inversão de matrizes de Morris-Sherry-Woodbury vêm:

$$\begin{aligned} P ( P + q g g^T )^{-1} &= P [ P^{-1} - P^{-1} q g ( 1 + g^T P^{-1} q g )^{-1} g^T P^{-1} ] \\ &= I - q g ( 1 + q g^T P^{-1} g )^{-1} g^T P^{-1} \\ &= I - \frac{q g}{1 + q g^T P^{-1} g} g^T P^{-1} \\ &= I - \lambda g v^T \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} v &\triangleq P^{-1} g \\ \lambda &\triangleq \frac{q}{1 + q g^T v} \end{aligned}$$

e onde  $q$  é escalar e  $P$  simétrica. Portanto,  $C_{i+1}$  é função de 2 vetores,  $g_i$  e  $v_i$  (matrizes de "rank" 1):

$$C_{i+1} = I - \lambda_i g_i v_i^T \quad (C.12)$$

$$v_i \triangleq P_i^{-1} g_i \quad (C.13)$$

$$\lambda_i \triangleq q_i / (1 + q_i g_i^T v_i) \quad (C.14)$$

### C3 - PROVA DA RECURSÃO DA COVARIÂNCIA

Dado que a covariância suavizada de RTS, Equação 3.2 vale:

$$\hat{P}(k/N) = \hat{P}(k) + C(k) [ \hat{P}(k+1/N) - \bar{P}(k+1) ] C^T(k),$$

multiplica-se ambos os lados por  $\phi$ , de modo que:

$$\begin{aligned} \phi \hat{P}(k/N) \phi^T &= \phi \hat{P}(k) \phi^T \\ &+ \phi C(k) [ \hat{P}(k+1/N) - \bar{P}(k+1) ] C^T(k) \phi^T \end{aligned} \quad (C.15)$$

Deve-se provar que a seguinte recursão é válida (Equações 4.67c, 4.68 e 4.71):

$$P_{r+1}^* = \hat{P}(k+1/N) \quad (C.16)$$

$$P_i^* = C_{i+1} P_{i+1}^* C_{i+1}^T + \lambda_i g_i g_i^T, \quad i = r, r-1, \dots, 1 \quad (C.17)$$

$$P_1^* = \phi \hat{P}(k/N) \phi^T \quad (C.18)$$

Considerando-se as Equações C.18, C.15 e C.11, é evidente que quando a recursão termina, deve valer:

$$P_1^* = \hat{\phi} \hat{P}(k) \phi^T + \phi C(k) [\hat{P}(k+1/N) - \bar{P}(k+1)] C^T(k) \phi^T \quad (C.19)$$

$$= \hat{\phi} \hat{P}(k) \phi^T + \prod_{i=1}^r C_{i+1} [\hat{P}(k+1/N) - \bar{P}(k+1)] \prod_{i=1}^r C_{i+1}^T \quad (C.20)$$

Para facilitar a notação define-se:

$$[i] \triangleq \prod_{j=1}^i C_{j+1}, \quad [0] \triangleq I \quad (C.21)$$

Considerando-se as Equações C.20, C.21, e C.6, e lembrando que P é simétrica, pode-se escrever:

$$P_1^* = \hat{\phi} \hat{P}(k) \phi^T + [r] \hat{P}(k+1/N) [r]^T - [r] \bar{P}(k+1) \bar{P}^{-1}(k+1) \hat{\phi} \hat{P}(k) \phi^T \quad (C.22)$$

$$= [r] \hat{P}(k+1/N) [r]^T + (I - [r]) \hat{\phi} \hat{P}(k) \phi^T \quad (C.23)$$

Prova:

Para provar que as recursões C.16 e C.17 levam a resultado equivalente, visualiza-se inicialmente a lei de formação das covariâncias, através de aplicações sucessivas da Equação C.17:

$$P_1^* = C_2 P_2^* C_2^T + \lambda_1 g_1 g_1^T \quad (C.24)$$

$$P_2^* = C_3 P_3^* C_3^T + \lambda_2 g_2 g_2^T \quad (C.25)$$

$$P_r^* = C_{r+1} P_{r+1}^* C_{r+1}^T + \lambda_r g_r g_r^T \quad (C.26)$$

Substituindo-se regressivamente  $P_{i+1}^*$  em  $P_i^*$ ,  $i=1, \dots, r$ , através das Equações C.24 a C.26, e considerando as Equações C.16 e C.21, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 P_1^* &= C_2 C_3 P_3^* C_3^T C_2^T + C_2 \lambda_2 g_2 g_2^T C_2^T + \lambda_1 g_1 g_1^T \\
 &= C_2 C_3 C_4 P_4^* C_4^T C_3^T C_2^T + C_2 C_3 \lambda_3 g_3 g_3^T C_3^T C_2^T \\
 &+ C_2 \lambda_1 g_1 g_1^T C_2^T + \lambda_1 g_1 g_1^T \quad (C.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [r] P(k+1/N) [r]^T + [r-1] \lambda_r g_r g_r^T [r-1]^T \\
 &\quad + [r-2] \lambda_{r-1} g_{r-1} g_{r-1}^T [r-2]^T \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \lambda_1 g_1 g_1^T \quad (C.28)
 \end{aligned}$$

$$= [r] P(k+1/N) [r]^T + \sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i g_i^T [i-1]^T \quad (C.29)$$

Comparando a Expressão C.29 desta recursão com a covariância suavizada RTS, na Equação C.23, resta provar que:

$$\sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i g_i^T [i-1]^T \stackrel{?}{=} (I - [r]) \hat{P}(k) \phi^T \quad (C.30)$$

Lembrando que  $C_i = I - \lambda_i g_i v_i^T$ , Equação C.12, e lembrando as Definições C.21, segue que:

$$\begin{aligned}
 [r] &\triangleq \prod_{i=1}^r C_{i+1} = \prod_{i=1}^{r-1} C_{i+1} \cdot (I - \lambda_r g_r v_r^T) \\
 &= \prod_{i=1}^{r-1} C_{i+1} - \prod_{i=1}^{r-1} C_{i+1} \lambda_r g_r v_r^T \\
 &= \prod_{i=1}^{r-2} C_{i+1} (I - \lambda_{r-1} g_{r-1} v_{r-1}^T) - \prod_{i=1}^{r-1} C_{i+1} \lambda_r g_r v_r^T \\
 &= \prod_{i=1}^{r-2} C_{i+1} - \prod_{i=1}^{r-2} C_{i+1} \lambda_{r-1} g_{r-1} v_{r-1}^T - \prod_{i=1}^{r-1} C_{i+1} \lambda_r g_r v_r^T \\
 &\quad \vdots \\
 &= I - \sum_{i=1}^r \left[ \prod_{l=1}^{i-1} C_{l+1} \right] \lambda_i g_i v_i^T \quad (C.31)
 \end{aligned}$$

$$= I - \sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i v_i^T \quad (C.32)$$

Com esta equação e a Equação C.30, nota-se que a identidade a ser provada é:

$$\sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i g_i^T [i-1]^T \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i v_i^T \hat{P}(k) \phi^T \quad (C.33)$$

Lembrando também que  $v_i = P_i^{-1} g_i$ , Equação C.13, desenvolve-se o lado direito:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i v_i^T \hat{P}(k) \phi^T &= \\ &= \sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i g_i^T P_i^{-1} \hat{P}(k) \phi^T \end{aligned} \quad (C.34)$$

e, portanto, nova comparação com a Equação C.33 exige a prova de:

$$P_i^{-1} \phi \hat{P}(k) \phi^T \stackrel{?}{=} [i-1]^T \quad (C.35)$$

o que é facilmente comprovável, considerando-se as Equações C.10, C.18, e C.21:

$$\begin{aligned} P_i [i-1]^T &= P_i \begin{bmatrix} i-1 \\ \prod_{l=1}^{i-1} C_{l+1} \end{bmatrix}^T \\ &= P_i (C_2 C_3 C_4 \dots C_i)^T \\ &= P_i C_i^T \dots C_4^T C_3^T C_2^T \\ &= P_i (P_i^{-1} P_{i-1}) \dots (P_4^{-1} P_3) (P_3^{-1} P_2) (P_2^{-1} P_1) \\ &= P_i \triangleq \phi \hat{P}(k) \phi^T \end{aligned} \quad (C.36)$$

C4 - PROVA DA RECURSÃO DO ESTADO

O estado suavizado de RTS, Equação 3.1, é dado por:

$$\hat{x}(k/N) = \hat{x}(k) + C(k) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ].$$

Multiplicando-se à esquerda por  $\phi$  e considerando-se as Equações C.1, C.11, e C.21 vem:

$$\begin{aligned} \phi \hat{x}(k/N) &= \phi \hat{x}(k) + \phi C(k) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ] \\ &= \bar{x}(k+1) + \phi C(k) [ \hat{x}(k+1/N) - \bar{x}(k+1) ] \\ &= (I - [r]) \bar{x}(k+1) + [r] \hat{x}(k+1/N) \end{aligned} \quad (C.37)$$

Deve-se provar no entanto que a seguinte recursão é válida (Equações 4.67a, 4.67b, 4.68 e 4.70):

$$x_{r+1}^* = \hat{x}(k+1/N) \quad (C.38)$$

$$\delta_i = \lambda_i v_i^T [ \bar{x}(k+1) - x_{i+1}^* ] \quad , i = r, \dots, 1 \quad (C.39)$$

$$x_i^* = x_{i+1}^* + g_i \delta_i \quad , i = r, \dots, 1 \quad (C.40)$$

$$x_1^* = \phi \hat{x}(k/N) \quad (C.41)$$

ou, numa forma equivalente (Equação C.39 em C.40):

$$x_i^* = (I - \lambda_i g_i v_i^T) x_{i+1}^* + \lambda_i g_i v_i^T \bar{x}(k+1) \quad (C.42)$$

Prova:

De acordo com a Recursão C.42 e a Equação C.12, vale:

$$\begin{aligned} x_1^* &= (I - \lambda_1 g_1 v_1^T) x_2^* + \lambda_1 g_1 v_1^T \bar{x}(k+1) \\ &= C_2 x_2^* + \lambda_1 g_1 v_1^T \bar{x}(k+1) \end{aligned} \quad (C.43)$$

$$\begin{aligned} x_2^* &= (I - \lambda_2 g_2 v_2^T) x_3^* + \lambda_2 g_2 v_2^T \bar{x}(k+1) \\ &= C_3 x_3^* + \lambda_2 g_2 v_2^T \bar{x}(k+1) \end{aligned} \quad (C.44)$$

!

Daí, por substituição regressiva, e lembrando a Definição C.21, vem:

$$\begin{aligned} x_1^* &= C_2 C_3 \dots C_{r+1} x_{r+1}^* + C_2 C_3 \dots C_r \bar{x}(k+1) \\ &+ \dots + C_2 \lambda_2 g_2 v_2^T \bar{x}(k+1) + \lambda_1 g_1 v_1^T \bar{x}(k+1) \end{aligned} \quad (C.45)$$

$$= [r] \hat{x}(k+1/N) + \sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i v_i^T \bar{x}(k+1) \quad (C.46)$$

Comparando com o estado suavizado RTS, Equação C.37, e considerando a Equação C.41, resta ainda verificar que:

$$(I - [r]) = \sum_{i=1}^r [i-1] \lambda_i g_i v_i^T$$

que não obstante já foi provado na recursão para a covariância, Equação C.32.

