

Posicionamento estático por dupla diferença de receptores GPS em tempo real

Leandro Baroni

leandrobaroni@yahoo.com.br

Hélio Koiti Kuga

hkk@dem.inpe.br

Divisão de Mecânica Espacial e Controle,
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais,
12227-010 – São José dos Campos, SP.

1. RESUMO

O objetivo deste trabalho é obter, em tempo real, as coordenadas de posição de um receptor GPS estacionário em relação a outro receptor GPS, aplicando a técnica de posicionamento por dupla diferença de medidas de pseudo-range, assim como comparar implementações computacionais via filtro de Kalman e mínimos quadrados. O observável de dupla diferença combina medidas de dois receptores GPS, de modo que erros como desvios de relógio e atmosféricos são praticamente eliminados. Os dados utilizados foram coletados por dois receptores GPS Ashtech Z12 de dupla frequência e qualidade geodésica, durante uma campanha de cerca de uma hora, gravados com uma frequência de amostragem de 1Hz posicionados a uma distância conhecida. O receptor base foi posicionado sobre um marco com posição conhecida, medida pelo IBGE. Foram recuperados dados de pseudo-range C1 (código C/A) e P1 (código-P), que foram processados pelos dois algoritmos, e comparados em termos da precisão obtida para o posicionamento.

2. PALAVRAS CHAVES

GPS, posicionamento relativo, dupla diferença, suavização, estimação de estados.

3. INTRODUÇÃO

Este trabalho propõe calcular, em tempo real, as coordenadas de posição de um receptor GPS, estacionário em relação a outro, aplicando a técnica de posicionamento por dupla diferença, assim como comparar diferentes métodos de implementação.

Os observáveis de dupla diferença são obtidos através da combinação das medidas de pseudodistâncias de ambos os receptores referentes a vários satélites GPS simultaneamente rastreados. A vantagem deste método de posicionamento é a eliminação de grande parte dos erros das medidas, como desvios de relógio, erros orbitais e, se a linha de base for pequena, desvios atmosféricos. Este método, ao contrário do GPS Diferencial, comumente designada de DGPS (Baroni *et al.*, 2003b), permite a estimação da linha de base entre os receptores. O posicionamento do receptor “usuário” é conseguido em relação à uma posição

conhecida de um receptor denominado de “base”.

Dada a proximidade da base e do usuário, o princípio do posicionamento por dupla diferença supõe que os efeitos ambientais (troposfera, ionosfera principalmente) são os mesmos, para linhas de base próximas. Com isso efeitos de modelagem complexa são minimizados e a técnica dá origem a um posicionamento relativo de grande precisão.

Neste trabalho, a base de referência tem sua posição precisamente conhecida, medida pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). O receptor “usuário” está localizado a uma distância conhecida da base, que é usada para verificar a precisão dos procedimentos propostos. Os dados foram coletados por dois receptores GPS Ashtech Z12 de dupla frequência e qualidade geodésica em uma campanha de cerca de uma hora com uma taxa de amostragem de 1Hz. Dados de pseudo-range nos modos C1 (código C/A) e P1 (código-P) foram recuperados. Estes dados foram processados através de duas técnicas: filtro de Kalman e mínimos quadrados, e seus resultados são comparados em relação à linha de base conhecida entre os receptores.

4. MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO

4.1 MÍNIMOS QUADRADOS

O método de mínimos quadrados é basicamente um processo para estimar parâmetros, ou seja, estimar valores que são constantes ao longo do processo. É necessário medir direta ou indiretamente o que se deseja estimar, de modo que para começar o processo de estimação necessita-se de um conjunto de medidas que esteja relacionada ao(s) parâmetro(s). Desse modo torna-se fundamental a modelagem de como essas medidas se relacionam aos parâmetros a serem estimados (Kuga, 2002).

A equação que relaciona as medidas aos parâmetros é formulada como uma equação linear:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (1)$$

Formalmente, o algoritmo trata de minimizar um índice de desempenho do quadrado dos resíduos na forma:

$$L = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \quad (2)$$

onde \mathbf{y} representa o vetor contendo m medidas, \mathbf{x} representa o vetor de n parâmetros a serem estimados, e \mathbf{H} é uma matriz $m \times n$ que relaciona as medidas aos parâmetros e \mathbf{W} é uma matriz de peso que pondera os diferentes tipos de erros.

O valor estimado de \mathbf{x} para $m \geq n$ e sua covariância \mathbf{P} para o processamento em lotes, isto é, que processa as medidas todas de uma só vez, são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3)$$

Este processamento também pode ser feito de forma recursiva, também chamada de forma de Kalman, a qual pode processar uma medida de cada vez. As equações para $i = 1 \dots m$ são:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &= \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{H}_i^T + 1/w_i)^{-1} \\ \mathbf{P}_i &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{P}_{i-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_i &= \hat{\mathbf{x}}_{i-1} + \mathbf{K}_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{x}}_{i-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

onde w_i é o i -ésimo elemento da diagonal de \mathbf{W} .

4.2 FILTRO DE KALMAN

O filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que fornece uma solução recursiva para o problema de estimar o estado de um sistema baseado em medidas com ruídos. Ele combina todas as medidas, o conhecimento *a priori* da dinâmica do sistema e equipamentos de medidas, estatísticas do ruído do sistema dinâmico e erros de medidas, além de informações da condição inicial para produzir uma estimativa do estado, de tal maneira que o erro é minimizado estatisticamente (Maybeck, 1979). Esse filtro é um estimador linear, ou seja, supõe-se que as equações de dinâmica e de observações sejam funções lineares do estado. Entretanto, existem técnicas que permitem que o filtro seja usado em problemas não-lineares, como o filtro de Kalman estendido (Gelb *et al.*, 1974; Stovall, 1997).

A equação da dinâmica, que descreve a evolução do estado no tempo, é modelada pela equação diferencial linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{G} \mathbf{w} \quad (5)$$

onde \mathbf{x} é o vetor com n estados, \mathbf{F} é a matriz do sistema $n \times n$ e pode ser função do tempo t , \mathbf{w} é um vetor de r ruídos brancos da modelagem da dinâmica e \mathbf{G} é uma matriz $n \times r$ de adição de ruído, com

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(t)] &= \mathbf{0} \\ E[\mathbf{w}(t) \mathbf{w}(\tau)^T] &= \mathbf{Q}(t) \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (6)$$

O operador $E[\bullet]$ significa o operador

esperança, \mathbf{Q} é a matriz de covariância de \mathbf{w} e $\delta(t - \tau)$ é a função delta de Dirac.

As observações são geralmente discretas e modeladas pela equação linear discreta no tempo:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (7)$$

onde \mathbf{y}_k é um vetor contendo m observações, \mathbf{H}_k é uma matriz $m \times n$ que relaciona o vetor de estado com as observações e \mathbf{v}_k é um vetor de m ruídos brancos nas medidas, com

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}_k] &= \mathbf{0} \\ E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T] &= \mathbf{R}_k \delta_{kl} \end{aligned} \quad (8)$$

onde \mathbf{R}_k é a matriz de covariância dos ruídos das medidas e δ_{kl} é a função delta de Kronecker.

Os ruídos da dinâmica \mathbf{w} e de observação \mathbf{v} são não-correlacionados entre si e não-correlacionados com o estado inicial (Brown e Hwang, 1996), ou seja,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(t_k) \mathbf{v}_k^T] &= \mathbf{0} \\ E[\mathbf{x}(t_0) \mathbf{v}_k^T] &= \mathbf{0} \\ E[\mathbf{x}(t_0) \mathbf{w}(t_k)^T] &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9)$$

No início do processo, é necessário ter-se uma estimativa do estado $\hat{\mathbf{x}}_0$ e sua covariância $\hat{\mathbf{P}}_0$. Esse estado inicial e sua covariância são então propagados até o instante da medida através da equação de modelo de dinâmica. O estado $\hat{\mathbf{x}}_k$ e covariância $\hat{\mathbf{P}}_k$ atualizados são formados a partir da combinação dos estado e covariância propagados do instante anterior para o instante atual com as informações das medidas. A estimação dos estados consiste, assim, de duas fases: propagação e atualização. O método tem, portanto, natureza recursiva e não necessita armazenar as medidas previamente em grandes matrizes, sendo bastante útil para aplicações em tempo real (Gelb *et al.*, 1974; Kuga, 2002).

4.2.1 PROPAGAÇÃO

As equações da fase de propagação do instante $k-1$ para o instante k para o estado são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{P}}} &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{P}} \end{aligned} \quad (10)$$

onde $\mathbf{\Phi}_{k-1,k}$ é a matriz de transição de estado entre os instantes $k-1$ e k . A *barra* significa estado propagado antes de ser atualizado e o *circunflexo* indica estado atualizado. Estas equações são

resolvidas através de algum método de integração numérica, com condições iniciais $\bar{\mathbf{x}}(k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k-1)$ e $\Phi_{k-1,k-1} = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade. A matriz de transição Φ descreve a evolução do erro de estimação entre instantes diferentes. No caso de \mathbf{F} ser constante, a matriz de transição pode ser calculada analiticamente por:

$$\Phi_{k-1,k} = e^{\mathbf{F}\delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\delta t + \frac{1}{2!}(\mathbf{F}\delta t)^2 + \dots \quad (11)$$

onde δt é o intervalo de tempo entre os instantes das medidas (Brown e Hwang, 1996).

A propagação da matriz de covariância é dada pela equação:

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \Phi_{k-1,k} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \Phi_{k-1,k}^T + \int_{k-1}^k \Phi_{k-1,\tau} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi_{k-1,\tau}^T d\tau \quad (12)$$

4.2.2 ATUALIZAÇÃO

Após a estimativa do estado e covariância serem propagados até o instante da observação atual k , faz-se a atualização a partir das seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \bar{\mathbf{x}}_k) \\ \hat{\mathbf{P}}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \bar{\mathbf{P}}_k \end{aligned} \quad (13)$$

onde \mathbf{K}_k é o ganho de Kalman e \mathbf{R}_k é a matriz de covariância dos erros de observação e \mathbf{I} é a matriz identidade.

No processamento simultâneo, o vetor de medidas é processado em lotes, ou seja, de uma só vez. O processamento seqüencial processa uma medida de cada vez, desde que elas sejam não correlacionadas, isto é, \mathbf{R} seja diagonal. A vantagem deste método é o fato de evitar a inversão matricial na equação (13), de dimensão $m \times m$ (Sorenson, 1966).

5. POSICIONAMENTO POR DUPLA DIFERENÇA

Este capítulo mostra os resultados da aplicação da técnica de posicionamento por dupla diferença, descrita na seção 5.2. Os testes foram feitos utilizando como método de estimação filtro de Kalman e mínimos quadrados. Em ambos os métodos também foi aplicada uma rotina de suavização da pseudodistância com janelas de 10, 30, 50 e 100 segundos. Também foram processadas medidas C1 (civil) e P1 (precisa) para verificar se precisões maiores seriam possíveis.

5.1 SIMPLES DIFERENÇA

A medida de pseudodistância entre um receptor u e um satélite i pode ser modelada como:

$$\rho_u^i = D_u^i + b_u - B^i + T_u^i + I_u^i + \varepsilon_{\rho,u}^i \quad (14)$$

onde $D_u^i = |\mathbf{R}^i - \mathbf{r}_u|$ é a distância geométrica entre o receptor e o satélite, com \mathbf{r}_u sendo o vetor posição do receptor no instante de recepção do sinal e \mathbf{R}^i o vetor posição do satélite no instante de transmissão, b_u é o desvio do relógio do receptor, B^i é o desvio do relógio do satélite, T_u^i e I_u^i são os desvios troposféricos e ionosféricos, respectivamente e $\varepsilon_{\rho,u}^i$ representa erros não modelados.

O observável chamado *simples diferença* é formado tomando-se a diferença das medidas de pseudodistância em dois receptores em uma mesma época. A simples diferença para a medida de pseudodistância é dada por (Misra e Enge, 2001):

$$\begin{aligned} \rho_{ub}^i &= \rho_u^i - \rho_b^i \\ &= (D_u^i - D_b^i) + (b_u - b_b) + \\ &\quad (T_u^i - T_b^i) + (I_u^i - I_b^i) + (\varepsilon_{\rho,u}^i - \varepsilon_{\rho,b}^i) \\ &= D_{ub}^i + b_{ub} + T_{ub}^i + I_{ub}^i + \varepsilon_{\rho,ub}^i \end{aligned} \quad (15)$$

onde $(\cdot)_{ub} = (\cdot)_u - (\cdot)_b$.

O termo de desvio do relógio do satélite B^i , que é comum às duas medidas, é cancelado. Os termos troposféricos e ionosféricos são diferenças dos desvios correspondentes nos dois receptores. A magnitude destes termos depende principalmente da distância de separação dos receptores (linha de base).

Quando a distância entre os receptores for pequena, os resíduos ionosféricos e troposféricos se tornam pequenos em comparação com os erros devido ao multicaminho e ruídos do receptor. Desse modo, para uma linha de base pequena, a medida de simples diferença para a pseudodistância via código se reduz a

$$\rho_{ub}^i = D_{ub}^i + b_{ub} + \varepsilon_{\rho,ub}^i \quad (16)$$

Analogamente, a simples diferença correspondente à pseudodistância via fase é

$$\phi_{ub}^i = D_{ub}^i + b_{ub} + \lambda \cdot N_{ub}^i + \varepsilon_{\phi,ub}^i \quad (17)$$

onde $N_{ub}^i = N_u^i - N_b^i$ é a diferença entre as ambigüidades inteiras de ambos receptores e λ é o comprimento de onda da portadora.

5.2 DUPLA DIFERENÇA

O termo do desvio de relógio relativo b_{ub} é comum a todas as medidas de simples diferença em cada época. Este termo pode então ser eliminado através de medidas de *dupla diferença*, que são

formadas através da subtração de duas simples diferença relativos a dois satélites distintos i e j .

$$\rho_{ub}^{ij} = \rho_{ub}^i - \rho_{ub}^j \quad (18)$$

Da equação (16) tem-se

$$\rho_{ub}^{ij} = (D_{ub}^i - D_{ub}^j) + (\varepsilon_{\rho,ub}^i - \varepsilon_{\rho,ub}^j) = D_{ub}^{ij} + \varepsilon_{\rho,ub}^{ij} \quad (19)$$

onde $(\cdot)_{ub}^{ij} = (\cdot)_{ub}^i - (\cdot)_{ub}^j$. Em particular, ρ_{ub}^{ij} pode ser formado por:

$$\rho_{ub}^{ij} = (\rho_u^i - \rho_b^i) - (\rho_u^j - \rho_b^j) \quad (20)$$

6. POSICIONAMENTO POR DUPLA DIFERENÇA

Este método de posicionamento combina as medidas de pseudodistância provenientes de ambos os receptores para gerar os observáveis de dupla diferença (seção 5.2). As observações de dupla diferença são construídas escolhendo-se um satélite mestre M , geralmente pelo critério de maior elevação no início do período de observações e realizando as subtrações com as outras medidas. Este procedimento garante um conjunto de dupla diferenças linearmente independentes (Saalfeld, 1999; Janssen, 2001). O conjunto de medidas é então formado por:

$$\rho_{ub}^{Mi} = (\rho_u^M - \rho_b^M) - (\rho_u^i - \rho_b^i), \quad i = 1 \dots m, i \neq M \quad (21)$$

onde m é o número de satélites visíveis. Assim, tem-se $m - 1$ medidas de dupla diferença. Esta equação também pode ser escrita, de acordo com a equação (19), em função das distâncias geométricas

$$\rho_{ub}^{Mi} = (D_u^M - D_b^M) - (D_u^i - D_b^i) + \varepsilon_{ub}^{Mi} \quad (22)$$

Considerando que a linha de base é menor que a distância dos receptores aos satélites por várias ordens de magnitude, pode-se definir a seguinte relação, com base na Figura 1:

$$D_{ub}^i = D_u^i - D_b^i = \mathbf{1}_b^i \mathbf{x}_{ub} \quad (23)$$

onde

$$\mathbf{1}_b^i = \begin{bmatrix} -\frac{X^i - x_b}{\rho_b^i} & -\frac{Y^i - y_b}{\rho_b^i} & -\frac{Z^i - z_b}{\rho_b^i} \end{bmatrix}$$

é o vetor unitário apontando da base para o satélite i , com

$$\mathbf{R}^i = \begin{bmatrix} X^i & Y^i & Z^i \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{r}_b = \begin{bmatrix} x_b & y_b & z_b \end{bmatrix}^T \text{ e } \mathbf{x}_{ub} = \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \end{bmatrix}^T$$

representa a linha de base entre os receptores.

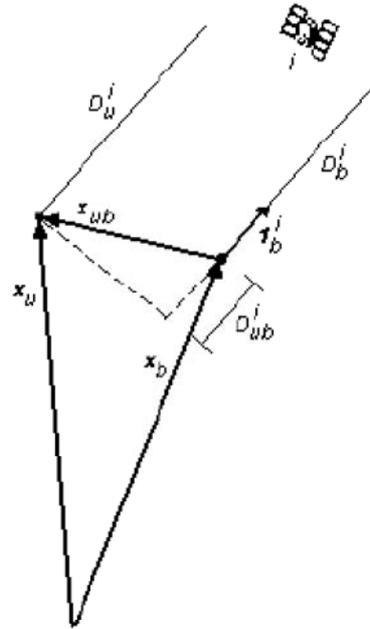


Figura 1: Geometria de uma observação de simples diferença.

FONTE: Misra e Enge (2001).

Utilizando a aproximação descrita, a dupla diferença na equação (24) se torna uma função linear com relação à linha de base \mathbf{x}_{ub} :

$$\rho_{ub}^{Mi} = (\mathbf{1}_b^M - \mathbf{1}_b^i) \mathbf{x}_{ub} + \varepsilon_{ub}^{Mi} \quad (24)$$

Portanto, a aplicação do método de dupla diferença permite a estimação da linha de base.

Como as observações de dupla diferença consistem de combinações entre as medidas de pseudodistância, o valor da matriz de covariância dessas observações pode ser calculado colocando-se a equação (21) na forma matricial (Strang e Borre, 1997):

$$\mathbf{y}_{DD} = \mathbf{D} \mathbf{y}_\rho \quad (25)$$

onde $\mathbf{y}_{DD} = [\rho_{ub}^{M1} \dots \rho_{ub}^{Mm-1}]^T$ é um vetor contendo as $m-1$ medidas de dupla diferença,

$$\mathbf{y}_\rho = [\rho_u^M \quad \rho_b^M \quad \rho_u^1 \quad \rho_b^1 \quad \dots \quad \rho_u^{m-1} \quad \rho_b^{m-1}]^T$$

é um vetor contendo as $2m$ medidas de pseudodistância observadas pelo usuário e pela base, dispostas alternadamente. A matriz \mathbf{D} , de dimensões $(m-1) \times (2m)$, é definida de modo a relacionar as pseudodistâncias observadas com as medidas de dupla diferença. Esta matriz assume então a seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Cada pseudodistância é medida com um erro cuja variância vale σ_0^2 . Assim, a matriz de covariância de \mathbf{y}_ρ é diagonal com a forma:

$$\text{cov}[\mathbf{y}_\rho] = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I} \quad (27)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem $2m$.

Pela Lei de Propagação de Covariâncias (Strang e Borre, 1997), a covariância de \mathbf{y}_{DD} , com relação à covariância de \mathbf{y}_ρ , é dada pela equação:

$$\mathbf{R} = \text{cov}[\mathbf{y}_{DD}] = \mathbf{D} \cdot \text{cov}[\mathbf{y}_\rho] \cdot \mathbf{D}^T = \mathbf{D} \cdot \sigma_0^2 \cdot \mathbf{D}^T \quad (28)$$

A matriz $\mathbf{A} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T$, de ordem $(m-1) \times (m-1)$, calculada a partir da matriz da equação (26), possui os elementos da diagonal principal com valor 4 e os elementos fora da diagonal com valor 2. Em outras palavras, mesmo que as observações originais de pseudodistância sejam não correlacionadas, a covariância das medidas de dupla diferença será correlacionada logo:

$$\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

6.1 BRANQUEAMENTO DE ERROS DE OBSERVAÇÃO

Suponha-se que um conjunto de medidas seja modelado por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (30)$$

onde \mathbf{v} é um erro de observação com média zero, mas possui correlação entre as medidas, isto é,

$$E[\mathbf{v}] = 0 \quad \text{e} \quad E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{R} \quad (31)$$

com \mathbf{R} sendo uma matriz cheia positiva definida.

Ao multiplicar a equação (30) por \mathbf{L}^{-1} , uma matriz triangular inferior dada por $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-T}$, obtém-se um novo conjunto de observações, agora independentes, mas equivalentes ao conjunto antigo:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (32)$$

com $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{H}$ e $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{v}$. Este novo conjunto possui erro de observação com covariância unitária, pois

$$E[\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^T] = E[\mathbf{L}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T\mathbf{L}^{-T}] = \mathbf{L}^{-1}E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]\mathbf{L}^{-T} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{L}^{-T} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{L}^{-T} = \mathbf{I} \quad (33)$$

dado que $\mathbf{R} = (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}^{-T}) = \mathbf{L}^T\mathbf{L}$ (Bierman, 1977). Assim, nota-se que esta técnica pode ser utilizada para diagonalizar a matriz de covariância das medidas de dupla diferença.

A matriz \mathbf{L}^{-1} pode ser obtida pela fatoração de \mathbf{R}^{-1} pelo método de Cholesky, no qual é obtido:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L}^{-T} \quad (34)$$

A aplicação da fatoração de Cholesky nessa forma exige que \mathbf{R} seja invertido. O formato de \mathbf{R} obtido possui inversa cujo valor pode ser calculado explicitamente.

6.2 INVERSÃO EXPLÍCITA DA MATRIZ R

Suponha que \mathbf{R} é uma matriz $(m-1) \times (m-1)$ cujos elementos das diagonais têm o valor $4\sigma_0^2$ e os elementos fora das diagonais têm o valor $2\sigma_0^2$. Portanto \mathbf{R} tem a forma:

$$\mathbf{R} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{A} = 2\sigma_0^2 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

A matriz inversa do termo $\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}$ é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} m-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & m-1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Logo, a matriz inversa de \mathbf{R} é

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2\sigma_0^2 m} \begin{bmatrix} m-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & m-1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Este resultado pode ser verificado através da relação fundamental $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

6.3 FATORAÇÃO DE CHOLESKY

Se \mathbf{A} é uma matriz $n \times n$ positiva definida, então \mathbf{A} pode ser fatorada na forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \quad (38)$$

onde \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior com elementos das diagonais positivos, também chamada de matriz raiz quadrada de \mathbf{A} . Essa fatorização é

conhecida como *fatoração de Cholesky* (Ruggiero e Rocha, 1997) e pode feita através do seguinte algoritmo (Bierman, 1977):

Para $j = 1 \dots n - 1$, executa-se o conjunto ordenado de equações recursivas:

$$\begin{aligned} L(j, j) &= A(j, j)^{1/2} \\ L(k, j) &= A(k, j) / L(j, j), \quad k = j + 1 \dots n \\ A(i, k) &:= A(i, k) - L(i, j)L(k, j) \begin{cases} k = j + 1 \dots n \\ i = k \dots n \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

e por fim $L(n, n) = A(n, n)^{1/2}$.

6.4 SUAVIZAÇÃO DA PSEUDODISTÂNCIA PELA MEDIDA DE FASE

Define-se a pseudodistância livre de erros ionosféricos ρ^* (Misra e Enge, 2001):

$$\rho^* = D + c \cdot (b - B) + T \quad (40)$$

As medidas de código e fase escritas em termos desta definição têm a forma:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho^*(t) + I(t) + \varepsilon_\rho(t) \\ \phi(t) &= \rho^*(t) - I(t) + \lambda \cdot N + \varepsilon_\phi(t) \end{aligned} \quad (41)$$

Tomando a diferença das medidas de pseudodistância via código ($\Delta\rho$) e fase ($\Delta\phi$) entre duas épocas t_i e t_{i-1} tem-se

$$\begin{aligned} \Delta\rho(t_i) &= \rho(t_i) - \rho(t_{i-1}) = \Delta\rho^*(t_i) + \Delta I(t_i) + \Delta\varepsilon_\rho(t_i) \\ \Delta\phi(t_i) &= \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \Delta\rho^*(t_i) - \Delta I(t_i) + \Delta\varepsilon_\phi(t_i) \end{aligned} \quad (42)$$

onde $\Delta\rho^*$ é a mudança na pseudodistância livre de erros ionosféricos, ΔI é a mudança no erro ionosférico e $\Delta\varepsilon$ é a mudança dos termos de outros erros.

Se as épocas são próximas, o termo $\Delta I(t_i)$ é pequeno e pode ser desprezado. $\Delta\phi(t_i)$ pode então ser usado como uma estimativa precisa de $\Delta\rho^*(t_i)$. Desse modo, tem-se uma estimativa de $\rho(t_0)$ em cada época:

$$\hat{\rho}(t_0)_i = \rho(t_i) - [\phi(t_i) - \phi(t_0)] \quad (43)$$

Fazendo-se uma média de $\hat{\rho}(t_0)_i$ sobre n épocas:

$$\bar{\rho}(t_0) = \frac{1}{n} \sum_i \hat{\rho}(t_0)_i \quad (44)$$

Com a estimativa de $\bar{\rho}(t_0)$, pode-se construir o conjunto de pseudodistâncias suavizadas como sendo

$$\bar{\rho}(t_i) = \bar{\rho}(t_0) + [\phi(t_i) - \phi(t_0)] \quad (45)$$

Uma implementação da suavização descrita consiste em um filtro recursivo com duração de J segundos (Misra e Enge, 2001):

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t_i) &= \frac{1}{J} \rho(t_i) + \frac{J-1}{J} [\bar{\rho}(t_{i-1}) - [\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})]] \\ \bar{\rho}(t_0) &= \rho(t_0) \end{aligned} \quad (46)$$

6.5 SOLUÇÃO POR FILTRO DE KALMAN

O filtro de Kalman é usado na estimação da linha de base entre os receptores, utilizando-se da equação de observação após o processo de branqueamento (equação 32).

A propagação do estado e sua covariância é feita com base no modelo de dinâmica estático, de modo que a matriz de transição $\Phi_{k-1,k}$ se reduz à matriz identidade. Das equações (10) e (12):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{ub,k} &= \hat{\mathbf{x}}_{ub,k-1} \\ \bar{\mathbf{P}}_{ub,k} &= \hat{\mathbf{P}}_{ub,k-1} + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (47)$$

A atualização é feita através do modelo de medidas (equação 24) pelo conjunto de equações (13), utilizando o processamento seqüencial:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \bar{\mathbf{P}}_{ub,k} \tilde{\mathbf{H}}_k^T (\tilde{\mathbf{H}}_k \bar{\mathbf{P}}_{ub,k} \tilde{\mathbf{H}}_k^T + \mathbf{I})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{ub,k} &= \bar{\mathbf{x}}_{ub,k} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_{DD} - \tilde{\mathbf{H}}_k \bar{\mathbf{x}}_{ub,k}) \\ \hat{\mathbf{P}}_{ub,k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{H}}_k) \bar{\mathbf{P}}_{ub,k} \end{aligned} \quad (48)$$

6.6 SOLUÇÃO PONTO A PONTO POR MÍNIMOS QUADRADOS

A solução por mínimos quadrados local pode ser obtida com o processamento das medidas em lotes, ou seja, processando todas as medidas de uma só vez em cada época, através das equações (Kuga, 2002):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{y}_{DD} \end{aligned} \quad (49)$$

onde \mathbf{W} é uma matriz de ponderação, dada por $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}$. Portanto o algoritmo produz uma solução sem assumir modelo dinâmico.

7. RESULTADOS

Os algoritmos de posicionamento por dupla

diferença foram implementados para a estimação da posição em tempo real para um usuário estático. Os dados utilizados foram coletados por dois receptores GPS Ashtech Z12 de dupla frequência e qualidade geodésica, durante uma campanha de cerca de uma hora, gravados com uma frequência de amostragem de 1Hz. O receptor base foi colocado sobre um marco de referência com coordenadas ECEF (*Earth Centered Earth Fixed*) no sistema WGS-84 dadas por $x_{ref} = 4084765.0762\text{m}$, $y_{ref} = -4209370.0341\text{m}$ e $z_{ref} = -2498478.2210\text{m}$, medidos pelo IBGE. O receptor usuário foi colocado a 5.20m de distância do receptor base. Os dados de navegação e observação de ambos os receptores foram gravados no formato RINEX-2 (Gurtner, 2001), em dois tipos de observação: C1 (pseudodistância medida usando código-C/A em L_1) e P1 (pseudodistância medida usando código-P em L_1). Estes arquivos foram editados de modo que o tempo da medição e o conjunto de satélites fossem os mesmos para ambos os receptores. Durante o período de observação não houve perda de ciclos nas medidas de fase.

7.1 RESULTADOS EM C1

O filtro de Kalman foi implementado de acordo com o descrito na seção 6.5, em conjunto com o algoritmo de suavização das medidas citado na seção 6.4. Os valores iniciais da linha de base e da covariância do filtro foram

$$\mathbf{x}_{ub} = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ (m)}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{ub} = \begin{bmatrix} 100^2 & 0 & 0 \\ 0 & 100^2 & 0 \\ 0 & 0 & 100^2 \end{bmatrix} \text{ (m}^2\text{)}. \quad \text{O valor}$$

atribuído à variância dos erros de medida é $\sigma_0^2 = (3\text{m})^2$. Com isso, de acordo com a equação (35), a matriz de covariância das observações de dupla diferença, de ordem $(m-1) \times (m-1)$, vale

$$\mathbf{R} = 18 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \text{ (m}^2\text{)} \quad (50)$$

A suavização foi implementada utilizando janelas de 0 (ausência de suavização), 10, 30, 50 e 100 segundos.

O valor da matriz de covariância do ruído dinâmico \mathbf{Q} foi sintonizado de modo a obter a convergência do filtro e foi mantido constante durante o experimento. Com isso, \mathbf{Q} assume os valores:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.001^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001^2 \end{bmatrix} \text{ (m}^2\text{)} \quad (51)$$

para o filtro sem suavização e

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.0001^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001^2 \end{bmatrix} \text{ (m}^2\text{)} \quad (52)$$

para o filtro com suavização.

A solução por mínimos quadrados foi obtida com o processamento em lotes das medidas de dupla diferença através das equações (49). A matriz de pesos \mathbf{W} é obtida pela inversão da matriz \mathbf{R} , equação (37).

Os gráficos da Figura 2 mostram a solução em termos do erro de posicionamento da linha de base com relação a distância de referência de 5.20m na ausência de suavização. As Figuras 3-6 mostram resultados para diferentes graus de suavização. As Figuras 3a a 6a (esquerda) mostram o erro para a solução com o filtro de Kalman, juntamente com o erro de estimação de ± 1 -sigma dado pelo traço da matriz de covariância. As Figuras 3b a 6b (direita) mostram o erro de posicionamento referente à solução para o método de mínimos quadrados.

Uma boa estimativa para a posição inicial do usuário em um sistema de DGPS são as coordenadas da base, ou seja, linha de base nula. Isto gera o erro inicial de cerca de 2m no filtro de Kalman. Após a convergência do filtro, a estimativa permanece com desvio dentro de 0.5m. Este método tem um comportamento bastante suave e permaneceu estável sob GDOP maior. A variação do GDOP e do número de satélites visíveis durante o experimento são mostrados no gráfico da Figura 7.

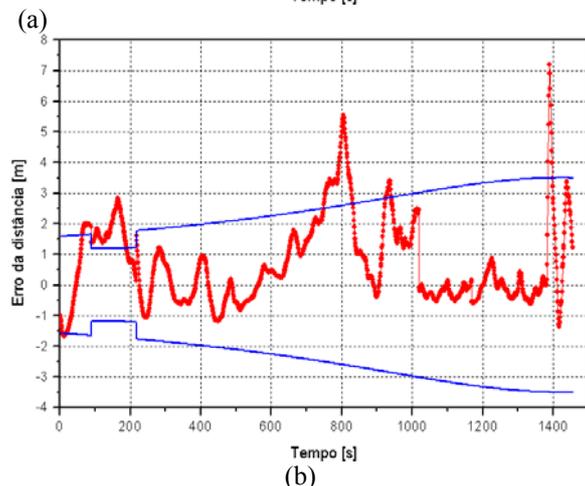
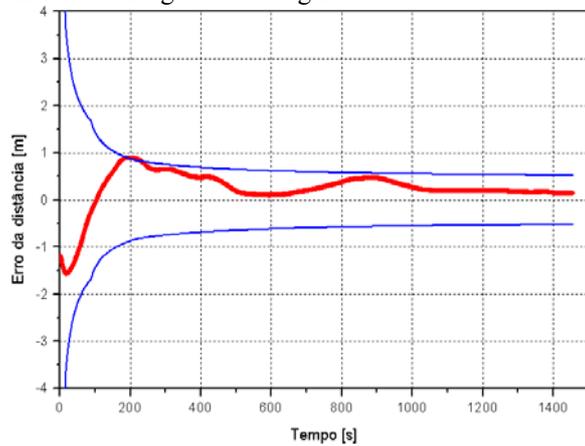


Figura 2: Erro de posicionamento sem suavização em C1.

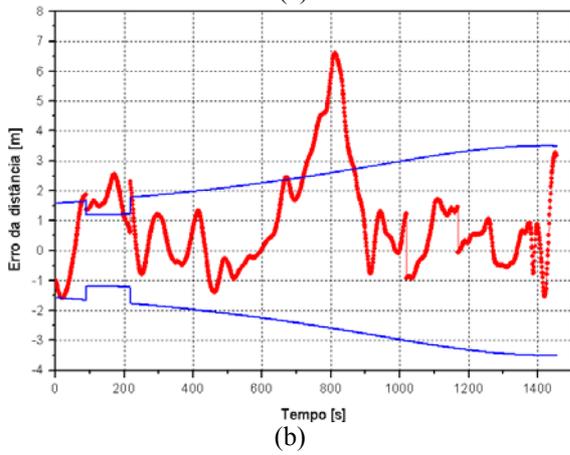
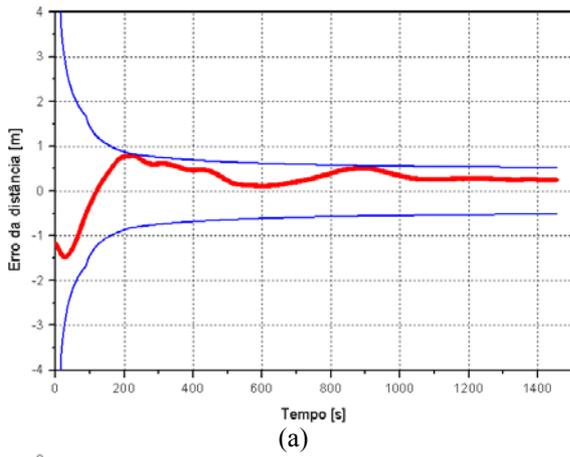


Figura 3: Erro de posicionamento com suavização de 10s.

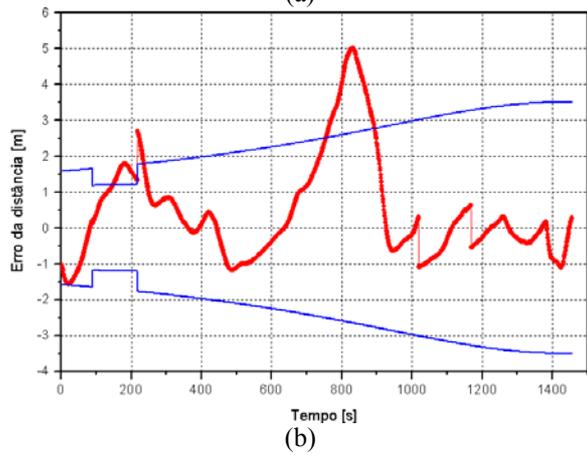
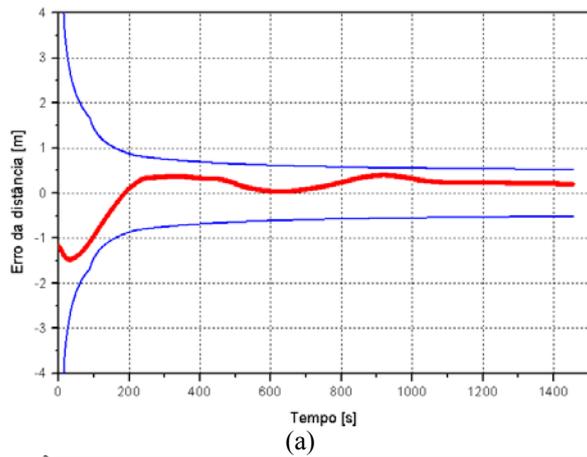


Figura 5: Erro de posicionamento com suavização de 50s.

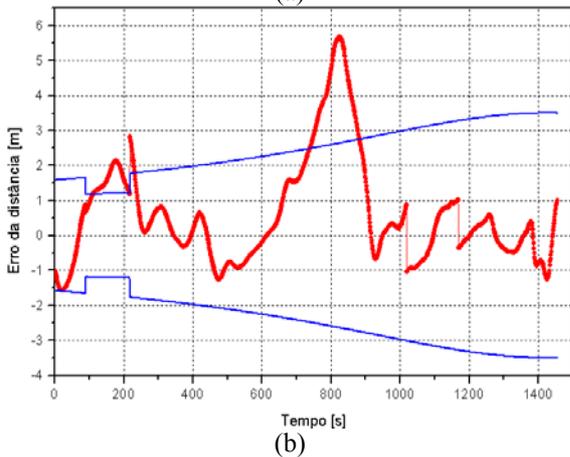
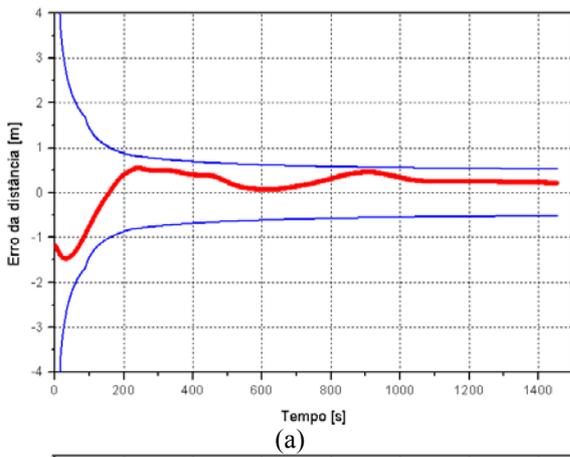


Figura 4: Erro de posicionamento com suavização de 30s.

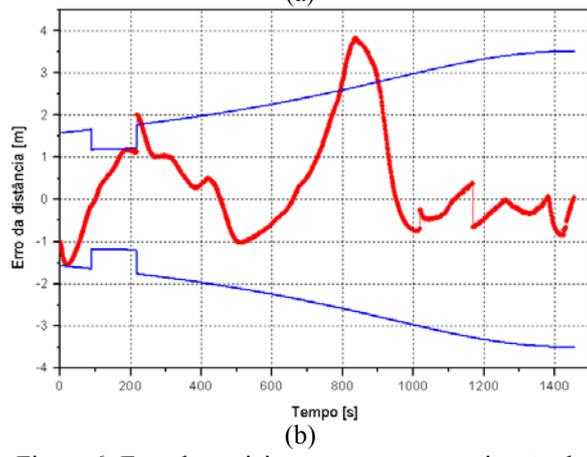
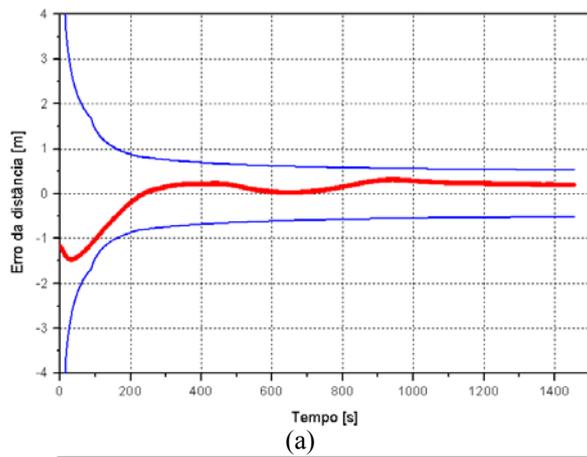


Figura 6: Erro de posicionamento com suavização de 100s.

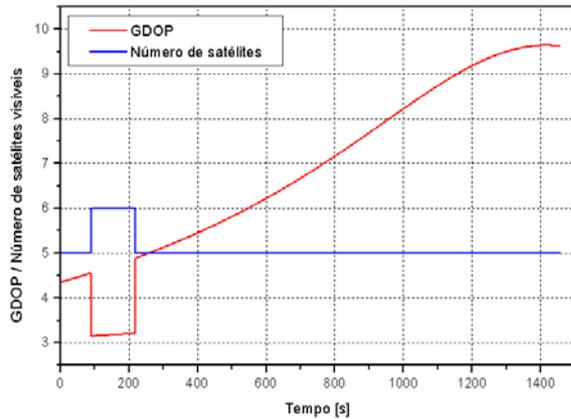


Figura 7: GDOP e número de satélites visíveis durante a observação em C1.

Os gráficos das Figuras 3 a 6 mostram que o aumento da duração da janela de suavização efetivamente levou a uma progressiva diminuição da magnitude do erro, após um ligeiro aumento na janela de 10s, tanto para a solução por filtro de Kalman quanto por mínimos quadrados, como pode ser visto nas Tabelas 1 e 2. Na solução por mínimos quadrados, a diminuição da covariância entre 89 e 219s se deve à entrada de um sexto satélite em visibilidade durante este período. A partir de 1400s, nota-se que as medidas começaram a se degradar, devido ao aumento do valor do GDOP durante o experimento (Figura 7). Nessa região, a suavização foi capaz de diminuir grandes oscilações.

As descontinuidades presentes na solução por mínimos quadrados em 1019s e 1169s ocorrem devido à saltos no desvio do relógio da base e do usuário, respectivamente. Estes saltos ocorrem no momento em que o desvio do relógio do receptor ultrapassa 1ms, quando este valor é acrescentado no relógio e diminuído do desvio (Baroni *et al.*, 2003a, Marques Filho *et al.*, 2003).

A Tabela 1 mostra a média e o desvio padrão do erro de posicionamento para a solução por filtro de Kalman para as medidas em C1, tomadas a partir da convergência do filtro, assumido após 300s de experimento. Os valores mostram que a suavização leva o erro de posicionamento a diminuir, assim como o desvio padrão. A Tabela 2 apresenta os valores do erro e desvio padrão para a solução por mínimos quadrados.

TABELA 1: MÉDIAS E DESVIOS PADRÕES PARA A SOLUÇÃO POR FILTRO DE KALMAN NAS MEDIDAS EM C1

Janela [s]	Média [m]	Desvio padrão [m]
0	0.27084	0.14349
10	0.31243	0.12845
30	0.27038	0.11484
50	0.22869	0.10026
100	0.18244	0.07954

TABELA 2: MÉDIAS E DESVIOS PADRÕES PARA A SOLUÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS NAS MEDIDAS EM C1

Janela [s]	Média [m]	Desvio padrão [m]
0	0.69549	1.37205
10	0.86617	1.59069
30	0.59540	1.50436
50	0.43658	1.43083
100	0.32669	1.18599

A precisão dos resultados em ambos os métodos é similar, exceto pelo fato de que a solução por mínimos quadrados é feita ponto a ponto, ou seja, a solução é obtida a cada instante e sem modelo dinâmico. A solução por filtro de Kalman é recursiva, obtida através do aprimoramento da solução das épocas anteriores com as medidas da época atual. Isto gera um resultado mais estável que a solução ponto a ponto.

7.2 RESULTADOS EM P1

O filtro de Kalman foi inicializado com os valores da linha de base e da covariância do filtro idênticos aos da seção anterior. O valor atribuído à variância dos erros de medida é $\sigma_0^2 = (0.5m)^2$, pois estas medidas são obtidas através do código-P, teoricamente mais preciso. Assim, a matriz de covariância das observações vale:

$$\mathbf{R} = 0.5 \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} (m^2) \quad (53)$$

A suavização foi implementada utilizando janelas de 0 (ausência de suavização), 10, 30, 50 e 100 segundos. O valor da matriz de covariância do ruído dinâmico \mathbf{Q} foi sintonizado em:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1^2 \end{bmatrix} (m^2) \quad (54)$$

para o filtro sem suavização e

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.02^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02^2 \end{bmatrix} (m^2) \quad (55)$$

para o filtro com suavização.

O gráfico da Figura 8 mostra o erro de posicionamento para a solução por filtro de Kalman (Fig. 8a) e por mínimos quadrados (Fig. 8b) em P1 na ausência de suavização. O erro inicial está em cerca de 2.5m devido provavelmente a um rastreamento ainda não estabelecido devidamente. O valor do erro após 1200s de experimento aumenta, chegando a picos de 4m, pois o valor do GDOP nesse instante

atinge cerca de 9, com picos de 14 nos momentos em que há diminuição de um satélite sendo rastreado. A Figura 13 mostra o valor do GDOP e o número de satélites em rastreamento durante o experimento.

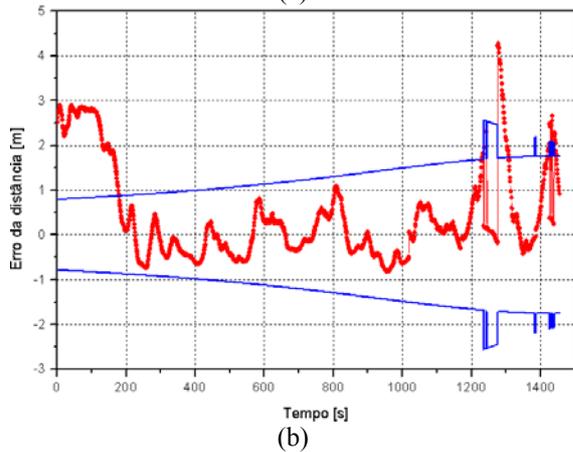
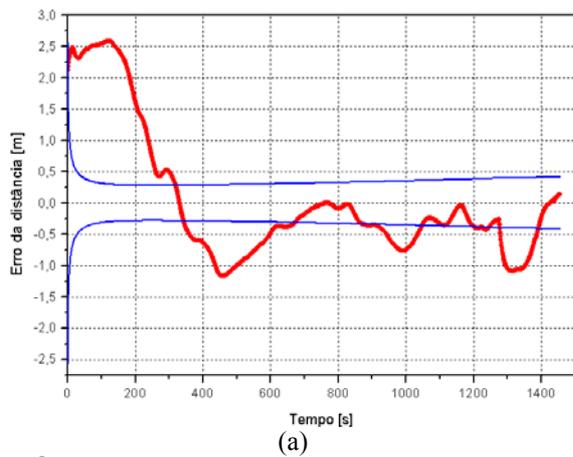


Figura 8: Erro de posicionamento sem suavização em P1.

As Figuras 9 a 12 mostram o erro de posicionamento com a aplicação de suavização com janelas de 10, 30, 50 e 100 segundos, respectivamente. A suavização levou a um aumento progressivo da duração do pico de erro inicial.

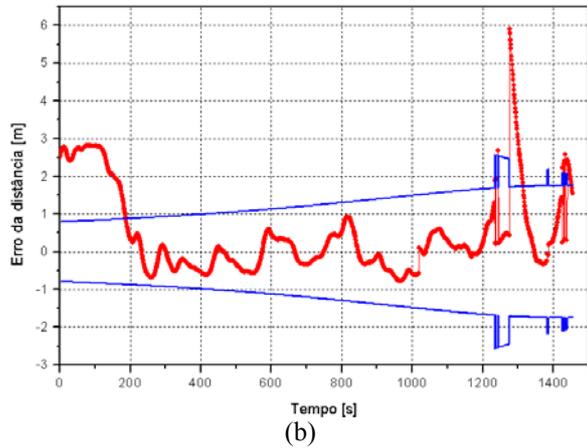
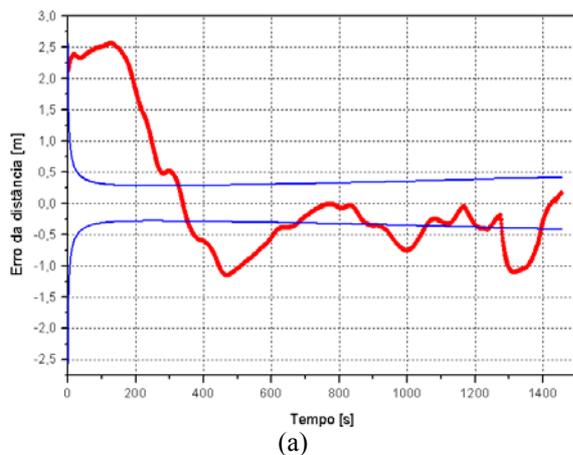


Figura 9: Erro de posicionamento com suavização de 10s.

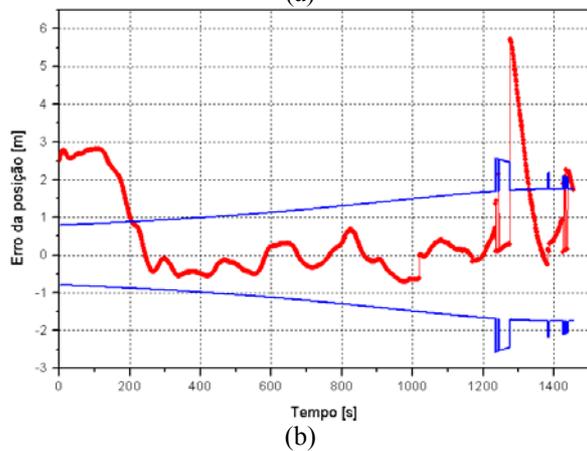
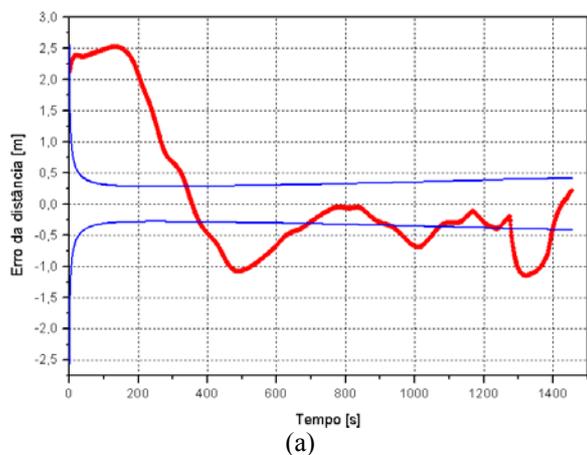


Figura 10: Erro de posicionamento com suavização de 30s.

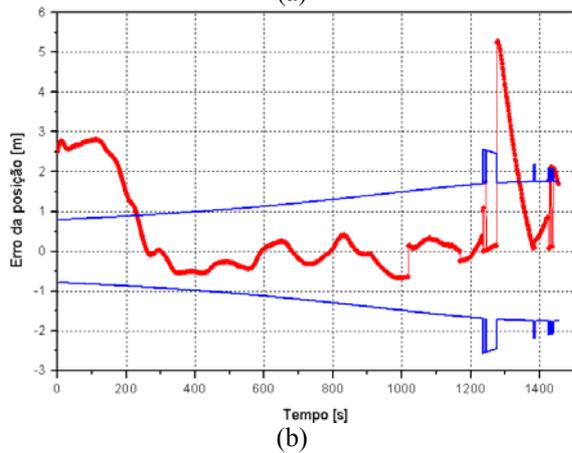
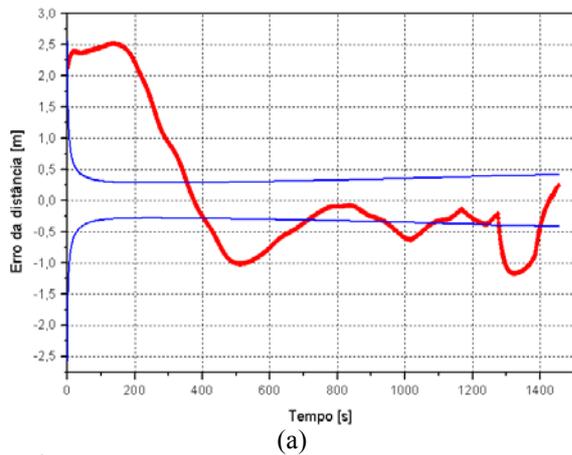


Figura 11: Erro de posicionamento com suavização de 50s.

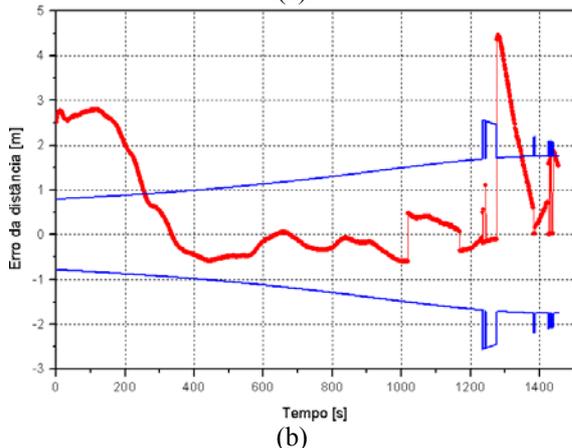
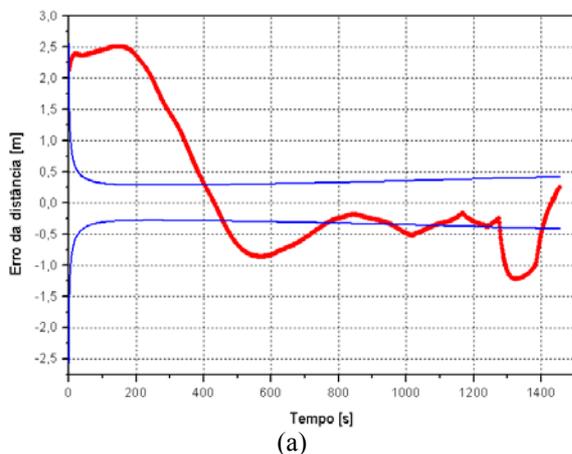


Figura 12: Erro de posicionamento com suavização de 100s.

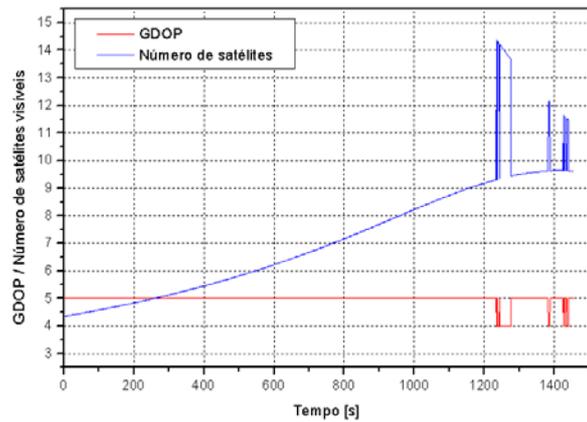


Figura 13: GDOP e número de satélites visíveis durante a observação em P1.

As Tabelas 3 e 4 mostram o valor da média e do desvio padrão para o erro de posicionamento para a solução por filtro de Kalman e mínimos quadrados, respectivamente. Estes valores para o filtro foram calculados após a convergência do filtro e eliminado o pico inicial, de modo que para as janelas de 0, 10 e 30s foram tomados valores a partir de 300s de experimento e para as janelas de 50 e 100s, a partir de 400s. Na solução por mínimos quadrados, para a janela de 0, 10 e 30s foram tomados valores a partir de 200s e para 50 e 100s, a partir de 300s.

TABELA 3: MÉDIAS E DESVIOS PADRÕES PARA A SOLUÇÃO POR FILTRO DE KALMAN NAS MEDIDAS EM P1

Janela [s]	Média [m]	Desvio padrão [m]
0	-0.44569	0.35318
10	-0.43951	0.36179
30	-0.43025	0.38084
50	-0.48656	0.32839
100	-0.47000	0.32100

TABELA 4: MÉDIAS E DESVIOS PADRÕES PARA A SOLUÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS NAS MEDIDAS EM P1

Janela [s]	Média [m]	Desvio padrão [m]
0	0.11981	0.74112
10	0.14672	0.84679
30	0.17949	0.95170
50	0.17394	0.99334
100	0.13231	0.93612

8. CONCLUSÕES

Os experimentos desta etapa mostram que o processo de suavização de medidas pode atenuar a média do erro, mas não afeta significativamente seu desvio-padrão. As várias janelas de suavização utilizadas (10, 30, 50, 100s) não modificaram consideravelmente a precisão final e assim sendo torna-se discutível sua utilização em ambiente de tempo real, o que aumentaria a complexidade do código sem grandes benefícios. Provavelmente benefícios maiores são conseguidos para aplicações estáticas sem requisitos de tempo real.

O filtro de Kalman proporcionou precisões melhores que o mínimos quadrados quando se

utilizou medidas C1, tanto no erro médio quanto no desvio-padrão. No entanto, ao utilizar-se medidas P1 (teoricamente mais precisas), o filtro de Kalman produziu erros médios maiores e desvios-padrão menores que o procedimento de mínimos quadrados.

Naturalmente o filtro de Kalman foi sintonizado (“tuned”) para obter o melhor desempenho para cada caso. Em contrapartida, o método de mínimos quadrados não permite alterações fundamentais em seu algoritmo básico.

9. AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado com suporte de bolsa de mestrado pela FAPESP, processo número 02/05643-2.

10. BIBLIOGRAFIA

- [1] BARONI, L.; GOMES, V. M.; MARQUES FILHO, E. A.; KUGA, H. K.; LOPES, R. V. F. Experiments on clock offset and real time positioning techniques of static GPS receivers. In: BALTHAZAR, J M; SILVA, G N; TSHUCHIDA, M; BOAVENTURA, M; GOES, L S; SILVA, J D S. (Org.). Serie Arquimedes. Sao Jose dos Campos, 2003a, v. 2, p. 878-887.
- [2] BARONI, L.; KUGA, H. K.; LOPES, R. V. F. GOMES, Experiments on real time positioning of a GPS receiver using differential GPS. In: 17TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM 2003, Sao Paulo. Proceedings of COBEM 2003. São Paulo: ABCM, 2003b. In: COBEM 2003. São Paulo, 2003b.
- [3] BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. **Introduction to random signals and applied Kalman filtering**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1996. 480 p.
- [4] BIERMAN, G. J. **Factorization methods for discrete sequential estimation**. New York: Academic Press, 1977. 241 p. (Mathematics in science and engineering, vol. 128).
- [5] GELB, A. *et al.* **Applied optimal estimation**. England: The M.I.T. Press, 1974.
- [6] GURTNER, W. “Rinex: The Receiver Independent Exchange Format version 2.10”. 2001. Disponível em: <http://www.ngs.noaa.gov/CORS/Rinex2.html>.
- [7] KUGA, H. K. **Sobre a utilização prática de técnicas de estimação**. 2002. Notas de aula.
- [8] MARQUES FILHO, E. A.; KUGA, H. K.; LOPES, R. V. F. Real time estimation of GPS receiver clock offset by the Kalman filter. In: 17TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM 2003, 2003, Sao Paulo. Proceedings of COBEM 2003. São Paulo: ABCM, 2003.
- [9] MAYBECK, P. S. **Stochastic models, estimation and control**. New York: Academic Press, 1979.
- [10] MISRA, P.; ENGE, P. **Global Positioning System: Signals, Measurements and Performance**. Lincoln, MA: Ganga-Jamuna Press, 2001.
- [11] RUGGIERO, M. A. G.; ROCHA, V. L. da. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1997. 406 p.
- [12] SAALFELD, A. Generating basis sets of double differences. **Journal of Geodesy**. Vol. 73, p. 291-297, 1999.
- [13] SORENSON, H. W. Kalman filtering techniques. **Advances in control system theory and applications**. Academic Press, 1966. v. 3.
- [14] STRANG, G.; BORRE, K. **Linear Algebra, Geodesy, and GPS**. Wellesley: Cambridge Press, 1997. 614 p.
- [15] STOVALL, S. H. **Basic inertial navigation**. Naval Air Warfare Center Weapons Division, Setembro 1997.