INPE-6410-TDI/620

# DESENVOLVIMENTO, IMPLEMENTAÇÃO E TESTE DE PROCEDIMENTOS GEOESTATÍSTICOS (KRIGEAGEM) NO SISTEMA DE PROCESSAMENTO DE INFORMAÇÕES GEORREFERENCIADAS (SPRING)

Eduardo Celso Gerbi Camargo

Dissertação de Mestrado em Sensoriamento Remoto, orientada pelas Dras. Suzana Druck Fuks e Corina da Costa Freitas Yanasse, aprovada em junho de 1997.

INPE
São José dos Campos
Junho de 1997

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-6410-TDI/620

# DESENVOLVIMENTO, IMPLEMENTAÇÃO E TESTE DE PROCEDIMENTOS GEOESTATÍSTICOS (KRIGEAGEM) NO SISTEMA DE PROCESSAMENTO DE INFORMAÇÕES GEORREFERENCIADAS (SPRING)

Eduardo Celso Gerbi Camargo

Dissertação de Mestrado em Sensoriamento Remoto, orientada pelas Dras. Suzana Druck Fuks e Corina da Costa Freitas Yanasse, aprovada em junho de 1997.

INPE
São José dos Campos
Junho de 1997

528.711.7:621.376.5

CAMARGO, E. C. G.
Desenvolvimento, implementação e teste de procedimentos geoestatísticos (Krigeagem) no Sistema de Processamento de Informações Georreferenciadas (SPRING) / E. C. G. Camargo. - São José dos Campos: INPE, 1997.
146 p. - (INPE-6410-TDI/620)

1. Geoprocessamento. 2. Análise espacial de dados. 3. Sistema de Processamento de Informações Georreferenciadas (SPRING). I. Título.

Aprovada pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de Mestre em Sensoriamento Remoto

Dra. Corina da Costa Freitas Yanasse
Orientadora/Presidente

Dra. Suzana Druck Fuks
Orientadora

Dra. Thelma Krug
Membro da Banca

Dr. Antônio Roberto Formaggio
Membro da Banca

Dr. Fernando Pellon de Miranda
Membro da Banca
- Convidado -

Candidato: Eduardo Celso Gerbi Camargo

São José dos Campos, 27 de junho de 1997

*"O segredo é colocar-se a caminho, num fazer-se e perfazer-se constantes, num empenho e aperfeiçoamento contínuos"*

***Frei Nilo Agostini***

*À minha esposa Rita de Cássia, meu filho Eduardo e aos meus pais, pelo amor, compreensão e constante incentivo.*

## AGRADECIMENTOS

À Dra. Suzana Druck Fuks, pela orientação, apoio, amizade e ensinamentos úteis na elaboração deste trabalho.

À Dra. Corina da Costa F. Yanasse, pela orientação, apoio, camaradagem e educação, sempre presentes em seu comportamento.

À Chefe da Coordenadoria Geral de Observação da Terra, Dra. Thelma Krug, pela ajuda e espírito de solidariedade.

Ao Mestre Jesus Fernando Mansilla Baca, pela ajuda amiga e pelo apoio em todo tipo de dificuldade.

Ao Dr. Claudio Bettini, pela extrema dedicação aos ensinamentos teóricos ministrados em fevereiro de 1997.

Aos Drs. Antonio Roberto Formaggio e Fernando Pellon de Miranda, pelo apoio e solidariedade.

Ao Centro Nacional de Pesquisas de Solos (CNPS-EMBRAPA), pelos dados cedidos para este trabalho.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), pela oportunidade de aprimoramento profissional.

Finalmente, agradeço a todos que direta e indiretamente colaboraram para a elaboração deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver, implementar e testar um Módulo de Procedimentos Geoestatísticos para o Sistema SPRING (Sistema de Processamento de Informações Georreferenciadas). A base conceitual deste Módulo está fundamentada em técnicas de krigeagem, as quais são derivadas da teoria das variáveis regionalizadas e formalizadas por Matheron (1971). O Módulo de Procedimentos Geoestatísticos compreende um conjunto de ferramentas modulares integradas ao sistema, visando melhorar os procedimentos de interpolação devido à melhor qualidade do estimador e, principalmente, pela informação de acurácia fornecida pelo modelo inferencial empregado. Para estabelecer os algoritmos necessários, utilizou-se a biblioteca geoestatística GSLIB (Deutsch e Journel, 1992). O Módulo foi testado em um estudo de caso onde, a partir de amostras de solos foram feitas interpolações por krigeagem para se obter imagens contínuas da variação do teor de argila nos solos da Fazenda Canchim, em São Carlos, SP. Os resultados obtidos foram expressivos e revelaram a boa adequação das técnicas de krigeagem no estudo em questão. São apresentados também resultados de uma análise comparativa da krigeagem com outros métodos de interpolação disponíveis no SPRING.

# DEVELOPMENT, IMPLEMENTATION AND TEST OF THE GEOSTATISTICS PROCEDURES (KRIGING) FOR THE SPRING (GEOREFERENCED INFORMATION PROCESSING SYSTEM)

## ABSTRACT

The aim of the present work is to develop, to implement and to test a geostatistics package for SPRING (Georeferenced Information Processing System). Kriging techniques, which are derived from Matheron's theory on regionalized variables (Matheron, 1971), are the conceptual basis for the geostatistics package. It comprises a set of integrated tools that can potentially enchance interpolation procedures due to its estimation character and the accuracy information provided by its inference model. GSLIB (Deutsh and Journel, 1992), a geostatistics library, was used to develop the necessary algorithms. A case study was performed with soil samples collected in the Canchim farm, in São Carlos, SP. Kriging interpolation was applied over the samples to generate continuous images of clay content in the soil. Results indicated a reasonable fit of the kriging techniques to the case study. A comparative analysis of kriging and other interpolation methods available in SPRING is also presented.

## SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS ..... xvii
LISTA DE TABELAS ..... xxi

**CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO** ..... 1

**CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA** ..... 3
2.1 - Variáveis regionalizadas ..... 3
2.1.1 - Hipóteses consideradas ..... 5
2.1.2 - Características das variáveis regionalizadas ..... 9
2.2 - Variograma ..... 11
2.3 - Parâmetros do semivariograma ..... 12
2.4 - Cálculo do semivariograma a partir de amostras regularmente espaçadas ..... 14
2.5 - Cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas ..... 15
2.6 - Modelos teóricos ..... 16
2.6.1 - Modelo efeito pepita ..... 16
2.6.2 - Modelo esférico ..... 17
2.6.3 - Modelo exponencial ..... 18
2.6.4 - Modelo gaussiano ..... 18
2.6.5 - Modelo potência ..... 18
2.6.6 - Modelos aninhados ..... 20
2.7 - Anisotropia ..... 22
2.8 - Krigeagem ..... 25
2.8.1 - Krigeagem simples (KS) ..... 26
2.8.2 - Krigeagem ordinária (KO) ..... 29
2.8.3 - Exemplo prático de krigeagem ..... 30

**CAPÍTULO 3 - APRESENTAÇÃO DO MÓDULO GEOESTATÍSTICO** ..... 33
3.1 - Biblioteca geoestatística GSLIB ..... 33
3.2 - Módulo de procedimentos geoestatísticos ..... 35
3.2.1 - Módulo de conversão e transferência de dados ..... 36
3.2.2 - Módulo de análise exploratória ..... 39
3.2.3 - Módulo de geração de PCF ..... 43
3.2.4 - Módulo de geração do semivariograma experimental ..... 45

3.2.5 - Módulo de ajuste do semivariograma experimental ..... 52
3.2.6 - Módulo de validação ..... 56
3.2.7 - Módulo de krigeagem 2D ..... 62

**CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO DO MÓDULO GEOESTATÍSTICO** ..... 67
4.1 - Descrição da região em estudo ..... 68
4.1.1 - Localização e principais características ..... 68
4.1.2 - Geologia e material de origem ..... 69
4.1.3 - Mapa de classes de solos ..... 70
4.2 - Análise geoestatística ..... 73
4.2.1 - Análise exploratória dos dados ..... 73
4.2.3 - Análise de continuidade espacial do teor de argila ..... 76
4.2.4 - Modelagem dos semivariogramas e da anisotropia ..... 82
4.2.5 - Validação do modelo e interpolação de krigeagem ..... 86
4.3 - Análise e apresentação de resultados ..... 90
4.3.1 - Resultados da krigeagem ..... 90
4.3.2 - Krigeagem versus métodos convencionais de estimação ..... 95

**CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS** ..... 101

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 103

**APÊNDICE A - DADOS AMOSTRAIS DA FAZENDA CANCHIM** ..... 107

**APÊNDICE B - NOTAÇÃO UTILIZADA PARA OS MODELOS TEÓRICOS DE SEMIVARIOGRAMA** ..... 111

**APÊNDICE C - MODELAGEM DA ANISOTROPIA** ..... 115

## LISTA DE FIGURAS

**Pág.**


2.1(a) e 2.1(b) - Principais componentes da variação espacial ..... 5
2.2 - Amostragem em duas dimensões ..... 11
2.3 - Exemplo de semivariograma ..... 13
2.4 - Amostras regularmente espaçadas em duas dimensões ..... 14
2.5 - Ilustração para o cálculo do semivariograma a partir de amostras regularmente espaçadas ..... 14
2.6 - Parâmetros para o cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas em duas dimensões ..... 15
2.7 - Representação gráfica de modelos transitivos normalizados ..... 17
2.8 - Representação gráfica do modelo potência ..... 19
2.9 - Representação gráfica de semivariogramas experimentais e modelos teóricos ... 19
2.10 - Representação gráfica de um modelo duplo esférico ..... 21
2.11 - Convenções direcionais usadas na geoestatística ..... 22
2.12 - Representação gráfica de semivariogramas isotrópicos ..... 22
2.13 - Representação gráfica de anisotropia geométrica ..... 23
2.14 - Representação gráfica da anisotropia geométrica em duas dimensões ..... 24
2.15 - Exemplo de anisotropia combinada ..... 25
2.16 - Grade de pontos amostrais ..... 31
3.1 - Estrutura da Biblioteca Geoestatística (GSLIB) ..... 34
3.2 - Estrutura do Módulo de Procedimentos Geoestatísticos ..... 35
3.3 - Interface principal do sistema SPRING ..... 36
3.4 - Interface de conversão e transferência de dados ..... 37
3.5 - Interface de seleção de arquivos de dados ..... 38
3.6 - Visualização de dados amostrais no ambiente SPRING ..... 39
3.7 - Interface de análise exploratória com estatísticas univariadas ..... 40
3.8 - Histograma e estatísticas descritivas ..... 41
3.9 - Gráfico da probabilidade normal e estatísticas descritivas ..... 42
3.10 - Interface de análise exploratória com estatística bivariada ..... 42
3.11 - Diagrama de dispersão ..... 43
3.12 - Interface de geração de PCF ..... 44
3.13 - Interface de parâmetros gerais do semivariograma ..... 46
3.14 - Interface de geração do semivariograma para dado irregular ..... 47

3.15 - Exemplo de arquivo de dado irregular ..... 48
3.16 - Resultados numéricos dos semivariogramas ..... 49
3.17 - Diagrama de dispersão do Lag ..... 50
3.18 - Interface de geração de semivariograma para dado regular ..... 50
3.19 - Definição dos parâmetros para dado regular ..... 51
3.20 - Interface de ajuste do semivariograma experimental ..... 53
3.21 - Seleção de modelos teóricos ..... 53
3.22 - Interface de definição dos parâmetros estruturais ..... 54
3.23 - Resultado gráfico do ajuste do semivariograma experimental ..... 55
3.24 - Resultado numérico do ajuste automático ..... 55
3.25 - Interface de validação do modelo ..... 57
3.26 - Parâmetros de interpolação ..... 58
3.27 - Interface de parâmetros estruturais ..... 59
3.28 - Diagrama espacial do erro ..... 59
3.29 - Localização e valor do erro ..... 60
3.30 - Histograma do erro ..... 60
3.31 - Estatística do erro ..... 60
3.32 - Diagrama de valores verdadeiros versus estimados ..... 61
3.33 - Resultados numéricos da validação ..... 61
3.34 - Interface de krigeagem 2D ..... 62
3.35 - Parâmetros da grade de saída ..... 64
3.36 - Resultados numéricos da krigeagem 2D ..... 65
3.37 - Interface de tranferência de grade para PI ..... 65
3.38 - Visualização da grade e dos dados amostrais no ambiente SPRING ..... 66
4.1 - Localização da Fazenda Canchim ..... 68
4.2 - Mapa geológico da Fazenda Canchim e vizinhanças ..... 69
4.3 - Mapa de solos da Fazenda Canchim ..... 70
4.4 - Distribuição das observações na área de estudo ..... 73
4.5 - Histograma do teor de argila ..... 75
4.6 - Gráfico da probabilidade normal do teor de argila ..... 76
4.7 - Semivariograma omnidirecional do teor de argila ..... 77
4.8 - Semivariogramas direcionais e omnidirecional do teor de argila ..... 78
4.9 - Semivariogramas direcionais 0°, 10°, 90° e 100° ..... 79
4.10 - Semivariogramas direcionais 0°, 45°, 90° e 135° ..... 80

4.11 - Distribuição das observações na área de estudo e realce de corredores com deficiência de amostragem ..... 80
4.12 - Representação gráfica dos modelos teóricos de ajustes aos semivariogramas experimentais nas direções 0° e 90° ..... 82
4.13 - Histograma e estatísticas do erro ..... 86
4.14 - Localização espacial do erro ..... 87
4.15 - Diagrama de valores observados versus estimados do teor de argila ..... 88
4.16 - Grade de valores estimados referente ao teor de argila ..... 89
4.17 - Imagem relativa a GKrV ..... 91
4.18 - Imagem relativa a GKrVe ..... 91
4.19 - Imagem relativa a GKrI ..... 91
4.20 - Imagem relativa a GKrIe ..... 91
4.21 - Imagem relativa a GKrA ..... 91
4.22 - Imagem relativa a GKrAe ..... 91
4.23 - Geologia da região de estudo ..... 93
4.24 - Imagem relativa ao fatiamento da grade GKrV ..... 93
4.25 - Comparação entre o mapa de classes de solos segundo o teor de argila e o mapa de teor de argila gerado através de procedimentos geoestatísticos ..... 94
4.26 - Imagem do mapa geológico ..... 96
4.27 - Imagem relativa a GKrV ..... 96
4.28 - Imagem relativa a GKrI ..... 96
4.29 - Imagem relativa a GID ..... 96
4.30 - Imagem relativa a GMS ..... 96
4.31 - Imagem relativa a GVP ..... 96
4.32 - Imagem 3D proveniente da krigeagem ..... 98
4.33 - Imagem 3D proveniente da MPIQD ..... 98
4.34 - Mapa de solos concebido pelo CNPS segundo teor de argila ..... 99
4.35 - Fatiamento relativo a GKrV ..... 99
4.36 - Fatiamento relativo a GKrI ..... 99
4.37 - Fatiamento relativo a GID ..... 99
4.38 - Fatiamento relativo a GMS ..... 99
4.39 - Fatiamento relativo a GVP ..... 99
B.1 - Representação gráfica de semivariograma e modelo esférico ..... 111
B.2 - Decomposição do vetor distância ..... 112
C.1 - Exemplo de anisotropia geométrica ..... 115

C.2 - Exemplo de anisotropia combinada ..... 118
C.3 - Realce das faixas da anisotropia combinada para decomposição gráfica ..... 119
C.4 - Decomposição gráfica da anisotropia combinada ..... 120
C.5 - Representação gráfica da primeira parcela da decomposição da anisotropia combinada ..... 120
C.6 - Representação gráfica da segunda parcela da decomposição da anisotropia combinada ..... 121
C.7 - Representação gráfica da terceira parcela da decomposição da anisotropia combinada ..... 122
C.8 - Representação gráfica da quarta parcela da decomposição da anisotropia combinada ..... 123

## LISTA DE TABELAS

**Pág.**


2.1 - Percentagem de $H_2O$ em duas amostras distintas A e B ..... 10
3.1 - Estrutura do PCF ..... 44
4.1 - Estatísticas descritivas do teor de argila (em %) ..... 74
4.2 - Parâmetros do semivariograma omnidirecional ..... 77
4.3 - Parâmetros dos semivariogramas direcionais 0° e 90° ..... 78
4.4 - Parâmetros dos semivariogramas direcionais 0°, 10°, 90° e 100° ..... 79
4.5 - Parâmetros dos semivariogramas direcionais 0°, 45°, 90° e 135° ..... 80
4.6 - Parâmetros estruturais ..... 85
4.7 - Parâmetros da krigeagem ..... 88
4.8 - Características dos métodos de estimação ..... 100
A.1 - Dados amostrais da Fazenda Canchim ..... 107
C.1 - Parâmetros estruturais do modelo de anisotropia geométrica ..... 117
C.2 - Parâmetros estruturais do modelo de anisotropia combinada ..... 124

# CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

O desenvolvimento e uso de Sistemas de Informações Geográficas (SIG's) tem crescido visivelmente durante a última década, mas existem ainda muitas oportunidades para o desenvolvimento de pesquisas que contribuam para seu aperfeiçoamento. Openshaw (1988) aponta que a era de mapa digital em SIG está sendo ultrapassada pela demanda de análises geográficas mais específicas e avançadas e que, no futuro, será necessário incorporar procedimentos analíticos mais adequados e interligados com as facilidades existentes para a apresentação de dados geográficos.

A questão focal é, como os dados coletados podem ser convertidos em informações? Em muitos casos, analistas desejam converter os dados para mapas de contorno, diagramas de perspectiva ou imagens, com a finalidade de representar graficamente a variação espacial dos dados. Em outros casos, deseja-se inferir valores em localizações particulares entre os pontos amostrados. Em ambas as situações, o processo de interpolação é necessário.

Muitos dos métodos tradicionais de interpolação incorporados em SIG's são baseados em funções matemáticas. Burrough (1987, p. 147) apresenta vários métodos de interpolação espacial, tais como: método da poligonal, triangulação, média local das amostras, método da distância inversa, etc. Em geral, estes métodos são facilmente implementados e razoavelmente rápidos. Por outro lado, tais métodos possuem limitações na representação da variabilidade espacial, porque desconsideram a anisotropia e a continuidade do fenômeno que se quer observar. Além disso, deixam sem resposta algumas questões importantes, tais como (Burrough, 1987):

- Qual o tamanho ideal do domínio ou da janela de estimação ?
- Que forma e orientação deve ter a janela para se obter uma estimação ótima ?
- Existem outros modos para estimar os pesos além daqueles baseados em função de distância ?
- Quais são os erros (incertezas) associados aos valores estimados ?

Na realidade, as propriedades naturais da superfície terrestre são espacialmente contínuas, sendo restritivo descrevê-las através de simples funções matemáticas que não respondem as questões acima formuladas. Modelos inferenciais para este objetivo vêm sendo propostos. A krigeagem é um desses modelos, e sua base conceitual está fundamentada na teoria das variáveis regionalizadas e nas funções aleatórias, formalizadas por Matheron (1971).

O termo krigeagem é derivado do nome Daniel G. Krige, que foi o pioneiro em introduzir o uso de médias móveis para evitar a superestimação sistemática de reservas em mineração (Delfiner e Delhomme, 1975). O que diferencia a krigeagem de outros métodos de interpolação é a estimação de uma matriz de covariância espacial que determina os pesos atribuídos às diferentes amostras, o tratamento da redundância dos dados, a vizinhança a ser considerada no procedimento inferencial e o erro associado ao valor estimado. Além disso, a krigeagem também fornece estimadores exatos com propriedades de não tendenciosidade e eficiência.

Portanto, a incorporação de procedimentos geoestatísticos em SIG's, baseados em técnicas de krigeagem, é importante, porque essa associação melhora os procedimentos tradicionais de tais sistemas devido à qualidade do estimador e, principalmente, pela informação de acurácia fornecida nesse modelo inferencial.

Neste contexto, este trabalho apresenta o Módulo de Procedimentos Geoestatísticos baseado em técnicas de krigeagem, desenvolvido na plataforma SPRING (Inpe, 1997). Resumidamente, este Módulo engloba um conjunto de procedimentos necessários às técnicas geoestatísticas (análise exploratória, geração e modelagem de semivariogramas, validação do modelo e interpolação de krigeagem). Tem como principal objetivo a análise em duas dimensões, 2D, para dados espacialmente distribuídos, no que diz respeito à interpolação de superfícies geradas a partir de amostras georreferenciadas obtidas por amostragem.

# CAPÍTULO 2

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo limita-se à apresentação dos principais conceitos teóricos necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Inicia-se com a definição de variáveis regionalizadas, as hipóteses consideradas e suas principais características. Em um segundo tópico, define-se o variograma, descreve-se seus parâmetros, apresenta-se o estimador do variograma a partir de amostras regular e irregularmente espaçadas, descreve-se os modelos teóricos de ajuste para o variograma experimental e discute-se aspectos relacionados à anisotropia. O capítulo se encerra com a apresentação dos métodos de estimação de krigeagem simples (KS) e krigeagem ordinária (KO).

As definições e convenções aqui adotadas seguem os padrões da geoestatística, isto é, funções e variáveis aleatórias são denotadas com caracteres maiúsculos (exemplo: $Z(\mathbf{x})$ e $Z$), valores observados são representados por caracteres minúsculos (exemplo: valor da variável aleatória $Z$ medido na posição $\mathbf{x}_k$ é $z(\mathbf{x}_k)$ ) e vetores são realçados em **negrito** (exemplo: $\{z(\mathbf{x}_i), i = 1, ..., n\}$, onde $\mathbf{x}_i$ identifica uma posição em duas dimensões representada pelos pares de coordenadas $(x_i , y_i)$ ).

## 2.1 - VARIÁVEIS REGIONALIZADAS

A variabilidade espacial de algumas características do solo vem sendo uma das preocupações de pesquisadores praticamente desde o início do século. Smith (1910) estudou a disposição de parcelas no campo em experimentos de rendimento de variedades de milho, numa tentativa de eliminar o efeito de variações do solo. Montgomery (1913), preocupado com o efeito do nitrogênio no rendimento do trigo, fez um experimento em 224 parcelas, medindo o rendimento de grãos. Vários outros autores, como Waynick e Sharp (1919), também estudaram variações de nitrogênio e o carbono no solo.

Os procedimentos usados na época baseavam-se na estatística clássica e utilizavam grandes quantidades de dados amostrais, visando caracterizar ou

descrever a distribuição espacial da característica em estudo. Por estatística clássica entende-se aquela que se utiliza de parâmetros como média e desvio padrão para representar um fenômeno e se baseia na hipótese principal de que as variações de um local para outro são aleatórias.

Krige (1951), trabalhando com dados de concentração de ouro, concluiu que somente a informação dada pela variância seria insuficiente para explicar o fenômeno em estudo. Para tal, seria necessário levar em consideração a distância entre as observações. A partir daí surge o conceito da *geoestatística*, que leva em consideração a *localização geográfica* e a *dependência espacial.*

Matheron (1963, 1971), baseado nas observações de Krige, desenvolveu a *teoria das variáveis regionalizadas,* a partir dos fundamentos da geoestatística.

Segundo Blais e Carlier (1968), citados por Olea (1975), uma variável regionalizada é uma função numérica com distribuição espacial, que varia de um ponto a outro com continuidade aparente, mas cujas variações não podem ser representadas por uma função matemática simples.

A teoria das variáveis regionalizadas pressupõe que a variação de uma variável pode ser expressa pela soma de três componentes (Burrough, 1987): a) uma componente estrutural, associada a um valor médio constante ou a uma tendência constante; b) uma componente aleatória, espacialmente correlacionada; e c) um ruído aleatório ou erro residual.

Se $\mathbf{x}$ representa uma posição em uma, duas ou três dimensões, então o valor da variável Z, em $\mathbf{x}$, é dada por (Burrough, 1987):

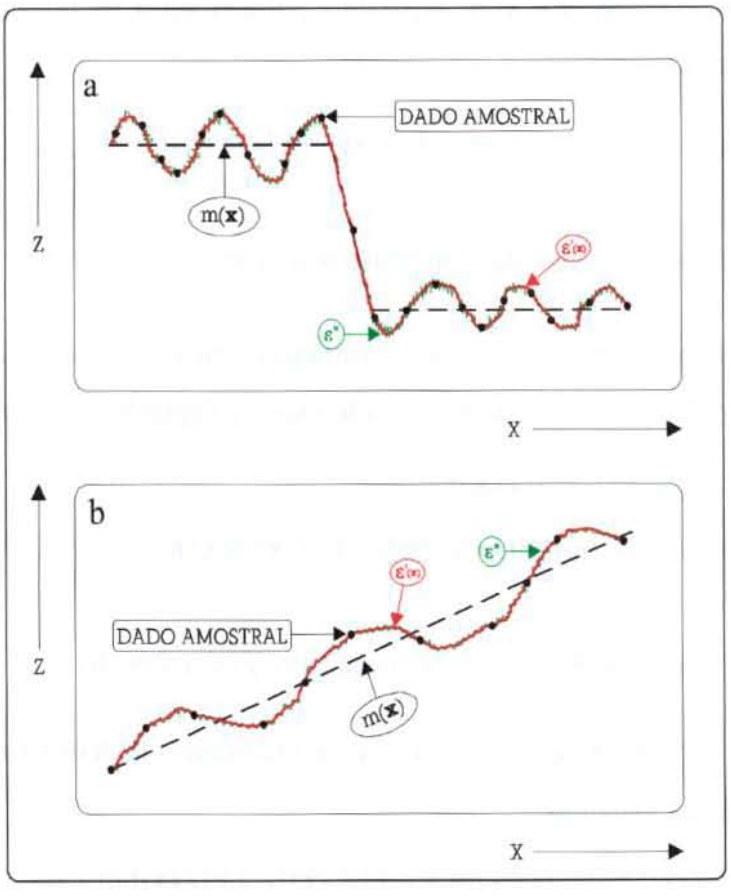
$$Z(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) + \varepsilon'(\mathbf{x}) + \varepsilon'' \qquad (2.1)$$

onde:

- $m(\mathbf{x})$ é uma função determinística que descreve a componente estrutural de Z em $\mathbf{x}$;
- $\varepsilon'(\mathbf{x})$ é um termo estocástico, que varia localmente e depende espacialmente de $m(\mathbf{x})$;

- $\varepsilon''$ é um ruído aleatório não correlacionado, com distribuição normal com média zero e variância $\sigma^2$.

As Figuras 2.1(a) e 2.1(b) ilustram as três componentes principais da variação espacial. A Figura 2.1(a) apresenta uma componente determinística que varia abruptamente, enquanto a componente determinística na Figura 2.1(b) apresenta uma tendência constante.




Figs. 2.1(a) e 2.1(b) - Principais componentes da variação espacial.

FONTE: Modificada de Burrough (1987), p. 155.

### 2.1.1 - HIPÓTESES CONSIDERADAS

Diferente dos métodos convencionais de estimação, a krigeagem está fundamentada na teoria das variáveis regionalizadas. O primeiro passo na krigeagem

é definir uma função apropriada para a componente determinística m(**x**). Para tanto, algumas hipóteses são necessárias (Burrough, 1987 e David, 1977):

- Hipótese de Estacionariedade de 2ª Ordem

  Sob esta hipótese, admite-se que a componente determinística, m(**x**), é constante (não há tendências na região). Então, m(**x**) é igual ao valor esperado da variável aleatória Z na posição **x**, e a diferença média entre os valores observados em, **x** e **x**+**h**, separados por um vetor de distância **h** (módulo e direção) é nula.

  $$E[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})] = 0 \quad \text{ou} \quad E[Z(\mathbf{x})] = E[Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})] = m(\mathbf{x}) = m \tag{2.2}$$

  onde

  E representa o operador esperança matemática.

  Admite-se também que a covariância entre os pares $Z(\mathbf{x})$ e $Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})$, separados por um vetor distância **h**, existe e depende somente de **h**. Então:

  $$C(\mathbf{h}) = \text{Cov}\,[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})] =$$
  $$= E[(Z(\mathbf{x})-m).(Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})- m)] = E[Z(\mathbf{x}).Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]-m^2, \quad \forall \mathbf{x}; \tag{2.3}$$

  onde

  $\text{Cov}\,[Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]$ é a covariância entre $Z(\mathbf{x})$ e $Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})$.

Na Equação (2.3), estacionariedade da covariância[1] implica na estacionariedade da variância:

$$\text{Var}[Z(\mathbf{x})] = E\{[Z(\mathbf{x})- m]^2\} = E[Z^2(\mathbf{x})] - 2.E[Z(\mathbf{x})].m + m^2 =$$
$$= E[Z(\mathbf{x}).Z(\mathbf{x}+\mathbf{0})] - 2m^2 + m^2 =$$
$$= E[Z(\mathbf{x}).Z(\mathbf{x}+\mathbf{0})] - m^2 = C(\mathbf{0}), \quad \forall \mathbf{x}. \tag{2.4}$$

onde

Var é o operador variância.

---

[1] Estacionariedade da covariância significa que a covariância entre dois pares quaisquer, $Z(\mathbf{x})$ e $Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})$, é invariante para um mesmo vetor distância **h**.

A estacionariedade da covariância também implica na estacionariedade do variograma , definido por:

$$2\gamma(h) = E\{[Z(x)-Z(x+h)]2\} \quad (2.5)$$

A Equação (2.5) pode ser desenvolvida em:

$$2\gamma(\mathbf{h}) = E\{Z^2(\mathbf{x}) - 2\,Z(\mathbf{x})Z(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + Z^2(\mathbf{x}+\mathbf{h})\}$$
$$= E[Z^2(\mathbf{x})] - 2E[Z(\mathbf{x})Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})] + E[Z^2(\mathbf{x}+\mathbf{h})] \quad (2.6)$$

Da Equação (2.3) obtem-se:

$$E[Z(\mathbf{x})Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})] = C(\mathbf{h}) + m^2 \quad (2.7)$$

De maneira análoga, da Equação (2.4) obtem-se:

$$E[Z(\mathbf{x}).Z(\mathbf{x}+\mathbf{0})] = E[Z^2(\mathbf{x})] = C(\mathbf{0}) + m^2 \quad (2.8)$$

Substituindo as equações (2.7) e (2.8) na Equação (2.6), obtem-se:

$$2\gamma(\mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) + m^2 - 2\,(C(\mathbf{h}) + m^2) + C(\mathbf{0}) + m^2 =$$
$$= 2\,C(\mathbf{0}) - 2\,C(\mathbf{h}) \quad (2.9)$$

Simplificando a Equação (2.9), obtem-se:

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h}) \quad (2.10)$$

onde

$\gamma(\mathbf{h})$ representa uma função conhecida na teoria das variáveis regionalizadas como semivariograma, que é metade do variograma. O variograma é discutido em detalhes na Seção 2.2.

A relação em (2.10) indica que sob a hipótese de estacionariedade de 2ª ordem[2], a covariância e o semivariograma são formas alternativas de caracterizar a autocorrelação dos pares $Z(\mathbf{x})$ e $Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})$ separados pelo vetor $\mathbf{h}$.

---

[2] Formalmente uma variável regionalizada é estacionária de 2ª ordem se os dois primeiros momentos estatísticos são constantes, e se a covariância entre dois valores observados depende somente da distância entre eles.

A hipótese de estacionariedade de 2ª ordem supõe a existência de uma covariância e, então, de uma variância finita (Equação 2.4). Sob esta condição, o correlograma, $\rho(\mathbf{h})$, pode ser definido. Dividindo ambos os lados da Equação (2.10) por C(0), tem-se:

$$\rho(h) = \frac{C(\mathbf{h})}{C(\mathbf{0})} = \frac{C(\mathbf{0})}{C(\mathbf{0})} - \frac{\gamma(\mathbf{h})}{C(\mathbf{0})} = 1 - \frac{\gamma(\mathbf{h})}{C(\mathbf{0})} \qquad (2.11)$$

As restrições impostas à estacionariedade de 2ª Ordem, isto é, admitida $\exists\ C(\mathbf{h}) \Rightarrow \exists\ \mathrm{Var}[Z(\mathbf{x})] = C(\mathbf{0})$ e também $\Rightarrow \exists\ \gamma(\mathbf{h})$, podem não ser satisfeitas para alguns fenômenos físicos que apresentam uma capacidade infinita de dispersão (David, 1977). Capacidade infinita de dispersão $\Rightarrow \nexists\ C(\mathbf{h}), \nexists\ \mathrm{Var}[Z(\mathbf{x})]$; porém, pode existir $\gamma(\mathbf{h})$. Para tais situações, uma hipótese menos restritiva, a hipótese intrínseca, pode ser aplicável.

- Hipótese de Estacionariedade Intrínseca

  De modo análogo à hipótese anterior, admite-se que $E[Z(\mathbf{x})] = m(x) = m$, $\forall \mathbf{x}$. Além disso, admite-se que a variância das diferenças depende somente do vetor distância **h**, isto é:

  $$\mathrm{Var}[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})] = E\{[Z(\mathbf{x})-Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]^2\} = 2\gamma(\mathbf{h}), \qquad (2.12)$$

  onde
  $2\gamma(\mathbf{h})$ é conforme apresentado anteriormente.

  Segundo David (1977), esta hipótese é a mais freqüente em geoestatística, principalmente por ser a menos restritiva. Isto é, requer apenas a existência e estacionariedade do variograma, sem nenhuma restrição quanto à existência de variância finita.

Uma consideração adicional, que transcende a abrangência deste trabalho, refere-se às hipóteses da Krigeagem Universal (David, 1977). Neste caso, m(x) é o "drift" (tendência principal) e supõe-se que $C(\mathbf{h})$ e $\gamma(\mathbf{h})$ possuem estacionariedade dentro de uma vizinhança de tamanho restrito. Além disso, supõe-se que $E[Z(\mathbf{x})] = m(\mathbf{x})$, a qual não é mais estacionária, varia de modo regular dentro de tal vizinhança. Segundo

David (1977), não somente a covariância e o variograma são definidos a partir de valores experimentais, mas também o tamanho da vizinhança onde as hipóteses se mantem válidas. Trabalhos neste assunto podem ser encontrados em Olea (1975, 1977) e um exemplo de aplicação pode ser visto em Burgess e Webster (1980c).

Neste trabalho pressupõe-se a estacionariedade de 2ª ordem ($\Rightarrow$ hipótese intrínseca), a qual é suficiente para a utilização dos métodos de estimação de krigeagem simples (KS) e krigeagem ordinária (KO), a serem descritos nas Seções 2.8.1 e 2.8.2, respectivamente.

### 2.1.2 - CARACTERÍSTICAS DAS VARIÁVEIS REGIONALIZADAS

Segundo Olea (1975, 1977), as principais características de uma variável regionalizada são:

- *Localização*: uma variável regionalizada é numericamente definida por um valor, o qual está associado a uma amostra de tamanho, forma e orientação específicos. Essas características geométricas da amostra são denominadas *suporte geométrico*. O suporte geométrico não necessariamente compreende volumes, podendo se referir também a áreas e linhas. Quando o suporte geométrico tende a zero, tem-se um ponto ou amostra pontual e o suporte geométrico é imaterial. Exemplo: para estudar a variação da saturação d'água no solo, são coletadas amostras de $10cm^3$. A variável regionalizada é a umidade do solo e o suporte geométrico é o volume da amostra ($10cm^3$). Note que, neste experimento, o conteúdo d'água no solo depende não somente da localização da amostra mas também de seu tamanho, forma e orientação. Uma amostra de forma cilíndrica e longa, tomada na vertical, contém mais água que uma amostra de mesmo tamanho e forma tomada na direção horizontal em relação à superfície do solo. Se o volume da amostra for $10m^3$ ao contrário de $10cm^3$, o resultado também será diferente. Resumindo, a teoria das variáveis regionalizadas considera a geometria das amostras, distintamente da estatística clássica onde a forma, o tamanho e a

orientação não são considerados. Um experimento estatístico clássico como o lançamento de moedas têm resultados que são independentes se a moeda é grande ou pequena, leve ou pesada, e de como é lançada.

- *Anisotropia*: algumas variáveis regionalizadas são anisotrópicas, isto é, apresentam variações graduais numa direção e rápidas ou irregulares em outra.

- *Continuidade*: dependendo do fenômeno sendo observado, a variação espacial de uma variável regionalizada pode ser grande ou pequena. Apesar da complexidade das flutuações, uma continuidade média geralmente está presente. Esta continuidade é exemplificada por Olea (1975) em um caso hipotético, onde amostras de solo de mesmo tamanho, forma e orientação são coletadas em intervalos regulares ao longo de linhas imaginárias. Essas amostras podem originar duas séries distintas para a percentagem de $H_2O$ (água) encontrada, conforme apresentado na Tabela 2.1.

**TABELA 2.1 - PERCENTAGEM DE $H_2O$ EM DUAS AMOSTRAS DISTINTAS A E B.**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 20 | 15 | 10 | 5 | % $H_2O$ |
| B | 10 | 25 | 15 | 10 | 20 | 5 | 15 | 5 | 20 | % $H_2O$ |

Nesta tabela, os valores individuais nas duas amostras são exatamente os mesmos. Portanto a média e a variância amostral, assim como o histograma de frequência da variável observada nas amostras A e B, são rigorosamente idênticos. Qualquer análise que não leve em consideração outras estatísticas além da média, variância e histograma não diferenciará as duas séries. Este exemplo enfatiza a importância da medida da continuidade espacial da variável regionalizada. Assim, torna-se necessário considerar a posição espacial relativa de cada uma das observações nas duas amostras, para que as mesmas sejam diferenciadas. A continuidade espacial da variável regionalizada pode ser analizada a partir do variograma, conforme descrito a seguir.

## 2.2 - VARIOGRAMA

O variograma é uma ferramenta básica de suporte às técnicas de krigeagem, que permite representar quantitativamente a variação de um fenômeno regionalizado no espaço (Huijbregts, 1975).

Considere duas variáveis regionalizadas, X e Y, onde X = Z(**x**) e Y = Z(**x**+**h**). Neste caso, referem-se ao mesmo atributo (por exemplo, o teor de zinco no solo) medido em duas posições diferentes, conforme ilustra a Figura 2.2, onde

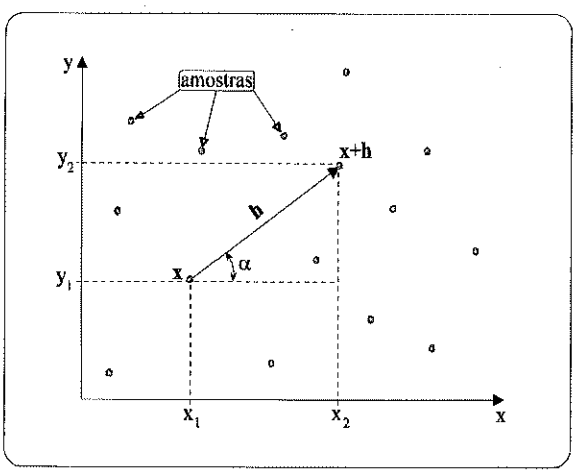



Fig. 2.2 - Amostragem em duas dimensões.

**x** denota uma posição em duas dimensões, com componentes ($x_i$ , $y_i$), e **h** um vetor distância (módulo e direção) que separa os pontos.

O nível de dependência entre essas duas variáveis regionalizadas, X e Y, é representado pelo variograma, $2\gamma(\mathbf{h})$, o qual é definido como a esperança matemática do quadrado da diferença entre os valores de pontos no espaço, separados pelo vetor distância **h**, isto é,

$$2\gamma(\mathbf{h}) = E\{[Z(\mathbf{x})-Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]^2\} = Var[Z(\mathbf{x})-Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})] . \qquad (2.13)$$

Através de uma amostra $z(\mathbf{x}_i)$, $i=1, 2, ..., n$, o variograma pode ser estimado por

$$2\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_i+\mathbf{h})]^2 \ , \qquad (2.14)$$

onde:

- $2\hat{\gamma}(\mathbf{h})$ - é o variograma estimado;
- N(h) - é o número de pares de valores medidos, z(xi) e z(xi+h), separados por um vetor distância **h**;
- z(xi) e z(xi+h) - são valores da i-ésima observação da variável regionalizada, coletados nos pontos $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_i+\mathbf{h}$ (i = 1, ..., n), separados pelo vetor **h**.

Muitos autores definem variograma de forma distinta da Equação (2.13), considerando o que comumente se refere como semivariograma, dado por:

$$\gamma(\mathbf{h})=\frac{1}{2}E\{[Z(\mathbf{x})-Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]^2\}=\frac{1}{2}Var[Z(\mathbf{x})-Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]\,. \qquad (2.15)$$

Analogamente, a função semivariograma pode ser estimada por:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h})=\frac{1}{2N(\mathbf{h})}\sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})}[z(\mathbf{x}_i)-z(\mathbf{x}_i+\mathbf{h})]^2 \qquad (2.16)$$

onde N(**h**), $z(\mathbf{x}_i)$ e $z(\mathbf{x}_i+\mathbf{h})$ são conforme já definidos.

## 2.3 - PARÂMETROS DO SEMIVARIOGRAMA

A Figura 2.3 ilustra um semivariograma experimental com características muito próximas do ideal. O seu padrão representa o que, intuitivamente, se espera de dados de campo, isto é, que as diferenças $\{Z(\mathbf{x}_i) - Z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})\}$ decresçam à medida que **h**, a distância que os separa decresce. É esperado que observações mais próximas geograficamente tenham um comportamento mais semelhante entre si do que aquelas separadas por maiores distâncias. Desta maneira, é esperado que $\gamma(\mathbf{h})$ aumente com a distância **h**.

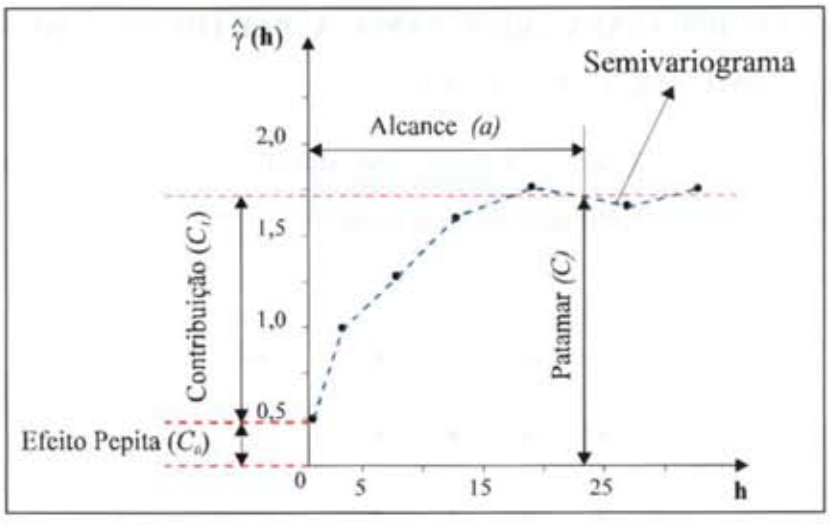



Fig. 2.3 - Exemplo de semivariograma.

Os parâmetros do semivariograma podem ser observados diretamente da Figura 2.3 :

- *Alcance (a)*: distância dentro da qual as amostras apresentam-se correlacionadas espacialmente. Na Figura 2.3, o alcance ocorre próximo de 25m.
- *Patamar (C)*: é o valor do semivariograma correspondente a seu *alcance (a)*. Deste ponto em diante, considera-se que não existe mais dependência espacial entre as amostras, porque a variância da diferença entre pares de amostras (Var[Z(**x**) - Z(**x**+**h**)]) torna-se invariante com a distância.
- *Efeito Pepita ($C_0$)*: por definição, $\gamma(\mathbf{0})=0$, (refira-se à Equação 2.15 ). Entretanto, na prática, à medida que **h** tende para 0 (zero), $\gamma(\mathbf{h})$ se aproxima de um valor positivo chamado *Efeito Pepita ($C_0$)*. O valor de $C_0$ revela a descontinuidade do semivariograma para distâncias menores do que a menor distância entre as amostras. Parte desta descontinuidade pode ser também devida a erros de medição (Isaaks e Srivastava, 1989), mas é impossível quantificar se a maior contribuição provém dos erros de medição ou da variabilidade de pequena escala não captada pela amostragem.
- *Contribuição ($C_1$)*: é a diferença entre o patamar ($C$) e o Efeito Pepita ($C_o$).

## 2.4 - CÁLCULO DO SEMIVARIOGRAMA A PARTIR DE AMOSTRAS REGULARMENTE ESPAÇADAS

Considere o conjunto de amostras regularmente espaçadas, em duas dimensões, conforme apresentado na Figura 2.4.

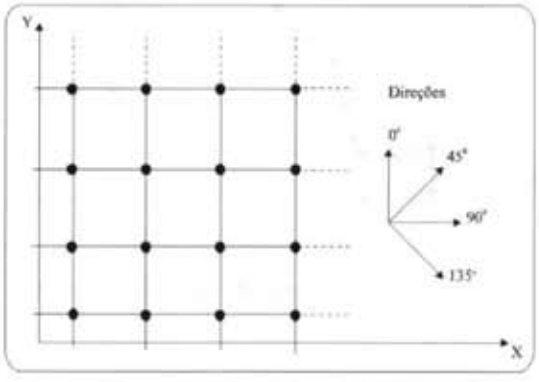



Fig. 2.4 - Amostras regularmente espaçadas em duas dimensões.

Para determinar o semivariograma experimental, por exemplo, na direção de $90^0$ o cálculo de $\hat{\gamma}(\mathbf{h})$ é repetido para todos os intervalos de **h**. Suponha a distância entre dois pontos consecutivos igual a 100 metros (d=100m). Então, qualquer par de observações, na direção $90^0$, cuja distância é igual a 100m será incluído no cálculo de $\hat{\gamma}(90^o, 100\text{m})$. Isto feito, os cálculos são repetidos para a próxima distância, por exemplo, 200m. Isto inclui todos os pares de observações cuja distância é igual a 200m. O processo é repetido até que algum ponto de parada desejado seja alcançado. Este procedimento pode ser melhor compreendido com o auxílio da Figura 2.5 e também deve ser realizado para outras direções ($0^0$, $45^0$ e $135^0$).

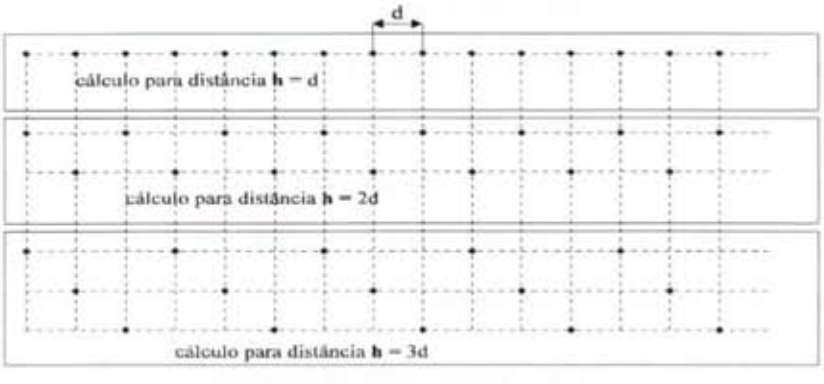



Fig.2.5 - Ilustração para o cálculo do semivariograma a partir de amostras regularmente espaçadas.

## 2.5 - CÁLCULO DO SEMIVARIOGRAMA A PARTIR DE AMOSTRAS IRREGULARMENTE ESPAÇADAS

Considere o conjunto de amostras irregularmente espaçadas, em duas dimensões, conforme apresentado na Figura 2.6. Neste caso, para determinar o semivariograma experimental, é necessário introduzir limites de tolerância para direção e distância.

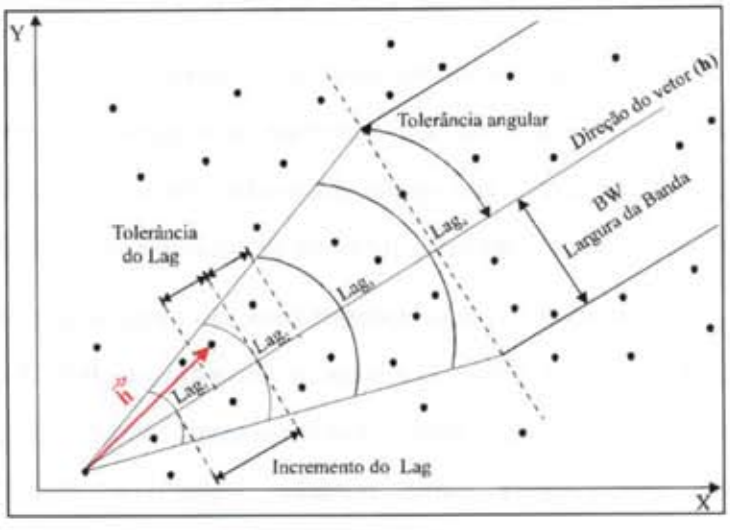



Fig. 2.6 - Parâmetros para o cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas em duas dimensões.
FONTE: Modificada de Deutsch e Journel (1992), p. 45.

Tome como referência o $Lag_2$ (*Lag refere-se a uma distância pré-definida, a qual é utilizada no cáculo do semivariograma*) da figura acima. Suponha um incremento de Lag igual a 100 metros com tolerância de 50 metros. Considere ainda a direção de medida $45^0$ com tolerância angular $22.5^0$. Então, qualquer par de observações cuja distância está compreendida entre 150m e 250m e $22.5^0$ e $67.5^0$ será incluído no cálculo do semivariograma de $Lag_2$. Este processo se repete para todos os Lag's.

Ainda com referência na Figura 2.6, a largura de banda (BW) se refere a um valor de ajuste a partir do qual se restringe o número de pares de observações para o cálculo do semivariograma.

A próxima etapa constitui o ajuste de um modelo teórico ao semivariograma experimental, conforme descrito a seguir.

## 2.6 - MODELOS TEÓRICOS

O gráfico do semivariograma experimental, $\hat{\gamma}(\mathbf{h})$, calculado através da Equação (2.16), é formado por uma série de valores, conforme ilustra a Figura 2.3, sobre os quais se objetiva ajustar uma função. É importante que o modelo ajustado represente a tendência de $\hat{\gamma}(\mathbf{h})$ em relação a **h**. Deste modo, as estimativas obtidas a partir da krigeagem serão mais exatas e, portanto mais confiáveis.

O procedimento de ajuste não é direto e automático, como no caso de uma regressão, por exemplo, mas sim interativo, pois nesse processo o intérprete faz um primeiro ajuste e verifica a adequação do modelo teórico. Dependendo do ajuste obtido, pode ou não redefinir o modelo, até obter um que seja considerado satisfatório.

Os modelos aqui apresentados são considerados modelos básicos, denominados de modelos isotrópicos por Isaaks e Srivastava (1989). Estão divididos em dois tipos: modelos com patamar e modelos sem patamar. Modelos do primeiro tipo são referenciados na geoestatística como modelos transitivos. Alguns dos modelos transitivos atingem o patamar *(C)* assintoticamente. Para tais modelos, o alcance *(a)* é arbitrariamente definido como a distância correspondente a 95% do patamar. Modelos do segundo tipo não atingem o patamar, e continuam aumentanto enquanto a distância aumenta. Tais modelos são utilizados para modelar fenômenos que possuem capacidade infinita de dispersão.

### 2.6.1 - MODELO EFEITO PEPITA

Conforme discutido na Seção 2.3, muitos semivariogramas experimentais apresentam uma descontinuidade na origem. Quando $|\mathbf{h}|=0$, o valor do semivariograma é estritamente zero. Porém quando $|\mathbf{h}|$ tende a zero, o valor do semivariograma pode ser significativamente maior que zero, isto é, ocorre uma descontinuidade na origem. Tal descontinuidade é modelada através do modelo de efeito pepita, assim definido:

$$\gamma_0(|\mathbf{h}|) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\mathbf{h}| = 0 \\ 1 & \text{se } |\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases} \qquad (2.17)$$

Na literatura geoestatística, o efeito pepita não é classificado como modelo básico, mas aparece como uma constante *($C_o$)* na equação do semivariograma, e deve ser entendido que $C_o = 0$ quando $|\mathbf{h}| = 0$. A rigor, a notação para o efeito pepita é $C_o \gamma_o(|\mathbf{h}|)$, onde $C_o$ representa o valor da descontinuidade na origem, e $\gamma_o(|\mathbf{h}|)$ é o modelo de efeito pepita normalizado conforme apresentado na Equação 2.17. Esta notação é consistente com a apresentação dos modelos básicos aqui descritos e torna-se conveniente quando se usa um modelo composto.

Os modelos transitivos mais utilizados são: modelo esférico (Sph), modelo exponencial (Exp) e modelo gaussiano (Gau). Estes modelos estão apresentados na Figura 2.7 com o mesmo alcance *(a)*.

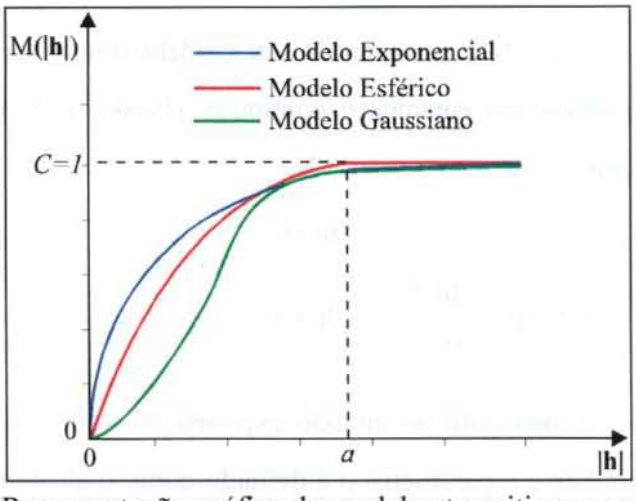



Fig. 2.7 - Representação gráfica de modelos transitivos normalizados.
FONTE: Modificada de Isaaks e Srivastava (1989), p. 374.

## 2.6.2 - MODELO ESFÉRICO

O modelo esférico é um dos modelos mais utilizados e está representado em vermelho na Figura 2.7. A equação normalizada deste modelo é:

$$\mathrm{Sph}(|\mathbf{h}|) = \begin{cases} 0 & , \quad |\mathbf{h}| = 0 \\ 1{,}5\left(\dfrac{|\mathbf{h}|}{a}\right) - 0{,}5\left(\dfrac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^3 & , \quad 0 < |\mathbf{h}| \le a \\ 1 & , \quad |\mathbf{h}| > a \end{cases} \tag{2.18}$$

### 2.6.3 - MODELO EXPONENCIAL

Um outro modelo bastante utilizado é o modelo exponencial, o qual é apresentado em azul na Figura 2.7. A equação normalizada deste modelo é:

$$\mathrm{Exp}(|\mathbf{h}|)=\begin{cases}0 & , \quad |\mathbf{h}|=0 \\ 1-\exp\left(-\dfrac{|\mathbf{h}|}{a}\right), & |\mathbf{h}|\neq 0\end{cases} \tag{2.19}$$

Este modelo atinge o patamar assintoticamente, com o alcance prático definido como a distância na qual o valor do modelo é 95% do patamar (Isaaks e Srivastava, 1989).

### 2.6.4 - MODELO GAUSSIANO

O modelo gaussiano é um modelo transitivo, muitas vezes usado para modelar fenômenos extremamente contínuos (Isaaks e Srivastava, 1989). Sua formulação é dada por:

$$\mathrm{Gau}(|\mathbf{h}|)=\begin{cases}0 & , \quad |\mathbf{h}|=0 \\ 1-\exp\left(-\dfrac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^2, & |\mathbf{h}|\neq 0\end{cases} \tag{2.20}$$

Semelhante no modelo exponencial, o modelo gaussiano atinge o patamar assintoticamente e o parâmetro $a$ é definido como o alcance prático ou distância na qual o valor do modelo é 95% do patamar (Isaaks e Srivastava, 1989). O que caracteriza este modelo é seu comportamento parabólico próximo à origem, conforme representado na Figura 2.7 através da linha sólida verde.

### 2.6.5 - MODELO POTÊNCIA

O modelo potência não é um modelo transitivo, portanto não atinge o patamar. Em geral, este tipo de modelo é utilizado para modelar fenômenos com capacidade infinita de dispersão. A Figura 2.8 ilustra o modelo potência, o qual é expresso através de:

$$\text{Pot}(|\mathbf{h}|)=\begin{cases}0 & ,|\mathbf{h}|=0\\ c.|\mathbf{h}|^{e} & ,|\mathbf{h}|\neq 0\end{cases} \tag{2.21}$$

onde,

- $c$ é o coeficiente de declividade, e
- $e$ é o expoente.

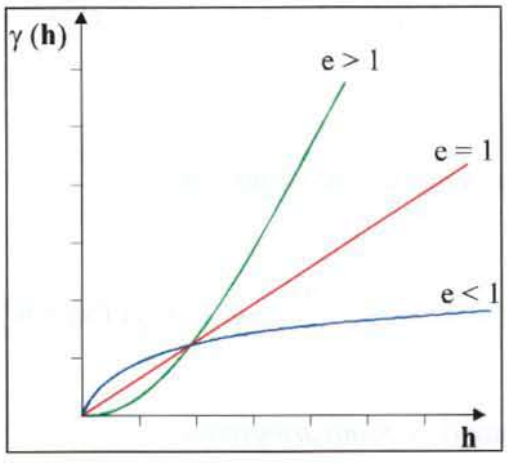



Fig.2.8 - Representação gráfica do modelo potência.

Até este ponto foram apresentados os principais modelos básicos normalizados, os quais são utilizados para modelar ou ajustar o semivariograma experimental. Na prática, os semivariogramas experimentais possuem valores de efeito pepita *($C_o$)* maior que zero e valores de patamar *(C)* maiores que a unidade, conforme ilustrado na Figura 2.9.

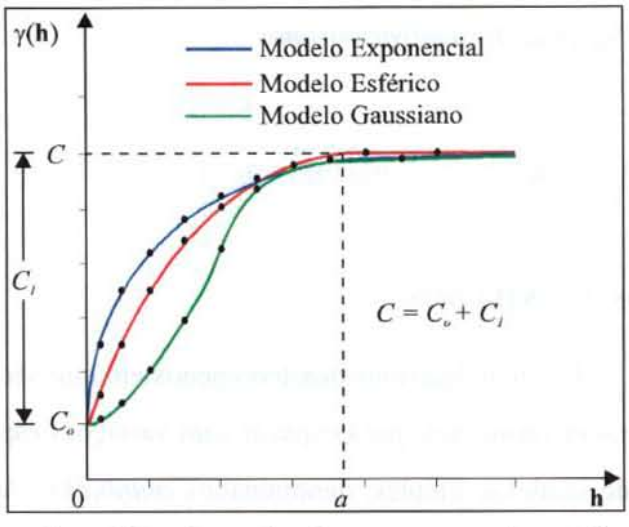



Fig. 2.9 - Representação gráfica de semivariogramas experimentais e modelos teóricos.

Em resumo, os semivariogramas dos modelos transitivos básicos são assim definidos:

- *Modelo Esférico de Semivariograma:*

$$\gamma(\mathbf{h}) \begin{cases} 0 & ,\ |\mathbf{h}| = 0 \\ C_0 + C_1 \left[ \frac{3}{2}\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^3 \right] = C_0 + C_1 [\text{Sph}(|\mathbf{h}|)] & ,\ 0 < |\mathbf{h}| \leq a \\ C_0 + C_1 & ,\ |\mathbf{h}| > a \end{cases} \quad (2.22)$$

- *Modelo Exponencial de Semivariograma:*

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & ,|\mathbf{h}| = 0 \\ C_0 + C_1 \left[ 1 - \exp\left( -\frac{|\mathbf{h}|}{a} \right) \right] = C_0 + C_1 [\text{Exp}(|\mathbf{h}|)] & ,|\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

- *Modelo Gaussiano de Semivariograma:*

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & ,|\mathbf{h}| = 0 \\ C_0 + C_1 \left[ 1 - \exp\left( -\frac{|\mathbf{h}|}{a} \right)^2 \right] = C_0 + C_1 [\text{Gau}(|\mathbf{h}|)] & ,|\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

De maneira análoga, o modelo potência é escrito em termos de semivariograma da seguinte forma:

- *Modelo Potência de Semivariograma :*

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & ,|\mathbf{h}| = 0 \\ C_0 + c.|\mathbf{h}|^e = C_0 + \text{Pot}(|\mathbf{h}|) & ,|\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

### 2.6.6 - MODELOS ANINHADOS

Existem determinados fenômenos em que são necessários modelos mais complexos de semivariograma para explicar suas variações espaciais. Estes modelos são combinações de modelos simples, denominados *aninhados*. McBratney e Webster (1986) observaram que modelos aninhados são necessários para explicar a variação do

solo decorrente de fatores independentes de formação. Por exemplo, um modelo aninhado útil em estudos de mineração e pesquisa de solo é o duplo esférico. McBratney et al. (1982) o utilizaram para descrever a variação do cobre e do cobalto no solo. Este modelo é definido como:

$$\gamma(\mathbf{h})=\begin{cases} C_0+C_1\left[\frac{3}{2}\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a_1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a_1}\right)^3\right]=\gamma_1(\mathbf{h}) \;, & 0<|\mathbf{h}|\le a_1 \\ C_0+C_2\left[\frac{3}{2}\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a_2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a_2}\right)^3\right]=\gamma_2(\mathbf{h}) \;, & a_1<|\mathbf{h}|\le a_2 \\ C_0+C_2 \;, & |\mathbf{h}|>a_2 \\ 0 \;, & |\mathbf{h}|=0 \end{cases} \tag{2.26}$$

onde,

- $a_1$ e $C_1$ correspondem aos parâmetros de alcance e contribuição, respectivamente, do primeiro modelo esférico ($\gamma_1(\mathbf{h})$) e
- $a_2$ e $C_2$ correspondem aos parâmetros de alcance e contribuição, respectivamente, do segundo modelo esférico ($\gamma_2(\mathbf{h})$).

Este modelo é mostrado na Figura 2.10, onde as linhas sólidas representam os modelos de ajuste teórico ao semivariograma experimental.

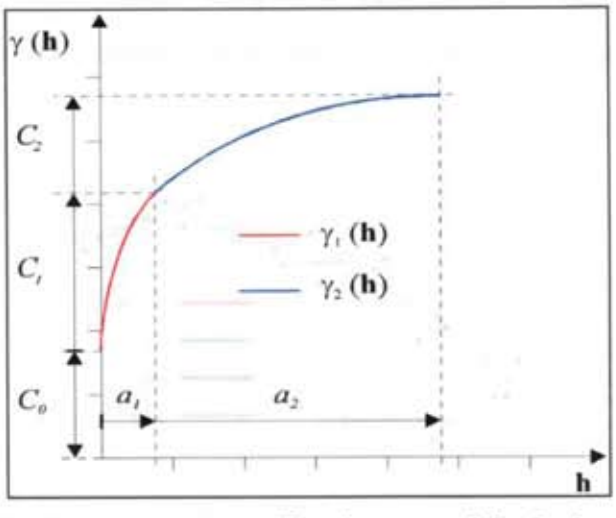



Fig. 2.10 - Representação gráfica de um modelo duplo esférico.

Dependendo do fenômeno em estudo, outros modelos aninhados são necessários para caracterizar a variabilidade espacial. Por exemplo: duplo exponencial, exponencial com duplo esférico, linear com duplo esférico, etc.

## 2.7 - ANISOTROPIA

A anisotropia pode ser facilmente constatada através da observação dos semivariogramas obtidos para diferentes direções. As convenções direcionais usadas na geoestatística são mostradas na Figura 2.11.

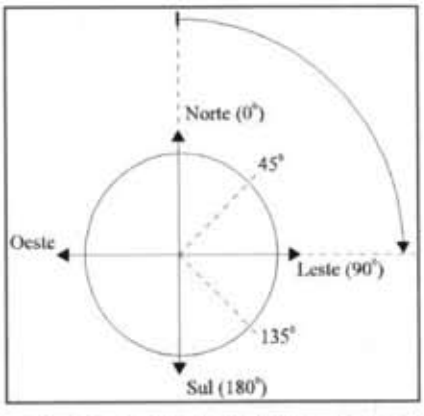



Fig. 2.11 - Convenções direcionais usadas na geoestatística.

Considere os semivariogramas obtidos para as direções $0^0$, $45^0$, $90^0$ e $135^0$, ilustrados na Figura 2.12. Verifica-se uma similaridade bastante grande entre eles. Esta é a representação de um caso simples e menos freqüente, em que a distribuição espacial do fenômeno é denominada *isotrópica*. Neste caso, um único modelo é suficiente para descrever a variabilidade espacial do fenômeno em estudo.

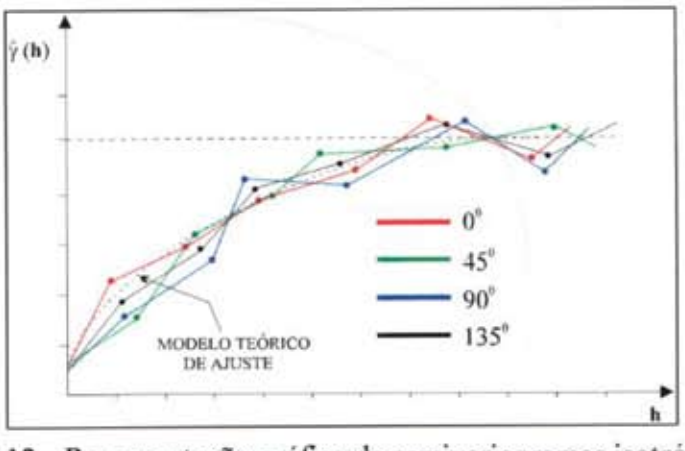



Fig. 2.12 - Representação gráfica de semivariogramas isotrópicos.

Por outro lado, se os semivariogramas não são iguais em todas as direções, a distribuição é denominada *anisotrópica*. Se a *anisotropia* é observada e é refletida pelo mesmo *Patamar (C)* com diferentes *Alcances (a)* do mesmo modelo, então ela é denominada *Geométrica.*

Considere o semivariograma ilustrado na Figura 2.13. Os pontos interligados com linhas tracejadas são os semivariogramas experimentais em duas direções ortogonais. O semivariograma que atinge primeiro o patamar (azul) se refere à direção de $120^0$ e o semivariograma com maior alcance (vermelho) se refere à direção de $30^0$. As linhas sólidas em ambas direções são os modelos teóricos de ajuste dos semivariogramas experimentais.

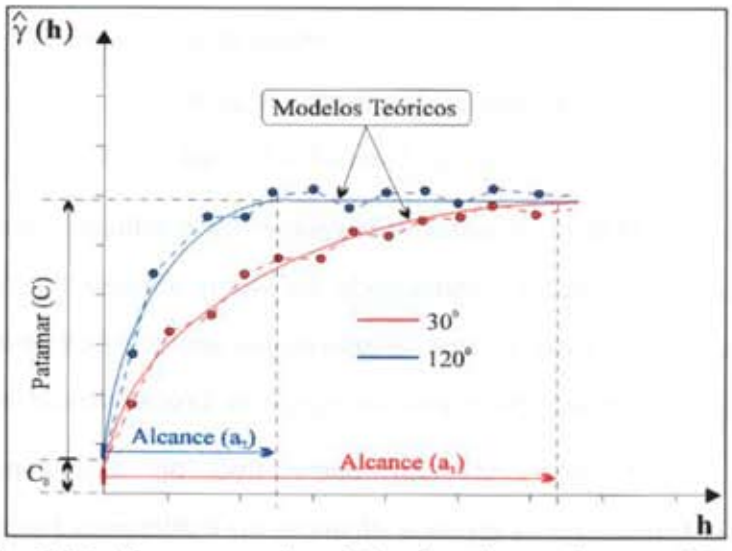



Fig. 2.13 - Representação gráfica de anisotropia geométrica.

Um modo direto de visualizar e calcular os parâmetros (fator e ângulo) da anisotropia geométrica é através do esboço gráfico de uma elipse, calculada através dos alcances obtidos em direções distintas, conforme Figura 2.14. As convenções que seguem, são as adotadas por Deutsch e Journel (1992). Para o eixo maior da elipse, denominado direção de máxima continuidade, aplica-se o maior *alcance*($a_1$). O ângulo da direção de máxima continuidade é definido a partir da direção Norte e no sentido horário. Seu valor corresponde à direção de maior alcance. O eixo menor define o *alcance*($a_2$) na direção de menor continuidade, sendo este ortogonal à direção principal.

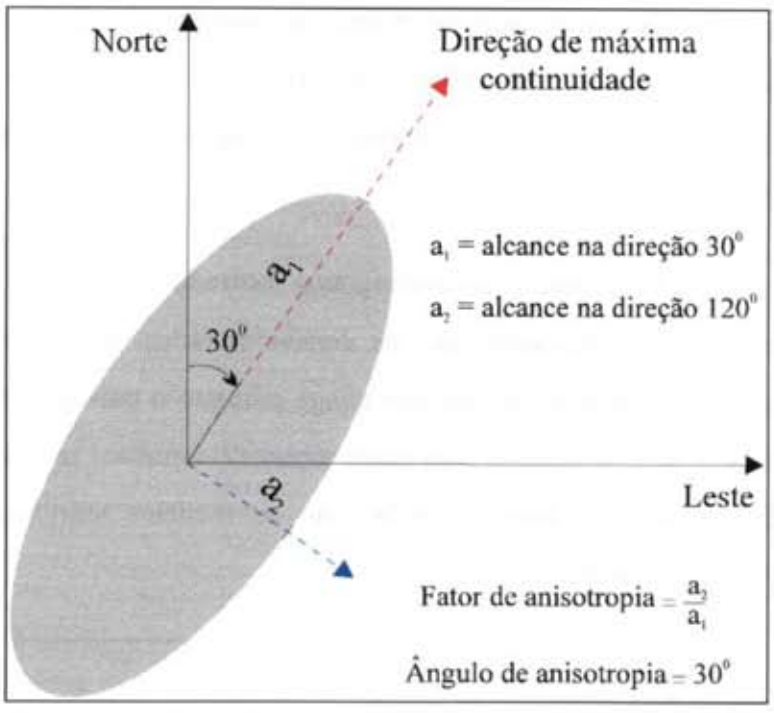



Fig. 2.14 - Representação gráfica da anisotropia geométrica em duas dimensões.

FONTE: Modificada de Deutsch e Journel (1992), p. 24.

O fator de anisotropia geométrica é definido como a razão entre o alcance na direção de menor continuidade ($a_2$) e o alcance na direção de maior continuidade ($a_1$). Neste caso, o fator de anisotropia geométrica é sempre menor que a unidade e o ângulo de anisotropia é igual ao ângulo da direção de máxima continuidade.

Existe ainda um outro tipo de anisotropia em que os semivariogramas apresentam os mesmos *Alcances (a)* e diferentes *Patamares (C)*. Neste caso, a anisotropia é denominada *Zonal*. Como a isotropia, a anisotropia zonal também é um caso menos freqüente presente nos fenômenos naturais. O mais comum é encontrar combinações da anisotropia zonal e geométrica, denominada *anisotropia combinada*.

Considere o semivariograma apresentado na Figura 2.15. Os pontos interligados com linhas tracejadas correspondem a semivariogramas experimentais em duas direções ortogonais. O semivariograma com maior patamar (azul) refere-se à direção de $60^0$ e o semivariograma com menor patamar (vermelho) refere-se à sua direção perpendicular ($150^0$). Os modelos de ajuste aos semivariogramas estão representados por linhas sólidas.

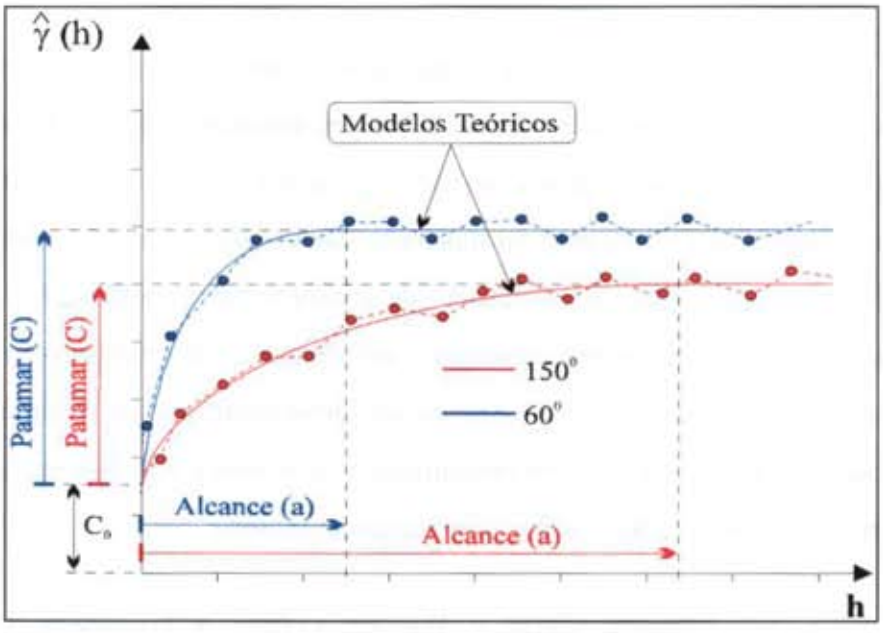



Fig. 2.15 - Representação gráfica de anisotropia combinada.

Segundo Isaaks e Srivastava (1989), citados por Deutsch e Journel (1992, p. 25), a anisotropia zonal pode ser considerada como um caso particular da anisotropia geométrica, ao se supor um fator de anisotropia muito grande. Nesta condição, o alcance implícito na direção de menor continuidade é muito grande. A estrutura do semivariograma é então adicionada somente para a direção de maior continuidade.

## 2.8 - KRIGEAGEM

O termo krigeagem é derivado do nome Daniel G. Krige, que foi o pioneiro a introduzir o uso de médias móveis para evitar a superestimação sistemática de reservas de mineração (Delfiner e Delhomme, 1975).

Inicialmente, o método de krigeagem foi desenvolvido para solucionar problemas de mapeamentos geologicos, mas seu uso expandiu-se com sucesso no mapeamento de solos (Burgess e Webster, 1980a,b), mapeamento hidrológico (Kitanidis e Vomvoris, 1983), mapeamento atmosférico (Lajaunie, 1984) e outros campos correlatos.

A diferença entre a krigeagem e outros métodos de interpolação é a maneira como os pesos são atribuídos às diferentes amostras. No caso de interpolação linear simples, por exemplo, os pesos são todos iguais a 1/N (N = número de amostras), na interpolação baseada no inverso do quadrado das distâncias, os pesos são definidos como o inverso do quadrado da distância que separa o valor interpolado dos valores observados. Na krigeagem, o procedimento é semelhante ao de interpolação por média móvel ponderada, exceto que aqui os pesos são determinados a partir de uma análise espacial, baseada no semivariograma experimental. Além disso, a krigeagem fornece, em média, *estimativas não tendenciosas e com variância mínima*[3].

Segundo Oliver e Webster (1990), a krigeagem engloba um conjunto de métodos de estimação, a saber: krigeagem simples, krigeagem ordinária, krigeagem universal, Co-krigeagem, krigeagem disjuntiva, etc.

Este trabalho limita-se somente à apresentação dos dois primeiros tipos, os quais serão descritos nas seções seguintes.

### 2.8.1 - KRIGEAGEM SIMPLES (KS)

Considere uma superfície sobre a qual se observe alguma propriedade do solo, Z, em n pontos distintos, com coordenadas representadas pelo vetor $\mathbf{x}$. Assim, tem-se um conjunto de valores $\{z(\mathbf{x}_i), i=1, ..., n\}$, onde $\mathbf{x}_i$, identifica uma posição em duas dimensões representada pelos pares de coordenadas $(x_i, y_i)$. Suponha que se objetive estimar o valor de Z no ponto $\mathbf{x}_0$. O valor desconhecido de $Z(\mathbf{x}_0)$ pode ser

---

[3] Estimativas não tendenciosas significam que, em média, a diferença entre valores estimados e verdadeiros para o mesmo ponto deve ser nula; e variância mínima significa que estes estimadores possuem a menor variância dentre todos os estimadores não tendenciosos.

estimado a partir de uma combinação linear dos n valores observados, adicionado a um parâmetro, $\lambda_0$ (Journel, 1988):

$$Z^*_{\mathbf{x}_0} = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, Z(\mathbf{x}_i) \, . \tag{2.27}$$

Deseja-se um estimador não tendencioso, isto é,

$$E\,[Z_{\mathbf{x}_0} - Z^*_{\mathbf{x}_0}] = 0 \, . \tag{2.28}$$

Esta relação impõe que as duas médias sejam iguais, isto é,

$$E\,[Z_{\mathbf{x}_0}] = E[Z^*_{\mathbf{x}_0}] \, . \tag{2.29}$$

$$\text{Mas} \quad E\left[Z^*_{\mathbf{x}_0}\right] = E\left[\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, . Z(\mathbf{x}_i)\right] = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, E\left[Z(\mathbf{x}_i)\right] . \tag{2.30}$$

O parâmetro $\lambda_0$ é obtido, substituindo a Equação 2.30 em 2.29, então:

$$\lambda_0 = E\left[Z(\mathbf{x}_0)\right] - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, E\left[Z(\mathbf{x}_i)\right] \, . \tag{2.31}$$

Substituindo o valor de $\lambda_0$ na Equação 2.27, obtem-se o estimador:

$$Z^*_{\mathbf{x}_0} = E[Z(\mathbf{x}_0)] - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E[Z(\mathbf{x}_i)] + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, Z(\mathbf{x}_i) \, . \tag{2.32}$$

O método de krigeagem simples supõe que a média ($m$) é conhecida e constante *a priori*, então:

$$E[Z(\mathbf{x}_0)] = E[Z(\mathbf{x}_i)] = m \, . \tag{2.33}$$

Substituindo a Equação 2.33 em 2.32, o estimador de krigeagem simples fica:

$$Z^*_{\mathbf{x}_0} = m + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\, Z(\mathbf{x}_i) - m] \, . \tag{2.34}$$

Journel (1988) mostra que, minimizando a variância do erro ($\mathrm{Var}[Z_{\mathbf{x}_0} - Z^*_{\mathbf{x}_0}]$), os pesos $\lambda_i$ são obtidos a partir do seguinte sistema de equações, denominado sistema de krigeagem simples:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \, C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n \ \textit{(n equações)} \tag{2.35}$$

onde,

- $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ refere-se à função covariância correspondente a um vetor, **h**, com origem em $\mathbf{x}_i$ e extremidade em $\mathbf{x}_j$.
- $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0)$ refere-se a função covariância correspondente a um vetor, **h**, com origem em $\mathbf{x}_i$ e extremidade no ponto a ser estimado $\mathbf{x}_0$.

Por exemplo, para n = 2, o sistema de krigeagem simples constitui-se de 2 equações a 2 incógnitas ($\lambda_1$, $\lambda_2$), a saber:

$$\begin{cases} \lambda_1 C_{11} + \lambda_2 C_{12} = C_{10} \\ \lambda_1 C_{21} + \lambda_2 C_{22} = C_{20} \end{cases}$$

A correspondente variância minimizada do erro, denominada variância de krigeagem simples ($\sigma^2_{ks}$), é dada por (Journel, 1988):

$$\sigma^2_{ks} = \mathrm{Var}[Z_{\mathbf{x}_0} - Z^*_{\mathbf{x}_0}] = C(\mathbf{0}) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) \ . \tag{2.36}$$

Em notação matricial, o sistema de krigeagem simples é escrito como:

$$\mathbf{K} \,.\, \lambda = \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mathbf{K}^{-1} \,.\, \mathbf{k}, \text{ com} \tag{2.37}$$

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots\ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots\ldots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots\ldots & C_{nn} \end{vmatrix}, \quad \lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = \begin{vmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \end{vmatrix}$$

onde, **K** e **k** são matrizes das covariâncias e $\lambda$ o vetor dos pesos.

A variância de krigeagem simples é dada por (Journel, 1988):

$$\sigma_{ks}^2 = C(0) - \lambda^T . \mathbf{k} \tag{2.38}$$

## 2.8.2 - KRIGEAGEM ORDINÁRIA (KO)

Analogamente à krigeagem simples, o valor desconhecido de $Z(\mathbf{x}_0)$ pode ser estimado por uma combinação linear dos n valores observados adicionado a um parâmetro, $\lambda_0$ (Journel, 1988):

$$Z^*_{\mathbf{x}_0} = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, Z(\mathbf{x}_i) \ . \tag{2.39}$$

Deseja-se um estimador não tendencioso, isto é,

$$E\,[Z_{\mathbf{x}_0} - Z^*_{\mathbf{x}_0}] = 0 \ . \tag{2.40}$$

A relação acima impõe que as duas médias sejam iguais; assim aplicando-se a Equação 2.39 em 2.40, obtem-se:

$$E\left[Z_{\mathbf{x}_0}\right] = E\left[\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, . Z(\mathbf{x}_i)\right] \Rightarrow m = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, m \ . \tag{2.41}$$

Diferente da krigeagem simples, a krigeagem ordinária não requer o prévio conhecimento da média *m*. Neste caso, para que a igualdade da Equação 2.41 seja satisfeita é necessário que:

$$\lambda_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ .$$

Portanto, o estimador de krigeagem ordinária é:

$$Z^*_{\mathbf{x}_0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, Z(\mathbf{x}_i) \ , \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ . \tag{2.42}$$

Journel (1988) mostra que, minimizando a variância do erro ($\mathrm{Var}[Z_{\mathbf{x}_0} - Z^*_{\mathbf{x}_0}]$) sob a condição de que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, os pesos $\lambda_i$ são obtidos a partir do seguinte sistema de equações, denominado sistema de krigeagem ordinária:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \alpha = C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) \qquad \text{para } i=1,\ldots,n \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{cases} \tag{2.43}$$

onde,

- $C(\mathbf{xi}, \mathbf{xj})$ e $C(\mathbf{xi}, \mathbf{x}_0)$ são definidos como anteriormente; e
- $\alpha$ é o multiplicador de Lagrange necessário para a minimização da variância do erro.

A correspondente variância minimizada do erro, denominada variância de krigeagem ordinária ($\sigma^2_{ko}$), é dada pela seguinte expressão (Journel, 1988):

$$\sigma^2_{ko} = \mathrm{Var}[Z_{x_0} - Z^*_{x_0}] = C(\mathbf{0}) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) - \alpha. \tag{2.44}$$

O sistema de krigeagem ordinária (2.43) pode ser escrito em notação matricial como:

$$\mathbf{K} \,.\, \lambda = \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mathbf{K}^{-1} \,.\, \mathbf{k} \tag{2.45}$$

onde,

**K** e **k** são matrizes das covariâncias e $\lambda$ o vetor dos pesos.

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots\ldots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \ldots\ldots & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots\ldots & C_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = \begin{vmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \\ 1 \end{vmatrix}$$

A variância de krigeagem ordinária é dada por (Journel, 1988):

$$\sigma^2_{ko} = C(\mathbf{0}) - \lambda^T \,.\, \mathbf{k} \tag{2.46}$$

### 2.8.3 - EXEMPLO PRÁTICO DE KRIGEAGEM

Considere o espaço amostral da Figura 2.16. Suponha que se objetive estimar o valor da variável Z no ponto $\mathbf{x}_o$, a partir de $z(\mathbf{x}_1)$, $z(\mathbf{x}_2)$, $z(\mathbf{x}_3)$ e $z(\mathbf{x}_4)$.

Considere ainda, que o variograma experimental foi ajustado através de um modelo esférico, com contribuição $C_1 = 20$, efeito pepita $C_0 = 2$ e alcance $a = 200$.

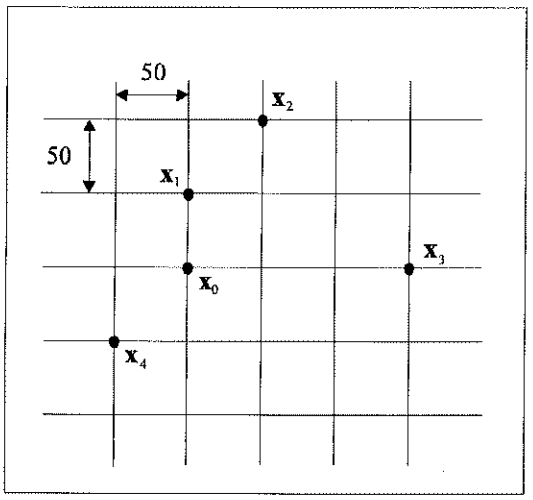



Fig. 2.16 - Grade de pontos amostrais.

Aplicando a Equação (2.45), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 1 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 1 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ C_{03} \\ C_{04} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os elementos das matrizes são calculados da seguinte forma: $Cij = C_1 + C_0 - \gamma(\mathbf{h})$, onde $\mathbf{h}$ é o vetor distância entre os pontos $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$. Então, para o exemplo dado, obtem-se:

$$C_{12} = C_{21} = C_{04} = C_1 + C_0 - \gamma(50\sqrt{2})$$

$$= 20 + 2 - \left[2 + 20\left(1{,}5\frac{50\sqrt{2}}{200} - 0{,}5\frac{(50\sqrt{2})^3}{(200)^3}\right)\right] = 9{,}84$$

$$C_{13} = C_{31} = C_1 + C_0 - \gamma\left[\sqrt{(150)^2 + (50)^2}\right] = 1{,}23$$

$$C_{14} = C_{41} = C_{02} = C_1 + C_0 - \gamma\left[\sqrt{(100)^2 + (50)^2}\right] = 4{,}98$$

$$C_{23} = C_{32} = C_1 + C_0 - \gamma\left[\sqrt{(100)^2 + (100)^2}\right] = 2{,}33$$

$$C_{24} = C_{42} = C_1 + C_0 - \gamma\left[\sqrt{(150)^2 + (100)^2}\right] = 0{,}29$$

$$C_{34} = C_{43} = C_1 + C_0 - \gamma\left[\sqrt{(200)^2 + (50)^2}\right] = 0$$

$$C_{01} = C_1 + C_0 - \gamma(50) = 12{,}66$$

$$C_{03} = C_1 + C_0 - \gamma(150) = 1{,}72$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = C_1 + C_0 - \gamma(0) = 22$$

Substituindo os valores de $C_{ij}$ nas matrizes, encontra-se os seguintes pesos: $\lambda_1 = 0{,}518$ , $\lambda_2 = 0{,}022$ , $\lambda_3 = 0{,}089$ e $\lambda_4 = 0{,}371$. Finalmente o estimador de $Z_{\mathbf{x}_o}$ é dado por:

$$Z^*_{\mathbf{x}_o} = 0{,}518\, z(\mathbf{x}_1) + 0{,}022\, z(\mathbf{x}_2) + 0{,}089\, z(\mathbf{x}_3) + 0{,}371\, z(\mathbf{x}_4)$$

Comentários:

Embora as amostras $Z_2$ e $Z_3$ tenham pouca influência na estimativa final de $Z_0$, suas influências relativas não são lineares em relação às suas distâncias a partir de $Z_0$. A amostra $Z_3$ está mais distante que $Z_2$; no entanto, tem mais influência (8,9%) que $Z_2$ (2,2%). Isto ocorre porque $Z_0$ está diretamente sobre a influência de $Z_3$, enquanto $Z_2$ está muito próximo de $Z_1$. Ao se introduzir as covariâncias no cálculo dos pesos, evita-se associar pesos indevidos a "clusters" (agrupamentos) de amostras, o que não ocorre com outros métodos baseados somente na distância.

# CAPÍTULO 3

# APRESENTAÇÃO DO MÓDULO GEOESTATÍSTICO

Neste capitulo, é apresentado o Módulo de Procedimentos Geoestatísticos desenvolvido no Sistema de Processamento de Informações Georreferenciadas (SPRING). Inicia-se com uma breve apresentação das principais características da biblioteca GSLIB (Deutsch e Journel, 1992), a qual é utilizada como plataforma base deste trabalho. Um segundo tópico mostra a estrutura implementada do módulo, seguido de descrições operacionais e apresentações das interfaces que compõem o sistema.

## 3.1 - BIBLIOTECA GEOESTATÍSTICA GSLIB

A biblioteca GSLIB foi construída por Deutsch e Journel (1992), a partir de programas desenvolvidos e usados na Universidade de Stanford ao longo de doze anos. Esses programas são constantemente revisados e modificados para manipular novos algoritmos. Os programas incluídos na GSLIB são ferramentas de suporte para desenvolvimento, tanto de programas pessoais quanto de aplicações avançadas de pesquisa. Programas geoestatísticos de domínio público como Geo-EAS (Englund e Sparks, 1988), Geostatistical Toolbox Primer (Froidevaux, 1990), ISIM3D (Hernández e Srivastava, 1990) dentre outros, foram desenvolvidos a partir desta biblioteca.

A biblioteca GSLIB não é um produto comercial; portanto, não há garantia nem suporte técnico, mas um razoável esforço tem sido feito para mantê-la livre de erros e bem documentada. Seu código fonte é escrito em linguagem de programação Fortran 77 padrão ANSI (American National Standard Institute). O padrão ANSI permite a independência de máquina, isto é, a GSLIB pode ser executada sobre várias plataformas, desde computadores pessoais a estações de trabalho.

Descrições detalhadas dos algoritmos, das convenções de programação e dos formatos de arquivos adotados são encontradas em Deutsch e Journel (1992).

A estrutura da GSLIB é basicamente formada por quatro módulos, a saber :

- *módulo de utilitários*: composto de funções que permitem mostrar e analisar os resultados;
- *módulo de variograma*: composto de quatro funções que geram variogramas a partir de amostras espaçadas regular e irregularmente;
- *módulo de krigeagem*: composto de funções que executam a interpolação baseada em técnicas de krigeagem, tais como krigeagem simples, krigeagem ordinária , co-krigeagem e outras;
- *módulo de simulação*: composto de funções que executam simulações estocásticas.

A Figura 3.1 fornece uma visão geral dos módulos que compõem a biblioteca geoestatística GSLIB.

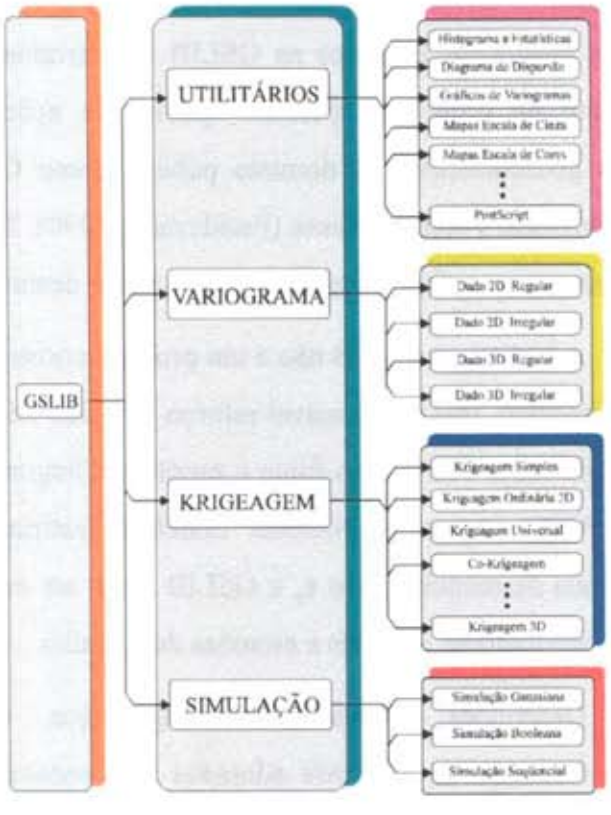



Fig. 3.1 - Estrutura da Biblioteca Geoestatística (GSLIB).

## 3.2 - MÓDULO DE PROCEDIMENTOS GEOESTATÍSTICOS

O Módulo de Procedimentos Geoestatísticos, desenvolvido neste trabalho, tem como objetivo a análise em duas dimensões, 2D, para dados espacialmente distribuídos, no que diz respeito a interpolação de superfícies geradas a partir de amostras georreferenciadas. A estrutura implementada segue o modelo apresentado na Figura 3.2.

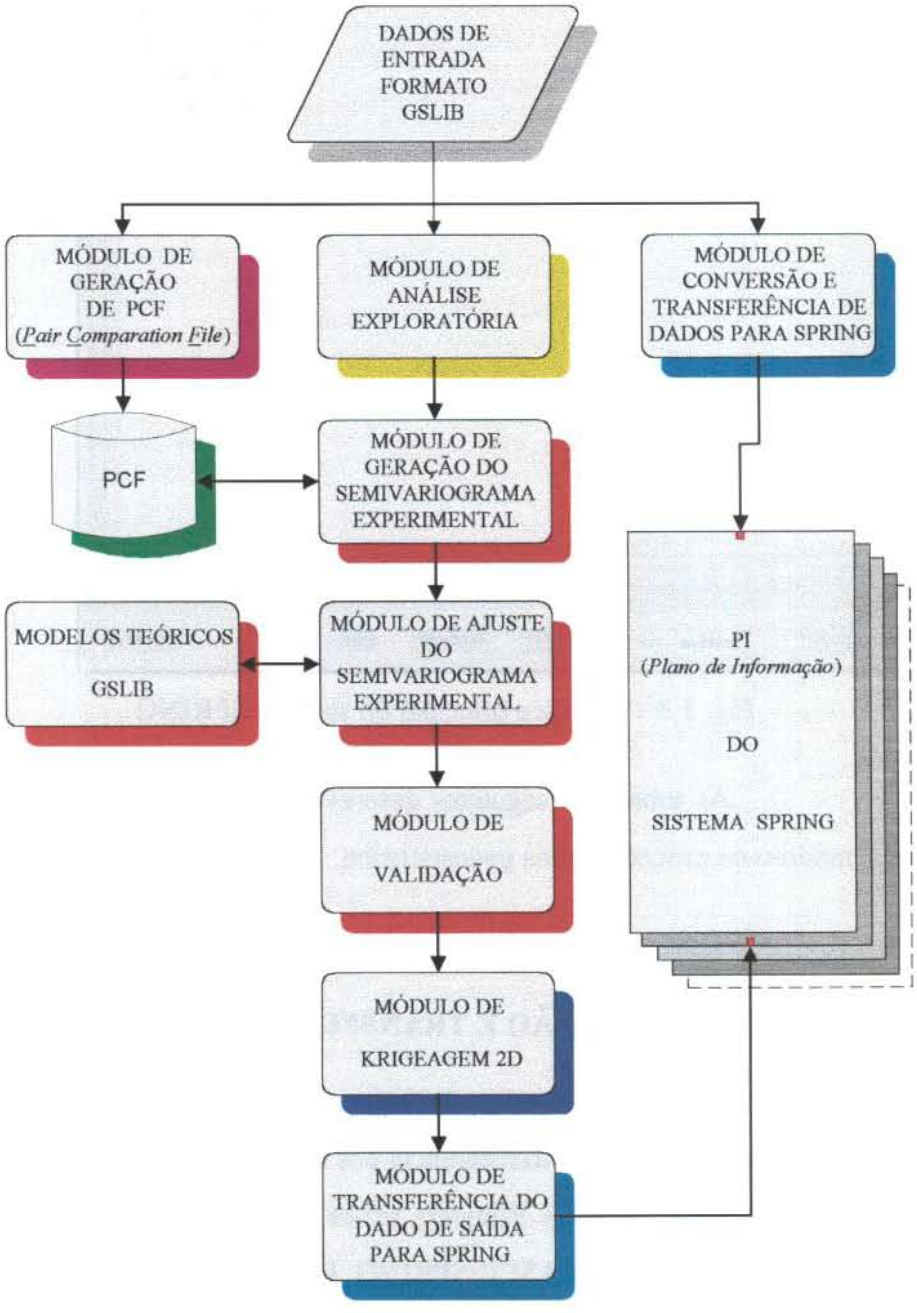



Fig. 3.2 - Estrutura do Módulo de Procedimentos Geoestatísticos.

Os procedimentos gerais que compõem o módulo estão agrupados no menu principal do SPRING, conforme mostra a Figura 3.3, e possibilitam que as etapas fundamentais da geoestatistica sejam executadas.

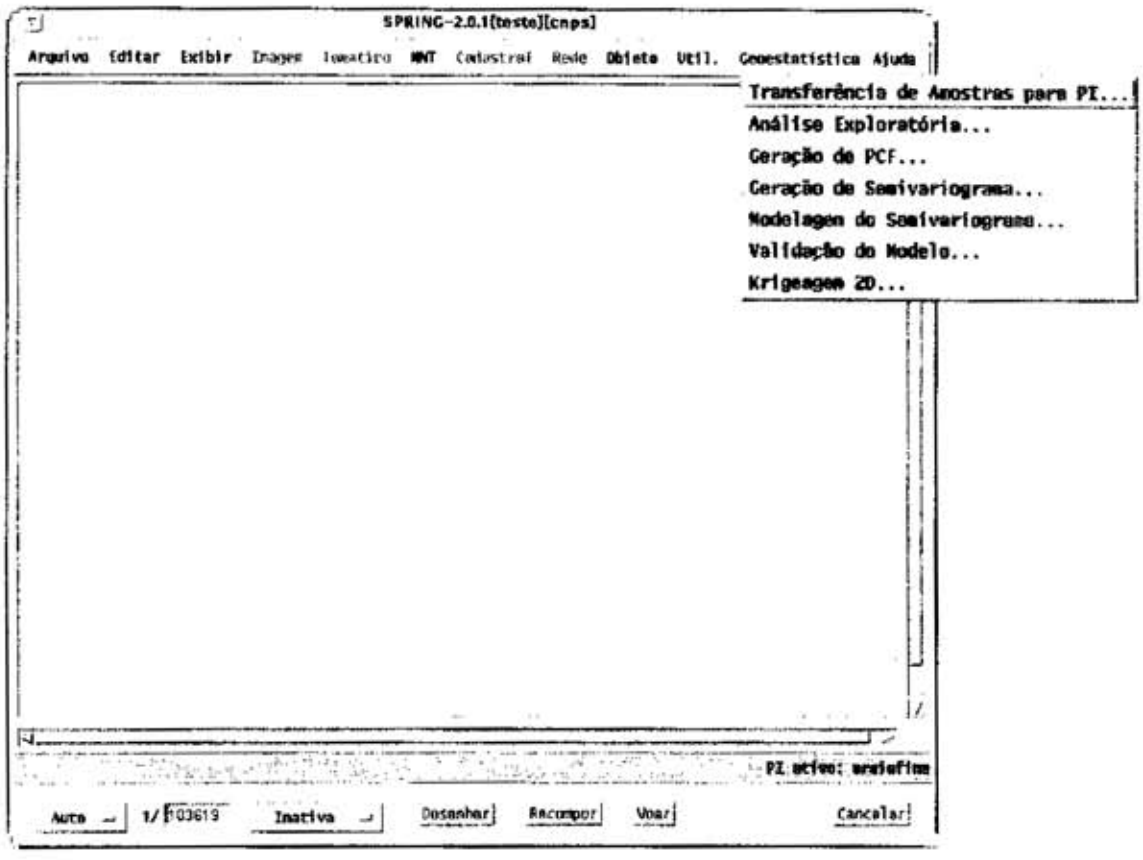



Fig. 3.3 - Interface principal do sistema SPRING

As subseções seguintes descrevem e apresentam as interfaces que compõem o módulo de procedimentos geoestatistico.

### 3.2.1 - MÓDULO DE CONVERSÃO E TRANSFERÊNCIA DE DADOS

O módulo de transferência de dados ou amostras tem por finalidade executar a conversão e a transferência dos dados de entrada para um Plano de Informação, PI, do sistema SPRING. Primeiro, faz-se necessária a conversão do arquivo de dados de entrada para o padrão ASCII/SPRING. Este procedimento gera um arquivo temporário, o qual é utilizado na fase de transferência.

Quando a opção *Transferência de Amostras para PI...* do menu principal do SPRING (Figura 3.3) é ativada, ocorre a abertura da interface ilustrada na Figura 3.4.

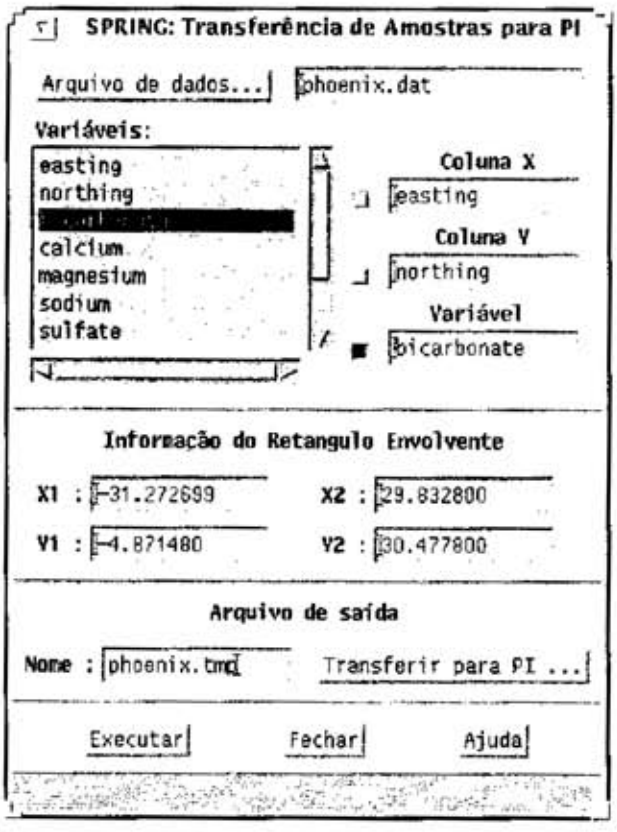



Fig. 3.4 - Interface de conversão e transferência de dados.

A operação com esta interface inicia-se com a seleção do arquivo de dados; isto é realizado pressionando-se o botão localizado no canto superior esquerdo da interface (*Arquivo de dados ...*). Esta ação leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.5, na qual a seleção é executada. Uma vez selecionado o arquivo de dados, a *Lista de Variáveis* da interface é automaticamente preenchida.

O próximo passo é definir os campos, *Coluna X*, *Coluna Y* e *Variável* da interface. Os campos *Coluna X* e *Coluna Y* referem-se às localizações espaciais dos dados e o campo *Variável* refere-se à variável selecionada.

Após as seleções iniciais, os campos *X1*, *X2*, *Y1* e *Y2* são preenchidos automaticamente, e referem-se ao retângulo envolvente ou à área do dado

selecionado. As informações contidas nesses campos são utilizadas numa etapa posterior à conversão de dados.

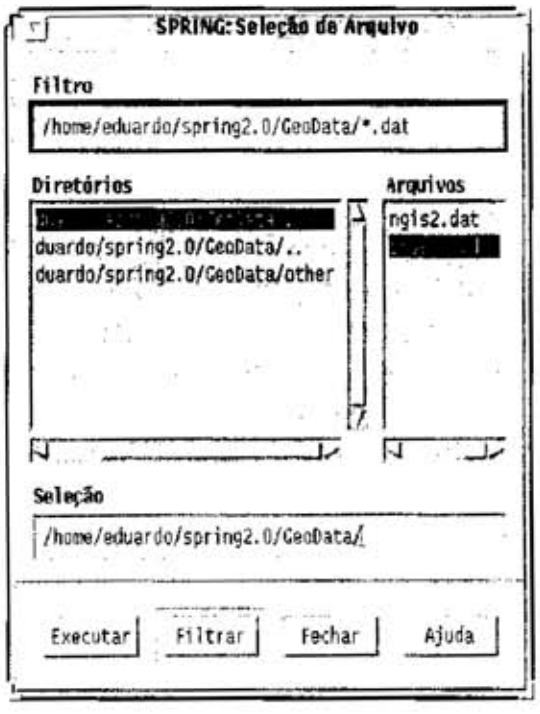



Fig. 3.5 - Interface de seleção de arquivos de dados.

Em seguida, faz-se a conversão dos dados de entrada para o padrão ASCII/SPRING. Isto é realizado definindo-se o nome do arquivo temporário no campo *Nome* e pressionando-se o botão *Executar* (veja Figura 3.4). Após a realização da conversão, o botão *Transferir para PI...* da interface é habilitado, tornando-se possivel executar a transferência dos dados.

Pressionando-se o botão *Transferir para PI...*, ocorre a abertura da janela de *Importação de Dados* do sistema SPRING, onde um dos requisitos de entrada é a área dos dados (campos *X1, X2, Y1 e Y2*). Outros parâmetros e detalhes de operação desta interface são descritos no manual de operações do SPRING.

A Figura 3.6 mostra o resultado final após a conversão e transferência dos dados para o sistema SPRING. Os simbolos tipo cruz representam os dados amostrais espacialmente distribuídos; associado a cada uma dessas amostras está o valor da variável selecionada.

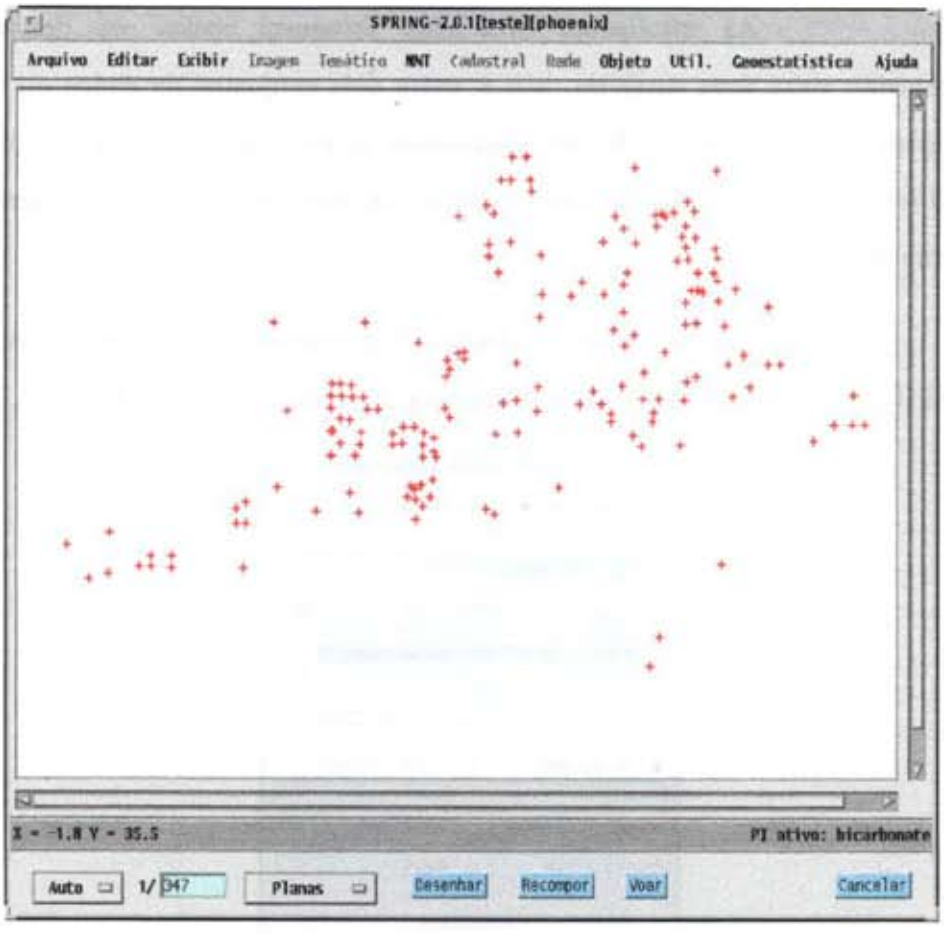



Fig. 3.6 - Visualização de dados amostrais no ambiente SPRING.

### 3.2.2 - MÓDULO DE ANÁLISE EXPLORATÓRIA

Este módulo tem por finalidade proceder à análise exploratória dos dados através de estatísticas univariadas e bivariadas. As estatísticas univariadas fornecem um meio de organizar e sintetizar um conjunto de valores, que se realiza principalmente através do histograma. Características importantes do histograma são organizadas em três grupos (Costa Neto, 1977):

- *Medidas de localização*: média, valor mínimo, quartil inferior, mediana, quartil superior e valor máximo;
- *Medidas de dispersão*: variância e desvio padrão;
- *Medidas de forma*: coeficiente de assimetria, coeficiente de curtose e coeficiente de variação.

As estatísticas bivariadas fornecem meios de descrever o relacionamento entre duas variáveis, isto é, entre dois conjuntos de dados ou de duas distribuições. Esta relação pode ser visualizada através do diagrama de dispersão *(ScatterPlot)*. O grau da relação linear entre as variáveis pode ser medido através do coeficiente de correlação.

Quando a opção *Análise Exploratória...* do menu principal do SPRING (Figura 3.3) é ativada, ocorre a abertura da janela ilustrada na Figura 3.7.

Fig. 3.7 - Interface de análise exploratória com estatísticas univariadas.

A operação desta interface inicia-se com a seleção do arquivo de dados. Após efetuada a seleção, a Lista de Variáveis da interface é automaticamente preenchida. Em seguida, define-se o tipo de estatística:

- *Univariada* ou
- *Bivariada*.

A opção *Univariada* coloca a interface no estado indicado na Figura 3.7. Este procedimento habilita a seleção de uma variável, além da verificação do histograma e do gráfico de probabilidade normal (Costa Neto, 1977, p. 136).

O modo para visualizar o histograma e as estatíticas univariadas associadas à variável selecionada é como segue:

- seleciona-se a opção *Histograma* e
- pressiona-se o botão *Apresentar...*

Esta ação leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.8, onde o histograma está apresentado em verde e a distribuição Gaussiana, com média e desvio padrão calculados a partir dos dados amostrados, é apresentada em vermelho.

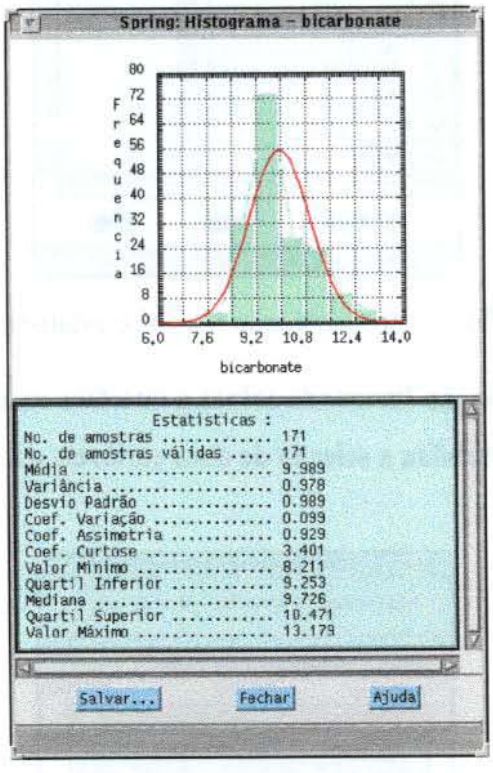



Fig. 3.8 - Histograma e estatísticas descritivas.

De maneira análoga, para visualizar o gráfico de probabilidade normal,

- seleciona-se a opção *Prob. Normal* e
- pressiona-se o botão *Apresentar...*

Esta ação leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.9, onde a linha verde refere-se aos dados amostrais e a linha vermelha a uma distribuição Gaussiana.

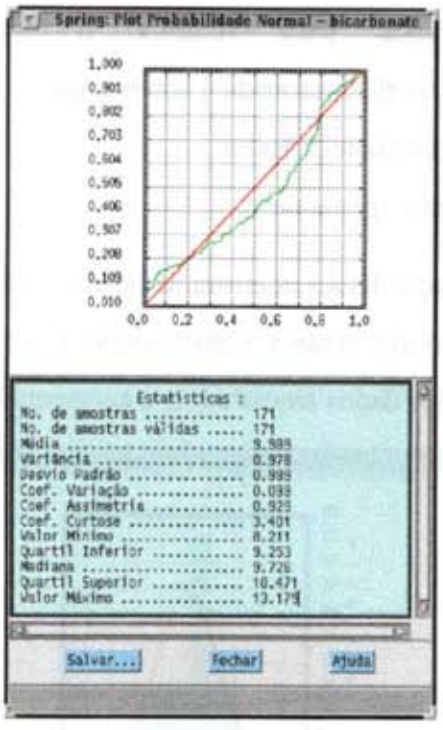



Fig. 3.9 - Gráfico da probabilidade normal e estatísticas descritivas.

A opção *Bivariada* coloca a interface no estado indicado na Figura 3.10. Este procedimento habilita a seleção de duas variáveis e a visualização do diagrama de dispersão.

Fig. 3.10 - Interface de análise exploratória com estatística bivariada.

Para visualizar o diagrama de dispersão das variáveis selecionadas e efetuar o cálculo do coeficiente de correlação, procede-se da seguinte forma:

- seleciona-se a opção *Diagrama de Dispersão* e
- pressiona-se o botão *Apresentar...*

Esta ação leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.11.

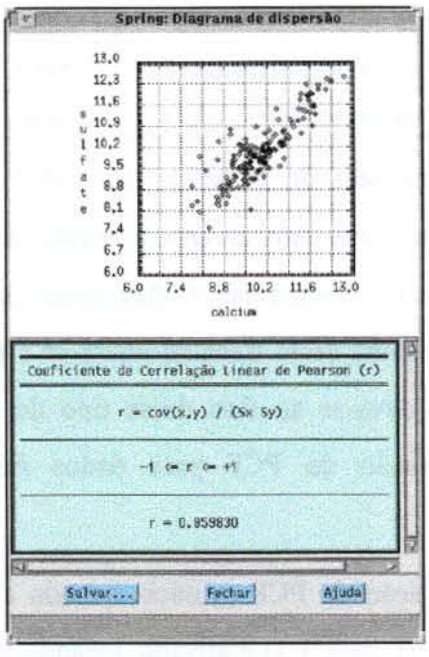



Fig. 3.11 - Diagrama de dispersão.

### 3.2.3 - MÓDULO DE GERAÇÃO DE PCF

A finalidade deste módulo é gerar o arquivo PCF (Pair Comparation File). O PCF é um arquivo binário que contém pares de amostras, em duas dimensões, ordenados pela distância. O número de pares depende do número total de amostras contidas no arquivo de dados e é calculado através da seguinte expressão:

$$Np = \frac{Ns.(Ns-1)}{2} \tag{3.1}$$

onde,

- Np é o número de pares de amostras ordenados pela distância e
- Ns é o número total de amostras.

A estrutura do PCF é composta de cinco campos, conforme ilustrada na Tabela 3.1.

**TABELA 3.1 - ESTRUTURA DO PCF.**

| Informação | Tipo | Tamanho (Bytes) |
|---|---|---|
| Número da primeira amostra | int | 2 |
| Número da segunda amostra | int | 2 |
| Distância entre amostras | float | 4 |
| Diferença na coord. X entre amostras (Δx) | float | 4 |
| Diferença na coord. Y entre amostras (Δy) | float | 4 |

A vantagem de trabalhar com PCF é que sua estrutura está armazenada em disco ou memória. Isto garante o acesso direto a todas as distâncias e permite a construção de semivariogramas e diagramas de dispersão de modo mais eficiente. A versão implementada neste trabalho limita-se à geração do PCF para dados *Irregulares*. Esta restrição deve-se ao fato desse tipo de dado ser mais comum nas aplicações práticas; a geração do PCF para dados *Regulares* está prevista em implementações futuras.

A geração do PCF se inicia quando a opção *Geração PCF...* do menu principal do SPRING (Figura 3.3) é ativada, levando à abertura da janela ilustrada na Figura 3.12.

Fig. 3.12 - Interface de geração de PCF.

A primeira ação é selecionar o arquivo de dados. Após a seleção, todos os campos da interface são preenchidos com valores apropriados ao dado selecionado.

O mais indicado é gerar o PCF com os valores pré-inicializados; isto é realizado pressionando-se o botão *Executar*. Porém, é possível restringir a geração do PCF a uma subregião de interesse do dado; isto é realizado alterando-se os valores dos campos relacionados com a distância máxima *(X: e Y:)*. Além disso, é possível também restringir a geração do PCF aos limites mínino e máximo da variável selecionada; isto é realizado alterando-se os valores dos campos *Limite mínimo* e *Limite máximo* da interface.

Neste trabalho, utiliza-se o PCF para construir o diagrama de dispersão do LAG selecionado sobre o semivariograma, conforme ilustrado na Figura 3.17 da página 50.

### 3.2.4 - MÓDULO DE GERAÇÃO DO SEMIVARIOGRAMA EXPERIMENTAL

Na geoestatística, a análise do semivariograma é uma etapa importante, pois o modelo de variograma escolhido é a interpretação da estrutura de correlação espacial a ser utilizada nos procedimentos inferenciais da krigeagem. A análise completa do semivariograma compreende os seguintes passos:

1. levantamento do semivariograma experimental;
2. ajuste a uma família de modelos de semivariogramas;
3. validação do modelo a ser utilizado nos procedimentos da krigeagem.

Nesta seção se aborda o item 1. Os demais itens, 2 e 3, são apresentados nas seções seguintes.

A análise do semivariograma se inicia quando a opção *"Geração de Semivariograma..."* do menu principal do SPRING (ver Figura 3.3) é ativada. Esta opção leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.13.

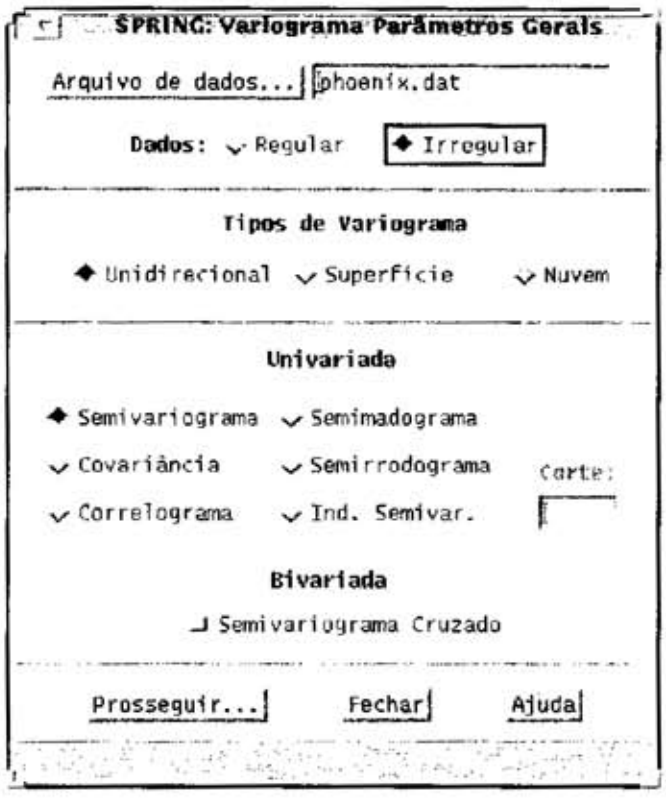



Fig. 3.13 - Interface de parâmetros gerais do semivariograma

A operação com esta interface inicia-se com a seleção do arquivo de dado e seu tipo: *Regular ou Irregular*. Depois, define-se o tipo de semivariograma: *Unidirecional, Superfície* ou de *Nuvem*. As opções *Superfície* e *Nuvem* estão previstas em implementações futuras.

A opção *Unidirecional* engloba dois tipos de estatísticas: *Univariada* e *Bivariada*, conforme ilustrado na Figura 3.13. As estatísticas *Univariadas* disponíveis são: *Semivariograma, Covariância, Correlograma, Semimadograma, Semirrodograma, e Indicador Semivariograma*. A opção *Bivariada* corresponde ao *Semivariograma Cruzado*. Informações mais detalhadas sobre estas estatísticas são encontradas em Deutsch e Journel (1992).

Após as seleções iniciais, pressiona-se o botão *Prosseguir...* da interface. Se o tipo de dado selecionado é *Irregular* (veja Figura 3.13), então ocorre a abertura da janela mostrada na Figura 3.14.

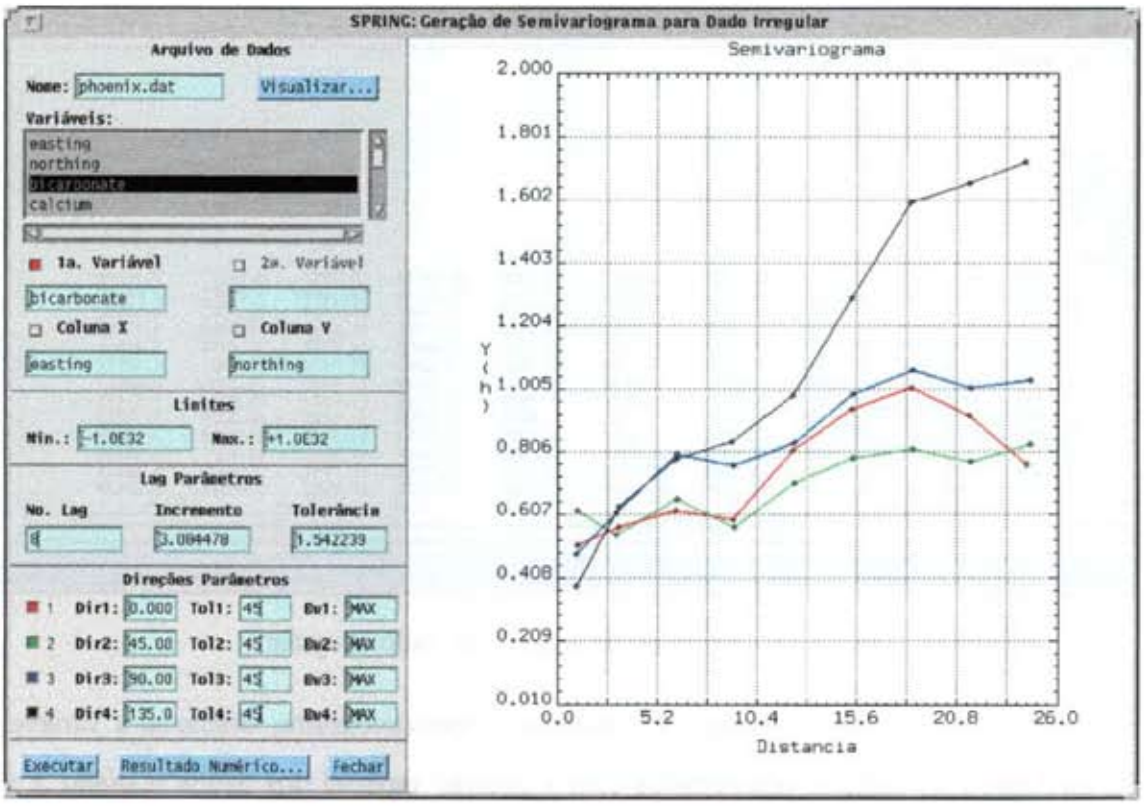



Fig. 3.14 - Interface de geração do semivariograma para dado irregular.

Nesta interface a *Lista de Variáveis* é automaticamente preenchida. Os campos relacionados aos Limites (*Min e Max*), Parâmetros do Lag ($N^{o}$ *de Lag, Incremento e Tolerância*) e Parâmetros de Direções ($Dir_i$ , $Tol_i$ *e* $Bw_i$ , *onde* $i=1,2,3$ *e* $4$) são inicializados com valores apropriados ao conjunto de dados selecionado. Para melhor compreensão desses campos, refira-se a Seção 2.5 e à bibliografia de Deutsch e Journel (1992).

Antes de produzir o semivariograma, é interessante, mas não necessário, inspecionar o arquivo de dados. Isto é realizado pressionando-se o botão *Visualizar ...* . Esta ação leva à abertura da janela apresentada na Figura 3.15.

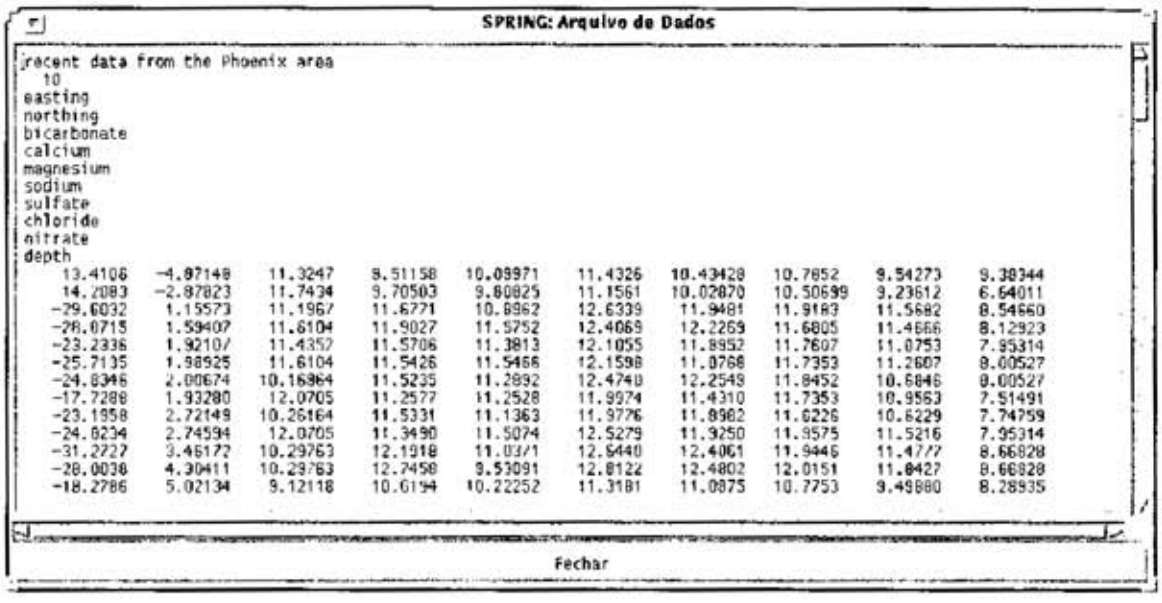



Fig. 3.15 - Exemplo de arquivo de dado irregular.

Para produzir e visualizar o semivariograma, define-se a variável de interesse e os campos relacionados com a posição espacial dos dados (*Coluna X e Coluna Y*). Em seguida seleciona-se a direção desejável (ou todas) e pressiona-se o botão *Executar* da interface.

O resultado é ilustrado na Figura 3.14, a qual apresenta quatro semivariogramas. O semivariograma vermelho está relacionado com a primeira direção, 0°, o verde com a segunda, 45° , o azul com a terceira, 90° e o preto com a direção de 135° .

Além dos gráficos, é possível verificar os resultados numéricos dos quatro semivariogramas gerados. Isto é realizado pressionando-se o botão *Resultado Numérico...* da interface. Esta ação leva à abertura da janela ilustrada na Figura 3.16.

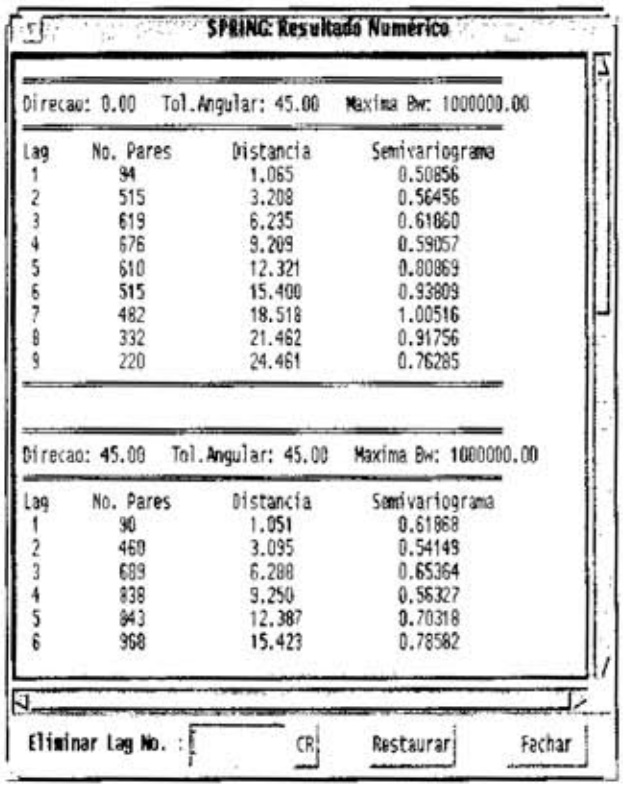



Fig. 3.16 - Resultados numéricos dos semivariogramas.

Esta interface, além de exibir os resultados numéricos, possibilita a eliminação de um ou vários Lags. Procede-se da seguinte forma: no campo *Eliminar Lag No.* entre com o número do Lag a ser eliminado. Se for mais de um, deve existir uma virgula separando os números correspondentes aos Lags selecionados. Exemplo: para eliminar os Lags 1 e 2, então escreve-se 1,2. Após a selcção, pressiona-se o botão *CR*; o resultado é imediatamente refletido nas telas gráfica e numérica. Para retornar os Lags eliminados, pressiona-se o botão *Restaurar*.

A interface de geração de semivariograma para dado irregular (Figura 3.14) possibilita também a análise do diagrama de dispersão do Lag. O procedimento de análise é realizado da seguinte forma: seleciona-se a direção de interesse (somente uma); visualiza-se o semivariograma; em seguida, aponta-se o cursor sobre o Lag desejado e pressiona-se o botão esquerdo do apontador ("mouse"). Esta ação leva ao gráfico do diagrama de dispersão. A Figura 3.17 apresenta dois exemplos, um realizado sobre o Lag 2 e o outro sobre o Lag 6.

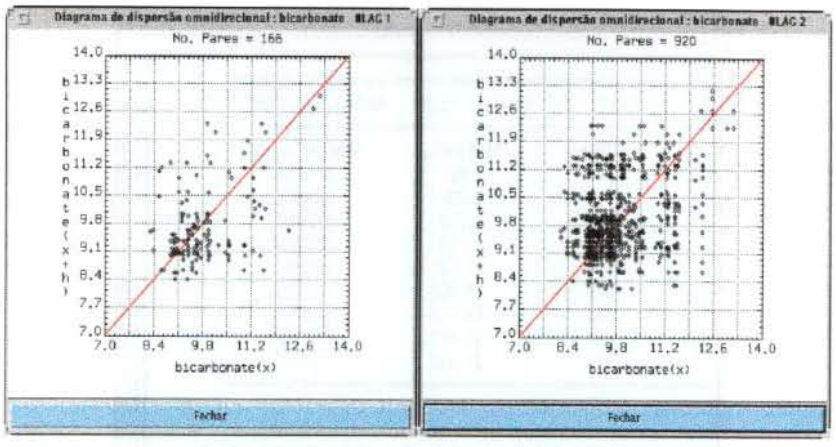



Fig. 3.17 - Diagrama de dispersão do Lag.

Até este ponto, apresentou-se descrições operacionais relacionadas ao módulo de *Geração de Semivariograma para Dado Irregular*. A exposição que se segue mostra descrições operacionais do módulo de *Geração de Semivariograma para Dado Regular*.

Se o tipo de dado selecionado é *Regular* e o botão *Prosseguir...* é pressionado (veja Figura 3.13), ocorre a abertura da janela mostrada na Figura 3.18.

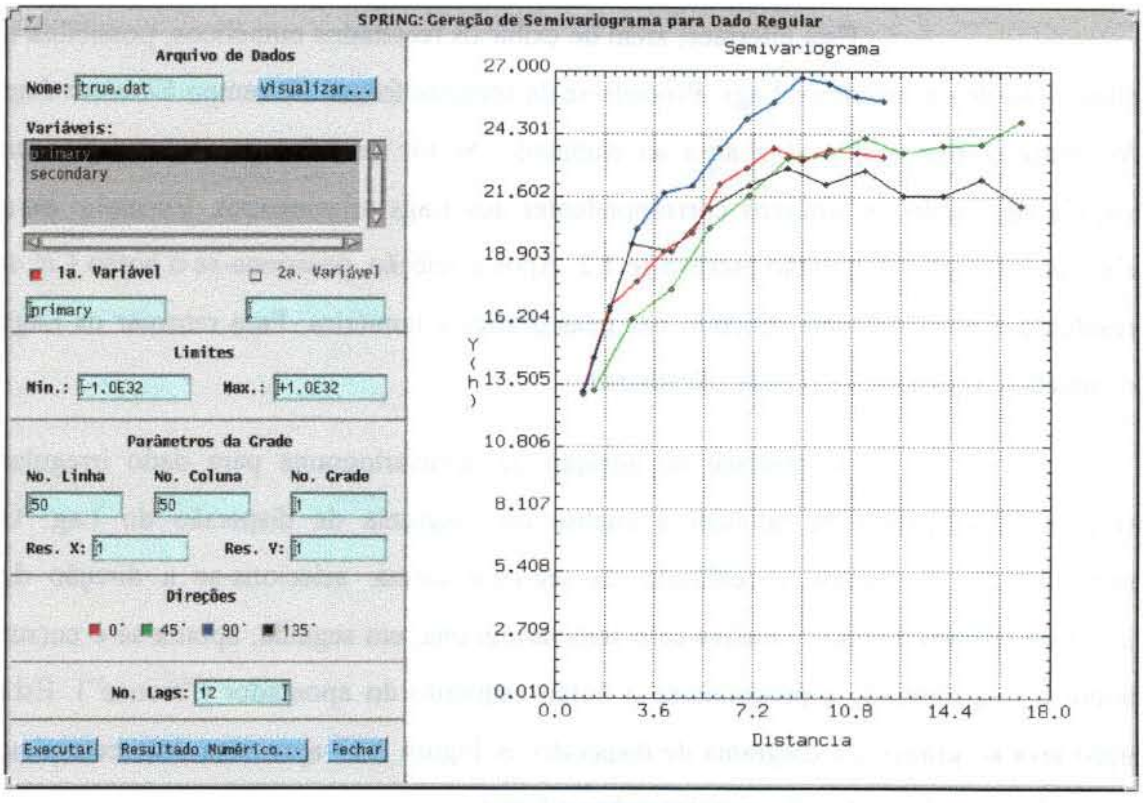



Fig. 3.18 - Interface de geração de semivariograma para dado regular.

Nesta interface, a *Lista de Variáveis* é automaticamente preenchida e os campos relacionados com os *Limites (Min e Max)* são inicializados com valores apropriados ao conjunto de dados selecionado.

Os campos relacionados aos *Parâmetros de Grade* não são inicializados de forma automática; devem, portanto ser preenchidos. O campo *Nº Grade* refere-se à seleção do número da grade. Esta é uma característica exclusiva do arquivo de dado regular, o qual pode conter informações de várias grades ou amostragens regulares. Os demais parâmetros definem a malha regular de dados selecionada e são definidos conforme ilustra a Figura 3.19.

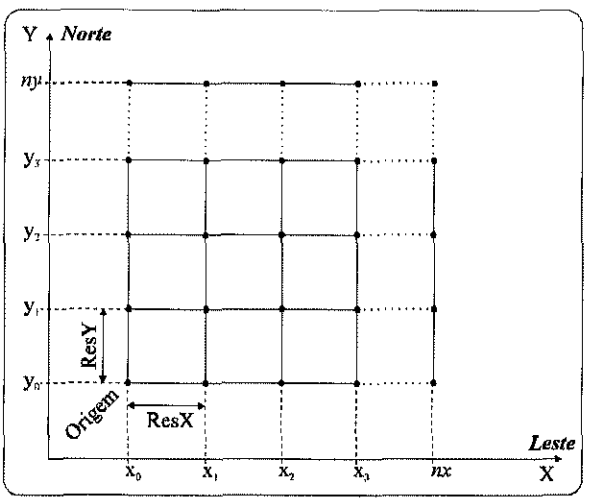



Fig. 3.19 - Definição dos parâmetros para dado regular.

O eixo X está associado à direção *Leste*, o eixo Y à direção *Norte* e a origem geográfica é definida no canto inferior esquerdo pelas coordenadas $x_0$ e $y_0$. A resolução da malha regular de dados é especificada pelos parâmetros *ResX* (resolução na direção X) e *ResY* (resolução na direção Y). Os parâmetros *nx* e *ny* referem-se aos números de Colunas e Linhas, respectivamente.

Para visualizar o semivariograma, primeiro define-se a variável de interesse e depois preenche-se os campos relacionados com os *Parâmetros de Grade*. Em seguida, seleciona-se a direção desejável (ou todas) e define-se o número de Lags. Após a definição de todos os campos, pressiona-se o botão *Executar* da interface. O

resultado é ilustrado na Figura 3.18, a qual apresenta quatro semivariogramas. O semivariograma vermelho está relacionado com a primeira direção (0°), o verde com a segunda (45 °), o azul com a terceira (90 °), e o preto com a direção de 135°.

O arquivo de dados e os resultados numéricos são visualizados de maneira análoga, conforme descrito anteriormente na geração de semivariograma para dados *Irregulares*.

Os semivariogramas gerados, tanto para dados *Irregulares* como *Regulares*, são armazenados em arquivos e utilizados na fase de ajuste ou modelagem, conforme descrito a seguir.

### 3.2.5 - MÓDULO DE AJUSTE DO SEMIVARIOGRAMA EXPERIMENTAL

Este módulo realiza o ajuste do modelo teórico ao semivariograma experimental, através de dois modos: automático ou visual.

O modo automático utiliza o algoritmo de Olea et al. (1996), o qual baseia-se no método dos mínimos quadrados. Este algoritmo fornece também uma medida quantitativa, denominada informação de Akaike (Akaike, 1974), que reporta para qual modelo o ajuste é mais preciso.

O modo visual é recomendado a especialistas que possuem afinidade e conhecimento do fenômeno em estudo. Neste modo, todos os parâmetros são definidos por inspeção.

Além dos procedimentos de ajuste, automático e visual, este módulo define os parâmetros estruturais (*Efeito Pepita, Alcance, Contribuição, Ângulo e Fator de Anisotropia*) que são utilizados nos módulos de Validação e Krigeagem 2D, conforme descrito nas Seções 3.2.6 e 3.2.7, respectivamente.

O ajuste do semivariograma experimental se inicia quando a opção *"Modelagem do Semivariograma..."* do menu principal do SPRING (ver Figura 3.3) é ativada. Esta opção leva à abertura da janela apresentada na Figura 3.20.

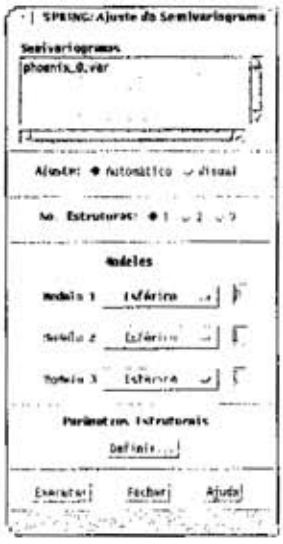



Fig. 3.20 - Interface de ajuste do semivariograma experimental.

Nesta interface, a *Lista de Semivariogramas* é preenchida automaticamente, com a finalidade informar qual ou quais semivariogramas serão ajustados. O procedimento inicia-se com a definição do tipo de ajuste: *Automático* ou *Visual*. A seguir, define-se o número de estruturas (*1, 2 ou 3*) necessárias ao ajuste do semivariograma experimental.

De acordo com o número de estruturas selecionadas, define-se os modelos teóricos através dos botões de seleção *Modelo 1, Modelo 2 e Modelo 3* da interface. As opções de seleção são ilustradas na Figura 3.21.

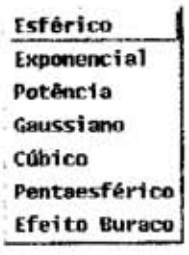



Fig. 3.21 - Seleção de modelos teóricos.

O módulo de ajuste limita-se presentemente apenas aos modelos Esférico, Exponencial, Potência e Gaussiano, conforme apresentado na Seção 2.6. Os demais modelos estão previstos em implementações futuras.

Após as inicializações iniciais, pressiona-se o botão *Executar*; esta ação faz o ajuste e habilita o botão *Definir...* parâmetros estruturais. Pressionando-se o botão *Definir...*, ocorre a abertura da janela mostrada na Figura 3.22.

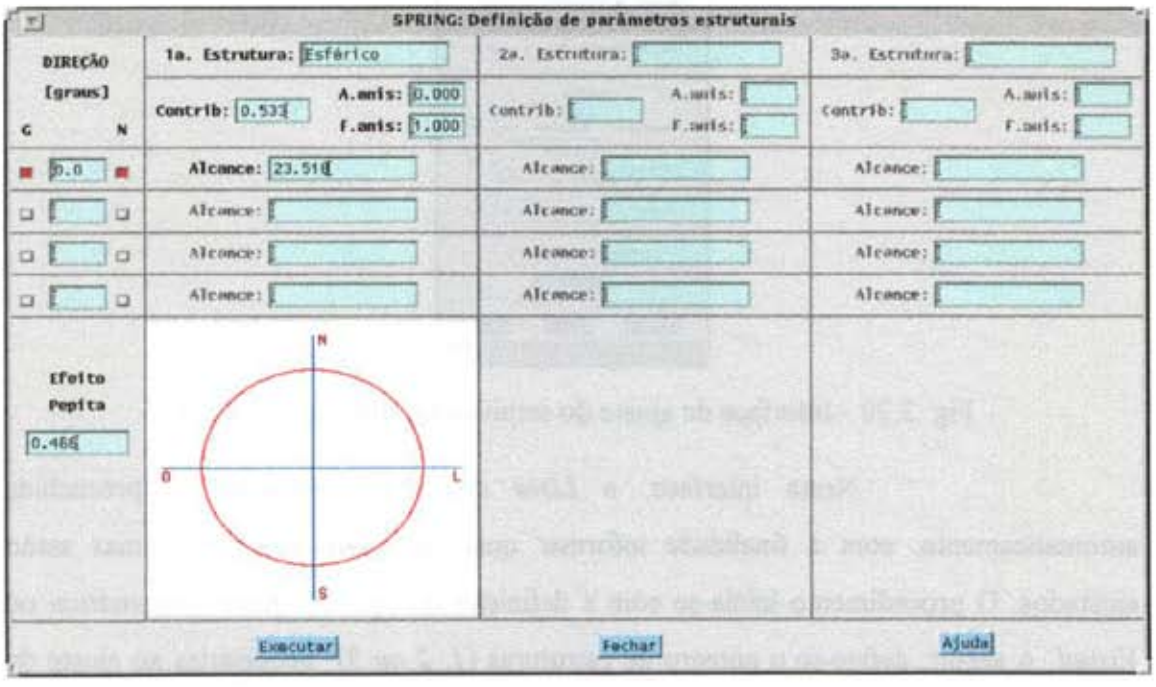



Fig. 3.22 - Interface de definição dos parâmetros estruturais.

Esta interface define os parâmetros estruturais para, no máximo, quatro direções distintas (cada direção relaciona-se a um semivariograma), sendo que cada direção é composta de uma, duas ou três estruturas.

Se o ajuste é efetuado no modo automático, os campos no topo da interface (*1ª Estrutura, 2ª Estrutura e 3ª Estrutura*) e os campos relacionados às direções (localizados do lado esquerdo da interface) são preenchidos automaticamente, de acordo com as seleções pré-estabelecidas na interface da Figura 3.20.

Associado a cada campo de direção existem dois botões: um localizado à direita e alinhado verticalmente com a letra **N** (refere-se ao resultado **N**umérico do ajuste automático); o outro encontra-se à esquerda e alinhado verticalmente com a letra **G** (refere-se ao resultado **G**ráfico do ajuste automático). Então, para verificar o resultado gráfico do ajuste automático numa determinada direção,

pressiona-se o botão do lado esquerdo, o qual leva à abertura da tela gráfica ilustrada na Figura 3.23. O gráfico em vermelho refere-se ao modelo teórico de ajuste e o preto refere-se ao semivariograma experimental.

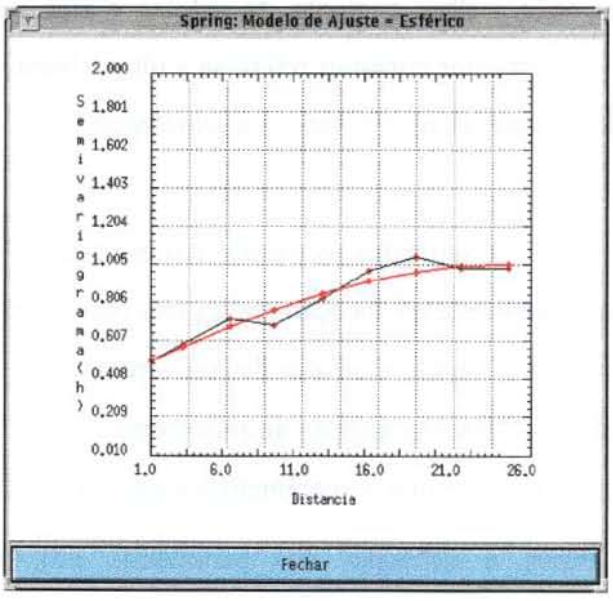



Fig. 3.23 - Resultado gráfico do ajuste do semivariograma experimental.

De maneira análoga, para verificar os resultados numéricos do ajuste automático, pressiona-se o botão à direita da direção desejada. Esta ação leva à abertura da janela ilustrada na Figura 3.24.

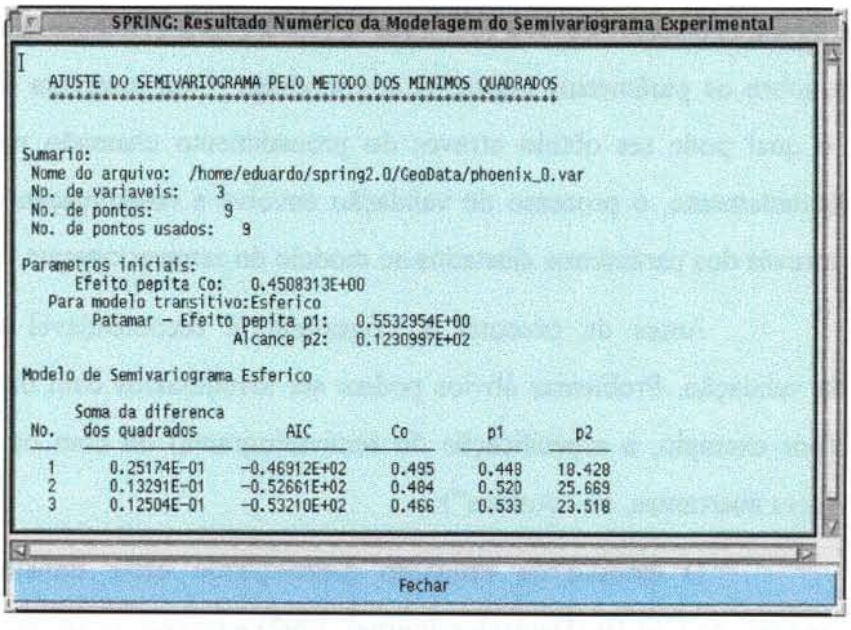



Fig. 3.24 - Resultado numérico do ajuste automático.

Os resultados numéricos (*Efeito Pepita* (Co), *Contribuição* (p1) e *Alcance* (p2) ) contidos nesta interface são transportados manualmente para os correspondentes campos da interface da Figura 3.22. Então, através do AIC (informação de Akaike), seleciona-se o melhor conjunto de valores e efetua-se o transporte. No exemplo da Figura 3.24, o melhor conjunto refere-se à ultima linha, cujo valor de AIC = -0.5321E+02, o *Efeito Pepita* (Co) = 0.466, a *Contribuição* (p1) = 0.533 e o *Alcance* (p2) = 23.518.

Uma vez definidos os parâmetros estruturais, pressiona-se o botão *Executar* da interface (Figura 3.22). Esta ação realiza três operações:

- *Primeira*: calcula o Ângulo e o Fator de Anisotropia;
- *Segunda*: calcula e desenha a elipse de anisotropia;
- *Terceira*: grava em memória os parâmetros estruturais definidos.

Após a definição dos parâmetros estruturais, procede-se à validação do modelo, conforme descrito a seguir.

### 3.2.6 - MÓDULO DE VALIDAÇÃO

Como mencionado anteriormente, a análise do semivariograma compreende o levantamento do semivariograma experimental e posteriormente o ajuste a uma família de modelos teóricos. Em toda esta seqüência, existe sempre um certo grau de incerteza sobre os parâmetros ajustados aos modelos. Esta incerteza é o *erro da estimativa*, o qual pode ser obtido através do procedimento chamado *validação do modelo*. Resumidamente, o processo de validação envolve a re-estimação dos valores conhecidos através dos parâmetros ajustados ao modelo do semivariograma.

Antes de executar a krigeagem, é recomendável verificar os resultados da validação. Problemas óbvios podem ser identificados com os parâmetros de entrada (por exemplo, a especificação do semivariograma) ou com os dados (por exemplo, valores aberrantes, ou "outliers").

O módulo de validação desenvolvido neste trabalho utiliza a subrotina "***xvok2d***" da GSLIB (Deutsch e Journel, 1992) e fornece as seguintes saídas:

- Diagrama espacial do erro;
- Histograma do erro;
- Estatísticas do erro;
- Diagrama dos valores estimados versus verdadeiros.

A validação se inicia quando a opção *"Validação do modelo..."* do menu principal do SPRING (ver Figura 3.3) é ativada. Esta opção leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.25.

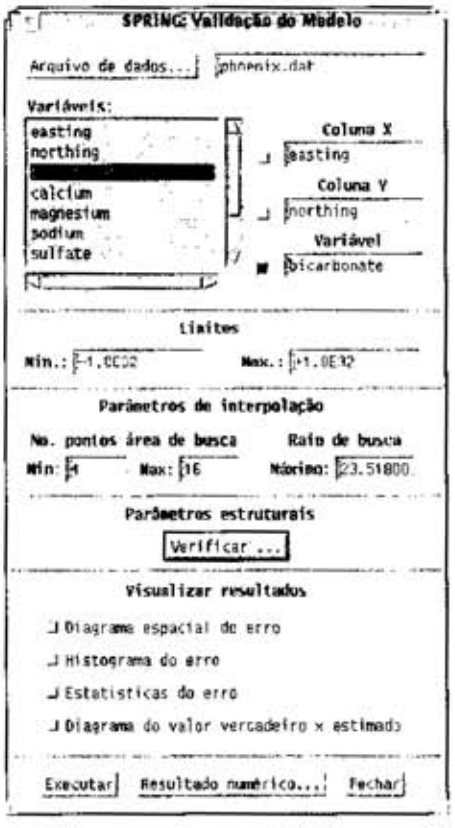



Fig. 3.25 - Interface de validação do modelo.

A primeira operação consiste em selecionar o arquivo de dados. Após a seleção efetuada, a *Lista de Variáveis* da interface é automaticamente preenchida. O próximo passo é definir os campos *Coluna X*, *Coluna Y* e *Variável*, que se referem às localizações espaciais dos dados e à variável selecionada, respectivamente. Os campos relacionados aos Limites (*Min e Max*) são pré-inicializados com valores apropriados ao dado selecionado; portanto, não é necessário modificá-los.

Os demais campos referem-se aos Parâmetros de Interpolação, onde: o *Número Mínimo de Pontos na Área de Busca* é sempre igual a 4, o *Número Máximo de Pontos na Área de Busca* é múltiplo de 4 e no máximo igual a 64, e, por último, o valor *Máximo do Raio de Busca* é inicializado com o valor do parâmetro *Alcance*. Para melhor compreensão desses valores consulte a Figura 3.26.

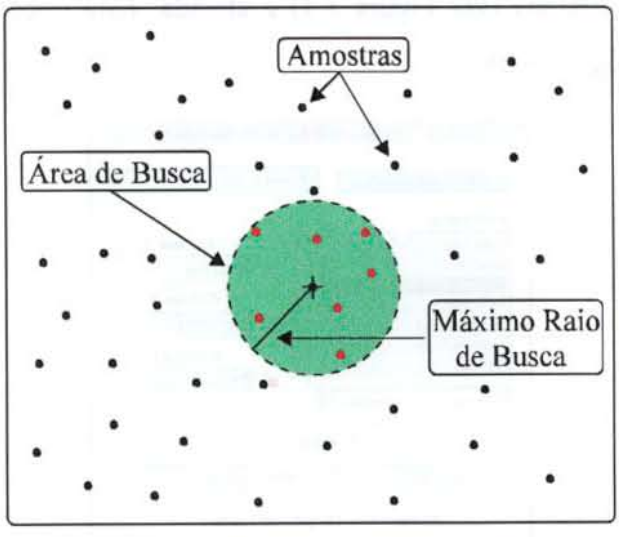



Fig. 3.26 - Parâmetros de interpolação.

Neste exemplo, a área de busca engloba o ponto a ser re-estimado (centro do círculo) e mais sete pontos vizinhos. Suponha que se define o número mínimo de pontos na área de busca igual a 4 e o máximo igual a 8. A primeira condição é satisfeita ($7 > 4$); a segunda condição não é satisfeita ($7 < 8$). Neste caso, o interpolador utiliza os sete pontos mais próximos ao ponto a ser re-estimado. Por outro lado, se a área de busca contém um número de pontos maior que 8, então somente os 8 pontos mais próximos do centro do círculo são utilizados na interpolação. Podem existir casos em que o número de pontos contidos na área de busca seja insuficiente, isto é, o número mínimo de pontos na área de busca é menor que 4. Neste caso, é impossível realizar a re-estimação do ponto.

Antes de proceder a validação, é aconselhável averiguar os parâmetros estruturais. Isto é realizado pressionando-se o botão *Verificar...* da interface, que leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.27.

Fig. 3.27 - Interface de parâmetros estruturais.

Finalmente, a validação é executada pressionando-se o botão *Executar* da interface. Os resultados disponíveis para visualização e análise são selecionados sobre seus respectivos botões. Por exemplo, pressionando-se o botão *Diagrama Espacial do Erro*, ocorre a abertura da janela ilustrada na Figura 3.28.

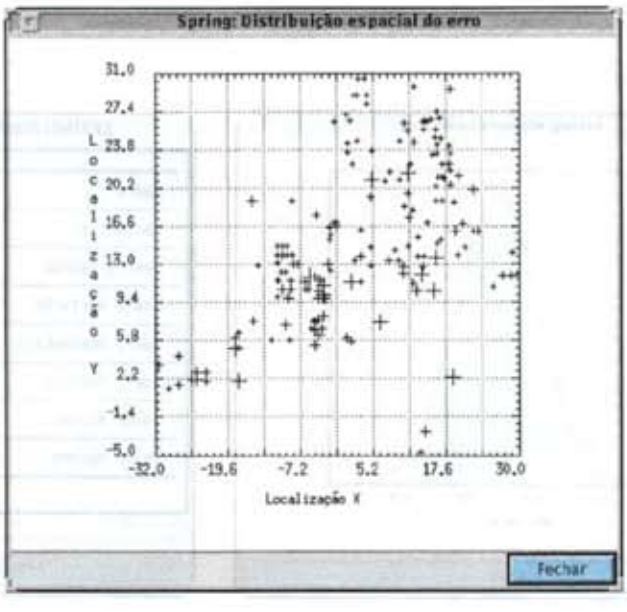



Fig. 3.28 - Diagrama espacial do erro.

Os símbolos tipo cruz na Figura 3.28 indicam a posição espacial e a magnitude do erro (para os símbolos pequenos é menor o erro e vice-versa). Informações mais específicas são obtidas da seguinte forma: através do botão esquerdo do apontador ("mouse"), define-se a região de interesse (retângulo vermelho na figura abaixo); em seguida, pressiona-se o botão do meio do apontador. O resultado é ilustrado na Figura 3.29.

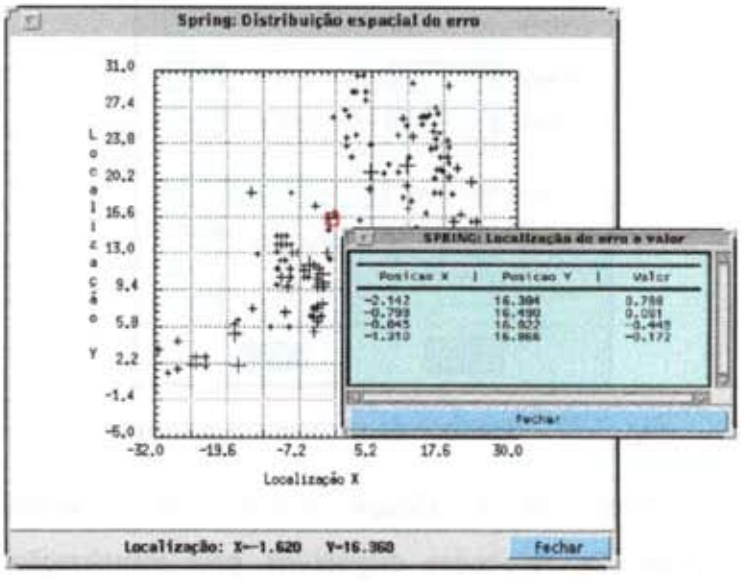



Fig. 3.29 - Localização e valor do erro.

Analogamente, pressionando-se os botões *Histograma do Erro* e *Estatisticas do Erro*, ocorre a abertura das janelas mostradas nas Figuras 3.30 e 3.31, respectivamente.

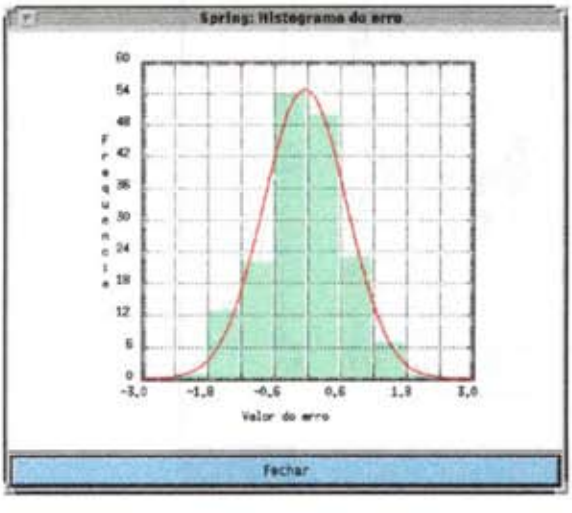



Fig. 3.30 - Histograma do erro.

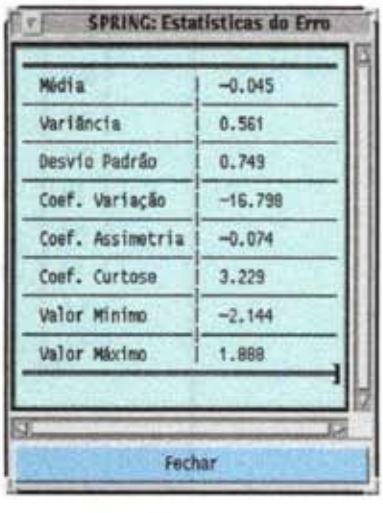



Fig. 3.31 - Estatísticas do erro.

Para visualizar o diagrama de valores verdadeiros versus os valores estimados, pressiona-se o botão *Diagrama do Valor Verdadeiro X Estimado*. Esta ação leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.32.

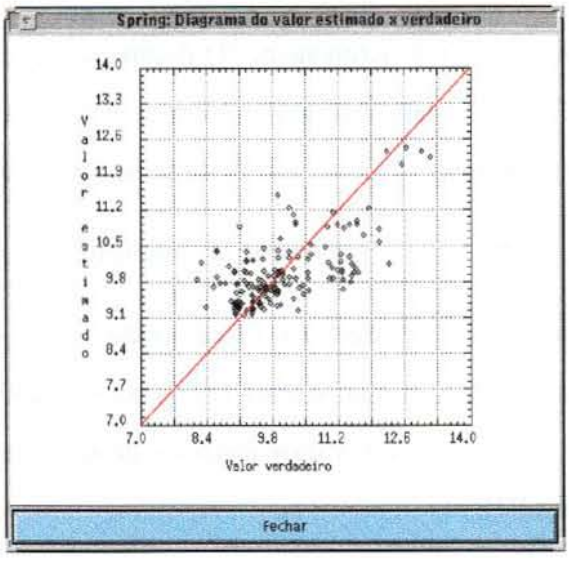



Fig. 3.32 - Diagrama de valores verdadeiros versus estimados.

Além dos resultados gráficos, o módulo de validação fornece uma tela de resultados numéricos, a qual é visualizada da seguinte forma: na interface da Figura 3.25, pressiona-se o botão *Resultado Numérico...* . Esta opção leva à abertura da janela apresentada na Figura 3.33.

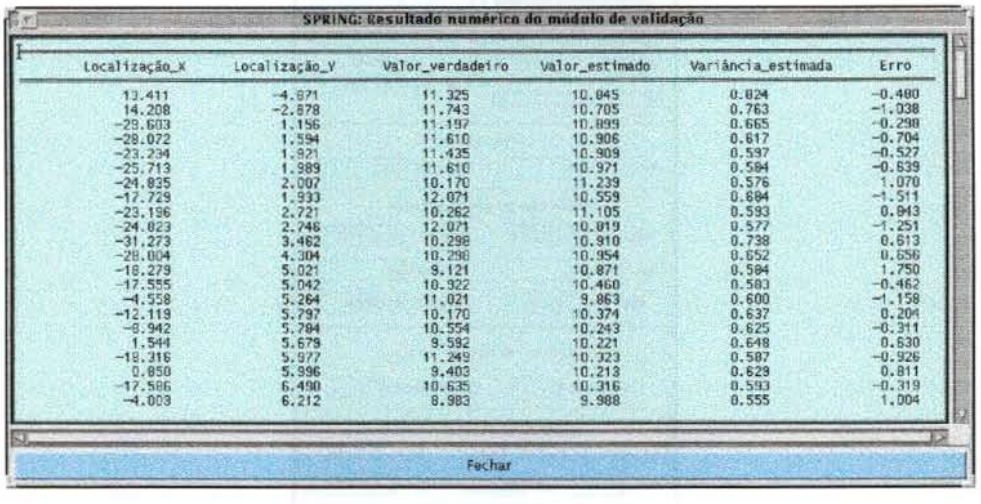



Fig. 3.33 - Resultados numéricos da validação.

A etapa final constitui-se na interpolação pelo método de krigeagem, conforme apresentado a seguir.

### 3.2.7 - MÓDULO DE KRIGEAGEM 2D

A etapa de krigeagem 2D é a fase em que se objetiva obter uma grade densa, em duas dimensões (2D), de valores a partir dos dados amostrados.

O módulo de Krigeagem 2D desenvolvido neste trabalho bascia-se na subrotina *"**okb2d**"* da GSLIB (Deutsch e Journel, 1992), a qual inclui o código básico para *krigeagem ordinária 2D*. Esta subrotina pode ser facilmente modificada para calcular *a krigeagem simples 2D*: remove-se a condição dos pesos ($\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$) e o correspondente parâmetro de Lagrange ($\mu$). Uma versão futura deste módulo prevê a utilização da subrotina *"**ktb3d**"*, a qual é mais complexa e engloba krigeagem simples, krigeagem ordinária e krigeagem com vários modelos de tendência em duas dimensões (2D) ou três dimensões (3D).

A krigeagem se inicia quando a opção *"Krigeagem 2D..."* do menu principal do SPRING (ver Figura 3.3) é ativada. Esta opção leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.34.

Fig. 3.34 - Interface de krigeagem 2D.

A primeira operação é selecionar o arquivo de dados. Após a seleção, a *Lista de Variáveis* da interface é automaticamente preenchida. Em seguida, definem-se os campos *Coluna X*, *Coluna Y* e *Variável*, que se referem às localizações espaciais dos dados e a variável selecionada, respectivamente. Os campos relacionados aos Limites (*Min e Max*) são pré-inicializados com valores apropriados ao dado selecionado; portanto, não é necessário modificá-los.

O próximo passo é definir os parâmetros da grade de saída. Isto é realizado através dos seguintes campos da interface (Figura 3.34):

- *Pos. X*, e *Pos. Yi* definem a origem da grade de saída. Por definição, a origem é sempre o canto inferior esquerdo. Esses campos são pré-inicializados e refletem os valores mínimos das variáveis selecionadas nos campos *Coluna X* e *Coluna Y* , respectivamente.

- *Nº Col* e *Nº Lin* referem-se aos números de colunas e linhas da grade de saída. Os valores aqui definidos são completamente dependentes da subrotina ***"okb2d"*** da GSLIB (Deutsch e Journel, 1992), a qual faz alocação prévia de memória (em linguagem computacional denominada alocação estática de memória) para produzir uma grade de saída cuja dimensão máxima é 50 colunas por 50 linhas (2500 pontos). Assim sendo, esses campos são pré-inicializados com valores que proprocionam a maior densidade possível à grade de saída.

- *Res.X* e *Res.Y* : referem-se às resoluções em X e Y respectivamente. Esses campos são também automaticamente pré-inicializados e proprocionam resoluções máximas em ambas direções. As resoluções máximas são dependentes da densidade da grade de saída e obtidas da seguinte forma:

$$Res\,X_{max} = \frac{\Delta x}{\text{No. Max. Colunas}} = \frac{xf - xi}{50} \quad , \tag{3.2}$$

$$Res\,Y_{max} = \frac{\Delta y}{\text{No. Max. Linhas}} = \frac{yf - yi}{50} \quad . \tag{3.3}$$

A Figura 3.35 resume os parâmetros da grade de saída gerada pelo módulo de krigeagem 2D.

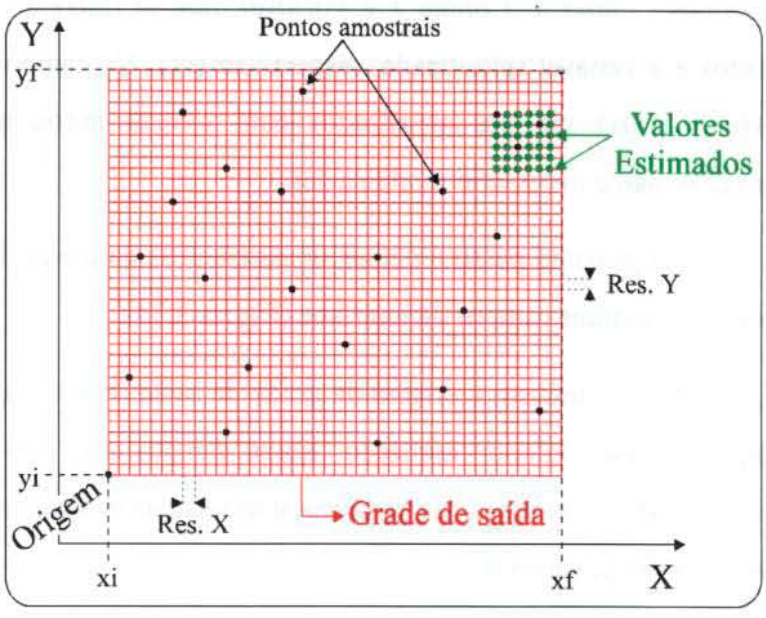



Fig. 3.35 - Parâmetros da grade de saída.

Após a definição dos parâmetros da grade de saída, define-se o tipo de *Estimativa: Pontual* ou *Bloco*. Se o tipo *Pontual* é selecionado, então todos os pontos da grade de saída são estimados. Por outro lado, se a estimativa é do tipo *Bloco*, então somente o valor médio do *Bloco* é estimado. Neste trabalho, *Bloco* refere-se à àrea, a qual é definida através dos campos *Largura* e *Comprimento* da interface apresentada na Figura 3.34.

Por último, definem-se os campos relacionados aos parâmetros de interpolação. Isto é realizado de maneira análoga ao *Módulo de Validação*, conforme descrito na Seção 3.2.6.

Antes de executar a krigeagem 2D, é recomendável verificar os parâmetros estruturais definidos; isto é realizado pressionando-se o botão *Verificar...* da interface mostrada na Figura 3.34. Esta ação leva à abertura de uma janela idêntica à ilustrada na Figura 3.27.

Finalmente, para executar a krigeagem 2D, pressiona-se o botão *Executar* da interface apresentada na Figura 3.34. Os resultados númericos, isto é, os

valores estimados e as variâncias de krigeagem, são analisados pressionando-se o botão *Resultado Numérico...* da interface. Esta ação leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.36.

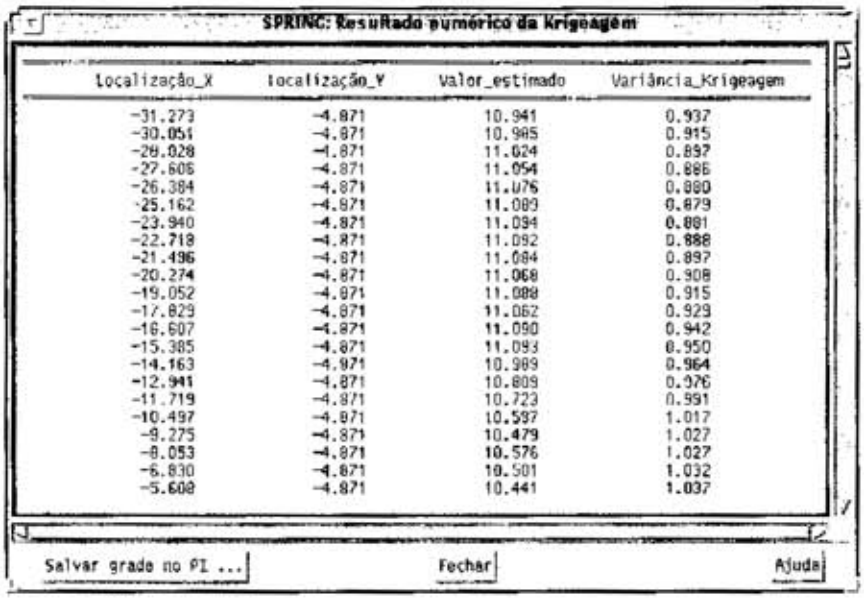



Fig. 3.36 - Resultados numéricos da krigeagem 2D.

Após a análise dos resultados, faz-se a transferência da grade gerada para um Plano de Informação, PI, do sistema SPRING. Isto é realizado pressionado-se o botão *Salvar grade no PI...* da interface mostrada na Figura 3.36. Esta ação leva à abertura da janela mostrada na Figura 3.37.

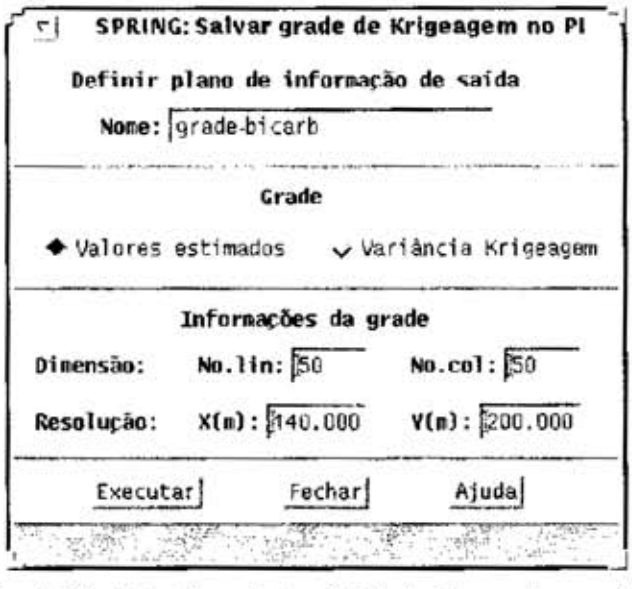



Fig. 3.37 - Interface de tranferência de grade para PI.

Na interface da Figura 3.37, primeiro define-se o campo *Nome*. Este campo refere-se ao nome do Plano de Informação, PI, para o qual a grade é transportada. Em seguida seleciona-se o tipo de grade: *Valores estimados* ou *Variância de Krigeagem*. Os demais campos são apenas informativos e referem-se à dimensão da grade (*Nº de linhas e Nº de colunas* ) e às suas respectivas resoluções (*Res.X e Res.Y*).

Finalizando, executa-se o transporte da grade para o PI definido; isto é realizado pressionando-se o botão *Executar* da interface. A Figura 3.38 ilustra a visualização, no ambiente SPRING, de uma grade de *Valores estimados* (representada pelos símbolos tipo cruz) obtida a partir dos dados amostrais geo-referenciados (representados pelos pontos vermelhos).

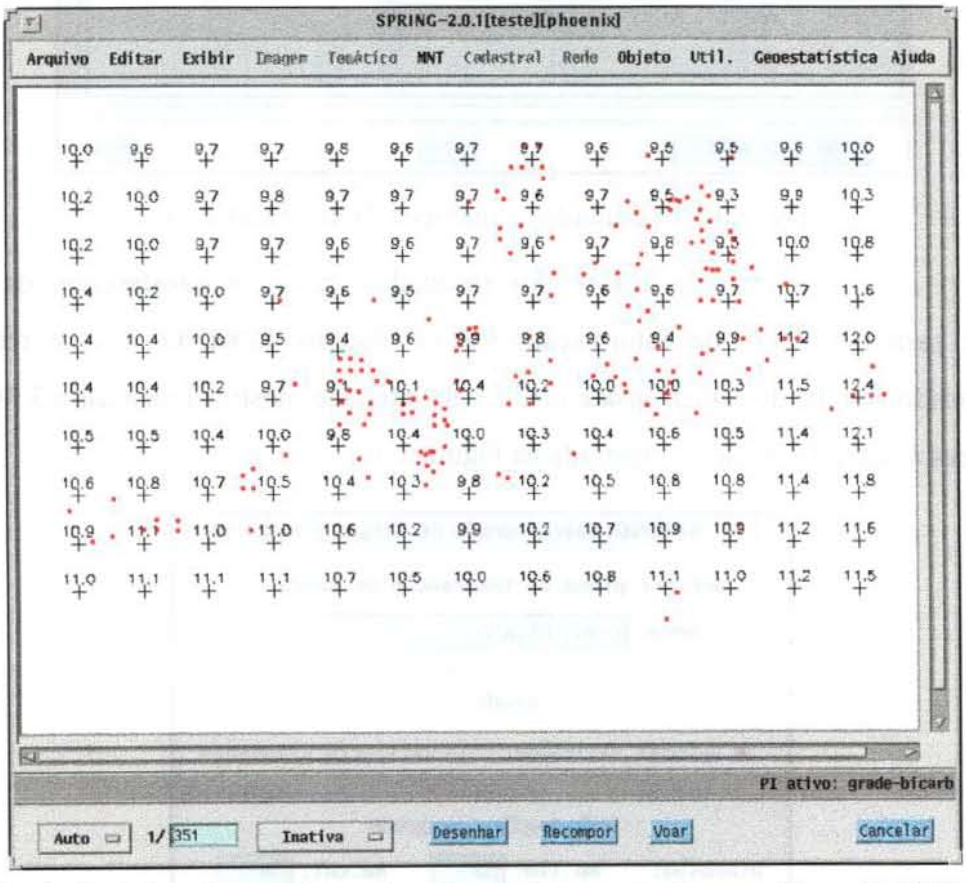



Fig. 3.38 - Visualização da grade e dos dados amostrais no ambiente SPRING.

Esta seção finaliza a descrição operacional e a apresentação do Módulo de Procedimentos Geoestatísticos implementado no sistema SPRING. O capítulo seguinte apresenta uma aplicação do módulo utilizando dados reais.

# CAPÍTULO 4

# APLICAÇÃO DO MÓDULO GEOESTATÍSTICO

Este capítulo tem como objetivo enfatizar, através de um experimento prático, a importância da integração de um SIG com procedimentos geoestatísticos na análise e interpolação de dados espacialmente distribuídos.

Os dados utilizados, de propriedade do Centro Nacional de Pesquisas de Solos (CNPS - RJ), foram obtidos no levantamento dos solos da Fazenda Canchim, em São Carlos - SP. Estes se referem a uma amostragem de 85 observações georreferenciadas coletadas no horizonte Bw (camada do solo com profundidade média de 1m). Dentre as variáveis disponíveis, selecionou-se para estudo o teor de argila.

O estudo de caso aqui apresentado refere-se à análise da variação espacial do teor de argila sobre a área da Fazenda Canchim. Considera-se o teor de argila ao longo do perfil, classificado do seguinte modo (Calderano Filho et al., 1996):

- MUITO ARGILOSO: solos que apresentam 59% ou mais de argila;
- ARGILOSO: solos que apresentam de 35% a 59% de argila;
- MÉDIO: solos que apresentam de 15% a 35% de argila;
- ARENOSO: solos que apresentam menos de 15% de argila.

Para tal experimento, são realizados os seguintes procedimentos:

- Descrição da região em estudo: localização e principais características, geologia e material de origem, classes de solos;
- Análise geoestatística: análise exploratória e de continuidade espacial do teor de argila, modelagem dos semivariogramas experimentais, validação do modelo e interpolação através de krigeagem;
- Utilização de funções e recursos do sistema SPRING à análise e apresentação dos resultados obtidos;
- Comparação dos resultados obtidos com outros métodos convencionais de interpolação disponíveis no SPRING.

## 4.1 - DESCRIÇÃO DA REGIÃO EM ESTUDO

### 4.1.1 - LOCALIZAÇÃO E PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS

A região de estudo refere-se à área da Fazenda Canchim, base física do Centro de Pesquisa Pecuária do Sudeste (CPPSE- EMBRAPA), no município de São Carlos, Estado de São Paulo, cobrindo uma área de 2.660 hectares, entre as coordenadas de 21°55'00" - 21°59'00" S e 47°48'00" e 41°52'00" W. O mapa de localização da região em estudo é apresentado na Figura 4.1.

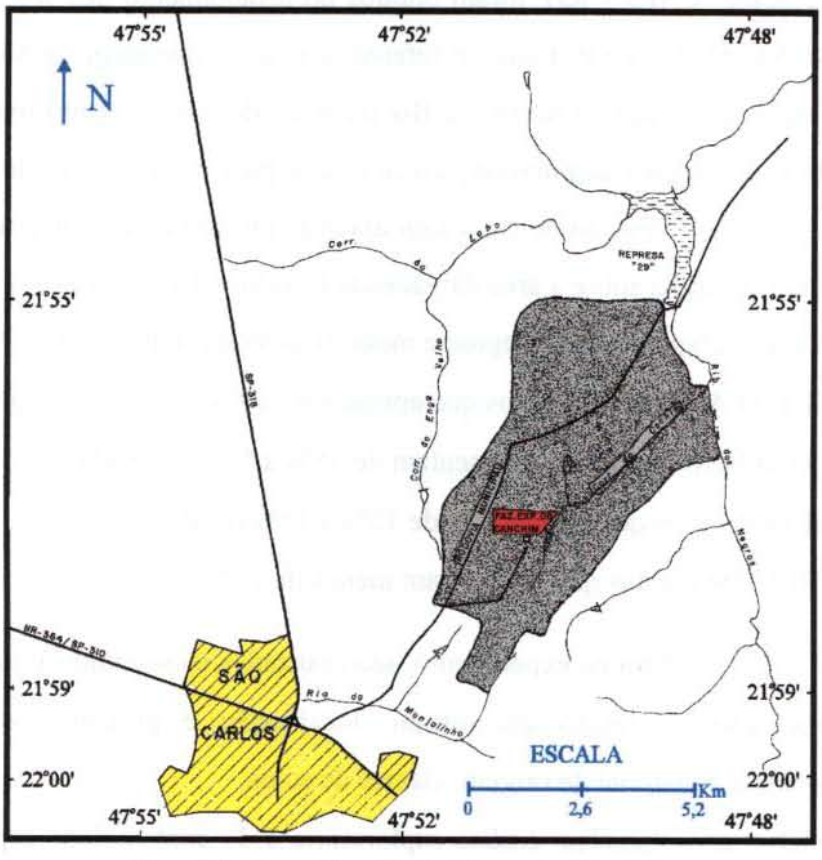



Fig. 4.1 - Localização da Fazenda Canchim.
FONTE: Calderano Filho et al. (1996), p. 4.

Segundo Calderano Filho et. al. (1996), as principais características da região são listadas a seguir:

- Segundo Almeida (1964), citado por Calderano Filho et al. (1996), a região ocupa o reverso de cuestas, pertencente à província geomorfológica "Cuestas Basálticas".

- O clima, segundo a classificação de Köppen, é temperado úmido de invernos secos e verões brandos.
- O relevo predominante é suave ondulado a ondulado, com pendentes longas, dissecado por forças erosivas, com desníveis variáveis.
- O material de origem é composto além do produto do intemperismo de rochas eruptivas básicas e sedimentares retrabalhadas, por depósitos mais recentes.
- A vegetação primária é constituída por cerradões, cerrados e florestas tropicais subcaducifólias, estando sua ocorrência muito correlacionada com o material de origem, textura e umidade do solo.

### 4.1.2 - GEOLOGIA E MATERIAL DE ORIGEM

Dentro dos limites da Fazenda Canchim, afloram as seguintes litologias: Aluviões (sedimentos argilo-arenosos), Arenito Superficial (areias consolidadas), Diabásio (Formação Serra Geral) e Arenito Botucatu (rocha constituída por grãos de quartzo arredondados). A Figura 4.2 ilustra o mapa geológico da região da Fazenda Canchim.

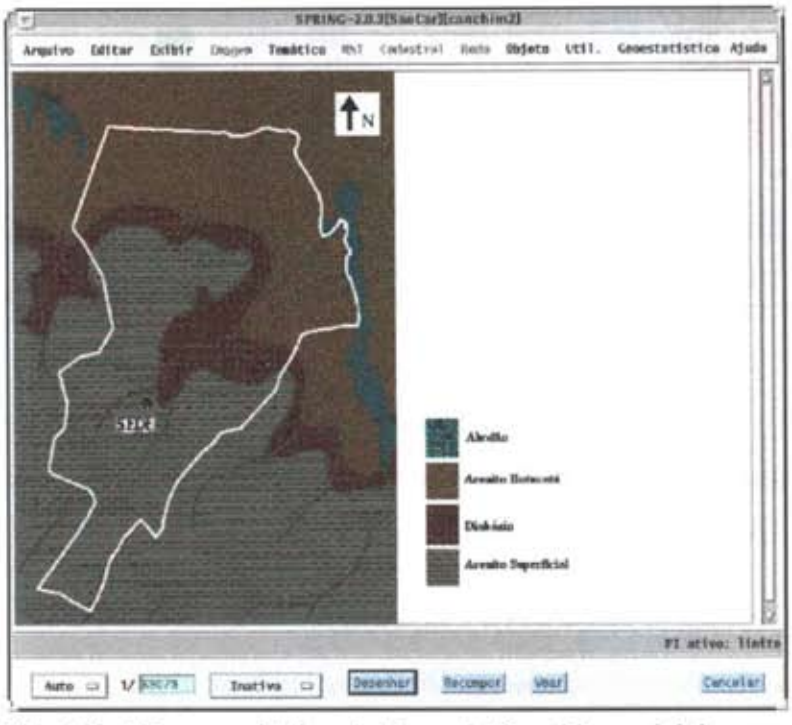



Fig. 4.2 - Mapa geológico da Fazenda Canchim e vizinhanças.

### 4.1.3 - MAPA DE CLASSES DE SOLOS

O mapa de classes de solos foi concebido na plataforma SPRING, utilizando-se a metodologia preconizada pelo CNPS da EMBRAPA em todas as fases de execução dos trabalhos de campo, laboratório e escritório. O mapa final possui 29 unidades de mapeamento, simples ou associadas, conforme apresentado na Figura 4.3.

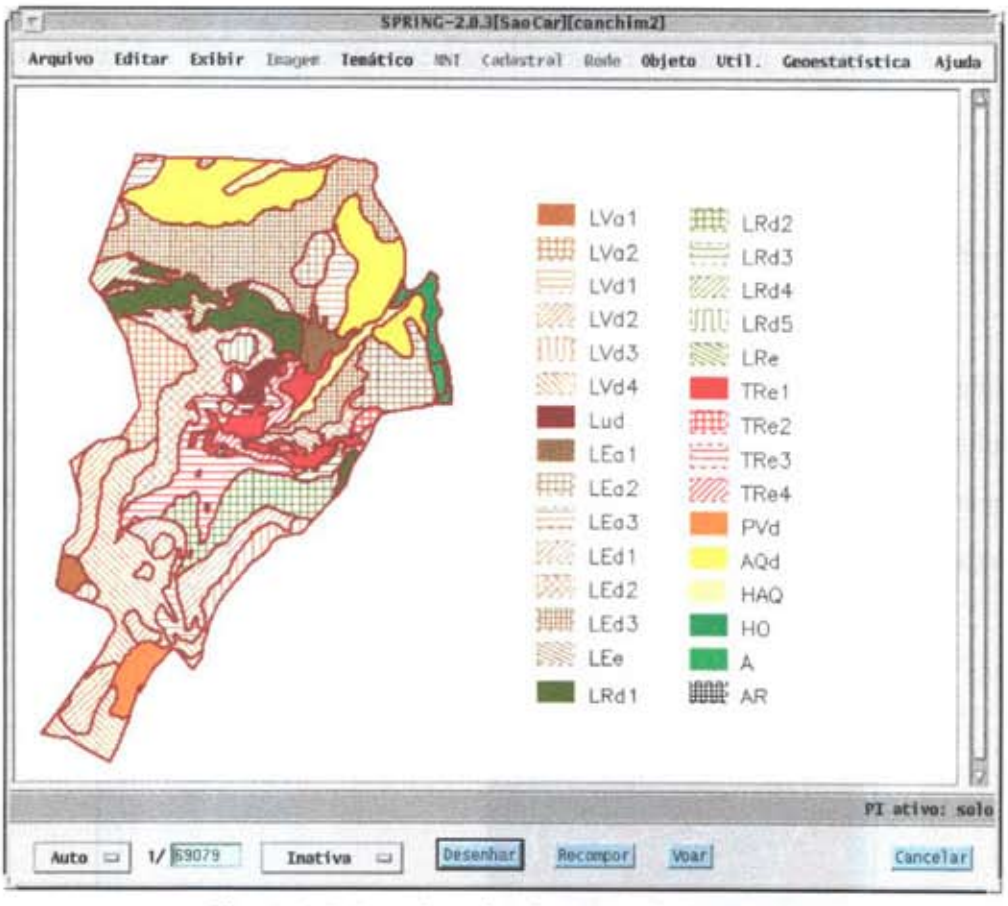



Fig. 4.3 - Mapa de solos da Fazenda Canchim.

Descrições detalhadas das classes de solos são apresentadas por Calderano Filho et al. (1996). Resumidamente, as classes de solos ilustradas na Figura 4.3 estão subdivididas em 9 grupos, a saber:

- *LATOSSOLO VERMELHO-AMARELO:*

LVa1 - Latossolo Vermelho-Amarelo Álico, teor argiloso.

LVa2 - Latossolo Vermelho-Amarelo Álico, teor médio.

LVd1 - Latossolo Vermelho-Amarelo Distrófico, teor argiloso.

LVd2 - Latossolo Vermelho-Amarelo Distrófico, teor argiloso.

LVd3 - Associação de Latossolo Vermelho-Amarelo Distrófico + Latossolo Vermelho - Amarelo Álico, ambos teor médio.

LVd4 - Latossolo Vermelho-Amarelo Distrófico teor médio.

- *LATOSSOLO VERMELHO-AMARELO VARIAÇÃO UNA:*

Lud - Latossolo Vermelho-Amarelo Variação UNA Distrófico, teor argiloso.

- *LATOSSOLO VERMELHO-ESCURO:*

LEa1 - Associação de Latossolo Vermelho - Escuro Álico, teor argiloso + Latossolo Vermelho Vermelho- Escuro Distrófico, teor médio.

LEa2 - Latossolo Vermelho - Escuro Álico, teor médio.

LEa3 - Associação de Latossolo Vermelho - Escuro Álico + Latossolo Vermelho Escuro Distrófico, ambos teor médio.

LEd1 - Latossolo Vermelho - Escuro Distrófico, teor argiloso.

LEd2 - Latossolo Vermelho - Escuro Distrófico, teor argiloso.

LEd3 - Latossolo Vermelho - Escuro Distrófico, teor médio.

LEe - Associação de Latossolo Vermelho - Escuro Eutrófico, teor argiloso.

- *LATOSSOLO ROXO:*

LRd1 - Latossolo Roxo Distrófico, teor muito argiloso.

LRd2 - Latossolo Roxo Distrófico, teor argiloso.

LRd3 - Associação Latossolo Roxo Distrófico, teor argiloso + Solos Litólicos Eutróficos, teor argiloso cascalhento.

LRd4 - Latossolo Roxo Distrófico Epiálico, teor argiloso.

LRd5 - Latossolo Roxo Distrófico, teor argiloso cascalhento.

LRe - Associação Latossolo Roxo, teor muito argiloso + Solos Litólicos, teor argiloso.

- *TERRA ROXA ESTRUTURADA:*

TRe1 - Terra Roxa Estruturada Eutrófica, teor muito argiloso.

TRe2 - Terra Roxa Estruturada Eutrófica Latossólica, teor muito argiloso.

TRe3 - Associação de Terra Roxa Estruturada Eutrófica Latossólica + Latossolo Roxo Distrófico, ambos teor argiloso.

TRe4 - Associação de Terra Roxa Estruturada, textura muito argilosa + Solos Litólicos, teor argiloso cascalhento.

- *PODZÓLICO:*

Pvd - Podzólico Vermelho-Amarelo Distrófico, teor médio argiloso.

- *AREIAS QUARTZOSAS:*

AQd - Associação de Areias Quartzosas Distróficas + Areias Quartzosas Álicas, teor arenoso.

HAQ - Associação de Areias Quartzosas Hidromórficas + Glei Pouco Húmico, teor argiloso.

- *SOLOS ORGÂNICOS:*

HO - Associação de Solos Orgânicos Álicos + Solos Aluviais Álico Plínico +Glei Pouco Húmico Distrófico, teor argiloso.

- *SOLOS ALUVIAIS:*

A - Associação de Solos Aluviais Plíntico + Glei Pouco Húmico Distrófico, ambos teor argiloso.

- *TIPO DE TERRENO:*

AR - Afloramentos rochosos de diabásio.

Segundo Calderano Filho et al. (1996), as classes de solos estão estritamente correlacionadas com a geologia e com o material de origem. Assim, no Arenito Superficial, foram identificados os Latossolo Vermelho-Amarelo e Latossolo Vermelho-Escuro (teor médio); na Formação Serra-Geral (Diabásio), o Latossolo Roxo, Terra Roxa Estruturada, Latossolo Vermelho-Escuro (teor argiloso) e Solos Litólicos; na formação Botucatu, as Areias Quartzosas (teor arenoso) e Latossolos Vermelho-Escuro (teor médio); nos Aluviões, os Solos Aluviais, Gley Pouco Húmico e os Solos Orgânicos (teor argiloso).

Após a descrição das principais características da região de estudo, a próxima etapa do trabalho, refere-se à análise geoestatística.

## 4.2 - ANÁLISE GEOESTATÍSTICA

### 4.2.1 - ANÁLISE EXPLORATÓRIA DOS DADOS

A análise exploratória dos dados é uma etapa de fundamental importância e obrigatória dentro de qualquer estudo geoestatístico. É uma etapa precursora introduzida para averiguar as propriedades estatísticas e matemáticas dos dados (Burrough et al., 1996).

Como mencionado anteriormente, a amostra é composta por 85 observações georreferenciadas; dentre as variáveis disponíveis, escolheu-se o teor de argila. O valor desta propriedade corresponde às observações que se realizaram no interior do solo, horizonte Bw.

A primeira ação a ser tomada é apresentar o mapa da distribuição espacial das observações realizadas sobre a região de estudo. Os procedimentos operacionais necessários para apresentar o mapa foram descritos na Seção 3.2.1. A Figura 4.4 apresenta a distribuição das observações na área de estudo.

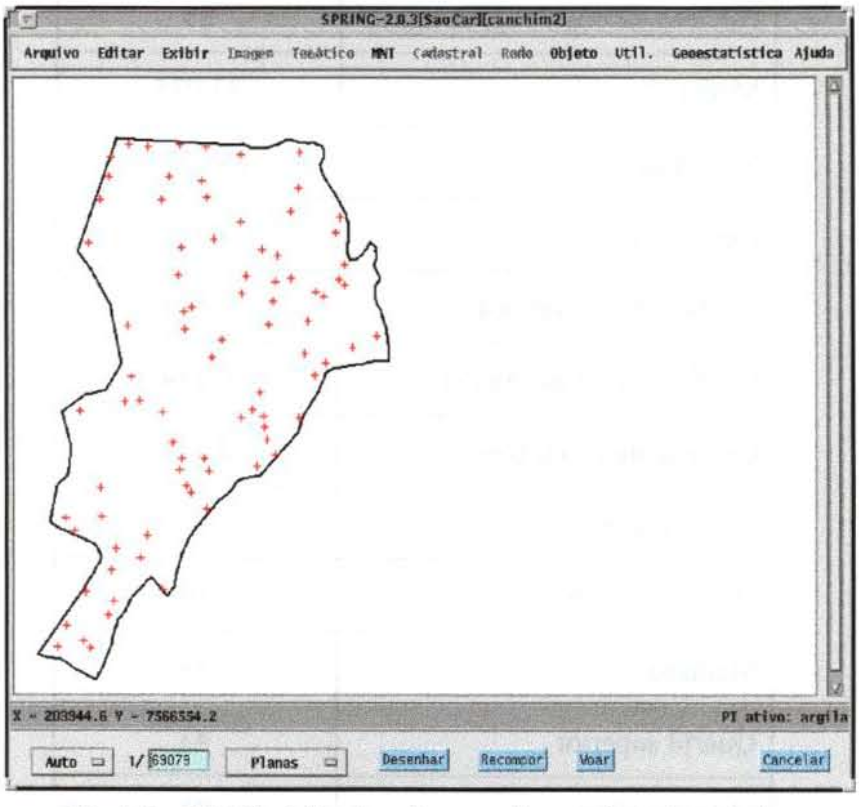



Fig 4.4 - Distribuição das observações na área de estudo.

A partir da distribuição das observações pode-se proceder a uma análise preliminar baseada em inspeção visual. Essa análise permite a identificação de alguns problemas, tais como escassez ou excesso de observações em determinado local, ocorrência de valores aberrantes, etc. No caso de estudo aqui apresentado, até este ponto nada de anormal foi constatado.

Após a análise preliminar das observações, foram obtidas algumas estatisticas da amostra. Estatísticas tais como média, desvio padrão, variância, coeficiente de variação, coeficiente de assimetria, coeficiente de curtose, valor mínimo, quartil inferior, mediana, quartil inferior e valor máximo, foram obtidas com o auxilio do Módulo de Análise Exploratória e estão apresentados na Tabela 4.1.

**TABELA 4.1 - ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS DA AMOSTRA (EM %).**

| | |
|---|---|
| Número de observações | 85 |
| Número de observações válidas | 85 |
| Média | 33,035 |
| Variância | 288,034 |
| Desvio Padrão | 16,972 |
| Coeficiente de variação | 0,514 |
| Coeficiente de assimetria | 0,214 |
| Coeficiente de curtose | 2,344 |
| Valor mínimo | 4 |
| Quartil Inferior | 10 |
| Mediana | 33 |
| Quartil superior | 43 |
| Valor máximo | 73 |

Além das estatísticas referidas, utilizou-se também, para uma melhor caracterização, os recursos gráficos de Histograma, conforme apresentado na Figura 4.5, e do gráfico da Probabilidade Normal (Figura 4.6).

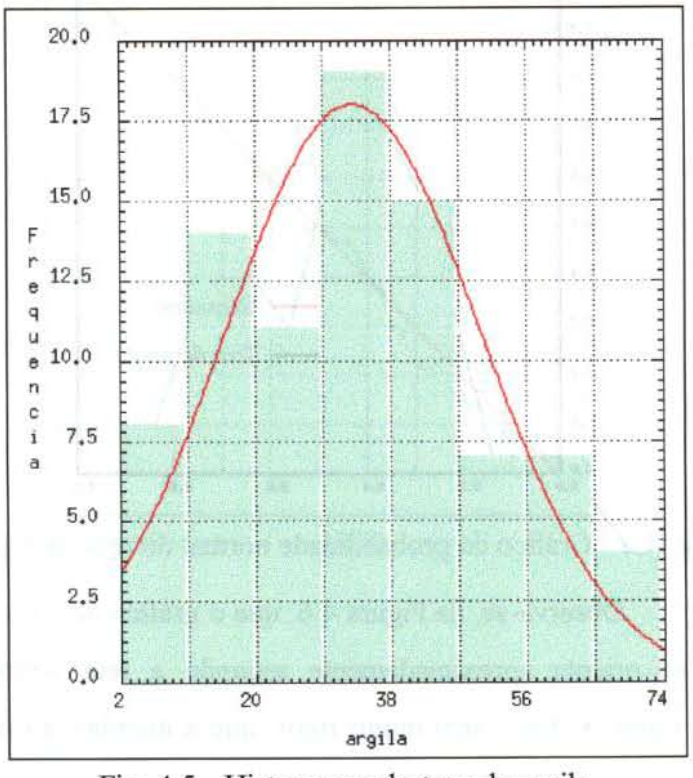



Fig. 4.5 - Histograma do teor de argila.

O histograma apresentado na Figura 4.5 mostra que a distribuição do teor de argila é levemente alongada à direita. Neste caso, a distribuição é dita ser positivamente assimétrica (Costa Neto, 1977, p. 30), com coeficiente de assimetria, expresso na Tabela 4.1, igual a 0,214. Quanto ao grau de achatamento, o coeficiente de curtose (2,344) indica que a distribuição é ligeiramente platicúrtica (Costa Neto, 1977, p. 32).

Dentre outros valores apresentados na Tabela 4.1, nota-se que a média e a mediana, medidas que procuram caracterizar o centro da mesma distribuição de freqüências, possuem valores próximos (33,035 e 33,0), respectivamente.

A aderência dos dados experimentais a certos modelos teóricos pode ser verificada através de processos gráficos. São, é claro, processos simplificados, que devem apenas ser usados quando não há muita exigência de rigor (Costa Neto,

1977). Assim sendo, a aderência dos dados à distribuição normal foi observada mediante o gráfico da probabilidade normal, conforme apresentado na Figura 4.6.

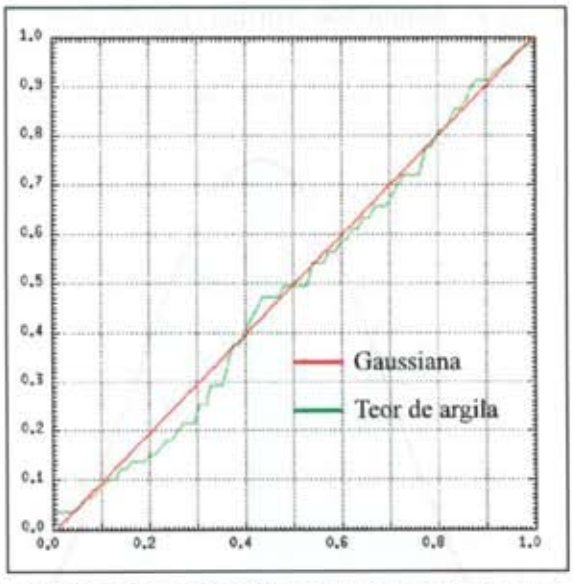



Fig. 4.6 - Gráfico da probabilidade normal do teor de argila.

Observa-se, na Figura 4.6, que o gráfico na cor verde (referente ao teor de argila) se orienta aproximadamente segundo a reta vermelha (distribuição Gaussiana). Isto significa dizer, sem muito rigor, que a distribuição do teor de argila é aproximadamente normal.

Concluindo, vale ressaltar que esta etapa foi realizada apenas com os recursos disponíveis do Módulo de Análise Exploratória desenvolvido no sistema SPRING. Além disso, embora a distribuição da variável em estudo seja aproximadamente normal, supos-se a hipótese de normalidade dos dados.

A etapa seguinte refere-se à análise de continuidade espacial do fenômeno em estudo.

### 4.2.3 - ANÁLISE DE CONTINUIDADE ESPACIAL DO TEOR DE ARGILA

A continuidade espacial é uma característica dos dados na área de geociências. Duas observações próximas uma da outra têm mais chances de apresentar propriedades semelhantes do que duas observações mais afastadas. A partir de uma certa distância, a qual depende das condições locais do fenômeno observado, as amostras

são consideradas independentes. Conforme visto também na Seção 2.1.3, a continuidade espacial não pode ser obtida a partir de estatísticas univariadas.

Assim sendo, a análise de continuidade espacial do fenômeno em estudo é realizada com o auxílio do semivariograma. Esta é uma das etapas mais importantes, pois o modelo de semivariograma escolhido representa a estrutura de correlação espacial a ser utilizada nos procedimentos inferenciais de krigeagem.

A análise inicia-se com o levantamento do semivariograma omnidirecional[4] , conforme ilustrado na Figura 4.7. Este semivariograma foi ajustado com os parâmetros apresentados na Tabela 4.2.

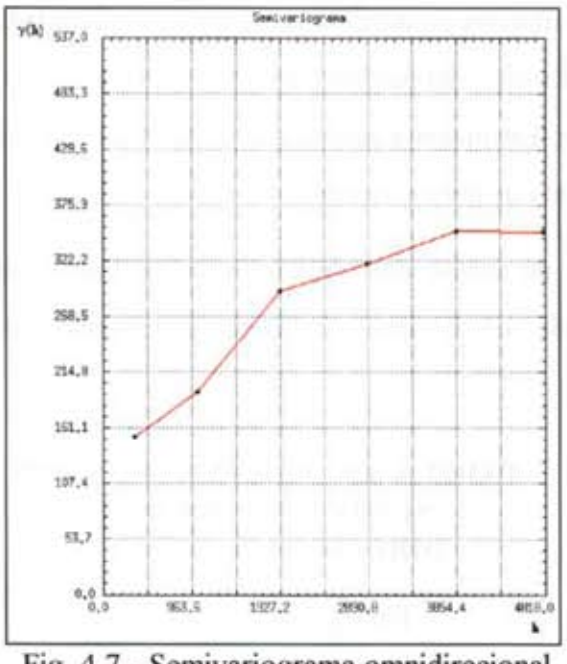



Fig. 4.7 - Semivariograma omnidirecional do teor de argila.

**TABELA 4.2 - PARÂMETROS DO SEMIVARIOGRAMA OMNIDIRECIONAL.**

| Parâmetro | valor |
|---|---|
| Nº de Lags | 5 |
| Incremento do Lag | 968m |
| Tolerância do Lag | 484m |
| Direção | qualquer |
| Tolerância angular | 90° |
| Largura da Banda (BW) | máxima |

Algumas observações importantes, de ordem prática, com relação ao semivariograma omnidirecional são:

- tolerância angular suficientemente grande;
- direção do vetor **h** não é considerada;

[4] O semivariograma omnidirecional independe da direção do vetor distância **h**, isto é, todos os pares de observações são considerados no cáculo do estimador do semivariograma.

- serve para definir melhor os parâmetros de distância;
- se um semivariograma omnidirecional não apresenta uma estrutura definida, não se deve esperar algo melhor dos semivariogramas direcionais.

Neste caso, o semivariograma omnidirecional do teor de argila apresenta uma estrutura bem definida, isto é, possui um comportamento que se aproxima de um modelo esférico.

O próximo passo na análise de continuidade espacial consiste em realizar o levantamento dos semivariogramas direcionais. Isto exige várias interações; é um processo em que o analista deve averiguar o comportamento do semivariograma em várias direções, na tentativa de detectar orientações de máxima e mínima continuidade do fenômeno em estudo. A direção de máxima continuidade está relacionada com o semivariograma que possui o maior alcance. De maneira análoga, a direção de mínima continuidade está associada ao semivariograma de menor alcance.

Os resultados obtidos da análise dos semivariogramas direcionais estão apresentados na Figura 4.8; a Tabela 4.3 fornece os valores dos parâmetros utilizados.

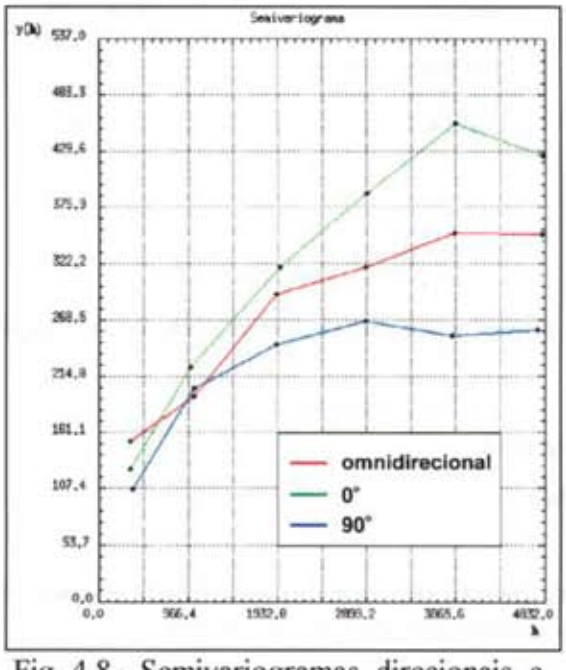



Fig. 4.8 - Semivariogramas direcionais e omnidirecional do teor de argila.

**TABELA 4.3 - PARÂMETROS DOS SEMIVARIOGRAMAS DIRECIONAIS $0^{o}$ E $90^{o}$.**

| Parâmetro | valor |
|---|---|
| Nº de Lags | 5 |
| Incremento do Lag | 968m |
| Tolerância do Lag | 484m |
| Direções de máxima e mínima continuidade detectadas. | 0° (máx.)<br>90° (mín.) |
| Tolerâncias angulares * | 25° |
| Larguras das Bandas (BW) | máxima |

* para omnidirecional tol. ang. = 90°.

Conforme ilustra a Figura 4.8, os semivariogramas que apresentaram maior e menor alcance, foram detectados nas direções 0° e 90°, respectivamente. O semivariograma relativo à direção 0° possui um alcance próximo a 4000m, enquanto o semivariograma relativo à direção 90° possui um alcance próximo a 2000m. Note também na Figura 4.8, que o semivariograma omnidirecional pode ser, quase sempre, entendido como uma média dos semivariogramas direcionais (0° e 90°).

Os semivariogramas relativos às direções entre 0° e aproximadamente 105° apresentaram alcances intermediários, quando comparados com os semivariogramas nas direções de 0° e 90°. A Figura 4.9 ilustra um exemplo, em que são tomados os semivariogramas nas direções de máxima e mínima continuidade, e mais dois semivariogramas nas direções 10° e 100°. A Tabela 4.4 apresenta os parâmetros necessários para o levantamento dos mesmos.

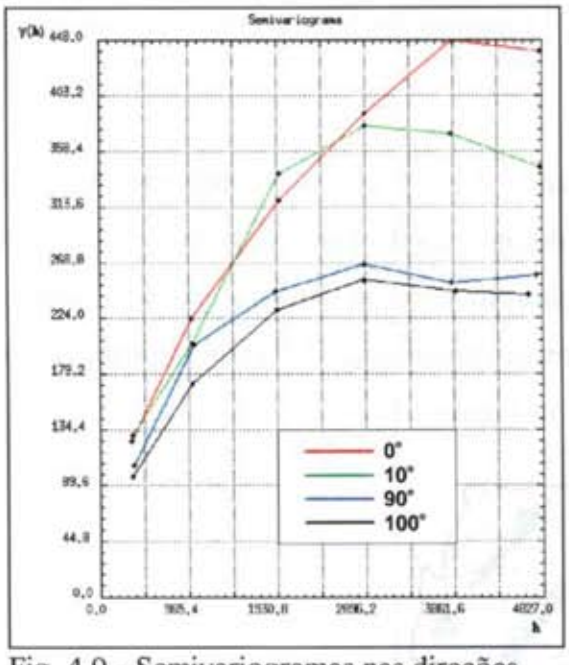



Fig. 4.9 - Semivariogramas nas direções 0°, 10°, 90° e 100°.

**TABELA 4.4 - PARÂMETROS DOS SEMIVARIOGRAMAS DIRECIONAIS 0°, 10°, 90° E 100°.**

| Parâmetro | valor |
|---|---|
| Nº de Lags | 5 |
| Incremento do Lag | 968m |
| Tolerância do Lag | 484m |
| Direções de máxima e mínima continuidade detectadas. | 0° (máx.)<br>90° (mín.) |
| Direções intermediárias | 10°<br>100° |
| Tolerâncias angulares | 25° |
| Larguras das Bandas (BW) | máxima |

O ponto crítico da análise ocorre quando se estuda o comportamento dos semivariogramas em direções próximas a 135°. Um exemplo, pode ser verificado através da Figura 4.10, a qual ilustra os semivariogramas nas direções 0° e 90° (maior e menor alcance, respectivamente), um semivariograma numa direção

intermediária entre 0° e 90° e um semivariograma na direção 135°. A Tabela 4.5 contém os parâmetros necessários para a geração desses semivariogramas.

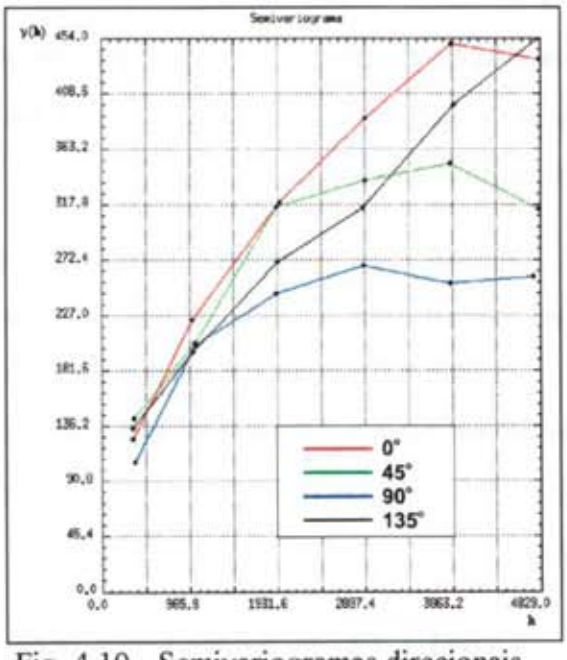



Fig. 4.10 - Semivariogramas direcionais 0°, 45°, 90° e 135°.

**TABELA 4.5 - PARÂMETROS DOS SEMIVARIOGRAMAS DIRECIONAIS 0°, 45°, 90° E 135°.**

| Parâmetro | valor |
|---|---|
| Nº de Lags | 5 |
| Incremento do Lag | 968m |
| Tolerância do Lag | 484m |
| Direções | 0°<br>90° |
| Tolerância angular | 25° |
| Direções | 45°<br>135° |
| Tolerância angular | 65° |
| Larguras das Bandas (BW) | máxima |

Observa-se, na Figura 4.10, que o comportamento do semivariograma na direção 135° é bastante distinto dos demais; isto é, aparenta ter uma capacidade infinita de dispersão. Uma explicação possível, embora subjetiva, para o comportamento dos semivariogramas em direções próximas a 135° pode ser deduzida do mapa de distribuição das amostras, ilustrado na Figura 4.11.

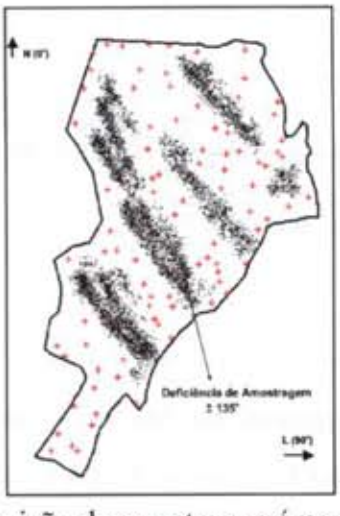



Fig. 4.11 - Distribuição de amostras na área de estudo e realce dos corredores com deficiência de amostragem.

Conforme pode ser visto na Figura 4.11, em várias regiões da área de estudo, há deficiência de amostragem justamente em direções próximas a 135°. Isto parece ser um indício do porque os semivariogramas analisados nessas direções possuem comportamento diferente dos demais. Para constatar tal hipótese, seria necessário melhorar a amostragem de campo e retroceder ao processo inicial de análise.

Concluindo esta seção, os comentários abaixo relacionados são importantes:

- Embora a amostragem utilizada não tenha sido específica para procedimentos geoestatísticos, e sim, uma amostragem convencional para levantamento semi-detalhado de solos feito pelo CNPS-EMBRAPA, não impossibilitou a análise de continuidade uma vez que a depêndencia espacial foi detectada em várias direções;

- O semivariograma omnidirecional apresentou uma estrutura bem definida (próximo de um modelo esférico). No entanto, isto não deve ser considerado como o melhor resultado da análise, pois, neste caso, a anisotropia é mascarada.

- Descartando as direções próximas a 135°, devido talvez à deficiência de amostragem, o fenômeno em estudo apresenta maior continuidade na direção Norte (0°) e menor continuidade na direção Leste (90°).

- Como consequência da consideração anterior, o fenômeno é dito ser anisotrópico.

- A anisotropia presente é do tipo zonal combinada, como pode ser vista na Figura 4.8. Esta deve ser considerada e modelada, a fim de retratar a verdadeira continuidade espacial do fenômeno.

Dando sequência ao estudo de caso, os passos seguintes à análise referem-se à modelagem dos semivariogramas e da anisotropia.

### 4.2.4 - MODELAGEM DOS SEMIVARIOGRAMAS E DA ANISOTROPIA

Considerando que o semivariograma associado à direção Norte (0°) é o que possui maior alcance e que o semivariograma associado à direção Leste (90°) é o que possui menor alcance, procede-se à modelagem dos mesmos.

Os semivariogramas em ambas direções foram ajustados com auxílio do Módulo de Ajuste do Semivariograma Experimental, cujos resultados são apresentados na Figura 4.12.

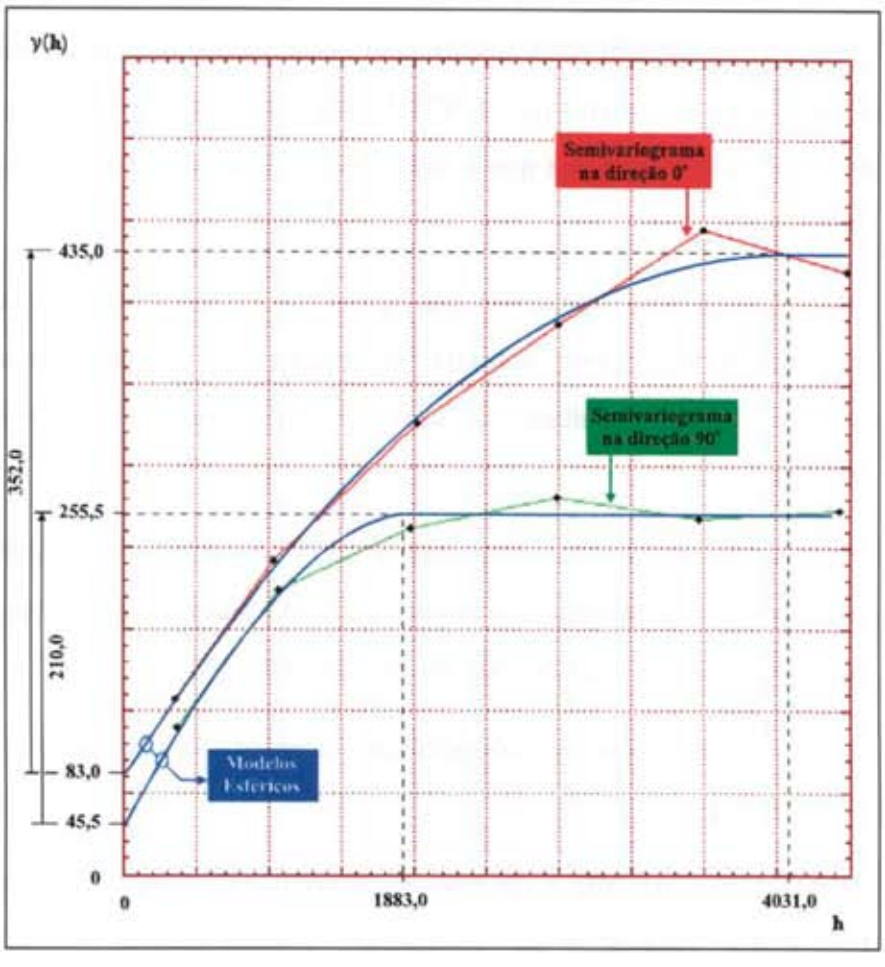



Fig. 4.12 - Representação gráfica dos modelos teóricos de ajuste aos semivariogramas experimentais nas direções 0° e 90°.

Conforme ilustrado na Figura 4.12, as linhas azuis, em ambas direções, são os modelos teóricos de ajuste dos semivariogramas direcionais. O semivariograma com maior patamar foi ajustado com um efeito pepita de (83,0), uma

estrutura esférica com contribuição (352,0) e alcance (4.031,0). A equação referente a este modelo é (vide Apêndice B)

$$\gamma_{0^\circ}(\mathbf{h}) = 83{,}0 + 352{,}0\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{4031{,}0}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{\infty}\right)^2}\right)\right], \qquad (4.1)$$

onde

$\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{4031{,}0}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{\infty}\right)^2}\right)$ refere-se a um modelo esférico normalizado, conforme definido na Seção 2.6.2.

Ainda com relação à Equação 4.1, note que o vetor **h** está decomposto, onde $h_{0^\circ}$ refere-se à componente relativa à direção Norte (0°) e $h_{90^\circ}$ à componente na direção Leste (90°). Neste caso, o modelo de semivariograma expressa a variabilidade do fenômeno somente na direção 0°. Assim sendo, o alcance implícito na direção 90° deve ser muito grande, ∞; conseqüentemente, a componente relativa à direção 90° ($h_{90^\circ}$) não influencia no modelo (em outras palavras a razão $h_{90^\circ} / \infty$ é nula).

De maneira análoga, o semivariograma na direção 90° foi ajustado com efeito pepita (45,5), uma estrutura esférica com contribuição (210,0) e alcance (1.883,0). A equação deste modelo é dada por (vide Apêndice B):

$$\gamma_{90^\circ}(\mathbf{h}) = 45{,}5 + 210{,}0\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{\infty}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{1883{,}0}\right)^2}\right)\right] \qquad (4.2)$$

O passo seguinte refere-se a modelagem da anisotropia. Inicialmente identifica-se os eixos de anisotropia, isto é, os eixos de maior e menor variabilidade espacial do fenômeno em estudo. Neste caso, em particular, os eixos de anisotropia coincidem com os eixos de coordenadas.

Uma vez identificados os eixos de anisotropia, define-se um único modelo que descreve como o semivariograma varia quando mudam as distâncias e direções.

Um método para combinar os modelos direcionais num único modelo consistente para todas as direções é apresentado por Isaaks e Srivastava (1989, p. 377-386). Resumidamente, este método consiste em definir uma transformação que reduz o modelo direcional a um modelo normalizado com alcance igual a 1 (substitui-se **h** pela distância **h**/$a$, onde $a$ é o alcance).

Das Equações 4.1 e 4.2, obtem-se o modelo único (ou completo), o qual é expresso através da seguinte equação (vide Apêndice C):

$$\gamma(\mathbf{h}) = 45{,}5 + 210{,}0\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{4031{,}0}\right)^2+\left(\frac{h_{90^o}}{1883{,}0}\right)^2}\right)\right] + 142{,}0\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{4031{,}0}\right)^2+\left(\frac{h_{90^o}}{\infty}\right)^2}\right)\right] +$$

$$+ 37{,}5\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{h_{90^o}}{\infty}\right)^2}\right)\right] . \qquad (4.3)$$

O modelo completo, apresentado na Equação 4.3, é composto de quatro termos, a saber:

- O primeiro termo referente ao efeito pepita ($C_o$), igual a 45,5.
- O segundo termo referente à 1ª componente estrutural, um modelo esférico com contribuição 210, alcance 4031,0 na direção Norte (0°) e alcance 1883,0 na direção Leste (90°).
- O terceiro termo referente à 2ª componente estrutural, um modelo esférico com contribuição 142,0 e alcance 4031,0 relativo à direção Norte (0°).
- Por último, o quarto referente à 3ª componente estrutural, um modelo esférico com contribuição 37,5 e alcance muito pequeno, ε, relativo à direção Norte (0°). Ainda com relação ao quarto termo da Equação 4.3, este é um artifício empregado para representar o segundo efeito pepita (vide Apêndice C).

Para verificar a consistência do modelo completo, atribui-se valores às componentes $h_{0°}$ e $h_{90°}$ e verifica-se o valor de $\gamma(\mathbf{h})$. Por exemplo, deseja-se saber o valor do modelo de semivariograma na direção 0°quando $|\mathbf{h}| = 4031$. Neste caso, $h_{0°} = |\mathbf{h}|.\text{sen}90° = 4031$, e $h_{90°} = |\mathbf{h}|.\cos 90° = 0$ (vide apêndice B).

Substituindo o valor de $h_{0°}$ e $h_{90°}$ na Equação 4.3, otem-se:

$\gamma(\mathbf{h}) = 45,5 + 37,5(1) + 210,0(1) + 142,0(1) = 435,0$.

Na direção 90°, quando $|\mathbf{h}| = 1883,0 \Rightarrow \gamma(\mathbf{h}) = 255,5$. E assim por diante, para uma direção qualquer, $\theta$, quando $|\mathbf{h}| \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma(\mathbf{h}) = 45,5$ (efeito pepita), etc.

Uma vez estabelecido o modelo completo, definem-se os parâmetros necessários para os processos de validação do modelo e de krigeagem, conforme descritos na seção seguinte. Estes parâmetros são obtidos diretamente da Equação 4.3 e são apresentados na Tabela 4.6.

**TABELA 4.6 - PARÂMETROS ESTRUTURAIS.**

| Número de Estruturas | | 3 | |
|---|---|---|---|
| Efeito Pepita | | 45,5 | |
| **1ª Estrutura - Tipo: Esférica** | | | |
| Contribuição | 37,5 | Ângulo de Anisotropia | 0° |
| Alcance | ε * | Fator de Anisotropia | 50 * |
| **2ª Estrutura - Tipo: Esférica** | | | |
| Contribuição | 210,0 | Ângulo de Anisotropia | 0° |
| Alcance | 4031,0 | Fator de Anisotropia | 0,467 |
| **3ª Estrutura - Tipo: Esférica** | | | |
| Contribuição | 142,0 | Ângulo de Anisotropia | 0° |
| Alcance | 4031,0 | Fator de Anisotropia | 50 * |

*** Nota:** ε refere-se a um alcance muito pequeno associado à 1ª estrutura e à direção 0°. Utilizou-se $\varepsilon = 0,0001$, que é um valor muito menor quando comparado aos demais valores. Associado à 1ª e 3ª estrutura, na direção 90°, existe um alcance $\infty$ (ver Equação 4.3). Então, para determinar o fator de anisotropia, é necessário atribuir um valor numérico para o alcance $\infty$, de tal forma que as razões ($\infty/\varepsilon$ e $\infty/4031,0$) proporcionem fatores de anisotropia >> 1 (por exemplo, igual a 50). Isto é necessário porque o fenômeno em estudo apresenta anisotropia zonal combinada (Deutsch e Journel, 1992, p. 25).

### 4.2.5 - VALIDAÇÃO DO MODELO E INTERPOLAÇÃO DE KRIGEAGEM

O processo de validação do modelo é uma etapa que precede as técnicas de krigeagem. Seu principal objetivo é avaliar a adequação do modelo proposto no processo que envolve a re-estimação dos valores amostrais conhecidos.

A validação do modelo é realizada com auxílio do Módulo de Validação, desenvolvido na plataforma SPRING. Os parâmetros necessários são apresentados na Tabela 4.6 (Seção 4.2.4) e os procedimentos necessários de execução estão descritos na Seção 3.2.6.

Os resultados obtidos da validação do modelo são apresentados na seguinte sequência: estatísticas do erro, diagrama espacial do erro e gráfico de valores verdadeiros versus estimados.

A Figura 4.13 ilustra o histograma do erro e suas principais estatísticas. Segundo Burrough (1987), o erro é uma componente aleatória espacialmente não correlacionada, com distribuição normal de média zero e variância $\sigma^2$.

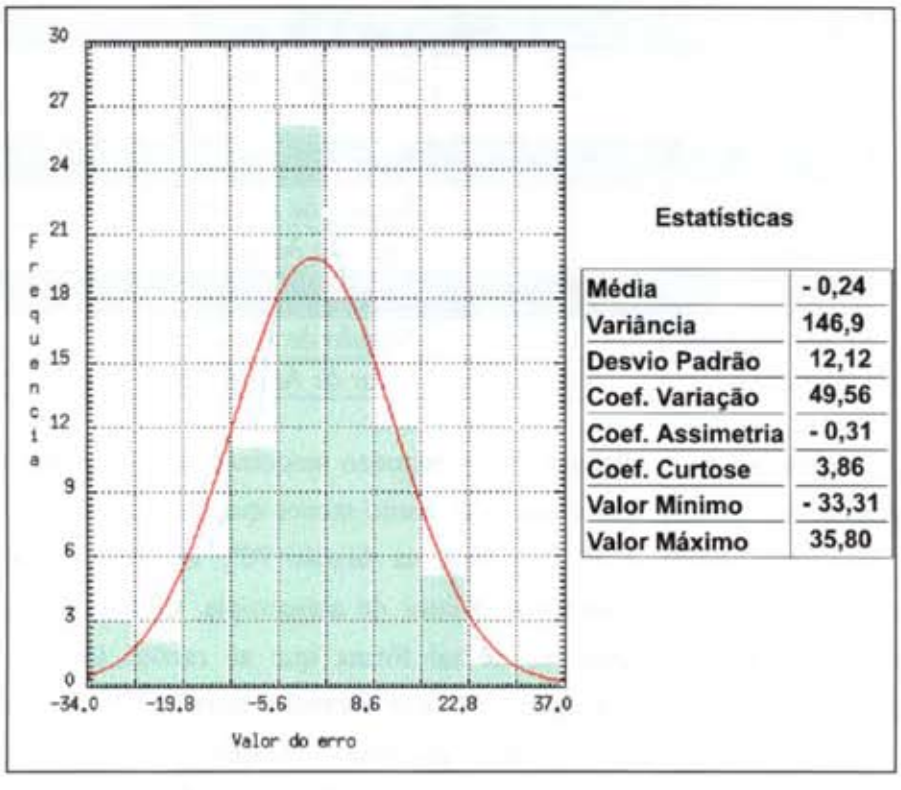



Fig. 4.13 - Histograma e estatísticas do erro.

O próximo resultado refere-se à distribuição espacial do erro, conforme apresentado na Figura 4.14. Os recursos operacionais disponíveis para a análise do mapa de erros estão descritos na Seção 3.2.6.

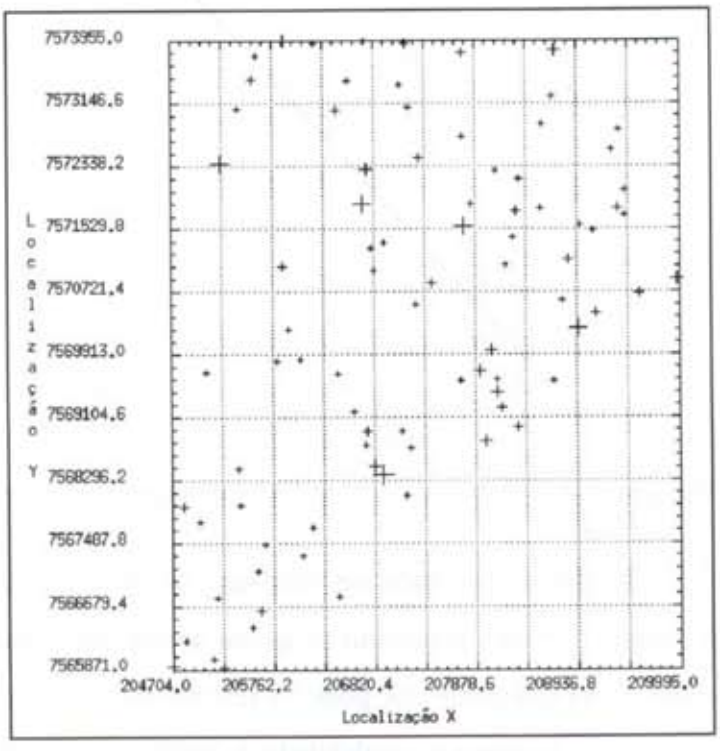



Fig. 4.14 - Localização espacial do erro.

Embora o histograma e as estatísticas do erro apresentem resultados aceitáveis, observa-se que, em determinadas localizações, existe superestimação e ou subestimação dos valores amostrais. Tal fato pode ser decorrente de uma amostragem deficiente e, conseqüentemente, do modelo escolhido, que não representa adequadamente a variabilidade espacial do fenômeno em estudo.

O resultado seguinte refere-se ao diagrama de valores verdadeiros versus estimados, conforme apresentado na Figura 4.15. Este gráfico revela ao analista a qualidade da estimativa. Sabe-se que o ideal é que os valores estimados coincidam com os valores observados, formando então uma reta de 45° de inclinação. Na prática, isto dificilmente ocorre; o que se observa é uma nuvem de pontos concentrados em torno da reta de 45°. Então, quanto menor for a dispersão da nuvem de pontos em torno da reta melhor a estimativa e vice-versa.

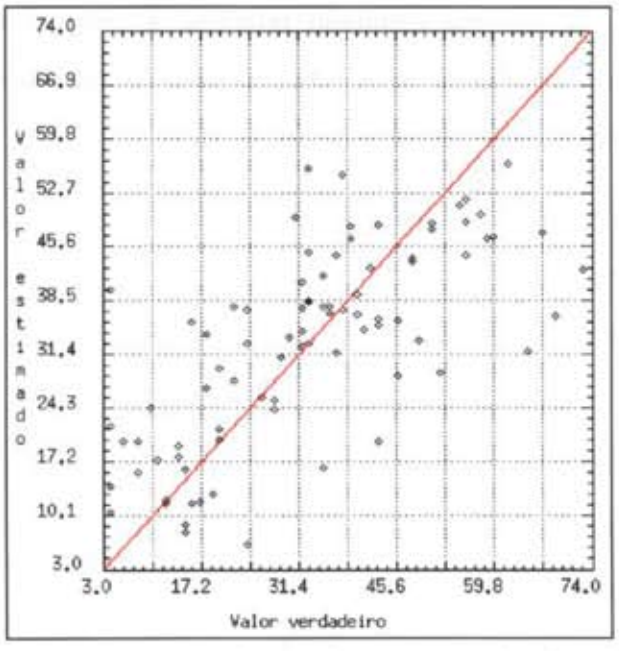



Fig. 4.15 - Diagrama de valores observados versus estimados do teor de argila.

Finalizando a etapa de validação do modelo, vale ressaltar que, dentro do objetivo deste trabalho, o modelo proposto apresentou resultados aceitáveis. Embora a amostragem seja deficiente, foi possível realizar todo o processo de análise e determinar um modelo que descreva a variabilidade do fenômeno em estudo.

Uma vez realizada a validação do modelo, a etapa final do processo geoestatístico consiste na interpolação de krigeagem. Esta etapa é realizada com auxílio do Módulo de Krigeagem 2D, também implementado no sistema SPRING. As descrições operacionais relacionadas a este Módulo são apresentadas na Seção 3.2.7.

Os parâmetros utilizados na krigeagem estão definidos na Tabela 4.7 e o resultado final é ilustrado na Figura 4.16.

**TABELA 4.7 - PARÂMETROS DA KRIGEAGEM.**

| Definição da Grade de Saída | | Parâmetros de Interpolação | |
|---|---|---|---|
| Posição Inicial em X | 210.000,00m | Nº de pontos na área de busca | mín. = 4 |
| Posição incial em Y | 7.565.000,00m | | máx. = 16 |
| Nº de colunas (Máximo) | 50 | | |
| Nº de linhas (Máximo) | 50 | Raio de busca | 1.550m |
| Resolução X | 140m | | |
| Resolução Y | 200m | | |

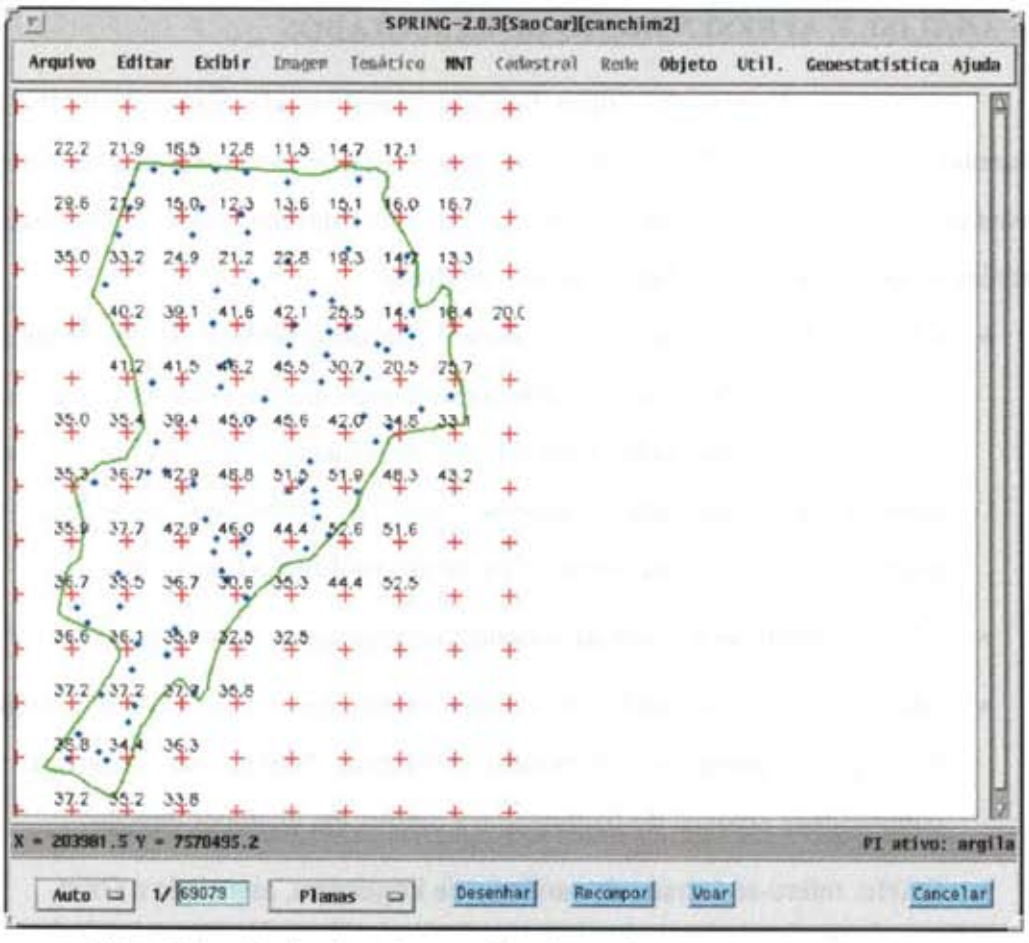



Fig. 4.16 - Grade de valores estimados referente ao teor de argila.

Na Figura 4.16, os pontos azuis são os dados amostrais coletados dentro dos limites da área de estudo e os símbolos tipo cruz referem-se à grade de valores estimados do teor de argila. Além da grade de valores estimados, é possível também gerar, de maneira análoga, uma grade de variância de krigeagem.

Relembrando, esta grade foi obtida a partir de um modelo anisotrópico, o qual supostamente retrata a verdadeira continuidade espacial do fenômeno. Para fins comparativos, gerou-se mais duas grades: uma a partir de um modelo isotrópico e outra a partir de um modelo anisotrópico intermediário ao suposto modelo verdadeiro.

Esta seção encerra os procedimentos geoestatísticos aplicados ao teor de argila. A etapa seguinte refere-se à análise e apresentação dos resultados obtidos; para tal, utiliza-se funções e recursos do Sistema SPRING.

## 4.3 - ANÁLISE E APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Esta seção utiliza funções e recursos do Sistema SPRING para apresentar e analisar os resultados. Supõe-se que o leitor tenha alguma familiaridade com o sistema, de modo que os detalhes operacionais são suprimidos das seções seguintes. Também, é adotada as nomenclaturas abaixo descritas:

- GKrV: refere-se à grade de valores estimados obtida da interpolação de krigeagem, a partir de um modelo anisotrópico que supostamente representa a verdadeira continuidade espacial do fenômeno em estudo. Da análise geoestatística realizada, supõe-se que o fenômeno apresenta maior continuidade na direção Norte (0°) e menor na direção Leste (90°).
- GKrVe: refere-se à grade da variância de krigeagem, associada a GKrV.
- GKrI: refere-se a Grade de valores estimados obtida da interpolação de krigeagem a partir de um modelo isotrópico. Neste caso, admite-se que a continuidade espacial do fenômeno é a mesma em qualquer direção.
- GKrIe: refere-se à grade da variância de krigeagem, associada a GKrI.
- GKrA : refere-se à grade de valores estimados obtida da interpolação de krigeagem, a partir de um modelo anisotrópico que utiliza direções intermediárias (10° e 100°) às direções de máxima e mínima continuidade.
- GKrAe: refere-se à grade da variância de krigeagem, associada a GKrA.

### 4.3.1 - RESULTADOS DA KRIGEAGEM

Como ponto de partida, é interessante verificar a continuidade espacial do fenômeno em estudo (teor de argila). Para realizar tal análise, é necessário transformar as grades de valores estimados e as correspondentes grades de erros em imagens.

A seqüência de imagens a seguir apresenta os resultados obtidos sobre as grades GKrV (Figura 4.17), GKrVe (Figura 4.18), GKrI (Figura 4.19), GKrIe (Figura 4.20), GKrA (Figura 4.21) e GKrAe (Figura 4.22).

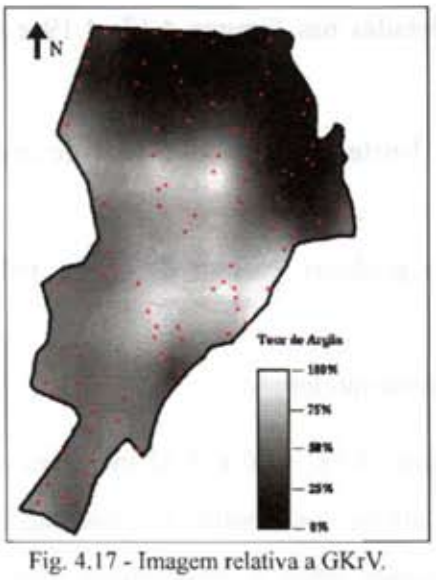
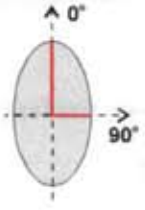



Fig. 4.17 - Imagem relativa a GKrV.



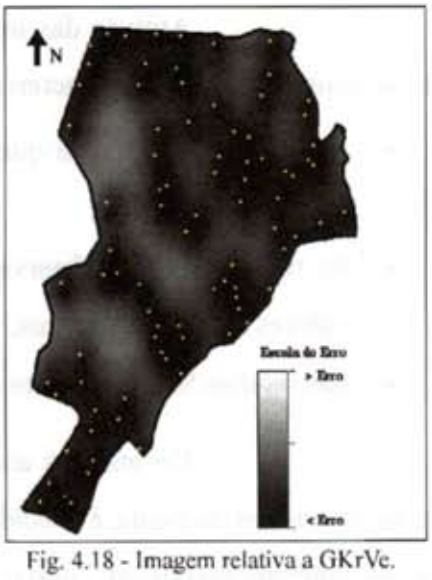




Fig. 4.18 - Imagem relativa a GKrVe.

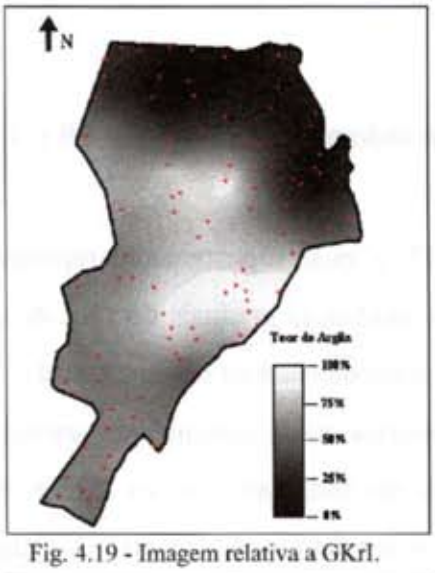
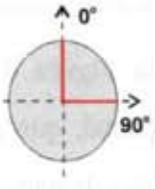



Fig. 4.19 - Imagem relativa a GKrI.



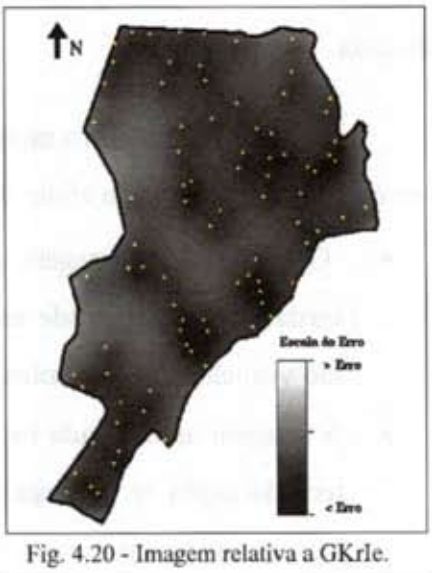




Fig. 4.20 - Imagem relativa a GKrIe.

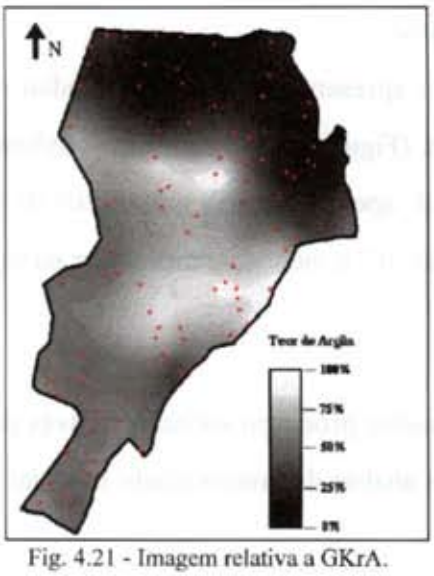



Fig. 4.21 - Imagem relativa a GKrA.

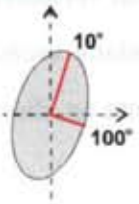


Fig. 4.22 - Imagem relativa a GKrAe.

Através das imagens apresentadas nas Figuras 4.17, 4.19 e 4.21, pode-se constatar algumas características comuns:

- essas imagens revelam que, nas regiões Norte e Nordeste, o teor de argila é relativamente baixo;
- na região Central, observa-se mudanças graduais do teor de argila, indo de valores moderados a altos, e
- nas regiões Sul e Sudoeste aproximadamente moderado.

De maneira análoga, as Figuras 4.18, 4.20 e 4.22 mostram que o erro da estimativa aumenta à medida em que se afasta dos pontos de observações. É possivel também identificar, nestas imagens, regiões onde a amostragem pode ser melhorada.

Um outro aspecto a ser observado nas Figuras 4.17, 4.19 e 4.21, e talvez o mais importante, é o efeito da anisotropia:

- Observa-se, na imagem da Figura 4.17, a qual supostamente representa a verdadeira continuidade espacial, que as mudanças graduais do teor de argila são visivelmente diferentes das demais, principalmente na região central.
- A imagem apresentada na Figura 4.19 mostra que a continuidade espacial do teor de argila se propaga uniformemente em todas as direções. Neste caso a anisotropia é mascarada e, portanto, o resultado não revela a verdadeira continuidade espacial da variável em estudo.
- Por outro lado, a imagem da Figura 4.21 apresenta um caso intermediário à da suposta continuidade espacial verdadeira (Figura 4.17). Este caso também não revela a verdadeira variabilidade espacial, apenas mostra que o teor de argila se propaga mais intensamente na direção 10° e menos intensamente na direção ortogonal (100°).

Resumindo, esta primeira análise procurou enfocar, através de três exemplos, que a escolha do modelo decorrente da análise de continuidade espacial deve

ser a melhor possível, a fim de retratar a verdadeira variabilidade do fenômeno em estudo.

A análise seguinte refere-se a uma operação de fatiamento realizada na grade GKrV, a qual supostamente representa a verdadeira continuidade espacial do teor de argila. Os valores utilizados no fatiamento estão definidos no início deste capítulo, segundo Calderano Filho et al. (1996). O resultado desta operação é a imagem apresentada na Figura 4.24.

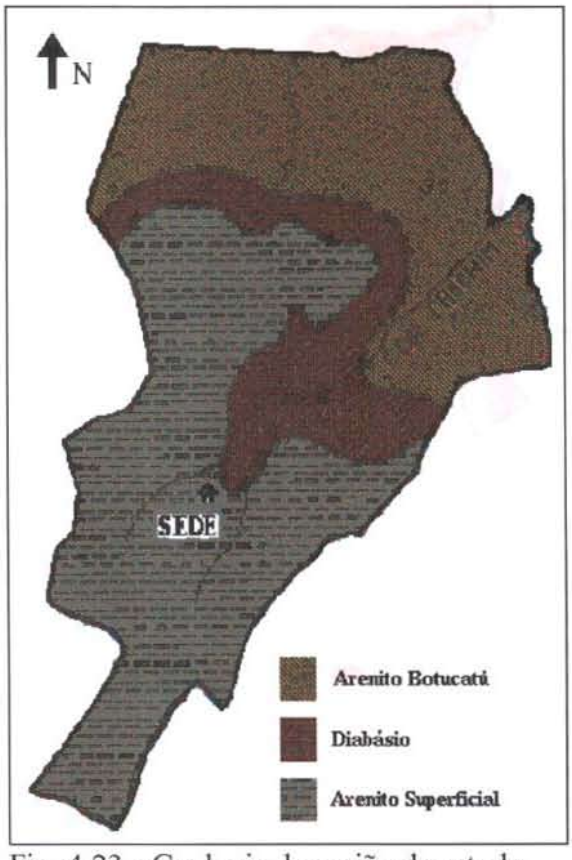



Fig. 4.23 - Geologia da região de estudo.

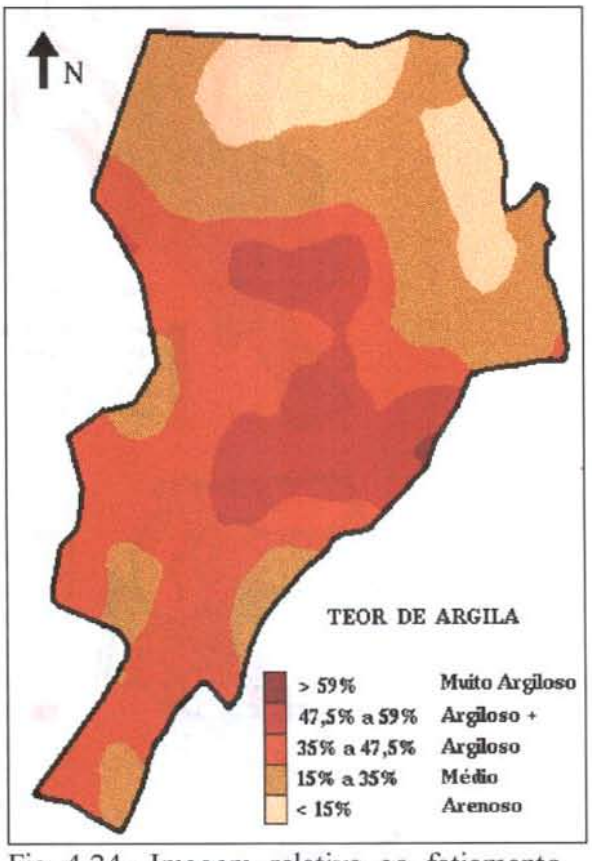
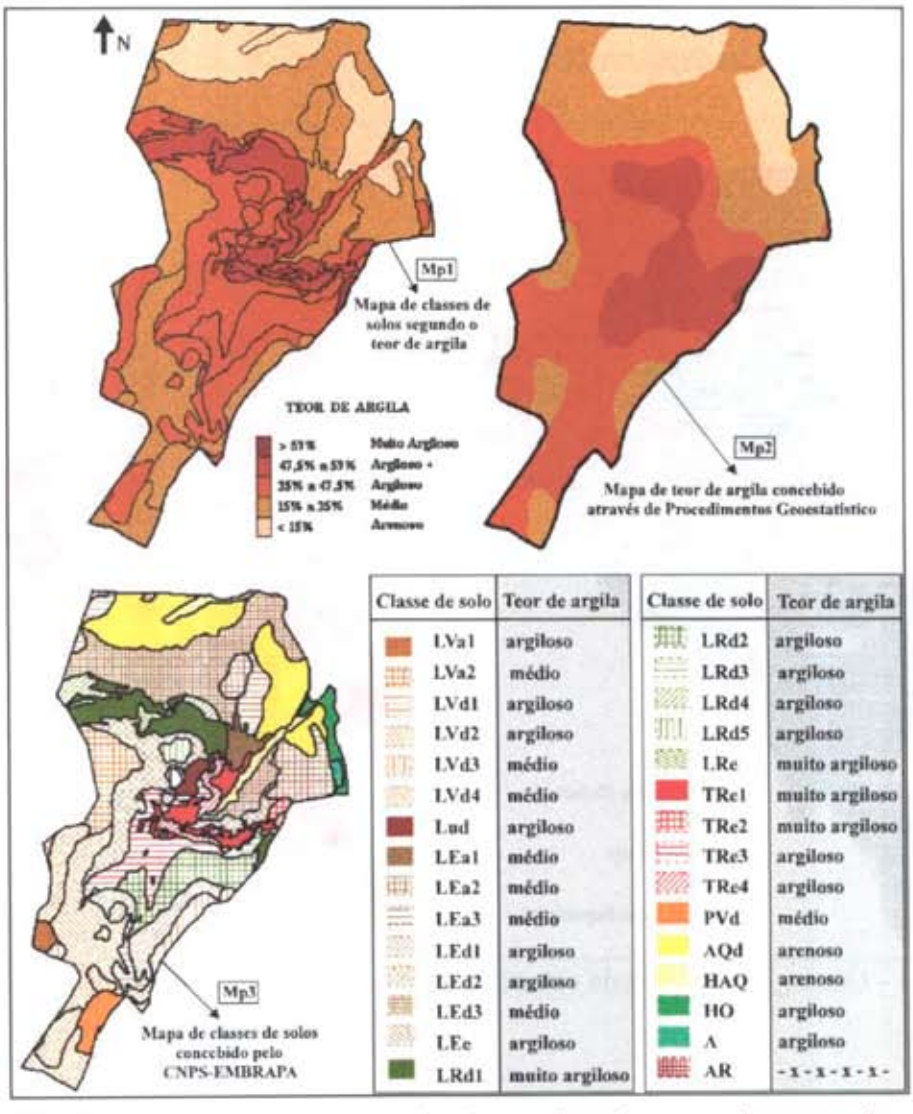



Fig. 4.24 - Imagem relativa ao fatiamento da grade GKrV.

Observando as Figuras 4.23 e 4.24, nota-se que ambas possuem feições semelhantes. Segundo Calderano Filho et al. (1996), no Arenito Superficial, encontram-se os solos argilosos e de teor médio de argila, na Formação Serra Geral (diabásio) predominam os solos com teores argilosos a muito argilosos e na Formação Arenito Botucatu encontram-se solos com teor médio de argila e os solos arenosos.

Um outro tipo de análise refere-se à comparação entre o mapa de classes de solos segundo o teor de argila, Mp1, (concebido pelo CNPS-EMBRAPA) e o mapa de teor de argila, Mp2, (gerado através de procedimentos geoestatísticos). Neste caso, a análise é restrita, pois, considera-se apenas o teor de argila às respectivas classes de solos. A Figura 4.25 confronta os resultados expressos pelos mapas Mp1 e Mp2.




| Classe de solo | Teor de argila |
|---|---|
| LVa1 | argiloso |
| LVa2 | médio |
| LVd1 | argiloso |
| LVd2 | argiloso |
| LVd3 | médio |
| LVd4 | médio |
| Lud | argiloso |
| LEa1 | médio |
| LEa2 | médio |
| LEa3 | médio |
| LEd1 | argiloso |
| LEd2 | argiloso |
| LEd3 | médio |
| LEe | argiloso |
| LRd1 | muito argiloso |

| Classe de solo | Teor de argila |
|---|---|
| LRd2 | argiloso |
| LRd3 | argiloso |
| LRd4 | argiloso |
| LRd5 | argiloso |
| LRe | muito argiloso |
| TRe1 | muito argiloso |
| TRe2 | muito argiloso |
| TRe3 | argiloso |
| TRe4 | argiloso |
| PVd | médio |
| AQd | arenoso |
| HAQ | arenoso |
| HO | argiloso |
| A | argiloso |
| AR | - x - x - x - x - |

Fig. 4.25 - Comparação entre o mapa de classes de solos segundo o teor de argila e o mapa de teor de argila gerado através de procedimentos geoestatísticos.

Na Figura 4.25, alguns resultados são observados. Por exemplo, examinando a região norte e nordeste do mapa de solos (Mp1), observa-se a presença de solos arenosos (classe AQd) e solos com teor médio de argila (classes LEd3, LEa2,

LEa3), o que pode ser constatado também no mapa de teor de argila (Mp2). Um outro exemplo, são os solos argilosos e muito argilosos (classes de solos Lud, LRd1 e Tre1), que se encontram na região central de ambos os mapas, Mp1 e Mp2. E assim, várias outras classes de solo, como LVa1, LVa2, etc.

Considerando a deficiência de amostragem, com as conseqüentemente limitações impostas à análise geoestatística efetuada, o resultado apresentado na Figura 4.25 é de certa forma expressivo e revela a boa adequação das técnicas de krigeagem ao estudo de caso.

### 4.3.2 - KRIGEAGEM VERSUS MÉTODOS CONVENCIONAIS DE ESTIMAÇÃO

Esta seção apresenta, de forma comparativa, os resultados obtidos da krigeagem com outros métodos de estimação disponíveis no sistema SPRING, como: média ponderada pelo inverso do quadrado da distância, média simples e vizinho mais próximo. Não é o objetivo deste trabalho detalhar cada um destes métodos, pois os mesmos são descritos na literatura, como, por exemplo, em Burrough (1987).

Das 85 observações de campo realizadas nos limites da Fazenda Canchim, as seguintes grades de valores estimados são geradas:

- GKrV e GKrI : conforme definido anteriormente;
- GID: refere-se à grade de valores estimados obtida através do método de estimação média ponderada pelo inverso do quadrado da distância;
- GMS: refere-se à grade de valores estimados obtida através do método de estimação média simples;
- GVP: refere-se à grade de valores estimados obtida através do método de estimação vizinho mais próximo.

De maneira análoga à Seção 4.3.1, é interessante verificar a continuidade espacial do fenômeno em estudo. A seqüência de imagens a seguir apresenta os resultados obtidos e se refere às grades GKrV (Figura 4.27), GKrI (Figura 4.28), GID (Figura 4.29), GMS (Figura 4.30) e GVP (Figura 4.31). O mapa geológico, Figura 4.26, é utilizado como referência à análise comparativa.

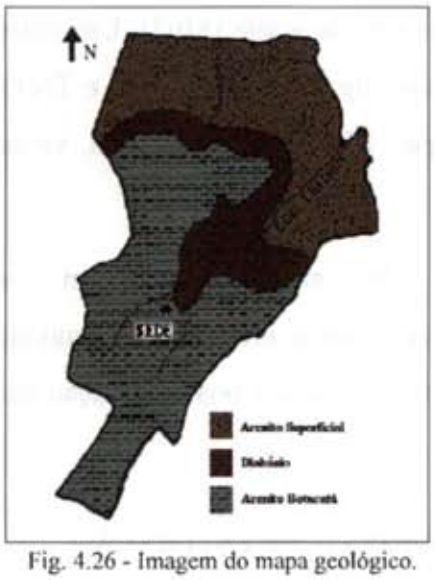


Fig. 4.26 - Imagem do mapa geológico.

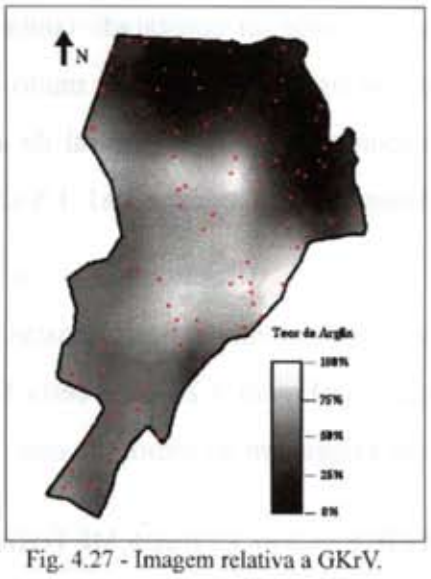


Fig. 4.27 - Imagem relativa a GKrV.

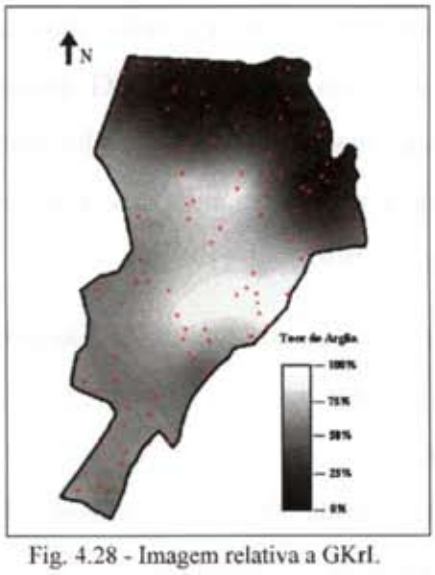


Fig. 4.28 - Imagem relativa a GKrI.

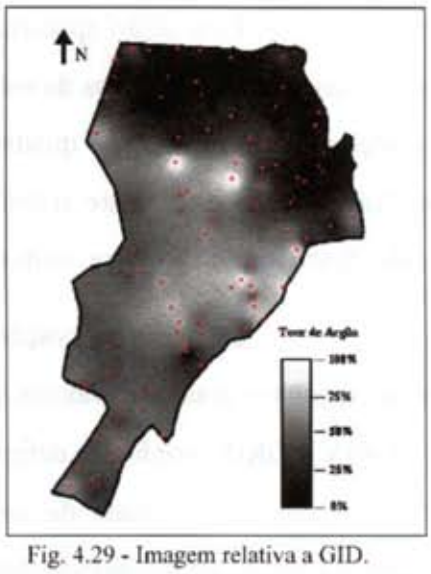


Fig. 4.29 - Imagem relativa a GID.

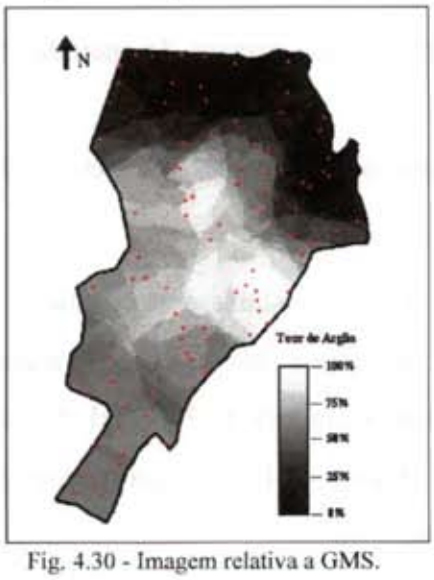


Fig. 4.30 - Imagem relativa a GMS.

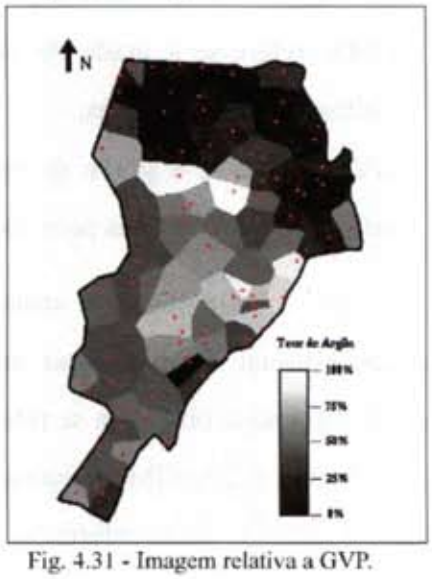


Fig. 4.31 - Imagem relativa a GVP.

Através das imagens apresentadas nas Figuras 4.27 a 4.31, pode-se constatar alguns fatos:

- Observando as Figuras 4.27 a 4.31, é relativamente fácil de ser constatado que a imagem referente à GKrV (Grade de Krigeagem obtida a partir de um modelo anisotrópico e que supostamente representa a Verdadeira continuidade espacial do fenômeno), Figura 4.27, é a que melhor expressa a variabilidade do teor de argila. Por exemplo, no mapa geológico onde ocorre o diabásio, cujo teor de argila é do produto de alteração grande, observa-se que o resultado expresso pela Figura 4.27 tende a moldar a variabilidade espacial do fenômeno nesta região.

- Com algumas ressalvas, o método da média ponderada pelo inverso do quadrado da distância produz resultado (Figura 4.29) que se assemelha ao resultado da krigeagem proveniente de um modelo isotrópico (Figura 4.28). O ponto crítico, porém, ocorre em regiões onde há superestimação e subestimação do teor de argila (ver Figura 4.29), o que difere do resultado oriundo da krigeagem (Figura 4.28), onde as mudanças de valores do teor de argila são graduais. Tal fato pode ser melhor constatado utilizando-se recursos de vizualização 3D do sistema SPRING, conforme apresentado mais adiante.

- Os resultados produzidos pelos métodos de estimação média simples (Figura 4.30) e vizinho mais próximo (Figura 4.31) são menos expressivos com relação aos demais. O método da média simples produz resultado que apresenta imbricação, principalmente na região central da área de estudo (Figura 4.30). Já o método de estimação relativo ao vizinho mais próximo (Figura 4.31), embora sendo o que pior expressa a variabilidade espacial do fenômeno estudado, revela a área de influência de cada ponto de observação. Tal informação é de grande valia, como, por exemplo, numa análise preliminar para detecção de valores amostrais suspeitos.

Conforme mencionado anteriormente, para evidenciar as regiões de superestimação e subestimação produzidas pelo método da média ponderada pelo inverso do quadrado da distância (MPIQD), utiliza-se recursos de visualização 3D do Sistema SPRING. A Figura 4.32 apresenta uma imagem em 3D proveniente da krigeagem e a Figura 4.33 uma imagem proveniente do interpolador MPIQD.

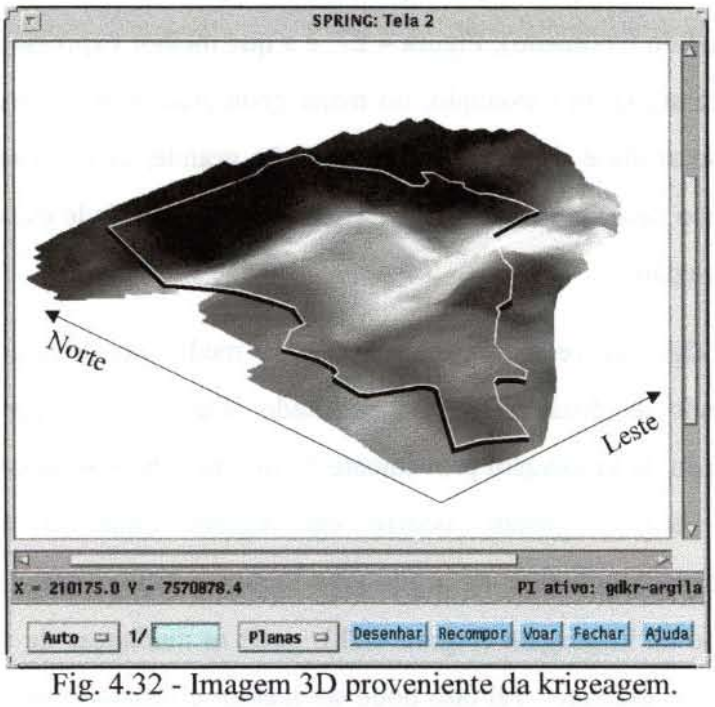



Fig. 4.32 - Imagem 3D proveniente da krigeagem.

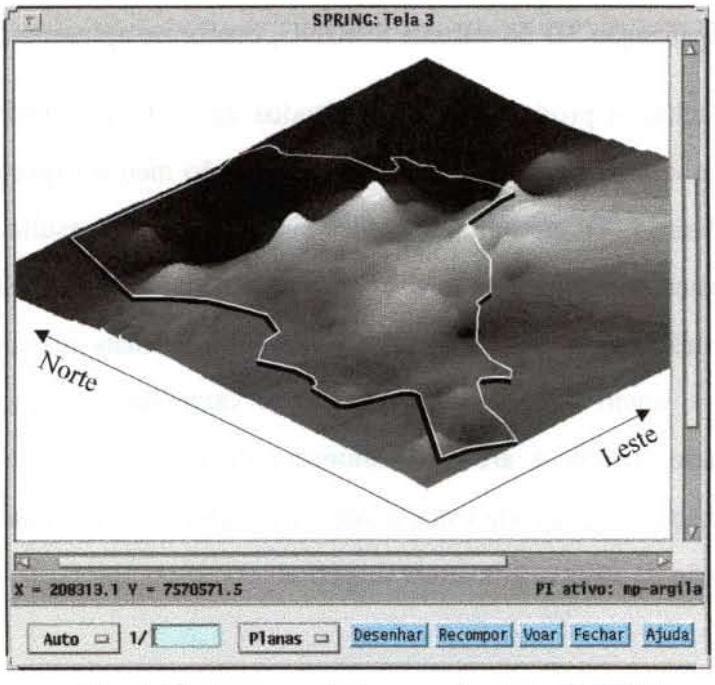



Fig. 4.33 - Imagem 3D proveniente da MPIQD.

Uma forma alternativa de avaliar os resultados produzidos pelos respectivos estimadores é através da operação de fatiamento aplicada às respectivas grades geradas. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.35 a 4.39.

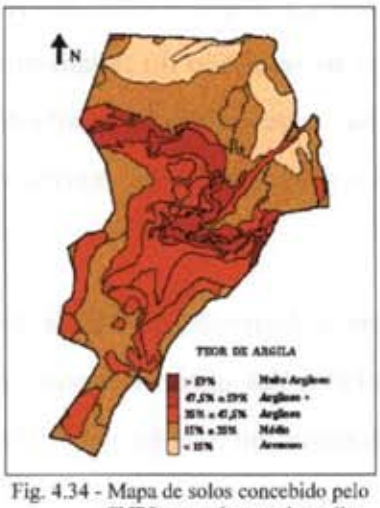



Fig. 4.34 - Mapa de solos concebido pelo CNPS segundo teor de argila.

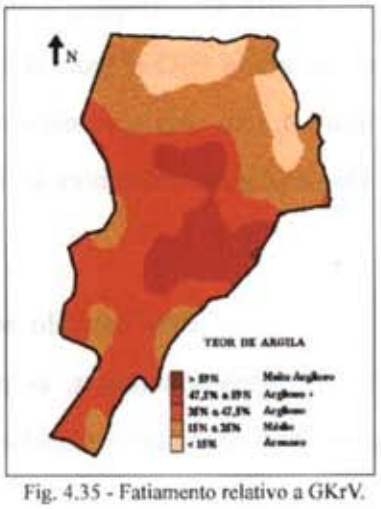



Fig. 4.35 - Fatiamento relativo a GKrV.

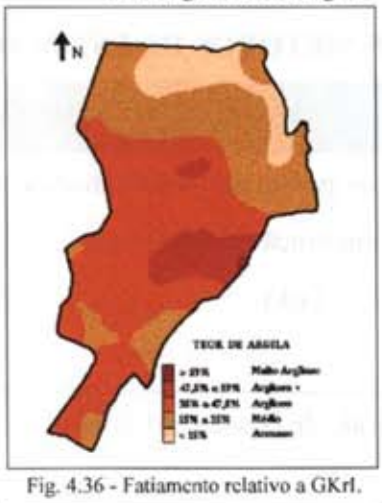



Fig. 4.36 - Fatiamento relativo a GKrl.

Fig. 4.37 - Fatiamento relativo a GID.

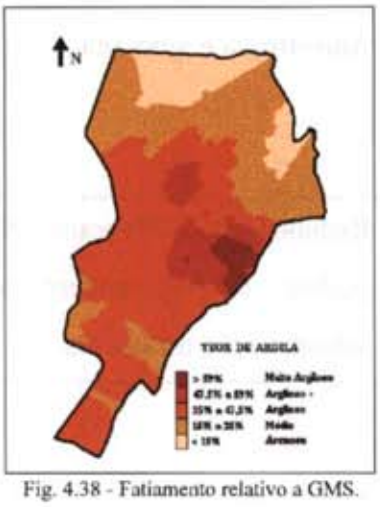



Fig. 4.38 - Fatiamento relativo a GMS.

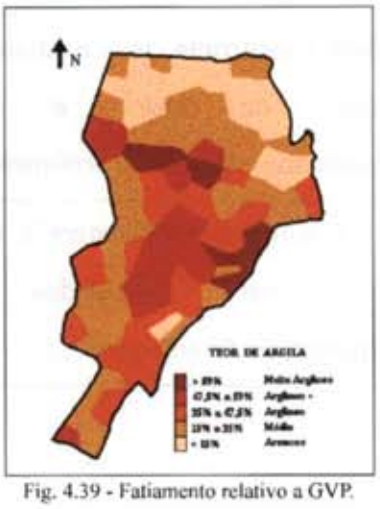



Fig. 4.39 - Fatiamento relativo a GVP.

De maneira análoga à análise anterior, constata-se que o resultado relativo ao fatiamento da grade GKrV (Figura 4.35) é o que melhor expressa a variabilidade do fenômeno, quando comparado ao mapa de classes de solos concebido pelo CNPS-EMBRAPA (Figura 4.34). Também verifica-se que o resultado referente ao fatiamento da grade GID (Figura 4.37) é próximo ao resultado do fatiamento da grade GKrI (Figura 4.36), mas apresenta regiões que há superestimação e subestimação de valores. Os resultados referentes às Figuras 4.38 e 4.39 são menos expressivos que os demais.

Este capítulo se encerra com a ilustração da Tabela 4.8, a qual apresenta, de forma sintetizada, as principais razões pelas quais os resultados obtidos pela krigeagem produziram resultados mais significativos em relação aos outros métodos de estimação.

**TABELA 4.8 - CARACTERÍSTICAS DOS MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO.**

| Métodos Geoestatísticos | Métodos Convencionais |
|---|---|
| • os pesos são determinados a partir de uma análise de correlação espacial baseada no semivariograma. $\lambda_i = f[\gamma(\mathbf{h})]$ | • os pesos são determinados meramente em função da distância. $\lambda_i = f(d_i)$ |
| • Área de influência na interpolação é indicada pelo alcance. | • raio de busca é arbitrário. |
| • Modela anisotropia, isto é, detecta as direções de maior e menor continuidade espacial do fenômeno. | • Anisotropia é ignorada. |
| • Trata redundância ("Clusters"), isto é, atribui pesos adequados para agrupamentos de amostras. | • Redundância é ignorada. Neste caso, podem ocorrer superestimação ou subestimação de valores. |

# CAPÍTULO 5

# CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

O principal objetivo deste trabalho desenvolvimento e implementação de um Módulo de Procedimentos Geoestatísticos (krigeagem) no Sistema SPRING foi satisfeito. O sistema foi testado com sucesso num estudo de caso, em que se verificou, através de mapas produzidos por técnicas geoestatísticas, a variabilidade espacial do teor de argila dentro dos limites da Fazenda Canchim.

A qualidade dos mapas oriundos da krigeagem (Figuras 4.17, 4.19, 4.21 e 4.24), revelou a boa adequação do modelo empregado. Mesmo decorrente de uma amostragem deficiente, os resultados foram de certa forma expressivos quando comparados ao mapa geológico da região e ao mapa de classes de solos. É provável que, através de amostragens mais adequadas aos procedimentos geoestatísticos, melhores resultados sejam possíveis de serem alcançados.

O sucesso dos resultados obtidos se deve principalmente às características intrínsecas do interpolador de krigeagem (Tabela 4.8). Ficou constatado, por exemplo, que o teor de argila varia mais intensamente numa direção do que em outra. Tal fato refere-se à anisotropia do fenômeno, a qual é considerada na krigeagem e ignorada nos métodos tradicionais de estimação. O resultado disto é que modelos provenientes da krigeagem proporcionam resultados mais próximos à realidade, conforme comprovado na seqüência de imagens apresentadas nas Figuras 4.27 a 4.31.

Desta forma, conclui-se que é possível melhorar a análise dos dados significativamente quando a geoestatística é aplicada. Muitos aspectos particulares dos dados ficariam ocultos se não fosse o uso de semivariogramas, mostrando, por exemplo, a tendência da variabilidade espacial nos dados de teor de argila. Informações como estas não são apresentadas quando se usam apenas parâmetros clássicos como médias e variâncias.

Um outro aspecto que deve ser ressaltado é a utilização da potencialidade do SIG na apresentação e análise dos resultados. Neste sentido, a integração geoestatística e SIG mostrou-se extremamente conveniente e deve ser adotada sempre que possível como rotina em análises de dados espaciais para possibilitar maior precisão científica nas recomendações.

Finalizando, alguns comentários e sugestões de ordem prática são mencionados a seguir.

- Quando se aplicam técnicas geoestatísticas (conforme Capítulo IV), nota-se que é necessário realizar uma série de procedimentos e análises dos dados, até se atingir um certo resultado. Este é o custo adicional para se obter modelos mais realistas. É bem diferente de procedimentos determinísticos ou empíricos, em que parâmetros são estabelecidos no modelo e os resultados são obtidos quase de imediato.
- O Módulo de Procedimentos Geoestatísticos concebido na plataforma SPRING opera num ambiente multi-janelas, com a finalidade de proporcionar ao usuário um ambiente agradável e de fácil utilização. Porém, é necessário que o analista tenha um certo domínio das técnicas geoestatísticas, de modo que possa interpretar os resultados e compreender todo o processo.
- O conhecimento do fenômeno em estudo e a prática com semivariogramas são fatores de peso no contexto geoestatístico, os quais influenciam significativamente na determinação final do modelo de krigeagem.
- Finalmente, algumas sugestões de futuras melhorias que visam potencializar o Módulo de Análise Exploratória são: ter a possibilidade de realizar transformações dos dados amostrais, realizar testes de aderência da amostra a certos modelos teóricos, ter mecanismos para detectar e eliminar a presença de "outliers" (valores discrepantes) e efetuar leitura interativa, através do apontador ("mouse"), de valores amostrais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Almeida, A. S.; Bettini, C. **Curso de Geoestatística Aplicada**. Rio de Janeiro, UFRJ, 1994. Apostila.

Akaike, H. A New Look at Statistical Model Identification, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 19 (6): 716-723, Dec. 1974.

Burgess, T. M.; Webster, R. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. I The semi-variogram and punctual Kriging. **Journal of Soil Science**, 31 (2): 315-331, 1980a.

Burgess, T. M.; Webster, R. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. II Block Kriging. **Journal of Soil Science**, 31 (2): 333-341, 1980b.

Burgess, T. M.; Webster, R. Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. III Changing drift and universal kriging. **Journal of Soil Science**, 31(3): 505-524, 1980c.

Burrough, P. A. **Principles of geographical information systems for land resources assessment**. Oxford, Clarendon Press, 1987. 193p.

Burrough, P. A.; Varekamp C.; Skidmore, A.K. Using Public Domain Geostatistical and GIS Software for Spatial Interpolation. **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing,** 62 (7): 845-854, 1996.

Calderano Filho, B.; Fonseca, O. O. M.; Santos, H. G.; Lemos A. L. **Levantamento Semidetalhado dos Solos da Fazenda Canchim São Carlos - SP**. Rio de Janeiro, EMBRAPA- CNPS, 1996. 261p.

Costa Neto, P. L. O. **Estatística**. São Paulo, Edgard Blücher, 1977. 264p.

David, M. **Geostatistical ore reserve estimation**. New York, Elsevier Scientific, 1977. 364p.

Delfiner, P.; Delhomme, J. P. Optimum interpolation by Kriging. In: Davis, J. C.; McCullagh, M. J. ed. **Display and analysis of spatial data**. New York, John Wiley, 1975. p. 96-114.

Deutsch, C.V.; Journel, A. G. **GSLIB: Geostatistical Software Library and user's guide**. New York, Oxford University Press, 1992. 339p.

Englund, E. J.; Sparks, A. **Geo-EAS (Geostatistical Enviromenmental Assessment Software ) Users's Guide**. Las Vegas, U.S. Environmental Monitoring Systems Laboratory, 1988.

Froidevaux, R. **Geostatistical Toolbox Primer, version 1.30**. Switzerland, FSS International, 1990.

Hernández, J.G.; Srivastava, R. ISIM3D: an ANSI-C three dimensional multiple indicator conditional simulation program. **Computers & Geosciences,** 16 (4): 395-440, 1990.

Huijbregts, C. J. Regionalized variables and quantitative analysis of spatial data. In: Davis, J. C.; McCullagh, M. J. ed. **Display and analysis of spatial data**. New York, John Wiley, 1975. p. 38-53.

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Departamento de Processamento de Imagens. (INPE/DPI). **Sistema de Processamento de Informações Georreferenciadas (SPRING)**. http://www.inpe.br/spring. Março, 1977.

Isaaks, E. H.; Srivastava R. M. **An Introduction to Applied Geostatistics**. New York, Oxford University Press, 1989. 560p.

Journel, A.G. **Fundamentals of geostatistics in five lessons**. California, Stanford Center for Reservoir Forecasting Applied Earth Sciences Department, 1988.

Kitanidis, P. K.; Vomvoris, E. G. A geostatistical approach to the inverse problem in groundwater modelling (steady state) and one dimensional simulations. **Water Resources Research,** 19 (3): 677-690, 1983.

Krige, D.G. A statistical approch to some basic mine evaluation problems on the Witwatersrand. **Johanesburg Chemistry Metallurgy Mining Society South African,** 52 (6): 119-139, 1951.

Lajaunie, C. A geostatistical approach to air pollution modelling. **In: Geostatistics for Natural Resources Characterization**, ed. A. G. Journel e A. Marechal, 1984. p. 877-891.

Matheron, G. **The theory of regionalized variables and its applications.** Paris, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique de Fontainebleu, 1971. 211p.

Matheron, G. Principles of geostatistics. **Economic Geology,** 58 (8): 1246-1266, Dec. 1963.

McBratney, A.B.; Webster, R.; McLaren, R.G.; Spiers, R.B. Regional variation of extrable copper and cobalt in top soil of South-East Scotland. **Agronomie,** 2 (10): 969-982, 1982.

McBratney, A.B.; Webster, R. Choosing functions for semi-variograms of soil properties and fitting them to sampling estimates. **Journal of Soil Science,** 37 (4): 617-639, 1986.

Montgomery, E. G. **Experiments in wheat breeding: experimental error in the nursery and variation in nitrogen and yield**. Washington, U.S. Dept. Agric. Bur. Plant. Indust. Bul., 1913. 61p.

Olea, R. A. **Optimum mapping techniques using regionalized variable theory**. Kansas, Kansas Geological Survey, 1975. 137p. (Series on Spatial Analysis, 2).

Olea, R. A. **Measuring spatial dependence with semivariograms**, Kansas, Kansas Geological Survey, 1977. 29p. (Series on Spatial Analysis 3).

Olea, R. A.; Jian, X.; Yu, Y. Semivariogram modeling by weighted least squares. **Computers & Geosciences,** 22 (4): 387-397, 1996.

Oliver, M. A.; Webster, R. Kriging: a method of interpolation for geographical information systems. **International Journal of Geographical Information System,** 4 (3):313-332, 1990.

Openshaw, S. Developments in geographical information systems. **Economic and Social Research Council, Newsletter,** (63): 11-14, 1988.

Smith, L.H. Plot arrangement for variety experiment with corn. **Proc. American Society Agronomie,** 5 (1): 84-89, 1910.

Waynick, D.D.; Sharp, L.T. Variability in soils and its significance to past and future soil investigations. II. Variation in nitrogen and carbon in field soils and their relation to the accuracy of field trials. **Agricultural Sciences,** 4 (5): 121-139, 1919.

# APÊNDICE A

# DADOS AMOSTRAIS DA FAZENDA CANCHIM

A amostra é composta de 85 observações georreferenciadas (12 perfis mais 73 observações extras) coletadas no horizonte Bw (camada do solo com profundidade média de 1m), conforme ilustra a Tabela A.1.

**TABELA A.1 - DADOS AMOSTRAIS DA FAZENDA CANCHIM.**

| Localização | | Horizonte - Bw | | Variáveis | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| UTM_X (metros) | UTM_Y (metros) | Observação (nº) | Perfil (nº) | Altitude (metros) | % Cálcio | % Magnésio | % Areia grossa | % Areia fina | % Silte | % Argila |
| 209360.39 | 7571785.00 | - | 1 | 670 | 0.0 | 3.0 | 30 | 65 | 1 | 4 |
| 204834.76 | 7567953.50 | - | 2 | 890 | 0.0 | 1.0 | 29 | 21 | 7 | 43 |
| 206798.56 | 7571267.50 | - | 3 | 800 | 0.0 | 3.0 | 29 | 21 | 7 | 43 |
| 205937.89 | 7570221.00 | - | 4 | 860 | 0.0 | 1.0 | 41 | 22 | 4 | 33 |
| 207121.82 | 7568915.50 | - | 5 | 750 | 0.8 | 0.5 | 25 | 27 | 9 | 39 |
| 208342.12 | 7572165.00 | - | 6 | 700 | 0.0 | 1.0 | 26 | 42 | 4 | 28 |
| 207929.96 | 7569695.50 | - | 7 | 805 | 8.3 | 2.9 | 5 | 3 | 25 | 67 |
| 206432.98 | 7573049.00 | - | 8 | 660 | 0.0 | 2.0 | 35 | 56 | 3 | 6 |
| 207293.76 | 7572436.00 | - | 9 | 760 | 0.0 | 3.0 | 15 | 60 | 5 | 20 |
| 205077.21 | 7569671.50 | - | 10 | 870 | 0.0 | 2.0 | 40 | 18 | 5 | 37 |
| 205174.18 | 7566769.50 | - | 11 | 890 | 0.0 | 2.0 | 38 | 19 | 8 | 35 |
| 205634.82 | 7566616.00 | - | 12 | 880 | 0.0 | 5.0 | 26 | 20 | 8 | 46 |
| 205411.20 | 7573065.50 | 1 | - | 757 | 0.0 | 3.0 | 24 | 44 | 4 | 28 |
| 205230.76 | 7572371.00 | 2 | - | 790 | 0.0 | 2.0 | 16 | 19 | 13 | 52 |
| 206713.71 | 7571849.50 | 3 | - | 793 | 3.1 | 0.4 | 7 | 6 | 18 | 69 |
| 205869.20 | 7571041.50 | 4 | - | 864 | 0.0 | 7.0 | 45 | 17 | 5 | 33 |
| 206822.81 | 7570985.00 | 5 | - | 842 | 0.0 | 2.0 | 31 | 23 | 4 | 42 |
| 206935.95 | 7571332.50 | 6 | - | 835 | 0.0 | 3.0 | 16 | 13 | 20 | 51 |
| 207432.96 | 7570823.00 | 7 | - | 850 | 0.0 | 2.0 | 27 | 24 | 10 | 39 |
| 207766.59 | 7571552.50 | 8 | - | 805 | 0.0 | 6.0 | 3 | 4 | 20 | 73 |
| 208277.48 | 7571421.50 | 9 | - | 738 | 0.0 | 3.0 | 20 | 35 | 8 | 37 |
| 207841.07 | 7571845.50 | 10 | - | 750 | 0.0 | 2.0 | 12 | 22 | 11 | 55 |
| 208572.45 | 7571797.00 | 11 | - | 728 | 0.0 | 1.0 | 27 | 49 | 4 | 20 |
| 208972.48 | 7571571.00 | 12 | - | 650 | 0.0 | 2.0 | 35 | 45 | 5 | 15 |
| 208100.51 | 7572270.00 | 13 | - | 758 | 0.0 | 2.0 | 27 | 39 | 5 | 29 |
| 208693.48 | 7573236.00 | 14 | - | 725 | 0.0 | 1.0 | 40 | 46 | 3 | 11 |
| 209449.29 | 7572019.50 | 15 | - | 680 | 0.0 | 5.0 | 50 | 21 | 10 | 19 |
| 209449.29 | 7571696.00 | 16 | - | 688 | 0.0 | 1.0 | 30 | 56 | 2 | 12 |
| 206455.10 | 7569659.00 | 17 | - | 780 | 1.9 | 0.1 | 20 | 18 | 11 | 51 |
| 206059.10 | 7569833.00 | 18 | - | 810 | 1.1 | 0.1 | 32 | 23 | 5 | 40 |
| 205820.70 | 7569813.00 | 19 | - | 810 | 0.0 | 4.0 | 40 | 21 | 6 | 33 |
| 206616.73 | 7569174.00 | 20 | - | 805 | 6.3 | 1.6 | 8 | 11 | 35 | 56 |
| 205404.51 | 7568438.50 | 21 | - | 848 | 0.0 | 8.0 | 45 | 18 | 5 | 32 |
| 205428.75 | 7567970.00 | 22 | - | 872 | 0.0 | 4.0 | 44 | 18 | 6 | 32 |
| 206180.32 | 7567670.50 | 23 | - | 876 | 0.8 | 0.2 | 39 | 20 | 5 | 36 |

| Localização | | Horizonte - Bw | | Variáveis | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| UTM_X (metros) | UTM_Y (metros) | Observação (nº) | Perfil (nº) | Altitude (metros) | % Cálcio | % Magnésio | % Areia grossa | % Areia fina | % Silte | % Argila |
| 205675.23 | 7567464.50 | 24 | - | 895 | 0.0 | 3.0 | 33 | 21 | 6 | 40 |
| 205606.54 | 7567125.00 | 25 | - | 910 | 0.0 | 2.0 | 40 | 23 | 5 | 32 |
| 205606.54 | 7567125.00 | 25 | - | 910 | 0.0 | 2.0 | 40 | 23 | 5 | 32 |
| 206455.10 | 7566797.50 | 26 | - | 880 | 0.0 | 2.0 | 38 | 18 | 6 | 38 |
| 206079.31 | 7567323.00 | 27 | - | 903 | 0.0 | 6.0 | 37 | 16 | 7 | 40 |
| 204705.46 | 7565904.50 | 28 | - | 840 | 0.0 | 2.0 | 28 | 15 | 8 | 49 |
| 205129.75 | 7565993.50 | 29 | - | 882 | 0.0 | 8.0 | 38 | 22 | 7 | 33 |
| 205541.89 | 7566405.50 | 30 | - | 830 | 0.0 | 8.0 | 30 | 27 | 7 | 36 |
| 204992.35 | 7567743.50 | 31 | - | 894 | 0.0 | 1.0 | 26 | 23 | 19 | 32 |
| 207162.23 | 7568091.00 | 32 | - | 873 | 0.0 | 2.0 | 42 | 26 | 6 | 26 |
| 206911.70 | 7568354.00 | 33 | - | 840 | 0.8 | 0.3 | 29 | 22 | 5 | 4 |
| 206834.93 | 7568475.00 | 34 | - | 820 | 1.4 | 0.2 | 26 | 18 | 10 | 46 |
| 206758.15 | 7568919.50 | 35 | - | 810 | 3.2 | 0.4 | 20 | 13 | 11 | 56 |
| 207740.06 | 7569562.00 | 36 | - | 790 | 3.1 | 0.5 | 13 | 12 | 19 | 56 |
| 208709.84 | 7569566.00 | 37 | - | 775 | 0.8 | 0.2 | 11 | 12 | 15 | 62 |
| 208321.92 | 7568968.00 | 38 | - | 800 | 1.3 | 0.4 | 12 | 17 | 11 | 60 |
| 208956.32 | 7570237.00 | 39 | - | 740 | 4.9 | 0.4 | 5 | 5 | 25 | 65 |
| 209590.71 | 7570685.50 | 40 | - | 680 | 0.0 | 4.0 | 29 | 51 | | 18 |
| 209146.23 | 7570443.50 | 41 | - | 700 | 0.0 | 5.0 | 24 | 49 | 5 | 22 |
| 208119.89 | 7569416.50 | 42 | - | 760 | 32.4 | 2.5 | 23 | 9 | 35 | 33 |
| 208111.81 | 7569578.50 | 43 | - | 790 | 4.5 | 1.2 | 8 | 13 | 21 | 58 |
| 208055.23 | 7569966.50 | 44 | - | 720 | 4.1 | 0.2 | 12 | 40 | 10 | 38 |
| 208790.65 | 7570605.00 | 45 | - | 720 | 1.4 | 0.2 | 16 | 35 | 8 | 41 |
| 205888.70 | 7573954.50 | 46 | - | 760 | 0.0 | 2.0 | 31 | 26 | 8 | 35 |
| 207267.29 | 7570548.50 | 47 | - | 830 | 0.0 | 5.0 | 24 | 18 | 10 | 48 |
| 209994.79 | 7570879.50 | 48 | - | 690 | 0.0 | 4.0 | 23 | 25 | 9 | 43 |
| 207097.48 | 7573363.00 | 49 | - | 715 | 0.0 | 3.0 | 36 | 46 | 3 | 15 |
| 207745.54 | 7573777.50 | 50 | - | 700 | 0.0 | 2.0 | 48 | 47 | 1 | 4 |
| 205598.20 | 7573740.50 | 51 | - | 728 | 0.0 | 2.0 | 39 | 35 | 6 | 20 |
| 206205.92 | 7573911.00 | 52 | - | 750 | 0.0 | 2.0 | 51 | 31 | 4 | 14 |
| 206740.18 | 7573938.00 | 53 | - | 730 | 0.0 | 2.0 | 46 | 33 | 5 | 16 |
| 207160.92 | 7573914.50 | 54 | - | 720 | 0.0 | 2.0 | 49 | 39 | 4 | 8 |
| 206563.21 | 7573430.00 | 55 | - | 725 | 0.0 | 5.0 | 62 | 31 | 3 | 4 |
| 206754.12 | 7572294.50 | 56 | - | 770 | 0.0 | 3.0 | 22 | 60 | 2 | 16 |
| 205558.12 | 7573436.50 | 57 | - | 726 | 0.0 | 1.0 | 51 | 36 | 3 | 10 |
| 207190.98 | 7573092.00 | 58 | - | 715 | 0.0 | 3.0 | 30 | 50 | 3 | 17 |
| 207749.57 | 7572706.50 | 59 | - | 750 | 0.0 | 6.0 | 30 | 46 | 2 | 22 |
| 209314.67 | 7572541.00 | 60 | - | 710 | 0.0 | 4.0 | 52 | 33 | 3 | 12 |
| 208717.92 | 7573822.00 | 61 | - | 705 | 0.0 | 6.0 | 42 | 29 | 5 | 24 |
| 209387.28 | 7572787.50 | 62 | - | 700 | 0.0 | 2.0 | 47 | 36 | 2 | 15 |
| 208576.50 | 7572869.00 | 63 | - | 740 | 0.0 | 2.0 | 39 | 44 | 3 | 14 |
| 208309.79 | 7571748.50 | 64 | - | 750 | 0.0 | 2.0 | 30 | 45 | 1 | 24 |
| 208196.65 | 7571061.50 | 65 | - | 740 | 0.0 | 2.0 | 17 | 49 | 4 | 30 |
| 206730.60 | 7568732.50 | 66 | - | 830 | 0.0 | 2.5 | 22 | 20 | 10 | 48 |
| 207206.68 | 7568705.50 | 67 | - | 870 | 0.6 | 0.5 | 29 | 22 | 6 | 43 |
| 207990.57 | 7568790.00 | 68 | - | 870 | 0.5 | 0.6 | 43 | 24 | 2 | 31 |

| Localização | | Horizonte - Bw | | Variáveis | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| UTM_X (metros) | UTM_Y (metros) | Observação (nº) | Perfil (nº) | Altitude (metros) | % Cálcio | % Magnésio | % Areia grossa | % Areia fina | % Silte | % Argila |
| 208164.34 | 7569218.50 | 69 | - | 840 | 0.9 | 0.4 | 9 | 18 | 14 | 59 |
| 209113.90 | 7571506.00 | 70 | - | 710 | 0.0 | 2.0 | 26 | 64 | 2 | 8 |
| 208851.26 | 7571122.00 | 71 | - | 720 | 0.0 | 3.0 | 25 | 55 | 2 | 18 |
| 204854.96 | 7566228.00 | 72 | - | 885 | 0.0 | 3.0 | 37 | 24 | 4 | 35 |
| 205242.87 | 7565872.00 | 73 | - | 870 | 0.0 | 6.0 | 48 | 24 | 4 | 24 |

# APÊNDICE B

## NOTAÇÃO UTILIZADA PARA OS MODELOS TEÓRICOS DE SEMIVARIOGRAMA

O objetivo deste apêndice é esclarecer a notação utilizada, neste trabalho, para os modelos teóricos de semivariograma. Como exemplo, considere a Figura B.1.

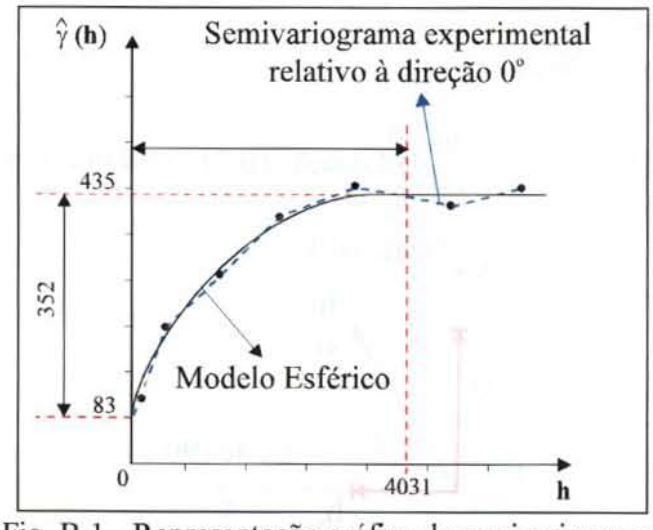



Fig. B.1 - Representação gráfica de semivariograma e modelo esférico.

O semivariograma experimental na direção 0° foi ajustado com um modelo esférico cujos parâmetros são: *Efeito Pepita* (83,0), *Contribuição* (352,0) e *Alcance* (4.031,0). A equação referente a este modelo é

$$\gamma_{0^\circ}(\mathbf{h}) = 83{,}0 + 352{,}0\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{4031{,}0}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{\infty}\right)^2}\right)\right], \qquad \text{(B.1)}$$

onde o termo $\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{4031{,}0}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{\infty}\right)^2}\right)$ refere-se a um modelo esférico normalizado.

Conforme apresentado na Seção 2.6.2, o modelo esférico normalizado é definido como:

$$\mathrm{Sph}(|\mathbf{h}|) = \begin{cases} 0 & ,|\mathbf{h}|=0 \\ 1{,}5\left(\dfrac{|\mathbf{h}|}{a}\right) - 0{,}5\left(\dfrac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^3 & ,0<|\mathbf{h}|\le a \\ 1 & ,|\mathbf{h}|>a \end{cases}, \qquad \text{(B.2)}$$

onde

- $a$ é o alcance.
- $\mathbf{h}$ é o vetor distância.

Decompondo $\dfrac{|\mathbf{h}|}{a}$ da Equação (B.2), conforme a Figura B.2,

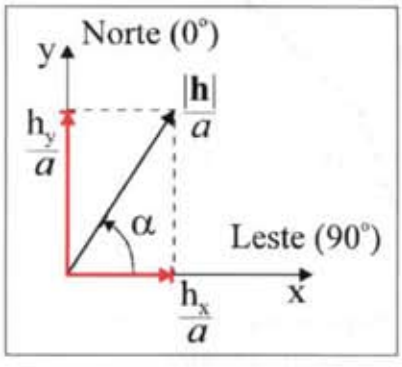



Fig. B.2 - Decomposição do vetor distância.

o modelo esférico normalizado é escrito como:

$$\mathrm{Sph}(|\mathbf{h}|) = \begin{cases} 0 & ,|\mathbf{h}|=0 \\ 1{,}5\left(\sqrt{\left(\dfrac{h_y}{a}\right)^2+\left(\dfrac{h_x}{a}\right)^2}\right) - 0{,}5\left(\sqrt{\left(\dfrac{h_y}{a}\right)^2+\left(\dfrac{h_x}{a}\right)^2}\right)^3 & ,0<|\mathbf{h}|\le a \\ 1 & ,|\mathbf{h}|>a \end{cases} \qquad \text{(B.3)}$$

Na Equação (B.3), quando $|\mathbf{h}| = a \Rightarrow h_y = a.\mathrm{sen}(\alpha)$ e $h_x = a.\cos(\alpha)$; portanto $\mathrm{Sph}(|\mathbf{h}|) = 1$.

Neste trabalho, utiliza-se a notação $\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\dfrac{h_{0°}}{a}\right)^2+\left(\dfrac{h_{90°}}{a}\right)^2}\right)$, para representar a Equação (B.3).

Com relação a Equação (B.1), note que o modelo é valido somente para a direção 0°, isto é, o vetor distância **h** não possui componente na direção 90°. Neste caso, $h_{90°} = 0$, e ainda, segundo Almeida e Bettini (1994), está implicito um alcance muito grande ($\infty$) na direção 90°, de modo que a razão $\frac{h_{90°}}{\infty}$ não contribui para o modelo, ou seja é nula.

Finalizando, as convenções de notação aqui apresentadas se aplicam, de maneira análoga, aos outros modelos teóricos definidos na Seção 2.6 e para qualquer direção.

# APÊNDICE C
# MODELAGEM DA ANISOTROPIA

O princípio fundamental na modelagem de anisotropia (geométrica, zonal ou combinada), consiste em usar todas as estruturas presentes em todas as direções, atribuindo um alcance infinito às inexistentes (Almeida e Bettini, 1994).

## MODELAGEM DA ANISOTROPIA GEOMÉTRICA

Se a *anisotropia* é observada e é refletida pelo mesmo *Patamar (C)* com diferentes *Alcances (a)* do mesmo tipo de modelo, então ela é denominada *Geométrica*. Considere o exemplo ilustrado na Figura C.1.

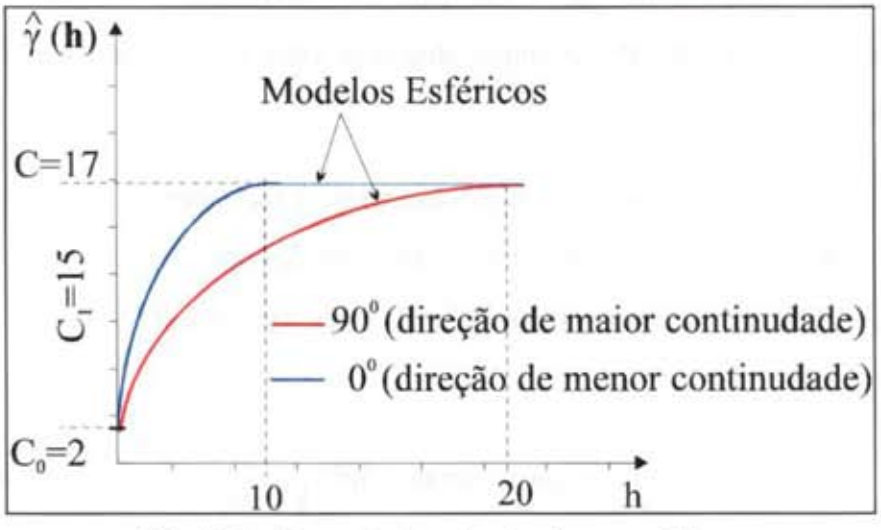



Fig. C.1 - Exemplo de anizotropia geométrica.

De acordo com a convenção de notação definida no Apêndice B, o modelo de semivariograma relativo à direção 0° é

$$\gamma_{0^\circ}(\mathbf{h}) = 2 + 15\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{10}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{\infty}\right)^2}\right)\right], \qquad \text{(C.1)}$$

e o modelo de semivariograma relativo à direção 90° é

$$\gamma_{90^o}(\mathbf{h}) = 2 + 15\left[\text{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{\infty}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^o}}{20}\right)^2}\right)\right]. \qquad (C.2)$$

Uma vez, definidos os modelos relativos às direções de máxima e mínima continuidade espacial do fenômeno, determina-se o modelo único e consistente para qualquer distância e direção do vetor **h**. Então das Equações (C.1) e (C.2), obtem-se o modelo único (ou completo), que é expresso através da seguinte equação:

$$\gamma(\mathbf{h}) = 2 + 15\left[\text{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{10}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^o}}{20}\right)^2}\right)\right]. \qquad (C.3)$$

A consistência desse modelo é verificada primeiro determinando-se os valores das componentes $h_{0^o}$ e $h_{90^o}$ para um determinado vetor **h**. Em seguida, calcula-se o valor de $\gamma(\mathbf{h})$. Por exemplo, deseja-se saber o valor de $\gamma(\mathbf{h})$ na direção $0^o$ quando $|\mathbf{h}|$ = alcance $a = 10$.

Neste caso, as componentes $h_{0^o}$ e $h_{90^o}$ valem:

$h_{0^o} = |\mathbf{h}|.\text{sen}\alpha = a.\text{sen}\alpha = 10.\text{sen}90^o = 10$ (vide Apêndice B).

$h_{90^o} = |\mathbf{h}|.\cos\alpha = a.\cos\alpha = 10.\cos 90^o = 0$ (vide Apêndice B).

Lembre-se que, o termo $\text{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{10}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^o}}{20}\right)^2}\right)$ é apenas uma notação representativa do modelo teórico, conforme apresentada no Apêndice B. Uma vez, determinado os valores das componentes $h_{0^o}$ e $h_{90^o}$, substituem-se seus valores na equação do modelo esférico normalizado (vide Apêndice B Equação B.3). Então,

$$\text{Sph}(|\mathbf{h}|) = 1{,}5\left(\sqrt{\left(\frac{10}{10}\right)^2 + \left(\frac{0}{20}\right)^2}\right) - 0{,}5\left(\sqrt{\left(\frac{10}{10}\right)^2 + \left(\frac{0}{20}\right)^2}\right)^3 = 1.$$

Finalmente, determina-se $\gamma(\mathbf{h})$, isto é,

$$\gamma(\mathbf{h}) = 2 + 15\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{10}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{20}\right)^2}\right)\right] = 2 + 15.(1) = 17.$$

De maneira análoga, na direção 90° quando $|\mathbf{h}| = 20$, tem-se que $\gamma(\mathbf{h}) = 17$. E assim por diante, para uma direção $\theta$ qualquer quando $|\mathbf{h}| \to 0$, tem-se que $\gamma(\mathbf{h}) - 2$ (Efeito Pepita), etc.

Uma vez estabelecido o modelo completo e verificado sua consistência, definem-se os parâmetros estruturais. Os valores dos parâmetros estruturais são definidos diretamente da Equação (C.3), e são apresentados na Tabela C.1.

**TABELA C.1 - PARÂMETROS ESTRUTURAIS DO MODELO DE ANISOTROPIA GEOMÉTRICA.**

| Número de Estruturas | | 1 | |
|---|---|---|---|
| Efeito Pepita | | 2 | |
| **Tipo da 1ª Estrutura: Esférica** | | | |
| Contribuição | 15 | Ângulo de Anisotropia | 90° |
| Maior Alcance | 20 | Fator de Anisotropia | 0,5 |

## MODELAGEM DA ANISOTROPIA ZONAL

Se a *anisotropia* é observada e é refletida com diferentes *Patamares (C)* e mesmo *Alcances (a)* do mesmo tipo de modelo, então ela é denominada *Zonal*. Na prática a Anisotropia Zonal é pouco freqüente; o que geralmente ocorre é uma combinação da Anisotropia Geométrica mais Zonal, denominada *Anisotropia Combinada*.

## MODELAGEM DA ANISOTROPIA COMBINADA

Neste caso, a *anisotropia* é observada e é refletida com diferentes *Patamares (C) e Alcances (a)* do mesmo tipo de modelo, podendo ainda apresentar dois valores distintos de *Efeito Pepita (Co)*. Um exemplo típico, refere-se à anisotropia encontrada ao estudo de caso apresentado neste trabalho, conforme a Figura C.2.

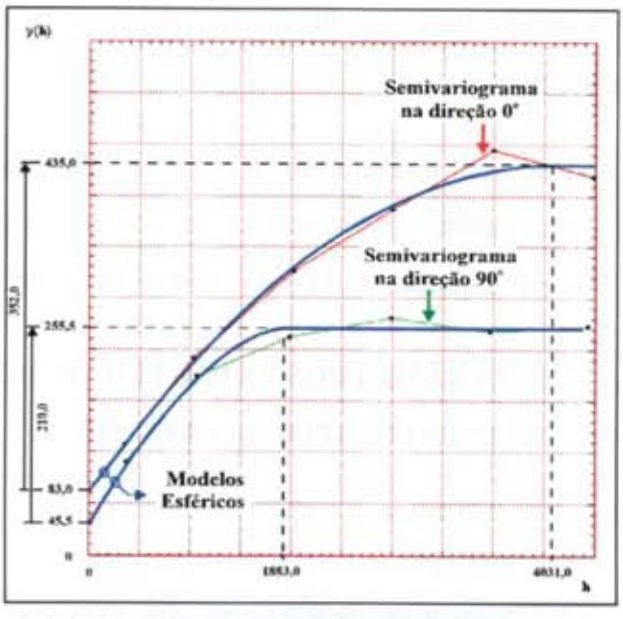



Fig. C.2 - Exemplo de anisotropia combinada.

De acordo com a notação definida no Apêndice B, o modelo de semivariograma relativo à direção 0° é

$$\gamma_{0^\circ}(\mathbf{h}) = 83 + 352\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{4031}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{\infty}\right)^2}\right)\right], \qquad (C.4)$$

e o modelo de semivariograma relativo à direção 90° é

$$\gamma_{90^\circ}(\mathbf{h}) = 45{,}5 + 255{,}5\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^\circ}}{\infty}\right)^2 + \left(\frac{h_{90^\circ}}{1883}\right)^2}\right)\right]. \qquad (C.5)$$

Uma vez estabelecidos os modelos relativos às direções de máxima e mínima continuidade espacial do fenômeno, procede-se à modelagem da anisotropia combinada.

A modelagem da anisotropia combinada é um caso mais complexo que a modelagem da anisotropia geométrica. A idéia básica é dividir em faixas convenientes o gráfico de semivariogramas, conforme ilustra a Figura C.3, de maneira que, em cada faixa reste somente a anisotropia geométrica (Almeida e Bettini, 1994). Evidentemente esta técnica exige o conhecimento e prática com semivariogramas e modelagem de anisotropia.

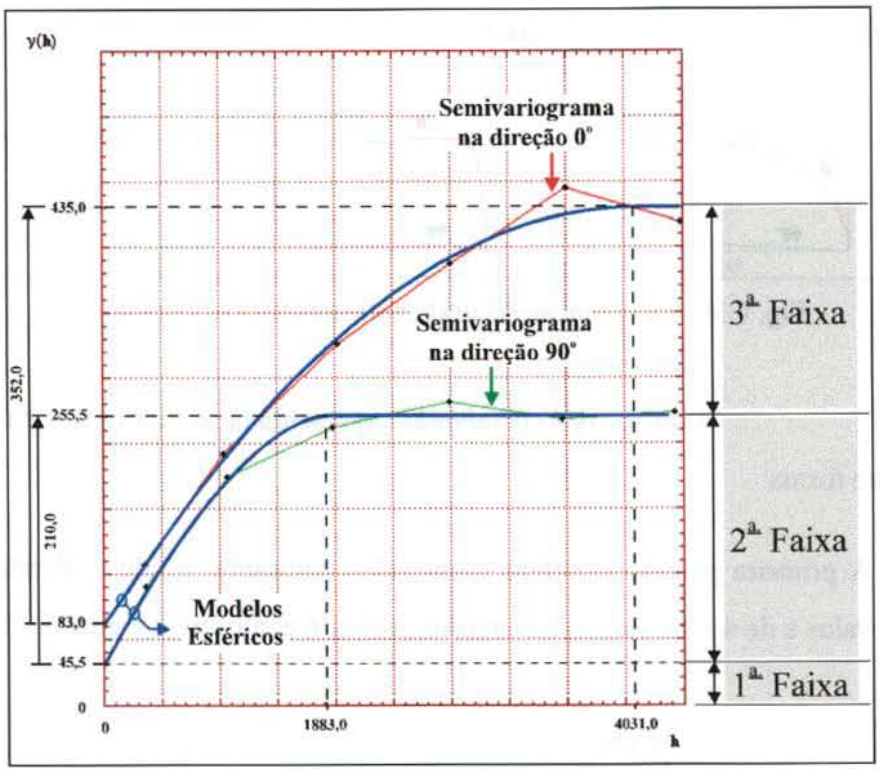



Fig. C.3 - Realce das faixas da anisotropia combinada para decomposição gráfica.

Uma vez estabelecido de forma conveniente as faixas, a *anisotropia combinada* é decomposta graficamente, conforme ilustra a Figura C.4, de modo que, cada parcela represente somente a anisotropia geométrica (Almeida e Bettini, 1994).

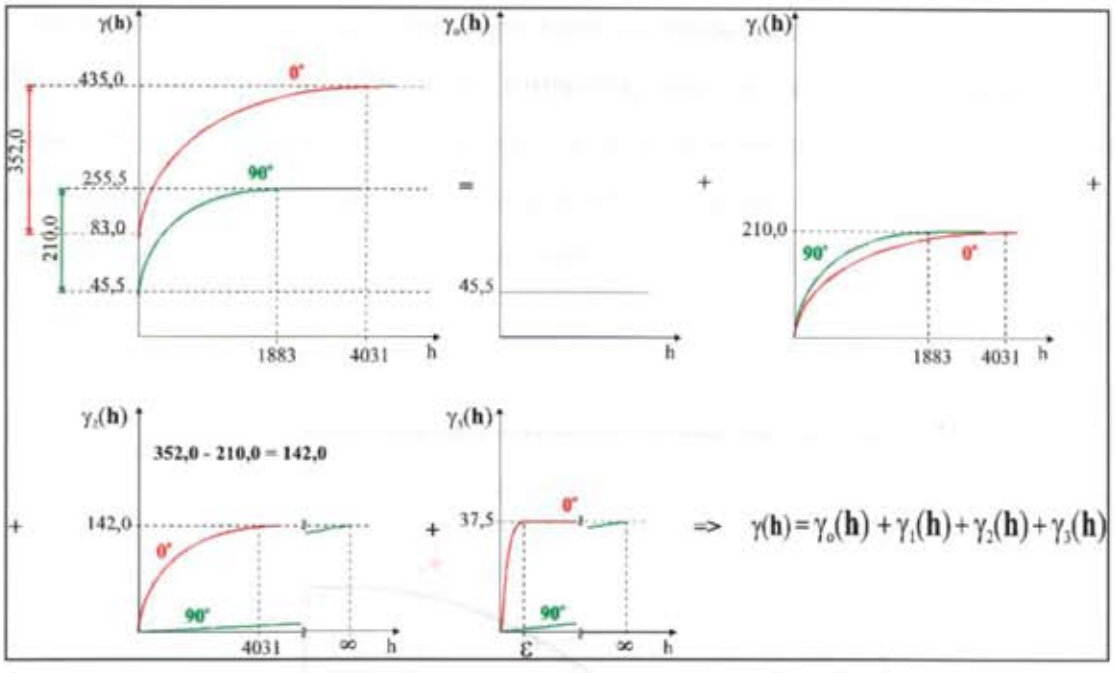



Fig. C.4 - Decomposição gráfica da anisotropia combinada.

A *anisotropia combinada* apresentada na Figura C.4 é decomposta da seguinte forma:

- A primeira parcela se refere a um valor constante, o Efeito Pepita ($C_o$) cujo valor é de 45,5 e sua representação gráfica é conforme a Figura C.5.

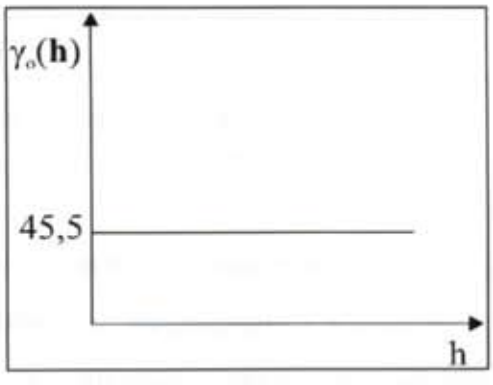



Fig. C.5 - Representação gráfica da primeira parcela da decomposição da anisotropia combinada.

- A segunda parcela se refere a um caso de anisotropia geométrica. Apresenta uma estrutura com alcance na direção 0° de 4031m, uma estrutura com alcance

na direção 90° de 1883m, e estrutura tipo esférica em ambas direções com contribuição de 210, conforme ilustra a Figura C.6.

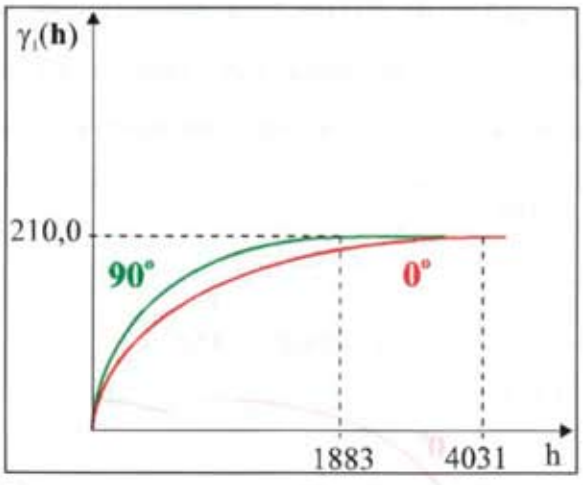



Fig. C.6 - Representação gráfica da segunda parcela da decomposição da anisotropia combinada.

O modelo único e consistente que representa a segunda parcela da decomposição gráfica (Figura C.6) é expresso pela Equação (C.6).

$$\gamma_1(\mathbf{h}) = 210{,}0\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0°}}{4031{,}0}\right)^2+\left(\frac{h_{90°}}{1883{,}0}\right)^2}\right)\right] \qquad (C.6)$$

Note que o semivariograma relativo à direção 0° (Figura C.3) possui uma contribuição maior que 210, isto é, de 352. Para compensar esta diferença, adiciona-se uma estrutura à direção 0° com valor de contribuição igual a 142. Isto faz dar origem à terceira parcela da decomposição da *anisotropia combinada*, conforme a seguir.

- Para estabelecer uma anisotropia geométrica à terceira parcela é necessário empregar um artifício. Observando o gráfico referente à terceira parcela, nota-se que não existe uma estrutura associada à direção 90°. O segredo então é, atribuir um alcance muito grande ($\infty$) a esta direção. Tal artifício é utilizado

apenas para estabelecer a anisotropia geométrica, ou seja, não influencia em nada no modelo final a ser determinado. O resultado disto é uma estrutura com alcance na direção 0° de 4031m, uma estrutura com alcance na direção 90° muito grande (∞), e estrutura tipo esférica em ambas direções com contribuição de 142 (352 - 210), conforme ilustra Figura C.7.

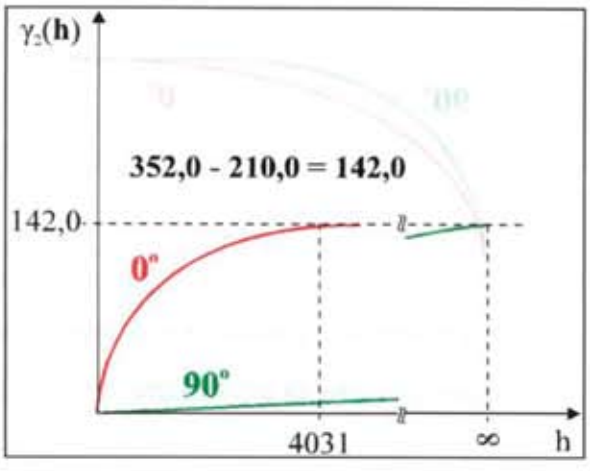



Fig. C.7 - Representação gráfica da terceira parcela da decomposição da anisotropia combinada.

O modelo único e consistente que representa a terceira parcela da decomposição gráfica (Figura C.7) é expresso pela Equação (C.7).

$$\gamma_2(\mathbf{h}) = 142{,}0\left[\mathrm{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0°}}{4031{,}0}\right)^2+\left(\frac{h_{90°}}{\infty}\right)^2}\right)\right] \qquad (C.7)$$

- A quarta parcela, é um artifício empregado para representar o segundo efeito pepita associado à direção 0°. Conforme pode ser visto nas Figuras C.4 e C.8, ela é composta de uma estrutura com alcance na direção 0° muito pequeno (ε). De maneira análoga à terceira parcela, apresenta uma estrutura com alcance na direção 90° muito grande (∞), e estrutura tipo esférica em ambas direções com contribuição de 37,5 (83,0 - 45,5). O resultado é uma anisotropia geométrica, conforme ilustrado na Figura C.8.

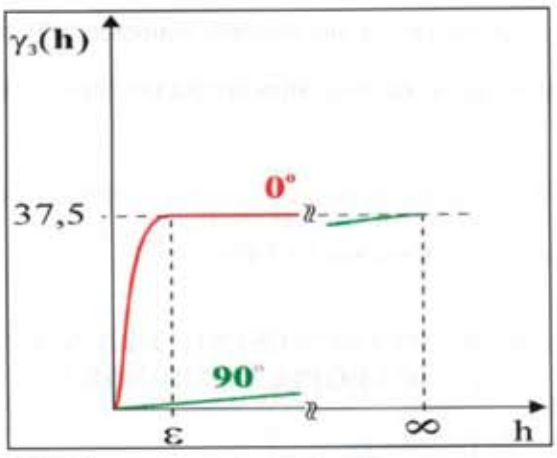



Fig. C.8 - Representação gráfica da quarta parcela da decomposição da anisotropia combinada.

O modelo único e consistente que representa a quarta parcela da decomposição gráfica (Figura C.8) é expresso pela Equação (C.8).

$$\gamma_3(\mathbf{h}) = 37{,}5\left[\text{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{h_{90^o}}{\infty}\right)^2}\right)\right] \qquad \text{(C.8)}$$

Finalmente, o modelo completo, $\gamma(\mathbf{h})$, e consistente para qualquer distância e direção do vetor **h**, resume-se na soma das estruturas $\gamma_1(\mathbf{h})$, $\gamma_2(\mathbf{h})$, $\gamma_3(\mathbf{h})$, mais o efeito pepita. Então,

$$\gamma(\mathbf{h}) = C_o + \gamma_1(\mathbf{h}) + \gamma_2(\mathbf{h}) + \gamma_3(\mathbf{h}). \qquad \text{(C.9)}$$

$$\gamma(\mathbf{h}) = 45{,}5 + 210{,}0\left[\text{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{4031{,}0}\right)^2+\left(\frac{h_{90^o}}{1883{,}0}\right)^2}\right)\right] + 142{,}0\left[\text{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{4031{,}0}\right)^2+\left(\frac{h_{90^o}}{\infty}\right)^2}\right)\right] +$$

$$+ 37{,}5\left[\text{Sph}\left(\sqrt{\left(\frac{h_{0^o}}{\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{h_{90^o}}{\infty}\right)^2}\right)\right] \qquad \text{(C.10)}$$

A consistência do modelo representado pela Equação (C.10), é verificada de maneira análoga ao caso de anisotropia geométrica anteriormente descrito.

Os parâmetros estruturais que compõem o modelo representado pela Equação (C.10) estão apresentados na Tabela C.2.

**TABELA C.2 - PARÂMETROS ESTRUTURAIS DO MODELO DE ANISOTROPIA COMBINADA.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Número de Estruturas | | 3 | |
| Efeito Pepita | | 45,5 | |
| 1ª Estrutura - Tipo: Esférica | | | |
| Contribuição | 210,0 | Ângulo de Anisotropia | 0° |
| Alcance | 4031,0 | Fator de Anisotropia | 0,467 |
| 2ª Estrutura - Tipo: Esférica | | | |
| Contribuição | 142,0 | Ângulo de Anisotropia | 0° |
| Alcance | 4031,0 | Fator de Anisotropia | 50 * |
| 3ª Estrutura - Tipo: Esférica | | | |
| Contribuição | 37,5 | Ângulo de Anisotropia | 0° |
| Alcance | ε * | Fator de Anisotropia | 50 * |

*** Nota:**

ε refere-se a um valor numérico de alcance muito pequeno associado à 3ª estrutura e à direção 0° (por exemplo, $10^{-4}$). Associado às 2ª e 3ª estruturas, na direção 90°, existe um alcance $\infty$. Então, para determinar o fator de anisotropia, é necessário atribuir um valor numérico para o alcance $\infty$, de tal forma que as razões ($\infty/\varepsilon$ e $\infty/4031,0$) proporcionem fatores de anisotropia >> 1 (por exemplo, igual a 50).