

Estudo de um fluxo numérico em um modelo de magnetohidrodinâmica

Anna Karina Gomes¹, Margarete Oliveira Domingues²

¹Programa de Mestrado em Computação Aplicada – CAP
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

²Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE

karina.math@yahoo.com.br, margarete@lac.inpe.br

Abstract. *On this work we present a validation of a 2D implementation of an ideal magnetohydrodynamics model with parabolic-hyperbolic correction using finite volume discretization. Here we present the numerical flux effects on this model. This work is the beginning part of a master project in Applied Computing in adaptive finite volume discretization of magnetohydrodynamics models.*

Resumo. *Neste trabalho apresenta-se uma validação de uma implementação bidimensional de um modelo da magnetohidrodinâmica ideal com correção parabólica-hiperbólica usando uma discretização por volumes finitos. Apresenta-se os efeitos de um fluxo numérico nesse modelo. Esse trabalho é a parte inicial de um projeto de mestrado em Computação Aplicada.*

Palavras-chave: Magnetohidrodinâmica, Volumes finitos, Riemann Solver, HLL

1. Introdução

O interesse desta pesquisa de mestrado é o estudo do plasma espacial, onde tem-se diversos fenômenos relacionados ao campo magnético, como o vento solar e erupções solares [Powell et al. 1999]. Existem muitas maneiras de modelar e simular esses fenômenos, como os modelos *particle-in-cell*, híbrido e magnetohidrodinâmica (MHD) [Ledvina et al. 2008]. Neste trabalho iniciou-se o estudo de métodos numéricos para modelos MHD, em especial o método dos volumes finitos com formulação adaptativa [Domingues et al. 2008]. Apresenta-se, então, a implementação inicial de um esquema de volumes finitos para um modelo de MHD ideal, com correção de divergência parabólica-hiperbólica [Dedner et al. 2002], usando um fluxo Harten-Lax-Van Leer (HLL) [Harten et al. 1983] e comparando-o com uma solução exata [Torrilhon 2003].

2. Modelo MHD

Neste trabalho utiliza-se a formulação do modelo MHD ideal chamada *Extensão Generalizada dos Multiplicadores de Lagrange* (EGLM) em sua forma conservativa, como apresentada em [Dedner et al. 2002]. As equações desse modelo EGLM-MHD ideal são leis de conservação que representam continuidade, campo magnético, energia e fluxo

magnético. Respectivamente, tem-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{I} \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) - \mathbf{B} \mathbf{B} \right) = -\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} + \psi \mathbf{I}) = 0 \quad (1c)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(E + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] = -\mathbf{B}(\nabla \psi) \quad (1d)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi \quad (1e)$$

em que $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ é a velocidade do fluido, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ a indução magnética, ρ a densidade, p a pressão, $\mathbf{I}$ o tensor unitário de segunda ordem, ψ a função potencial e E a energia dada por $E = \frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}$, sendo $\gamma > 1$ é o expoente adiabático. O campo magnético $\mathbf{B}$ é livre de divergência, *i.e.*, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Numericamente, na solução deste modelo MHD, a restrição de divergência do campo magnético não é mais satisfeita. Esta é uma questão muito importante do ponto de vista numérico-computacional. Sendo assim, deve-se implementar correções de divergência para manter essa restrição. Neste trabalho, utiliza-se a correção parabólica-hiperbólica proposta em [Dedner et al. 2002].

3. Método dos Volumes Finitos

Para obter a solução numérica do modelo EGLM-MHD ideal, utiliza-se o método dos volumes finitos para discretizar as equações [LeVeque 2002]. O método dos volumes finitos é baseado na forma integral das leis de conservação, como conservação de massa, momento e energia. O domínio do problema é particionado em células de grade e utiliza-se a integral para aproximar cada média celular. O modelo EGLM-MHD ideal é hiperbólico, por isso, utiliza-se um esquema de volumes finitos para leis de conservação hiperbólicas, como por exemplo, $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0$, em que $\mathbf{U} = (\rho, p, \psi, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z)$ é o vetor de variáveis e $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ é o fluxo físico. Para calcular $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ deve-se fazer aproximações utilizando esquemas numéricos, já que $\mathbf{U}$ não é conhecida, chamados de *fluxos numéricos*. Nesse trabalho, é utilizado o fluxo numérico HLL $\mathbf{F} = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L}$, com $S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R)$, $S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R)$, em que L e R denotam as células à esquerda e à direita, u_L e u_R são as velocidades do plasma e c_L e c_R as velocidades magnetoacústicas [Powell 1994]. Os valores $\mathbf{F}_L$ e $\mathbf{F}_R$ são os vetores fluxo e $\mathbf{U}_L$ e $\mathbf{U}_R$ são os vetores das variáveis. Esse fluxo não é um valor suave entre as células, então é necessário um limitador de fluxo.

Utiliza-se, o limitador de Davis $\phi(r) = \begin{cases} \min\{1, 2r\}, & \text{se } r > 0 \\ 0, & \text{se } r \leq 0 \end{cases}$, em que r é uma proporção

aproximada das inclinações entre as soluções vizinhas. Existem 3 tipos de velocidade do som nesse modelo MHD: rápida (do termo em inglês *fast*, expressas por c_f), Alfvén e lenta (do termo em inglês *slow*, expressas por c_s). Neste estudo, utiliza-se a velocidade c_f para os valores c_L e c_R , das velocidades c à direita e à esquerda, pois precisa-se cap-

turar a maior velocidade permitida sendo $c_f = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b_x^2} \right)}$, $a = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, $b_x = \sqrt{\frac{B_x^2}{\rho}}$, e $b = \sqrt{\frac{|\mathbf{B}|^2}{\rho}}$. O objetivo desse trabalho é comparar a solução exata do modelo MHD ideal à solução numérica do modelo EGLM-MHD, utilizando o fluxo numérico HLL. Para a condição de contorno, espelhou-se as extremidades do domínio. A condição CFL utilizada é $c_{CFL} = \frac{\Delta t}{\min(\Delta x, \Delta y)} S_M$, em que S_M é a inclinação máxima da curva $u \pm c_f$.

4. Experimento Numérico

O modelo EGLM-MHD ideal foi implementado em C^{++} , inspirado no código desenvolvido em [Di Pierro 2009] em Fortran 90. Neste experimento a condição inicial utilizada resume-se a um problema de Riemann, como é descrito na Tabela 1, proposta em [Li 2005], e são definidos os seguintes parâmetros $c_{CFL} = 0.3$, $x \in (-0.5, 0.5)$ e de $y \in (0, 1)$, $\gamma = 5/3$, para razão c_h/c_p^2 , obtida pela correção parabólica-hiperbólica dividida pelo termo c_h , escolheu-se o valor 1 e uma malha regular com 1000×1000 de pontos.

Tabela 1. Condições Iniciais para o problema do tipo Riemann para todo y

	ρ	p	ψ	v_x	v_y	v_z	B_x	B_y	B_z
$x < 0$	1.08	0.95	0.0	1.2	0.01	0.5	$2.0/\sqrt{4\pi}$	$3.6/\sqrt{4\pi}$	$2.0\sqrt{2\pi}$
$x > 0$	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$2.0/\sqrt{4\pi}$	$4.0/\sqrt{4\pi}$	$2.0\sqrt{2\pi}$

As visualizações das variáveis que compõem a solução numérica do modelo EGLM-MHD, comparadas à sua solução exata¹ estão apresentadas na Figura 1.

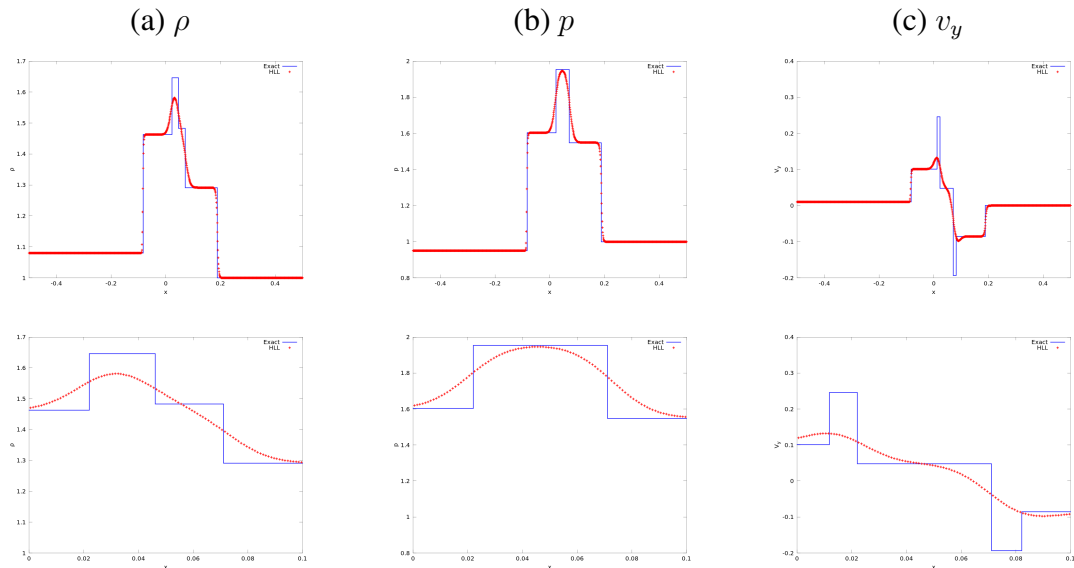


Figura 1. Gráficos das solução numérica e exata do modelo (parte de cima) e ampliação da solução no intervalo $[0, 0.1]$ (parte de baixo).

¹<https://web.mathcces.rwth-aachen.de/mhdsolver/> - acessado em 08/2011

5. Considerações finais

A validação do fluxo HLL foi feita com sucesso. O fluxo numérico HLL não é a mais adequado para esse tipo de modelo MHD. Observa-se que a solução do modelo EGLM-MHD não é bem representada onde existem choques localizados em intervalos muito pequenos. Isso é evidenciado, principalmente, na componente y da velocidade e do campo magnético. O ideal é utilizar outros tipos de fluxos numéricos, como o HLLEM [Wesenberg 2003] e o HLLC [Li 2005], que é a próxima meta desse trabalho. Esses fluxos são baseados no HLL e possuem modificações que permitem uma melhor representação da solução nas descontinuidades.

Referências

- Dedner, A., Kemm, F., Kröner, D., Munz, C.-D., T.Schnitzer, and Wesenberg, M. (2002). Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations. *Journal of Computational Physics*, 175:645–673.
- Di Pierro, B. (2009). Méthode d’Annulation de la Divergence pour les EDP Hyperboliques Application aux Équations de la Magnéto-Hydrodynamique. Technical report, Université de Provence (not published).
- Domingues, M. O., Gomes, S. M., Roussel, O., and Schneider, K. (2008). An adaptative multiresolution scheme with local time stepping for evolutionary PDEs. *Journal of Computational Physics*, 227:3758–3780.
- Harten, A., Lax, P. D., and Leer, B. V. (1983). On Upstream Differencing and Godunov-Type Scheme for Hyperbolic Conservation Laws. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 25:35–61.
- Ledvina, S. A., Ma, Y. J., and Kallio, E. (2008). Modeling and Simulating Flowing Plasmas and Related Phenomena. *Space Science Reviews*, 139:143–189.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press.
- Li, S. (2005). An HLLC Riemann solver for magneto-hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 203:344–357.
- Powell, K. G. (1994). An Approximate Riemann Solver for Magnetohydrodynamics (That Works in More than One Dimension). Technical Report 1, NASA Langley Research Center, Hampton.
- Powell, K. G., Roe, P. L., Linde, T. J., Gombosi, T. I., and Zeeuw, D. L. D. (1999). A Solution-Adaptative Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 154:284–309.
- Torrilhon, M. (2003). Uniqueness conditions for Riemann problems of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Plasma Physics*, 69:253–276.
- Wesenberg, M. (2003). *Efficient Finite-Volume Schemes for Magnetohydrodynamics Simulations in Solar Physics*. PhD thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau.