

Controle do transporte caótico através das recorrências

Francisco J. T. Salazar¹, Elbert E. N. Macau², Othon C. Winter³

¹Programa de Doutorado em Computação Aplicada – CAP
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

²Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

³Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia FEG Universidade Estadual Paulista UNESP

e7940@hotmail.com, elbert@lac.inpe.br, ocwinter@feg.unesp.br

Abstract. *The chaotic behavior in Hamiltonian systems can be useful to supply natural changes that guide these systems from an initial state to any final state due to diffusion process observed in the phase space. However, the transport time to reach the final state can be very long as a result of a phenomenon known as recurrences. The algorithm presented in this work reduces the transport time eliminating a certain group of recurrences through small external perturbations (controls) in the system. This procedure was applied to the standard map reducing the transport time by a factor of 10^3 .*

Resumo. *O comportamento caótico presente em sistemas hamiltonianos pode ser útil para proporcionar alterações naturais que conduzem de um estado inicial até um estado final qualquer devido ao processo de difusão que se observa no espaço de fase. Porém, o tempo de transporte associado pode ser muito alto como consequência de um fenômeno conhecido como recorrências. O algoritmo apresentado neste trabalho diminui o tempo de transporte eliminando um certo grupo das recorrências através de pequenas perturbações externas (controles) no sistema. Este procedimento foi aplicado no mapa padrão resultando numa redução substancial do tempo de transporte por um fator de 10^3 .*

Palavras-chave: sistemas hamiltonianos, caos, recorrências, controle, mapa padrão

1. Introdução

O mapa padrão é um dos principais mapas utilizados para o estudo da dinâmica caótica ([Chirikov 1971], [Chirikov 1979] e [Ott 1993]) e possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}, \\p_{n+1} &= p_n + K \sin(x_n),\end{aligned}\tag{1}$$

onde K é uma constante.

No caso em que $K \ll 1$, a Fig.1(a) mostra as trajetórias para várias condições iniciais. Nela podemos observar, além das duas *ilhas elípticas* robustas, a presença de pequenas *ilhas* e de uma fina *região caótica* ao redor dos pontos $(0, \pi)$ e $(2\pi, \pi)$ delimitada por curvas invariantes. Por outro lado, na Fig.1(b) podemos observar para $K > K_c = 0,9716$

a ruptura destas curvas invariantes e a aparição de uma região caótica e de ilhas rodeadas por curvas invariantes [Greene 1979]. Adicionalmente, se $K > K_c$ as órbitas sobem arbitrariamente alto na direção de p (ver Fig.1(c)) [Zaslavsky 2005]. Isto junto com a destruição da última curva invariante produzem difusão não limitada na direção p . Este processo de difusão é o que permite que dada uma condição inicial (x_0, p_0) no espaço de fase, o sistema é capaz de atingir qualquer estado final (x_f, p_f) que esteja dentro da região caótica. Porém, o tempo para atingir o estado final pode ser muito longo devido a um fenômeno conhecido como ‘recorrências de Poincaré’ [Mane 1983].

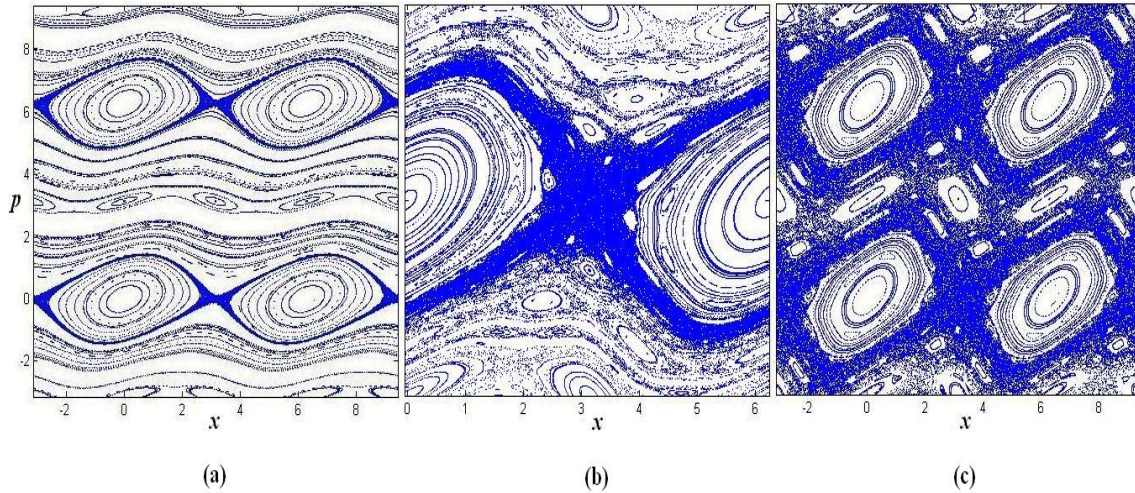


Figura 1. Retrato de fase do mapa padrão com: (a) $K = 0,5$, (b) $K = 0,98$ e (c) $K > K_c$

O objetivo deste trabalho é apresentar um algoritmo que permite diminuir o tempo de transporte que o sistema leva em atingir o estado final desejado via eliminação de um grupo destas recorrências através de pequenas perturbações externas (controle). O algoritmo será aplicado no mapa padrão utilizando o valor de $K = 1,25$.

2. Recorrências de Poincaré

As recorrências de Poincaré, ou simplesmente *recorrências*, são um dos conceitos mais importantes para a descrição cinética dos sistemas hamiltonianos que possuem dinâmica caótica [Zaslavsky 2005]. O principal resultado destes estudos é conhecido como o *Teorema da Recorrência de Poincaré* e que pode ser descrito da seguinte maneira: Considere-se um sistema Hamiltoniano conservativo definido em um domínio Γ de volume finito. Denotemos por A um subconjunto deste domínio e por $\mathbf{x}_0 \in A$ condições iniciais das trajetórias que comecem em A . Então, temos que qualquer trajetória que comece em A volta a A depois de um algum tempo finito e assim sucessivamente, repetidas e infinitas vezes, exceto para um conjunto de pontos iniciais em A de volume zero.

Uma das consequências deste Teorema pode ser observada no tempo longo do transporte verificado dentro da região caótica do espaço de fase num sistema hamiltoniano. Tomemos como exemplo o mapa padrão com $K = 1,25$. Dado que para este valor de K o mapa padrão apresenta um processo de difusão dentro da região caótica (ver Fig.1(c)), nós podemos partir de uma certa condição inicial e chegar até um ponto final qualquer. Por exemplo, seja $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, 0)$ a condição inicial no espaço de fase do mapa padrão e $\mathbf{b} = (2\pi - \frac{1}{2}, 2\pi)$ o ponto final.

A Fig.2(a) mostra a trajetória do mapa padrão com condição inicial $(x_0, p_0) = \mathbf{a}$. Esta trajetória chega até uma vizinhança o suficientemente pequena ao redor do ponto $\mathbf{b}$ após $N = 1.441.080$ iterações. Suponhamos que o intervalo de tempo entre cada perturbação impulsiva do modelo tenha período $T = 1$ segundo. Então, o sistema demoraria aproximadamente 17 dias para atingir o estado final $\mathbf{b}$. Este tempo tão longo se produz precisamente pelo fato da trajetória voltar repetidamente ao redor dos pontos que pertencem à mesma trajetória.

Assim, denotemos por $\{z_0, \dots, z_i, \dots, z_N\}$ os pontos de uma trajetória. Em nosso caso, $z_j = (x_j, p_j)$. Uma recorrência acontece quando dado um ponto z_i existe um ponto z_j tal que $\|z_i - z_j\| \leq \delta$ ¹ para $j \gg i$ e δ o suficientemente pequeno. No caso da trajetória anterior (ver Fig.2(a)) temos que existem cinco recorrências com $\delta = 1,0E-3$. Agora, vamos remover estas cinco recorrências. Para isto, vamos utilizar o conceito da variedade estável e instável associado a um conjunto hiperbólico [Ott 1993].

3. Removendo as recorrências

Uma das propriedades que caracteriza uma trajetória que está dentro de um conjunto hiperbólico é o fato de que esta possui uma variedade estável e outra instável. Isto é, um conjunto de pontos ao longo dela de tal modo que iterando positivamente um ponto que pertence à variedade estável, estes convergem para a trajetória ou, similarmente, iterando negativamente um ponto na variedade instável, estes convergem para a trajetória [Wiggins 2003].

Assim, denotemos por W_s e W_u , respectivamente, à variedade estável e instável de uma trajetória. Agora, suponhamos que exista uma recorrência entre os pontos z_i e z_{i+s} para um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, isto é, $\|z_i - z_{i+s}\| \leq \delta$. Então, as variedades estável e instável vão se cruzar num ponto q . Pela definição de variedade estável e instável, o ponto q iterado negativamente vai convergir para a pre-órbita do ponto z_i e, similarmente, iterado positivamente vai convergir para a órbita do ponto z_{i+s} . Este fato implica que para um número n suficientemente grande, é possível eliminar os $s - 1$ iterados entre os pontos z_i e z_{i+s} fazendo-se uma pequena perturbação no iterado z_{i-n} , isto é,

$$z_{i-n} + \Delta p_1 = z'_1, \quad (2)$$

de tal forma que órbita $\{z'_1, \dots, z'_{2n}\}$ convirja ao ponto z_{i+s+n} e seja possível fazer uma segunda pequena perturbação no ponto z'_{2n} e ingressar na órbita original, isto é,

$$z'_{2n} + \Delta p_2 = z_{i+s+n}, \quad (3)$$

Agora, note-se que as perturbações (2) e (3) feitas no mapa padrão só podem ser feitas na coordenada p (num sistema físico não existe teletransportação), portanto a segunda perturbação precisa que os pontos z'_{2n} e z_{i+s+n} possuam a mesma coordenada x , ou seja,

$$x'_{2n} - x_{i+s+n} = 0. \quad (4)$$

Portanto, dada uma recorrência entre os pontos z_i e z_{i+s} o algoritmo para remover os $s - 1$ iterados entre eles consiste em determinar o valor de n e da perturbação (2) de tal modo que a Eq. (4) seja satisfeita. Isto pode ser feito utilizando o método da secante de Newton.

¹ $\| \cdot \|$ representa a norma euclideana

4. Resultados

As cinco recorrências foram removidas fazendo dez pequenas perturbações no sistema da ordem de 10^{-4} reduzindo o número de iterações para $N^* = 4181$, ou seja, foi reduzido o número de iterações num fator de 10^3 (ver Fig.2(b)).

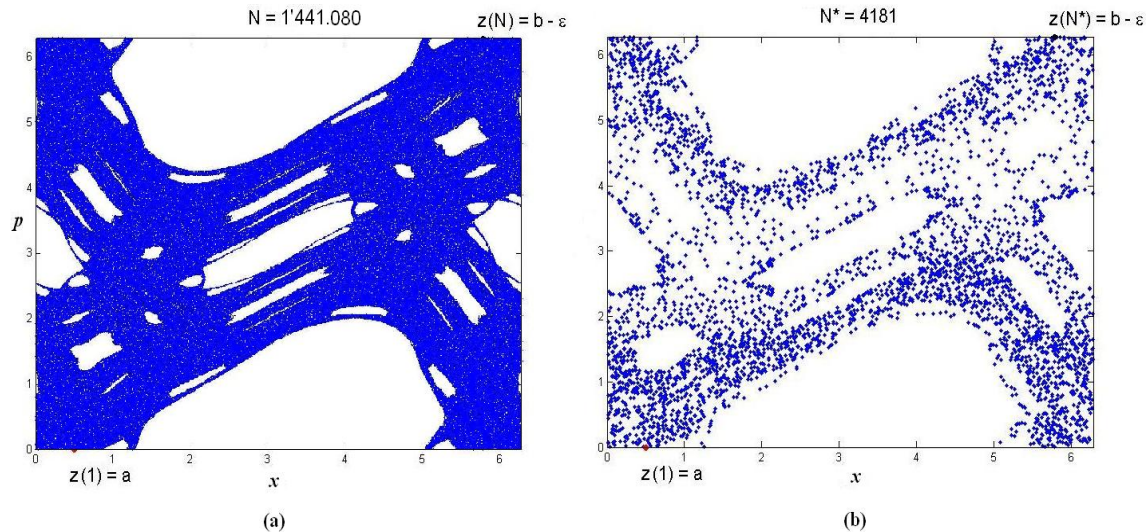


Figura 2. (a) Trajetória do mapa padrão com $K = 1, 25$ e condição inicial $(x_0, p_0) = a$, (b) Redução do número de iterações após remover as recorrências

5. Conclusões

Nos sistemas hamiltonianos que apresentam comportamento caótico é possível aproveitar esta propriedade para o transporte desde um estado inicial até um estado final qualquer através da região caótica. Porém, o tempo de transporte pode ser muito longo por causa das recorrências de Poincaré. Para reduzir este tempo pode-se perturbar a trajetória original e viajar através das variedades estável e instável da mesma de tal forma que o laço da recorrência seja removido. Aplicando este método no mapa padrão, o tempo de transporte foi reduzido num fator de 10^3 .

Referências

- Chirikov, B. V. (1971). *Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity*. Preprint N 267, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk.
- Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52:265.
- Greene, J. M. (1979). Method for determining a stochastic transition. *Journal of Mathematical Physics*, 20:1183.
- Mane, R. (1983). *Introdução à Teoria Ergódica*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro.
- Ott, E. (1993). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, New York.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 2th edition.
- Zaslavsky, G. M. (2005). *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*. Oxford University Press, Oxford.