

# Control of a satellite using three momentum wheels and classical PID control law

André Fenili<sup>1,2</sup>, Hélio Koiti Kuga<sup>1</sup>, Luiz Carlos Gadelha DeSouza<sup>1</sup>

1 Space Mechanics and Control Division – National Institute for Space Research (INPE)  
Av. dos Astronautas, 1758 – 12201 940 – São José dos Campos, SP – Brasil  
fenili@dem.inpe.br, hkk@dem.inpe.br, gadelha@dem.inpe.br

2 Linear and Nonlinear Vibration Laboratory – University of Taubaté (UNITAU)  
Rua Daniel Danelli, s/n – 12060 440– Taubaté, SP – Brasil  
fenili@unitau.br

## ABSTRACT

This paper presents an analysis of the application of momentum wheels in order to guarantee the pointing precision of a three axis controlled satellite. Three momentum wheels are considered here, each one mounted in the direction of one of the XYZ axis. The governing equations of motion are briefly commented. Some numerical simulations are presented with and without control. The control law used here is the classical PID control and the data for feedback is taken directly from the numerical integrator. A fourth-order Runge-Kutta is used for the numerical integration of the nonlinear equations of motion. Small angles and velocities are considered here.

## 1 Introdução

XX

## 2 Equações governantes do movimento

O *momentum* angular total é dado por:

$$H = \left\{ \begin{array}{l} I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z - H_x \\ -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z - H_y \\ -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z + H_z \end{array} \right\} \quad (1)$$

Considera-se que as três rodas de *momentum* estão dispostas da seguinte forma: uma roda na direção negativa do eixo x (*roll*), uma roda na direção negativa do eixo y (*pitch*) e uma roda na direção positiva do eixo z (*yaw*).

Na forma geral, as equações governantes do movimento do sistema composto pelo corpo principal do satélite mais as três rodas de *momentum* (*momentum wheels*) – cada uma destas alinhada com cada um dos

eixos de *roll*, *pitch* e *yaw* (nas orientações anteriormente apresentadas), considerando o painel fixo e sem perturbações externas são dadas por:

$$I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z + I_{yx}\omega_x\omega_z - I_{zx}\omega_x\omega_y - I_{zy}\omega_y^2 + I_{yz}\omega_z^2 + \omega_z H_Y + \omega_y H_Z - \dot{H}_X = 0 \quad (2)$$

$$-I_{yx}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y - I_{yz}\dot{\omega}_z + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z - I_{xy}\omega_y\omega_z + I_{zy}\omega_x\omega_y - I_{xz}\omega_z^2 + I_{zx}\omega_x^2 - \omega_z H_X - \omega_x H_Z - \dot{H}_Y = 0 \quad (3)$$

$$-I_{zx}\dot{\omega}_x - I_{zy}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_y\omega_z - I_{yz}\omega_x\omega_z - I_{yx}\omega_x^2 + I_{xy}\omega_y^2 + \omega_y H_X - \omega_x H_Y + \dot{H}_Z = 0 \quad (4)$$

ou, em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z + I_{yx}\omega_x\omega_z - I_{zx}\omega_x\omega_y - I_{zy}\omega_y^2 + I_{yz}\omega_z^2 + \\ (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z - I_{xy}\omega_y\omega_z + I_{zy}\omega_x\omega_y + I_{zx}\omega_x^2 - I_{xz}\omega_z^2 - \\ (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_y\omega_z - I_{yz}\omega_x\omega_z - I_{yx}\omega_x^2 + I_{xy}\omega_y^2 + \\ \omega_z H_Y + \omega_y H_Z - \dot{H}_X \\ \omega_z H_X - \omega_x H_Z - \dot{H}_Y \\ \omega_y H_X - \omega_x H_Y + \dot{H}_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

A inversa da matriz de inércia, é dada por:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde:

$$I_{11} = \frac{-I_{yz}I_{zy} + I_{yy}I_{zz}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}}$$

$$I_{12} = \frac{I_{xz}I_{zy} + I_{xy}I_{zz}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}}$$

$$I_{13} = \frac{I_{xz}I_{yy} + I_{xy}I_{yz}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}}$$

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \frac{I_{yz}I_{zx} + I_{yx}I_{zz}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \\
I_{22} &= \frac{-I_{xz}I_{zx} + I_{xx}I_{zz}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \\
I_{23} &= \frac{I_{xz}I_{yx} + I_{xx}I_{yz}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \\
I_{31} &= \frac{I_{yy}I_{zx} + I_{yx}I_{zy}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \\
I_{32} &= \frac{I_{xy}I_{zx} + I_{xx}I_{zy}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \\
I_{33} &= \frac{-I_{xy}I_{yx} + I_{xx}I_{yy}}{-I_{xz}I_{yy}I_{zx} - I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xz}I_{yx}I_{zy} - I_{xx}I_{yz}I_{zy} - I_{xy}I_{yx}I_{zz} + I_{xx}I_{yy}I_{zz}}
\end{aligned}$$

Portanto, a equação matricial (5) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z + I_{yx}\omega_x\omega_z - I_{zx}\omega_x\omega_y - I_{zy}\omega_y^2 + I_{yz}\omega_z^2 + \\ (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z - I_{xy}\omega_y\omega_z + I_{zy}\omega_x\omega_y + I_{zx}\omega_x^2 - I_{xz}\omega_z^2 - \\ (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_y\omega_z - I_{yz}\omega_x\omega_z - I_{yx}\omega_x^2 + I_{xy}\omega_y^2 + \\ \omega_z H_Y + \omega_y H_Z - \dot{H}_X \\ \omega_z H_X - \omega_x H_Z - \dot{H}_Y \\ \omega_y H_X - \omega_x H_Y + \dot{H}_Z \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{7}$$

Assim, as equações governantes desacopladas nas derivadas das velocidades angulares (ou seja,  $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ ) são:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_x + \left( -l_{11}l_{zx} + l_{12}l_{zy} + l_{13}(l_{yy} - l_{xx}) \right) \omega_x\omega_y + \left( l_{11}l_{yx} + l_{12}(l_{xx} - l_{zz}) - l_{13}l_{yz} \right) \omega_x\omega_z + \\
\left( l_{11}(l_{zz} - l_{yy}) - l_{12}l_{xy} + l_{13}l_{xz} \right) \omega_y\omega_z + \left( l_{12}l_{zx} - l_{13}l_{yx} \right) \omega_x^2 + \left( -l_{11}l_{zy} + l_{13}l_{xy} \right) \omega_y^2 + \\
\left( l_{11}l_{yz} - l_{12}l_{xz} \right) \omega_z^2 + \left( -l_{12}\omega_z + l_{13}\omega_y \right) H_X + \left( l_{11}\omega_z - l_{13}\omega_x \right) H_Y + \left( l_{11}\omega_y - \right. \\
\left. l_{12}\omega_x \right) H_Z - l_{11}\dot{H}_X - l_{12}\dot{H}_Y + l_{13}\dot{H}_Z = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_y + \left( -l_{21}l_{zx} + l_{22}l_{zy} + l_{23}(l_{yy} - l_{xx}) \right) \omega_x \omega_y + \left( l_{21}l_{yx} + l_{22}(l_{xx} - l_{zz}) - l_{23}l_{yz} \right) \omega_x \omega_z + \\
\left( l_{21}(l_{zz} - l_{yy}) - l_{22}l_{xy} + l_{23}l_{xz} \right) \omega_y \omega_z + \left( l_{22}l_{zx} - l_{23}l_{yx} \right) \omega_x^2 + \left( -l_{21}l_{zy} + l_{23}l_{xy} \right) \omega_y^2 + \\
\left( l_{21}l_{yz} - l_{22}l_{xz} \right) \omega_z^2 + \left( -l_{22}\omega_z + l_{23}\omega_y \right) H_X + \left( l_{21}\omega_z - l_{23}\omega_x \right) H_Y + \left( l_{21}\omega_y - \right. \\
\left. l_{22}\omega_x \right) H_Z - l_{21}\dot{H}_X - l_{22}\dot{H}_Y + l_{23}\dot{H}_Z = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_z + \left( -l_{31}l_{zx} + l_{32}l_{zy} + l_{33}(l_{yy} - l_{xx}) \right) \omega_x \omega_y + \left( l_{31}l_{yx} + l_{32}(l_{xx} - l_{zz}) - l_{33}l_{yz} \right) \omega_x \omega_z + \\
\left( l_{31}(l_{zz} - l_{yy}) - l_{32}l_{xy} + l_{33}l_{xz} \right) \omega_y \omega_z + \left( l_{32}l_{zx} - l_{33}l_{yx} \right) \omega_x^2 + \left( -l_{31}l_{zy} + l_{33}l_{xy} \right) \omega_y^2 + \\
\left( l_{31}l_{yz} - l_{32}l_{xz} \right) \omega_z^2 + \left( -l_{32}\omega_z + l_{33}\omega_y \right) H_X + \left( l_{31}\omega_z - l_{33}\omega_x \right) H_Y + \left( l_{31}\omega_y - \right. \\
\left. l_{32}\omega_x \right) H_Z - l_{31}\dot{H}_X - l_{32}\dot{H}_Y + l_{33}\dot{H}_Z = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

### 3 As leis de controle

As leis de controle são:

#### Direção X

Condição 1: se  $H_X \geq 15$  ou  $H_X \leq 3$

$$\dot{H}_X = 0 \tag{11}$$

Condição 2: se  $3 < H_X < 15$  e  $|u_{hx}| \leq 0.1$

$$\dot{H}_X = u_{hx} - 0.01 \text{sign}H_X - 6.667 \cdot 10^{-4} H_X \tag{12}$$

$$\text{onde } u_{hx} = -K_{Dx}\dot{\phi} - K_{Px}\phi - K_{Ix} \sum_{t=0}^{t_f} \phi h \tag{13}$$

Condição 3: se  $3 < H_X < 15$  e  $u_{hx} > 0.1$

$$\dot{H}_X = 0.1 - 0.01 \text{sign}H_X - 6.667 \cdot 10^{-4} H_X \tag{14}$$

Condição 4: se  $3 < H_X < 15$  e  $u_{hx} < -0.1$

$$\dot{H}_X = -0.1 - 0.01 \text{sign}H_X - 6.667 \cdot 10^{-4} H_X \tag{15}$$

### Direção Y

Condição 5: se  $H_Y \geq 15$  ou  $H_Y \leq 3$

$$\dot{H}_Y = 0 \quad (16)$$

Condição 6: se  $3 < H_Y < 15$  e  $|u_{hy}| \leq 0.1$

$$\dot{H}_Y = u_{hy} - 0.01 \operatorname{sign} H_Y - 6.667 \cdot 10^{-4} H_Y \quad (17)$$

$$\text{onde } u_{hy} = -K_{Dy} \dot{\theta} - K_{Py} \theta - K_{ly} \sum_{t=0}^{t_f} \theta h \quad (18)$$

Condição 7: se  $3 < H_Y < 15$  e  $u_{hy} > 0.1$

$$\dot{H}_Y = 0.1 - 0.01 \operatorname{sign} H_Y - 6.667 \cdot 10^{-4} H_Y \quad (19)$$

Condição 8: se  $3 < H_Y < 15$  e  $u_{hy} < -0.1$

$$\dot{H}_Y = -0.1 - 0.01 \operatorname{sign} H_Y - 6.667 \cdot 10^{-4} H_Y \quad (20)$$

### Direção Z

Condição 9: se  $H_Z \geq 15$  ou  $H_Z \leq 3$

$$\dot{H}_Z = 0 \quad (21)$$

Condição 10: se  $3 < H_Z < 15$  e  $|u_{hz}| \leq 0.1$

$$\dot{H}_Z = u_{hz} - 0.01 \operatorname{sign} H_Z - 6.667 \cdot 10^{-4} H_Z \quad (22)$$

$$\text{onde } u_{hz} = -K_{Dz} \dot{\psi} - K_{Pz} \psi - K_{lz} \sum_{t=0}^{t_f} \psi h \quad (23)$$

Condição 11: se  $3 < H_Z < 15$  e  $u_{hz} > 0.1$

$$\dot{H}_Z = 0.1 - 0.01 \operatorname{sign} H_Z - 6.667 \cdot 10^{-4} H_Z \quad (24)$$

Condição 12: se  $3 < H_Z < 15$  e  $u_{hz} < -0.1$

$$\dot{H}_Z = -0.1 - 0.01 \operatorname{sign} H_Z - 6.667 \cdot 10^{-4} H_Z \quad (25)$$

## 4 Conversão para ângulos de Euler: seqüência 2-1-3

Antes da integração numérica, as Equações (8) a (10) devem ser convertidas para ângulos de Euler. Usa-se a seqüência 2-1-3.

Substituindo as equações de conversão da seqüência 2-1-3 nas Equações (8) a (10) resulta:

$$\cos \psi \cos \theta \ddot{\phi} - \sin \psi \ddot{\theta} + g_1 - l_{11} \dot{H}_X - l_{12} \dot{H}_Y + l_{13} \dot{H}_Z = 0 \quad (26)$$

$$\sin \psi \cos \theta \ddot{\phi} + \cos \psi \ddot{\theta} + g_2 - l_{21} \dot{H}_X - l_{22} \dot{H}_Y + l_{23} \dot{H}_Z = 0 \quad (27)$$

$$\ddot{\psi} - \sin \theta \ddot{\phi} + g_3 - l_{31} \dot{H}_X - l_{32} \dot{H}_Y + l_{33} \dot{H}_Z = 0 \quad (28)$$

onde:

$$\begin{aligned}
g_1 = & -\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\psi}\dot{\phi} - \cos\psi \text{sen}\theta \dot{\theta}\dot{\phi} - \cos\psi \dot{\psi}\dot{\theta} + \\
& \left( -l_{11}l_{zx} + l_{12}l_{zy} + l_{13}(l_{yy} - l_{xx}) \right) (\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta})(\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \cos\psi \dot{\theta}) + \\
& \left( l_{11}l_{yx} + l_{12}(l_{xx} - l_{zz}) - l_{13}l_{yz} \right) (\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta})(\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi}) + \\
& \left( l_{11}(l_{zz} - l_{yy}) - l_{12}l_{xy} + l_{13}l_{xz} \right) (\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \cos\psi \dot{\theta})(\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi}) + \\
& \left( l_{12}l_{zx} - l_{13}l_{yx} \right) (\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta})^2 + \left( -l_{11}l_{zy} + l_{13}l_{xy} \right) (\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \\
& \cos\psi \dot{\theta})^2 + \left( l_{11}l_{yz} - l_{12}l_{xz} \right) (\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi})^2 + \left( -l_{12}(\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi}) + l_{13}(\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \right. \\
& \left. \cos\psi \dot{\theta}) \right) H_X + \left( l_{11}(\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi}) - l_{13}(\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta}) \right) H_Y + \\
& \left( l_{11}(\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \cos\psi \dot{\theta}) - l_{12}(\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta}) \right) H_Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2 = & \cos\psi \cos\theta \dot{\psi}\dot{\phi} - \text{sen}\psi \text{sen}\theta \dot{\theta}\dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\psi}\dot{\theta} + \\
& \left( -l_{21}l_{zx} + l_{22}l_{zy} + l_{23}(l_{yy} - l_{xx}) \right) (\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta})(\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \cos\psi \dot{\theta}) + \\
& \left( l_{21}l_{yx} + l_{22}(l_{xx} - l_{zz}) - l_{23}l_{yz} \right) (\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta})(\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi}) + \\
& \left( l_{21}(l_{zz} - l_{yy}) - l_{22}l_{xy} + l_{23}l_{xz} \right) (\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \cos\psi \dot{\theta})(\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi}) + \\
& \left( l_{22}l_{zx} - l_{23}l_{yx} \right) (\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta})^2 + \left( -l_{21}l_{zy} + l_{23}l_{xy} \right) (\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \\
& \cos\psi \dot{\theta})^2 + \left( l_{21}l_{yz} - l_{22}l_{xz} \right) (\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi})^2 + \left( -l_{22}(\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi}) + l_{23}(\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \right. \\
& \left. \cos\psi \dot{\theta}) \right) H_X + \left( l_{21}(\dot{\psi} - \text{sen}\theta \dot{\phi}) - l_{23}(\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta}) \right) H_Y + \\
& \left( l_{21}(\text{sen}\psi \cos\theta \dot{\phi} + \cos\psi \dot{\theta}) - l_{22}(\cos\psi \cos\theta \dot{\phi} - \text{sen}\psi \dot{\theta}) \right) H_Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3 = & -\cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} + \left( -l_{31}l_{zx} + l_{32}l_{zy} + l_{33}(l_{yy} - l_{xx}) \right) (\cos \psi \cos \theta \dot{\phi} - \text{sen } \psi \dot{\theta}) (\text{sen } \psi \cos \theta \dot{\phi} + \\
& \cos \psi \dot{\theta}) + \left( l_{31}l_{yx} + l_{32}(l_{xx} - l_{zz}) - l_{33}l_{yz} \right) (\cos \psi \cos \theta \dot{\phi} - \text{sen } \psi \dot{\theta}) (\dot{\psi} - \text{sen } \theta \dot{\phi}) + \\
& \left( l_{31}(l_{zz} - l_{yy}) - l_{32}l_{xy} + l_{33}l_{xz} \right) (\text{sen } \psi \cos \theta \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta}) (\dot{\psi} - \text{sen } \theta \dot{\phi}) + \left( l_{32}l_{zx} - \right. \\
& \left. l_{33}l_{yx} \right) (\cos \psi \cos \theta \dot{\phi} - \text{sen } \psi \dot{\theta})^2 + \left( -l_{31}l_{zy} + l_{33}l_{xy} \right) (\text{sen } \psi \cos \theta \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta})^2 + \\
& \left( l_{31}l_{yz} - l_{32}l_{xz} \right) (\dot{\psi} - \text{sen } \theta \dot{\phi})^2 + \left( -l_{32}(\dot{\psi} - \text{sen } \theta \dot{\phi}) + l_{33}(\text{sen } \psi \cos \theta \dot{\phi} + \right. \\
& \left. \cos \psi \dot{\theta}) \right) H_X + \left( l_{31}(\dot{\psi} - \text{sen } \theta \dot{\phi}) - l_{33}(\cos \psi \cos \theta \dot{\phi} - \text{sen } \psi \dot{\theta}) \right) H_Y + \\
& \left( l_{31}(\text{sen } \psi \cos \theta \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta}) - l_{32}(\cos \psi \cos \theta \dot{\phi} - \text{sen } \psi \dot{\theta}) \right) H_Z
\end{aligned}$$

As Equações (26) a (28) podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi \cos \theta & \cos \psi & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -l_{11}\dot{H}_X - l_{12}\dot{H}_Y + l_{13}\dot{H}_Z \\ -l_{21}\dot{H}_X - l_{22}\dot{H}_Y + l_{23}\dot{H}_Z \\ -l_{31}\dot{H}_X - l_{32}\dot{H}_Y + l_{33}\dot{H}_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\cos \psi}{\cos \theta} & \frac{\text{sen } \psi}{\cos \theta} & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ \frac{\cos \psi \text{sen } \theta}{\cos \theta} & \frac{\text{sen } \psi \text{sen } \theta}{\cos \theta} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\cos \psi}{\cos \theta} & \frac{\text{sen } \psi}{\cos \theta} & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ \frac{\cos \psi \text{sen } \theta}{\cos \theta} & \frac{\text{sen } \psi \text{sen } \theta}{\cos \theta} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -l_{11}\dot{H}_X - \\ -l_{21}\dot{H}_X - \\ -l_{31}\dot{H}_X - \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} l_{12}\dot{H}_Y + l_{13}\dot{H}_Z \\ l_{22}\dot{H}_Y + l_{23}\dot{H}_Z \\ l_{32}\dot{H}_Y + l_{33}\dot{H}_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(30)

resultando as equações governantes do movimento (desacopladas nas acelerações):

$$\ddot{\phi} + \frac{\cos \psi}{\cos \theta} g_1 + \frac{\sin \psi}{\cos \theta} g_2 - \left( l_{11} \frac{\cos \psi}{\cos \theta} + l_{21} \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \dot{H}_X - \left( l_{12} \frac{\cos \psi}{\cos \theta} + l_{22} \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \dot{H}_Y + \left( l_{13} \frac{\cos \psi}{\cos \theta} + l_{23} \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \dot{H}_Z = 0 \quad (31)$$

$$\ddot{\theta} - \sin \psi g_1 + \cos \psi g_2 + \left( l_{11} \sin \psi - l_{21} \cos \psi \right) \dot{H}_X + \left( l_{12} \sin \psi - l_{22} \cos \psi \right) \dot{H}_Y + \left( -l_{13} \sin \psi + l_{23} \cos \psi \right) \dot{H}_Z = 0 \quad (32)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{\cos \psi \sin \theta}{\cos \theta} g_1 + \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \theta} g_2 + g_3 + \left( -l_{11} \left( \frac{\cos \psi \sin \theta}{\cos \theta} \right) - l_{21} \left( \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \theta} \right) - l_{31} \right) \dot{H}_X + \left( -l_{12} \left( \frac{\cos \psi \sin \theta}{\cos \theta} \right) - l_{22} \left( \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \theta} \right) - l_{32} \right) \dot{H}_Y + \left( l_{13} \left( \frac{\cos \psi \sin \theta}{\cos \theta} \right) + l_{23} \left( \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \theta} \right) + l_{33} \right) \dot{H}_Z = 0 \quad (33)$$

## 5 Simulações numéricas: condições iniciais A (CIA)

Os momentos de inércia são dados por:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2322 & -3.5 & 15 \\ -3.5 & 1088 & -4 \\ 15 & -4 & 2047 \end{bmatrix}$$

As condições iniciais são dadas por:

roll  $K_{p_x} = 20 \text{ Nm}$   $K_{d_x} = 300 \text{ Nms}$   $K_{i_x} = 0.50 \text{ Nm/s}$   
 $\phi(0) = 0.0020 \text{ rad}$   $\dot{\phi}(0) = 0.0000 \text{ rad/s}$   $H_X(0) = -9 \text{ Nms (nominal)}$

pitch  $K_{p_y} = 10 \text{ Nm}$   $K_{d_y} = 150 \text{ Nms}$   $K_{i_y} = 0.25 \text{ Nm/s}$   
 $\theta(0) = 0.0030 \text{ rad}$   $\dot{\theta}(0) = 0.0000 \text{ rad/s}$   $H_Y(0) = -9 \text{ Nms (nominal)}$

yaw  $K_{p_z} = 20 \text{ Nm}$   $K_{d_z} = 300 \text{ Nms}$   $K_{i_z} = 0.50 \text{ Nm/s}$   
 $\psi(0) = 0.0015 \text{ rad}$   $\dot{\psi}(0) = 0.0000 \text{ rad/s}$   $H_Z(0) = 9 \text{ Nms (nominal)}$

O passo de integração considerado é de 0.0010 s.

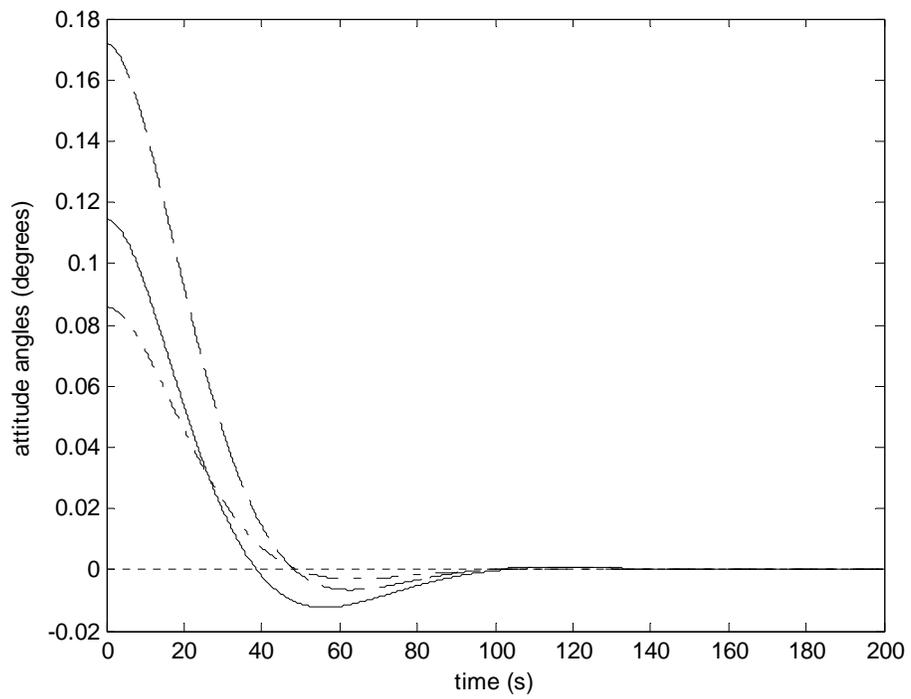


Figura 1 - Ângulos de atitude  $\phi$  (—),  $\theta$  (-----) e  $\psi$  (-·-·-·-): CIA.

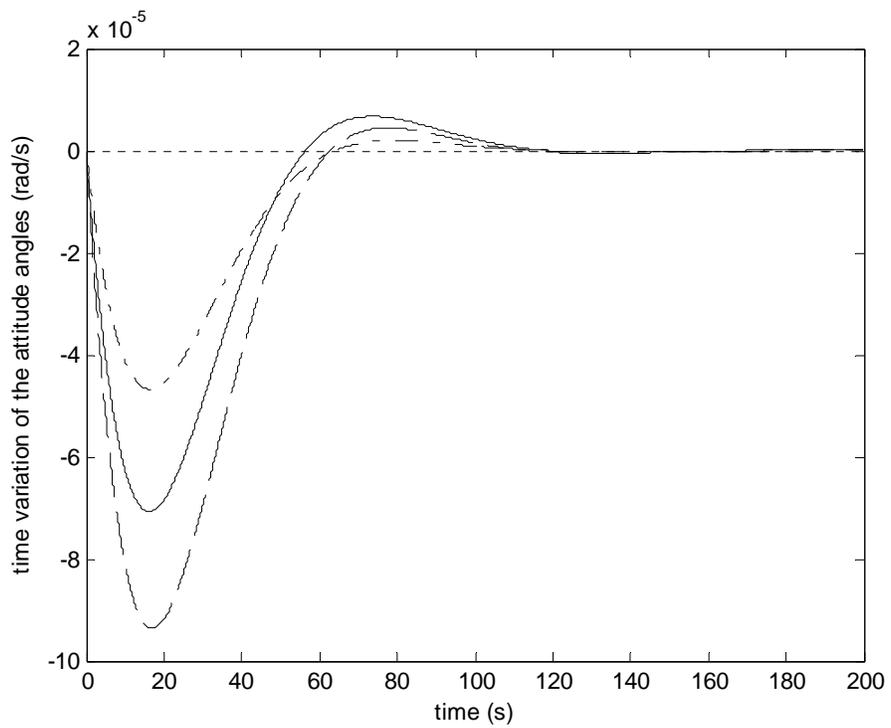


Figura 2 - Variação temporal dos ângulos de atitude  $\phi$  (—),  $\theta$  (-----) e  $\psi$  (-·-·-·-): CIA.

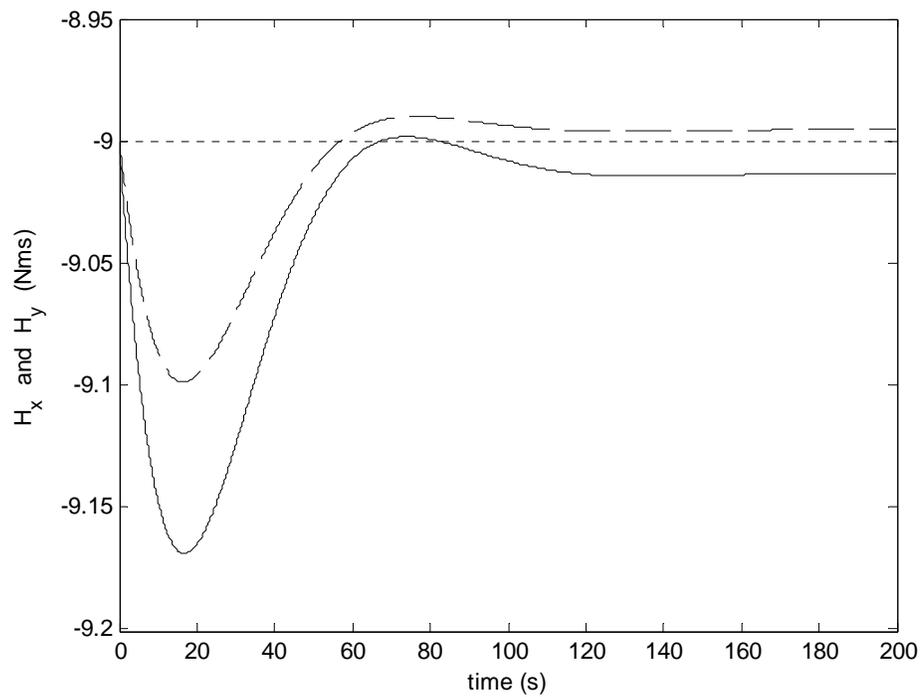


Figura 3 - *Momentum* angular  $H_x$  (—) e  $H_y$  (-----): CIA.

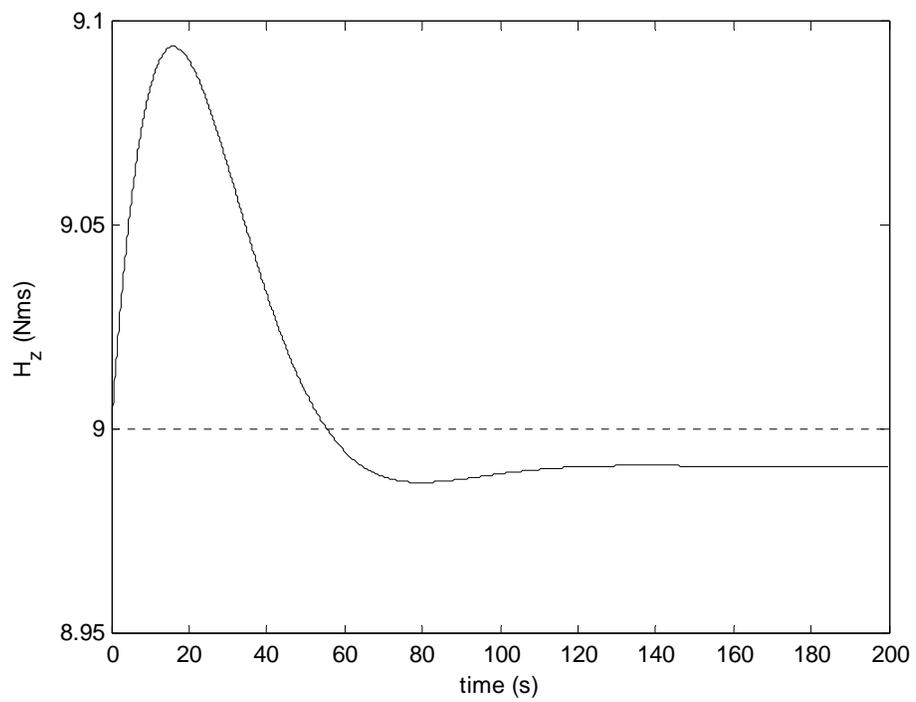


Figura 4 - *Momentum* angular  $H_z$ : CIA.

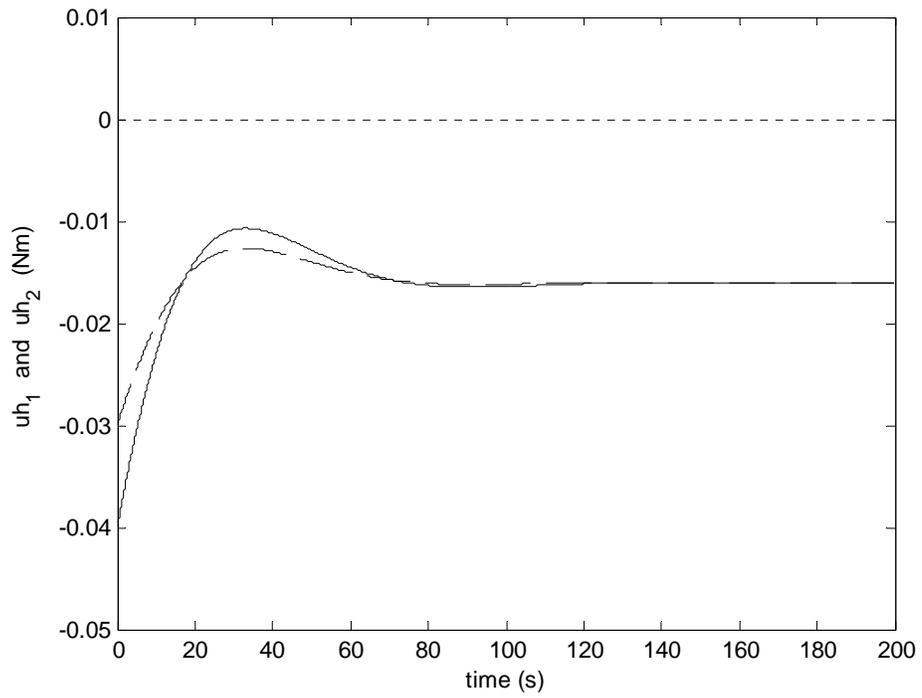


Figura 5 - Esforço de controle atuando sobre a roda de momentum – *roll* (—) e *pitch* (-----): CIA.

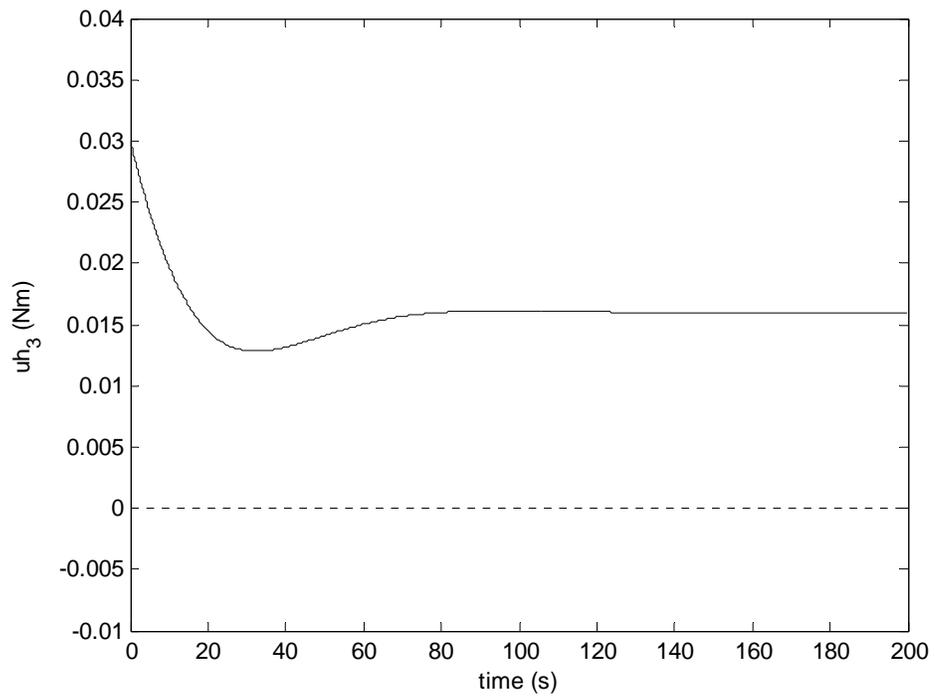


Figura 6 - Esforço de controle atuando sobre a roda de momentum – *yaw*: CIA.

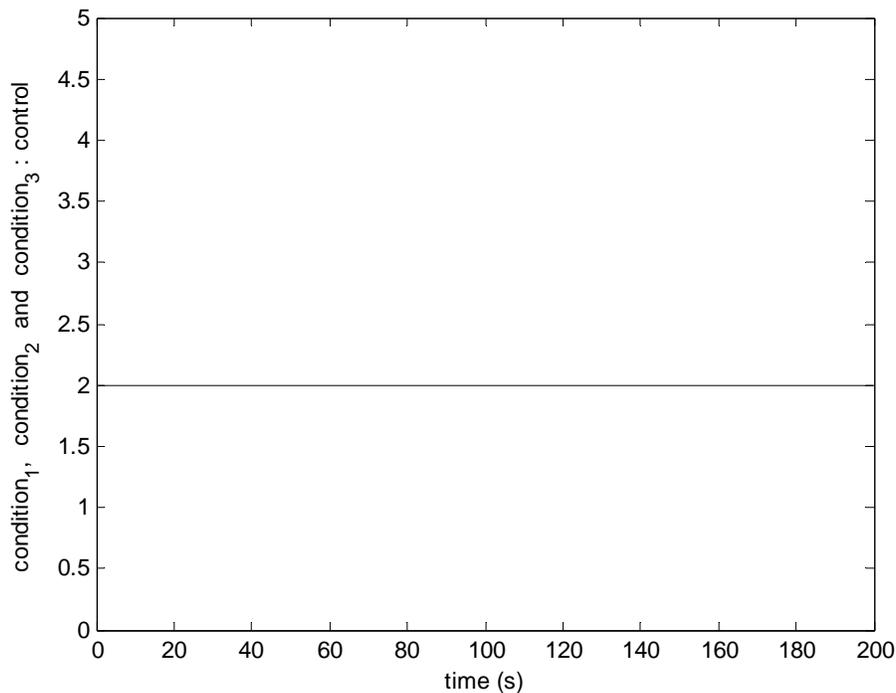


Figura 7 - Condições de controle: *roll* (——), *pitch* (-----) e *yaw* (-·-·-·-): CIA.

Para as simulações numéricas apresentadas neste capítulo, o satélite parte do repouso a partir de uma posição para a qual tenha sido anteriormente trazido (por exemplo, por meio da ação de jatos) e na qual esteja estabilizado. Esta posição encontra-se suficientemente perto da posição de apontamento desejada. No entanto, ainda existe um erro de apontamento a ser corrigido.

Conforme verificado na Figura 1, os ângulos de atitude convergem para a posição (de apontamento) desejada. O apontamento é realizado com sucesso quando  $\phi = \theta = \psi = 0$ .

Na Figura 2, verifica-se que as velocidades angulares (taxas de variação temporal dos ângulos de atitude) também convergem para zero, ou seja, o sistema pára na posição desejada. Percebe-se pelas amplitudes das velocidades como o sistema é bastante lento.

De acordo com as Figuras 3 e 4 (e também a Figura 7), para esta simulação numérica não foi verificada em momento algum a saturação das rodas de momentum.

De acordo com essas figuras, o *momentum* angular  $H_x$ , o *momentum* angular  $H_y$  e o *momentum* angular  $H_z$  não convergem para os respectivos valores nominais quando o apontamento desejado é obtido. Os valores atingidos estão ligeiramente aquém ou além dos nominais.

Conforme os resultados apresentados nas Figuras 5 e 6, os esforços de controle convergem para valores diferentes de zero. Isto indica que existirá sempre uma ação do controlador no sentido de manter o sistema na posição desejada.

A cada uma das condições de controle a serem chaveadas (item 3), associa-se um número. Ou seja:

condições 1, 5 e 9	1
condições 2, 6 e 10	2
condições 3, 7 e 11	3
condições 4, 8 e 12	4

Desta forma, sabe-se quais condições de controle são acionadas durante a simulação.

Por exemplo: de acordo com a Figura 7, apenas a condição designada pelo número 2 foi acionada (condição<sub>1</sub>= condição<sub>2</sub>= condição<sub>3</sub>=2 ). O controlador PID encontra-se apenas nas condições designadas pelo número 2.

## 6 Simulações numéricas: condições iniciais B (CIB)

Os ganhos dos controladores e o passo de integração são os mesmos apresentados anteriormente, assim como as condições iniciais (nulas) para as velocidades angulares e os momentos de inércia. As novas condições iniciais para os ângulos de atitude são:

$$\phi(0) = 0.0200 \text{ rad}$$

$$\theta(0) = 0.0300 \text{ rad}$$

$$\psi(0) = 0.0150 \text{ rad}$$

O mesmo comportamento dos ângulos e velocidades de atitude é observado para as condições iniciais B (dez vezes maiores que as condições iniciais A). Ou seja, se o erro de apontamento for de até (aproximadamente) 2 graus o sistema de controle ainda atua satisfatoriamente (ver Figuras 8 a 14).

Novamente, a roda de *momentum* não apresenta saturação. Assim como visto anteriormente,  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  não convergem para o valor nominal quando o erro de apontamento tende a zero (ver Figuras 10 a 11). Cada um dos torques de controle ( $u_{h_i}$ ) converge (novamente) para um determinado valor diferente de zero.

Uma significativa mudança em relação ao caso anterior é observada na Figura 14. Além da condição 2 (onde está a lei de controle PID), conforme visto anteriormente, as condições de controle 3 e 4 também são acionadas. Nos ângulos de roll e pitch as condições acionadas são 4 e 2 (nessa ordem) e no ângulo de yaw as condições acionadas são 3 e 2 (nessa ordem).

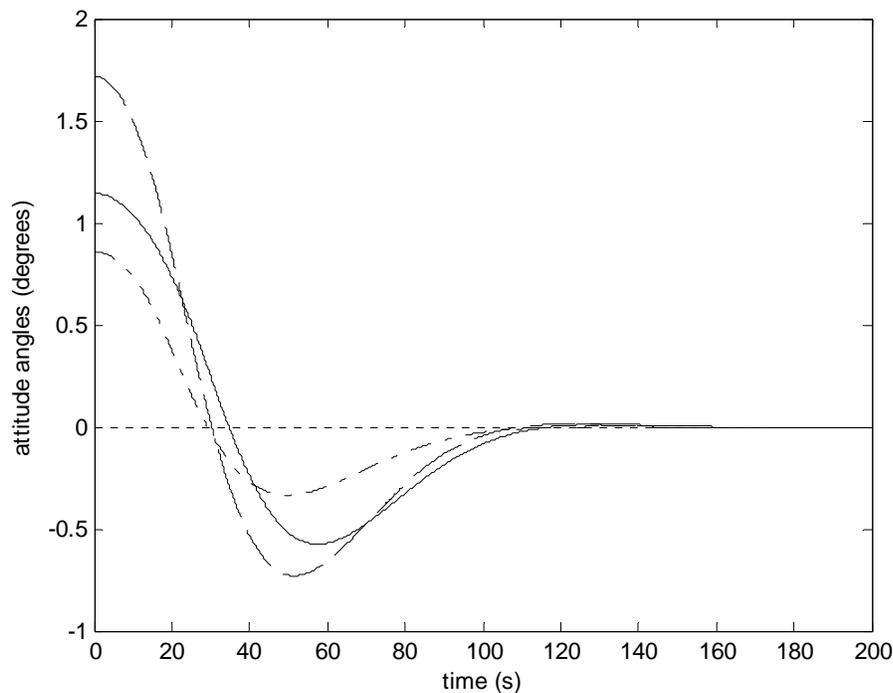


Figura 8 - Ângulos de atitude  $\phi$  (—),  $\theta$  (-----) e  $\psi$  (-·-·-·-): CIB

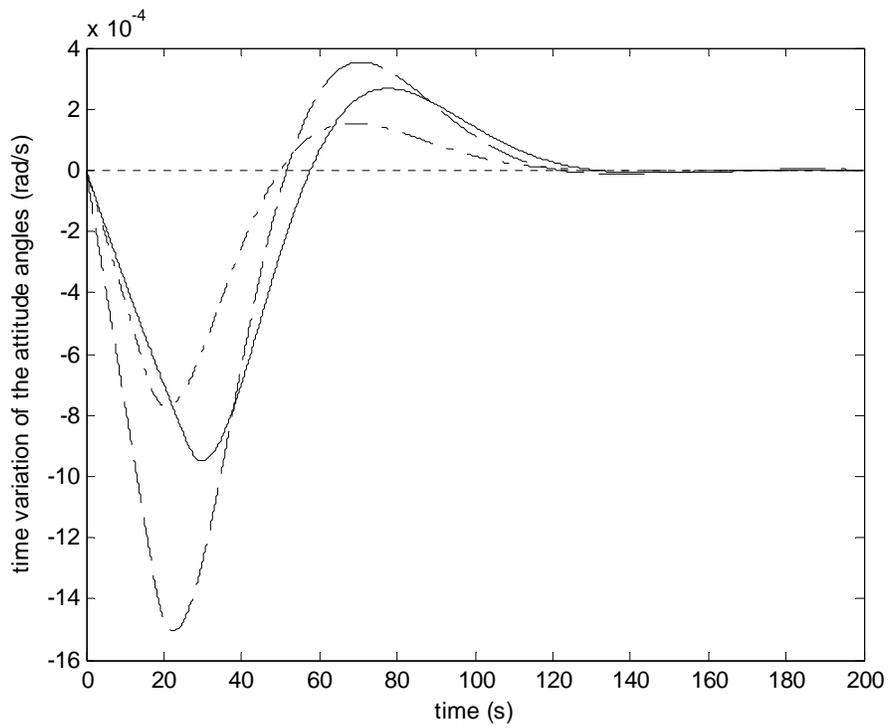


Figura 9 - Variação temporal dos ângulos de atitude  $\phi$  (—),  $\theta$  (-----) e  $\psi$  (-·-·-·-): CIB.

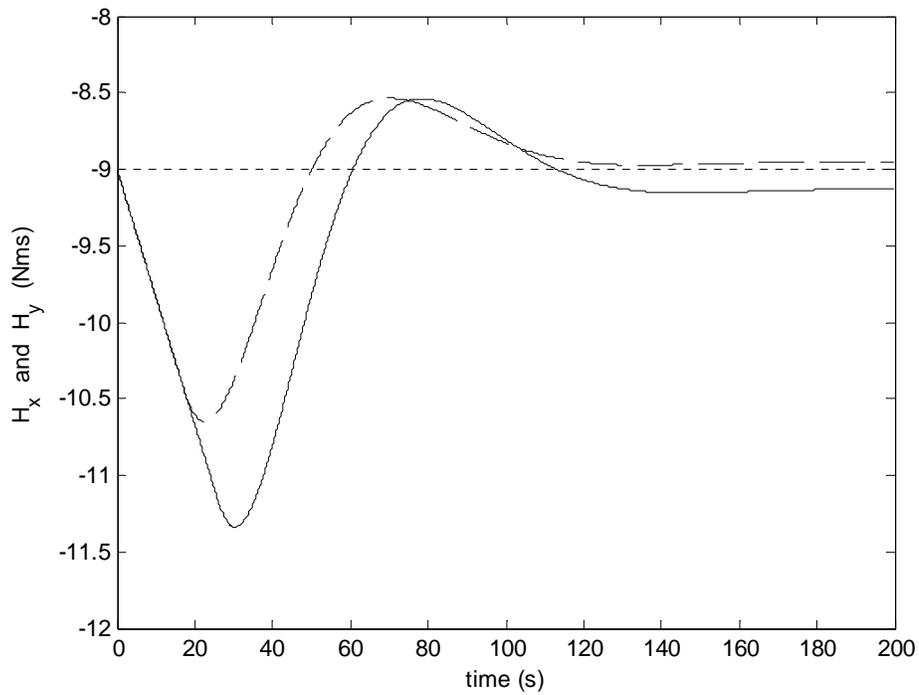


Figura 10 - *Momentum* angular  $H_x$  (—) e  $H_y$  (-----): CIB.

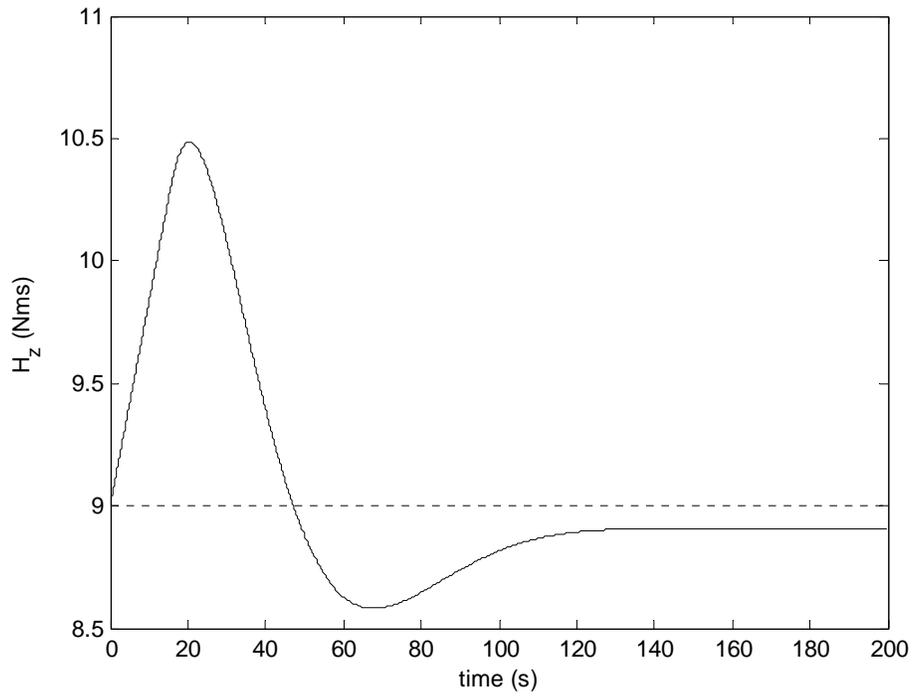


Figura 11 - *Momentum* angular  $H_z$ : CIB.

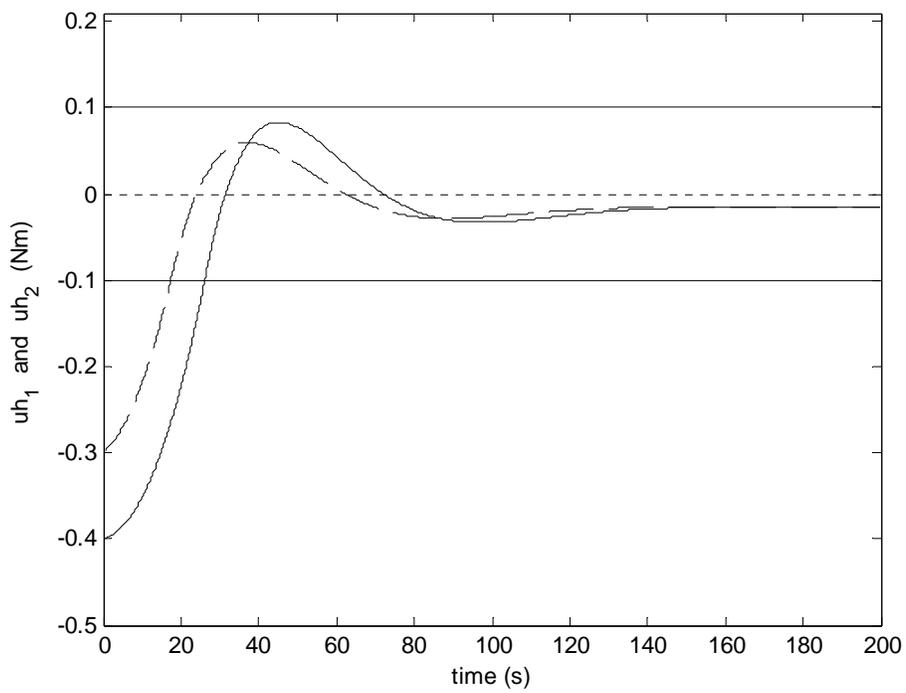


Figura 12 - Esforço de controle atuando sobre a roda de momentum – *roll* (—) e *pitch* (----): CIB.

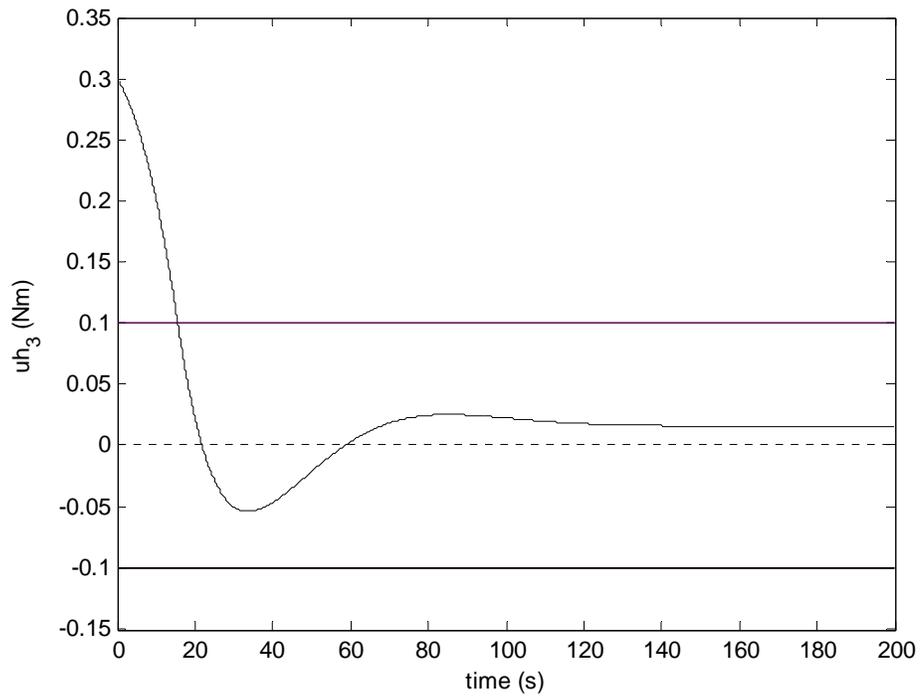


Figura 13 - Esforço de controle atuando sobre a roda de momentum – *yaw*: CIB.

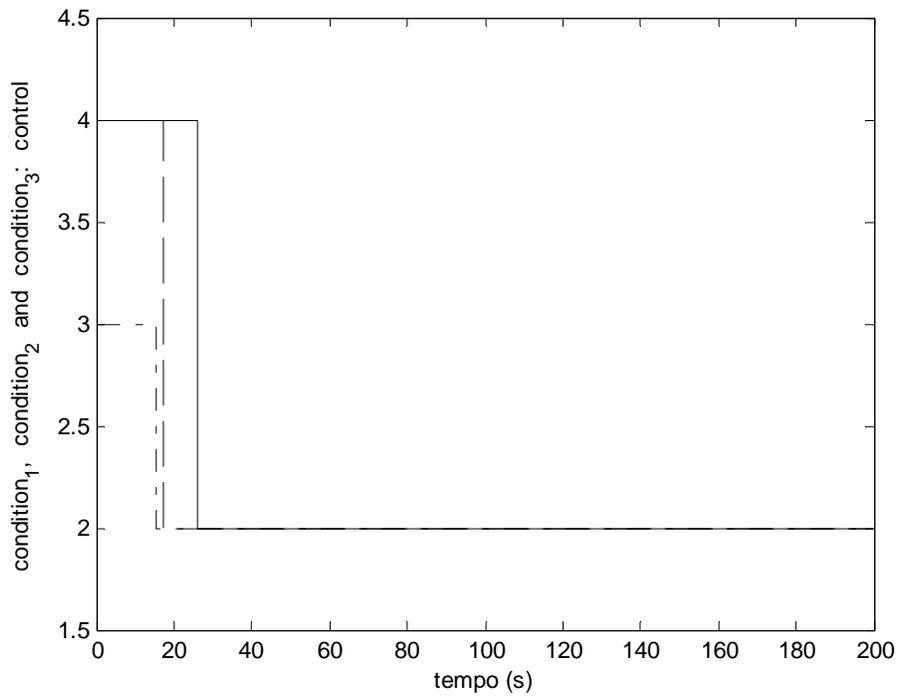


Figura 14 - Condições de controle: *roll* (—), *pitch* (-----) e *yaw* (-·-·-·-): CIB.

Uma conclusão que pode ser tirada, até então, é que as condições de controle associadas aos números 3 e 4 são condições que preparam o sistema para o controle mais robusto representado pela condição 2, onde a lei de controle PID é considerada.

Caso os ângulos de atitude não fiquem dentro de uma determinada faixa de amplitudes de oscilação, o PID não é acionado e o sistema pode se perder.

Pode-se concluir também que existe uma faixa de condições iniciais (ou, no caso, de erros de apontamento) para a qual o controle funciona.

Considerando o passo de integração igual a 0.0001 s, os resultados apresentados neste capítulo não se alteram.

## 7 Conclusões e trabalhos futuros

O modelo matemático completo não linear é utilizado nas simulações numéricas.

O passo de integração de 0.001 s foi utilizado em todas as simulações. O passo de 0.0001 s foi testado mas não altera os resultados apresentados.

Verificou-se a influência da escolha das condições iniciais para a controlabilidade do satélite, tendo-se sempre em vista o apontamento desejado. O satélite não pode estar em qualquer posição inicial para que o controle funcione. O controlador utilizado é o clássico PID, um controlador linear e, portanto, a premissa de pequenos ângulos e pequenas velocidades deve ser observada.

## 8 Referências

Agrawal, B. N., "Design of Geosynchronous Spacecraft", Prentice Hall, Inc., USA, 1986.

Chobotov, V. A., "Spacecraft Attitude Dynamics and Control", Krieger Publishing Company, Florida, USA, 1991.

Wertz, J. R. (ed.), "Spacecraft Attitude Determination and Control", D. Reidel Publishing Company, Inglaterra, 1986.