

# ESTIMATIVA DO EXPOENTE DE HURST DE SÉRIES TEMPORAIS CAÓTICAS POR MEIO DA TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

*Aline Cristina Soterroni*<sup>1</sup>, *Margarete Oliveira Domingues*<sup>2</sup>, *Fernando Manuel Ramos*<sup>3</sup>

<sup>1</sup>CAP/INPE, São José dos Campos, Brasil, aline.soterroni@lac.inpe.br

<sup>2</sup>LAC/CTE/INPE, São José dos Campos, Brasil, margarete@lac.inpe.br

<sup>3</sup>LAC/CTE/INPE, São José dos Campos, Brasil, fernando@lac.inpe.br

**Resumo:** O expoente de Hurst é uma ferramenta capaz de fornecer informações sobre correlação e persistência em uma série temporal. Muitos sistemas podem ser descritos por fractais auto-similares como o movimento Browniano fracionário (fBm, *fractional Brownian motion*), os quais são bem caracterizados por meio dessa ferramenta. Dentre os vários métodos disponíveis para a estimativa do expoente de Hurst, utilizou-se neste trabalho um método baseado em transformada wavelet discreta e o método tradicional da análise R/S. Esses métodos foram aplicados em séries caóticas correspondentes ao mapa logístico, mapa de Hénon e sistema de Lorenz com o objetivo de identificar persistência e correlações de longo alcance.

**Palavras-chave:** expoente de Hurst, transformada wavelet discreta, séries caóticas.

## 1. INTRODUÇÃO

Processos auto-similares descrevem o comportamento de inúmeros sistemas como, por exemplo, sistemas biológicos, geológicos, tráfego de redes e mercado financeiro. O parâmetro ou expoente de Hurst ( $H$ ) é uma ferramenta capaz de caracterizar o grau de auto-similaridade de um processo, ou seja, é uma medida de correlação e persistência.

Harold Edwin Hurst ao estudar projetos de dimensionamento de represas analisou décadas de registros de cheias e secas, e desenvolveu um método estatístico para resolver o problema da construção de um reservatório ideal. Ele observou correlações nas séries de dados analisadas e seus estudos deram origem à análise R/S clássica que leva ao cálculo do expoente de Hurst [1].

O valor desse expoente varia entre 0 e 1. Para  $H = 0.5$  o sinal ou processo é aleatório. Para  $0 < H < 0.5$ , o sinal é caracterizado como anti-persistente, ou seja, existe uma probabilidade maior do que cinquenta por cento de que um valor “negativo” seja seguido de um valor “positivo”. E para  $0.5 < H < 1$ , o sinal é dito persistente, pois apresenta uma tendência, isto é, a probabilidade de repetição de um valor é maior do que cinquenta por cento.

Existem vários métodos utilizados na estimativa do expoente de Hurst: análise R/S, espectro de potência de Fourier, semi-variograma, transformada wavelet, entre outros. A transformada wavelet decompõe um sinal no domínio do espaço e do tempo, assim é possível com este método explorar a invariância de escala de processos auto-similares por meio da decomposição realizada na análise multiresolução [2].

O método baseado em transformada wavelet pode utilizar, por exemplo, a transformada wavelet contínua (CWT, *Continuous Wavelet Transform*) ou a transformada wavelet discreta (DWT, *Discrete Wavelet Transform*) na decomposição do sinal e obtenção dos coeficientes wavelet. Neste trabalho optou-se pelo uso da DWT pois essa transformada fornece algoritmos rápidos e eficientes, como o algoritmo piramidal de Mallat [3–5].

Nas próximas seções são descritas a metodologia aplicada para o cálculo do expoente de Hurst, as séries analisadas, os resultados obtidos e algumas considerações finais.

## 2. METODOLOGIA

A transformada wavelet discreta é equivalente a um microscópio matemático que decompõe um sinal de entrada em amplitudes que dependem da posição e da escala. A capacidade óptica é dada pela escolha da wavelet-mãe e as mudanças de escala permitem o aumento da resolução, ou o aumento do foco nos detalhes.

Uma vez que a DWT decompõe um sinal em diferentes escalas e a wavelet-mãe é definida de forma auto-recursiva, o uso dessa ferramenta na análise de processos auto-similares se mostra indicado. Assim, ao estimar o expoente de Hurst por meio da DWT, considera-se o fato da decomposição wavelet fornecer coeficientes em uma determinada escala ou nível  $j$ , associados a quantidade média de energia  $\Gamma_j$  do sinal analisado em torno de uma frequência  $\nu_0 a_0^{-j}$ , em que  $\nu_0$  depende da wavelet-mãe selecionada e  $a_0 = 2$ . Além disso, processos auto-similares também são caracterizados por  $1/f^\gamma$ , ou seja, por um decaimento da densidade espectral de potência, o que implica na relação  $\gamma = 2H - 1$  [6].

O cálculo, ou estimativa, do expoente de Hurst desenvolvido aqui é baseado nos trabalhos de Abry & Veitch [7], em que a energia do sinal  $\Gamma_j$  é calculada por meio da média dos coeficientes wavelets  $d(j, k)$  obtidos da análise multiresolução, da seguinte forma:

$$\Gamma_j = \frac{1}{n_j} \sum_k |d(j, k)|^2, \quad (1)$$

em que  $n_j$  é a quantidade de coeficientes wavelets no nível de decomposição  $j$ . O parâmetro  $j$  corresponde a escala ou nível de decomposição e o parâmetro  $k$  corresponde a localização.

Uma estimativa para o expoente de Hurst segue da regressão linear de  $\log_2(\Gamma_j)$  por  $j$ . O coeficiente angular  $\gamma$  dessa reta ajustada fornece uma estimativa para  $H$  por meio da re-

lação

$$\gamma = 2H \pm 1, \quad (2)$$

em que  $H = (\gamma + 1)/2$  para  $\gamma < 1$ , e  $H = (\gamma - 1)/2$  para  $\gamma > 1$  [7].

O gráfico da energia  $\Gamma_j$  por  $j$  representa um diagrama de escalas, e a escolha das melhores escalas ou octavas  $j_1$  e  $j_2$  para o ajuste dessa reta é fundamental na estimativa do expoente de Hurst. A análise da variância de  $H$  é uma forma de se obter as octavas  $j_1$  e  $j_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_H^2 &= \text{var}H(j_1, j_2) = \\ &= \frac{2}{n_{j_1} \ln^2 2} \frac{1 - 2^J}{1 - 2^{-(J+1)}(J^2 + 4) + 2^{-2J}}, \quad (3) \end{aligned}$$

em que  $J = j_2 - j_1$  é o número de octavas envolvidas no ajuste linear e  $n_{j_1}$  é o número de coeficientes wavelets na escala  $j_1$  [7]. As melhores escalas serão aquelas que fornecerem o menor valor para  $\sigma_H^2$  na Equação 3.

As wavelets-mãe utilizadas neste trabalho foram as wavelets de Daubechies 1 e 2, denotadas por DAUB1 e DAUB2, respectivamente. A DAUB1, também conhecida como wavelet de Haar, possui dois coeficientes e a DAUB2 possui quatro coeficientes. A relação entre o número de coeficientes e a ordem da wavelet de Daubechies é dada por  $2^N$ , em que  $N$  é a ordem da wavelet. A ordem da wavelet está relacionada ao seu número de momentos nulos, que por sua vez está relacionado a regularidade ou suavidade da wavelet. Em outras palavras, quanto maior a ordem mais regular ou suave é a função wavelet-mãe. A Tabela 1 mostra os coeficientes das wavelets de Daubechies de ordem 1 e 2 [8].

**Tabela 1 – Coeficientes para as wavelets de Daubechies.**

Ordem	$n$	Coeficientes
$N = 1$	0	0.70710678118655
	1	- 0.70710678118655
$N = 2$	0	0.482962913144534
	1	0.836516303737807
	2	0.224143868042013
	3	- 0.129409522551260

No contexto da análise R/S o tamanho da série temporal exerce influência sob o cálculo do expoente de Hurst. Séries curtas podem levar a valores incorretos do expoente e interpretações erradas, e séries com 500 pontos ou mais (consideradas séries longas) fornecem uma estimativa confiável [9, 10]. Desta forma, para todas as séries analisadas considerou-se  $2^{12}$  ou 4096 pontos.

A metodologia aplicada para a estimativa do expoente de Hurst de uma série temporal por meio de transformada wavelet discreta pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Calcular os coeficientes wavelet  $d(j, k)$  por meio da DWT;
2. Calcular a quantidade média de energia ( $\Gamma_j$ ) em cada nível de decomposição de acordo com a Equação 1;

3. Selecionar as escalas de acordo com a Equação 3;

4. Plotar  $\Gamma_j$  versus  $j$  (para as escalas selecionadas) e ajustar uma reta por regressão linear;

5. Calcular o coeficiente  $\gamma$  dessa reta ajustada e aplicá-lo na Equação 2 para obter uma estimativa do expoente de Hurst  $H$ .

Neste trabalho, os valores para o expoente de Hurst obtidos da análise R/S foram calculados por meio da função `hurst` do GNU/Octave [11].

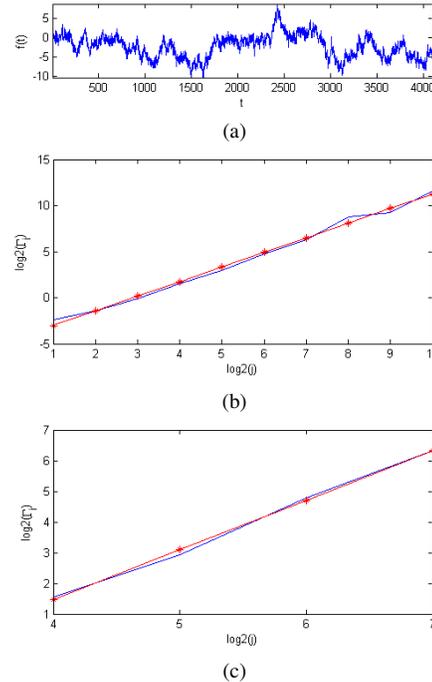
### 3. RESULTADOS

Nesta seção valida-se a ferramenta implementada em séries sintéticas de movimento Browniano fracionário para valores do expoente de Hurst previamente estabelecidos, e em seguida aplica-se essa mesma ferramenta nas séries caóticas estudadas.

#### 3.1. Validação

Com o objetivo de validar a técnica implementada para a estimativa do expoente de Hurst, consideramos séries de movimento Browniano fracionário para valores de  $H$  iguais a 0.3, 0.5 e 0.7. Essas séries sintéticas foram obtidas através da função `wfbm` do Matlab e que retorna um sinal de fBm para um valor do expoente de Hurst pré-definido [12].

As Figuras 1, 2 e 3 ilustram o diagrama de escalas com todas as escalas e apenas com as escalas ajustadas para as séries de fBm geradas.



**Figura 1 – Diagrama de escalas: (a) sinal de fBm com  $H = 0.3$ , (b) todas as escalas e (c) escalas selecionadas.**

Os valores obtidos, após seleção das escalas, se aproximam dos valores esperados como mostra a Tabela 2. Esses resultados apresentados foram conseguidos com o uso da

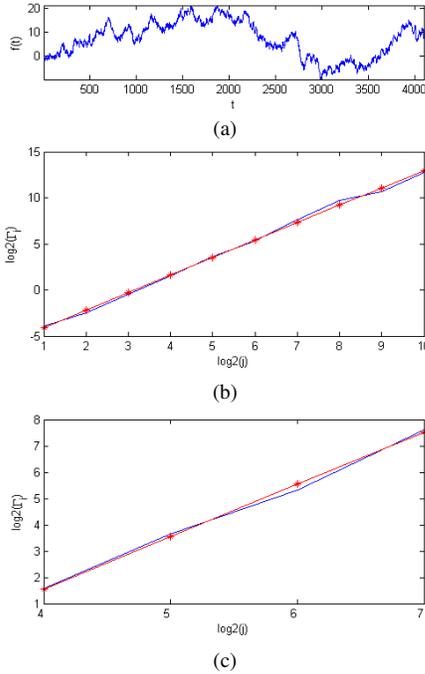


Figura 2 – Diagrama de escalas: (a) sinal de fBm com  $H = 0.5$ , (b) todas as escalas e (c) escalas selecionadas.

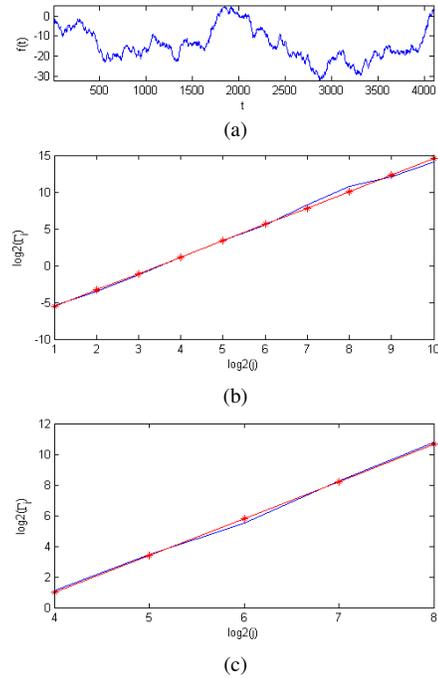


Figura 3 – Diagrama de escalas: (a) sinal de fBm com  $H = 0.7$ , (b) todas as escalas e (c) escalas selecionadas.

wavelet-mãe DAUB2. No entanto, para a DAUB1 os valores calculados também são muito próximos.

Tabela 2 – Expoente de Hurst para séries de fBm.

fBm com $H$	escalas selecionadas	todas as escalas
0.300	0.301	0.292
0.500	0.497	0.449
0.700	0.701	0.615

### 3.2. Análise das séries caóticas

Considera-se a seguir três séries caóticas geradas a partir do mapa logístico, mapa de Hénon e das equações do sistema de Lorenz.

### 3.3. Mapa Logístico

O mapa logístico é um sistema dinâmico discreto e unidimensional caracterizado por uma única variável de estado  $x$  e dado pela equação:

$$x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n), \quad (4)$$

em que  $\alpha$  define o tipo de resposta do sistema. Para diferentes valores de  $\alpha$  a iteração do mapa pode apresentar soluções estáveis, periódicas ou irregulares como mostra o seu diagrama de órbita ilustrado na Figura 4.

Para  $\alpha = 4$  tem-se um comportamento caótico do sistema caracterizado por sua imprevisibilidade, ou seja, o valor atual do sistema não permite prever sua evolução em qualquer tempo futuro. Além disso, para este parâmetro o sistema mostra sensibilidade às condições iniciais, ou seja,

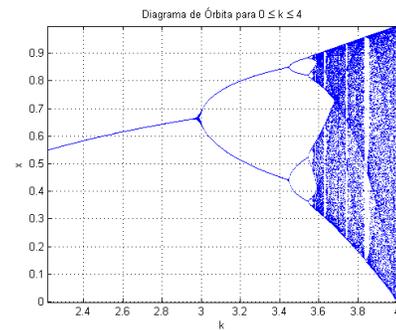


Figura 4 – Diagrama de órbita para mapa logístico.

condições iniciais muito próximas levam a órbitas completamente distintas.

Logo, considera-se como série temporal gerada a partir do mapa logístico a evolução da variável de estado  $x$  obtida da iteração do mapa com  $\alpha = 4$  e 4096 iterações. A Figura 5 ilustra o diagrama de escalas e o expoente de Hurst para esta série.

Após o ajuste das escalas o valor obtido para o expoente de Hurst é igual a 0.501, o que sugere aleatoriedade, ou seja, o sinal não é correlacionado. Desta forma, a análise por meio do expoente de Hurst mostra que o sinal está mais próximo da aleatoriedade do que da persistência, o que já era esperado em função da imprevisibilidade do mapa logístico com esse valor do parâmetro  $\alpha$ .

### 3.4. Mapa de Hénon

Este mapa bidimensional é um exemplo de sistema dinâmico discreto que apresenta um atrator caótico em sua dinâ-

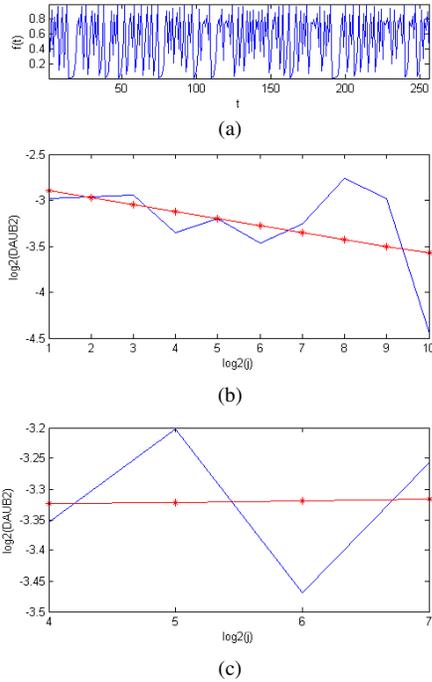


Figura 5 – Diagrama de escalas: (a) Mapa logístico, (b) todas as escalas e (c) escalas selecionadas.

mica. É descrito pelas equações:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \quad (5)$$

em que  $a$  e  $b$  são parâmetros do mapa. Para  $a = 1.4$  e  $b = 0.3$  o sistema apresenta um comportamento irregular que se desenvolve em um atrator caótico como ilustra a Figura 6.

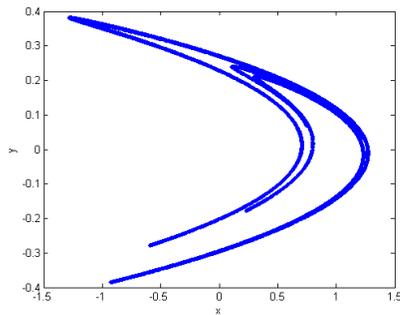


Figura 6 – Atrator do mapa de Hénon ( $a = 1.4$  e  $b = 0.3$ ).

Considera-se como série temporal a evolução da variável  $x$  do mapa. A Figura 7 ilustra o diagrama de escalas para esta série. Após a seleção das escalas, o valor do expoente de Hurst estimado é  $H = 0.375$ , característico de um sinal anti-persistente.

### 3.5. Sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz é dado pelas equações:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

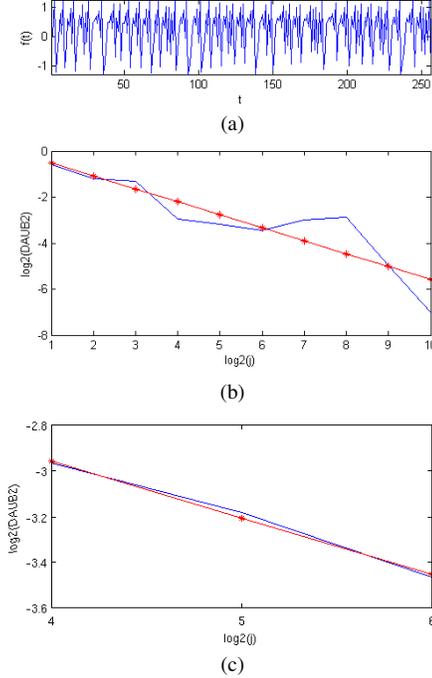


Figura 7 – Diagrama de escalas: (a) Coordenada  $x$  do mapa de Hénon, (b) todas as escalas e (c) escalas selecionadas.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (6)$$

em que  $\sigma$ ,  $b$  e  $r$  são parâmetros do sistema. Para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 28$  tem-se um atrator caótico como ilustra a Figura 8.

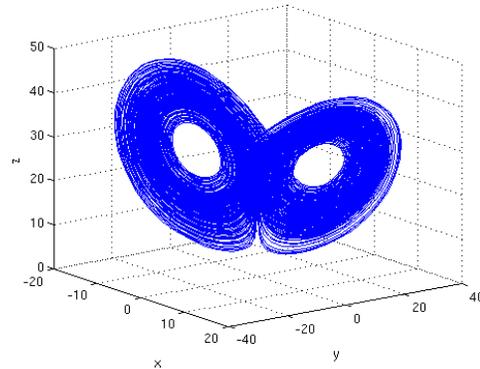
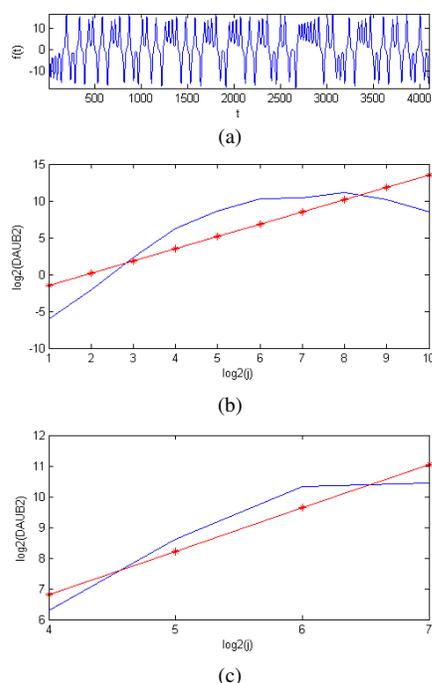


Figura 8 – Atrator Lorenz ( $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 28$ ).

Considera-se como série temporal a evolução da variável de estado  $x$  ao longo do tempo. A coordenada  $x$  é parte da solução do Sistema 6. Esta série varia entre valores positivos e negativos de uma forma aparentemente errática, embora as equações de Lorenz sejam determinísticas e a sua solução completamente determinada pelas condições iniciais.

Aplicando o método baseado em transformada wavelet discreta nessa série obtêm-se o diagrama de escalas ilustrado na Figura 9.

O valor obtido para o expoente de Hurst após seleção das



**Figura 9 – Diagrama de escalas: (a) Coordenada x do sistema de Lorenz, (b) todas as escalas e (c) escalas selecionadas.**

escalas é  $H = 0.208$ , o que indica anti-persistência no sistema. O cálculo desse expoente por meio da análise R/S fornece  $H = 0.718$ . Desta forma, observa-se comportamentos contraditórios: anti-persistência para o método baseado em DWT e persistência para a análise R/S.

As estimativas para o expoente de Hurst por meio da transformada wavelet discreta e análise R/S estão resumidos na Tabela 3. Para o método baseado em DWT os valores apresentados na tabela foram obtidos para a wavelet-mãe DAUB2. No entanto, os valores obtidos com a wavelet DAUB1 são semelhantes.

**Tabela 3 – Expoente de Hurst para séries caóticas.**

séries caóticas	todas as escalas	escalas selecionadas	análise R/S
logístico	0.462	0.501	0.504
Hénon	0.218	0.375	0.434
Lorenz	0.333	0.208	0.718

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho estimou-se o expoente de Hurst por meio de um método baseado na transformada wavelet discreta. Esse método foi aplicado em séries caóticas geradas a partir do mapa logístico, mapa de Hénon e sistema de Lorenz. O algoritmo utilizado foi validado para séries de movimento Browniano fracionário com valores de  $H$  pré-definidos.

Dentre as séries caóticas analisadas, o mapa logístico apresentou um expoente de Hurst em torno de  $H = 0.5$ , ca-

racterístico de uma série aleatória. Para o mapa de Hénon obteve-se  $H < 0.5$ , ou seja, um expoente de Hurst típico de sinais anti-persistentes.

Tanto para a série correspondente ao mapa logístico quanto para a série gerada a partir do mapa de Hénon, as estimativas do expoente de Hurst baseadas na análise R/S e na transformada wavelet discreta mostraram as mesmas características de persistência e anti-persistência.

Para a série gerada a partir do sistema de Lorenz os resultados foram contraditórios, pois de um lado o método baseado em transformada wavelet discreta apresentou um expoente de Hurst menor do que 0.5, característico de sinais anti-persistentes. E de outro lado a análise R/S forneceu um expoente maior do que 0.5, indicando persistência no sinal. Esse conflito nos diferentes métodos utilizados para a estimativa do expoente de Hurst mostra a complexidade do sistema de Lorenz e sugere estudos mais detalhados.

#### AGRADECIMENTOS

A. C. Soterroni agradece ao CNPq pela bolsa de doutorado (proc:140720/2007-3).

M. O. Domingues agradece ao CNPq pelo suporte à pesquisa (proc:486165/2006-0).

#### Referências

- [1] S. R. S. de Souza, B. M. Tabak and D. O. Cajueiro, “Investigação da memória de longo prazo da taxa de câmbio no Brasil”, Trabalhos para Discussão do Banco Central do Brasil, No. 113, Brasília, Agosto 2006.
- [2] I. Simonsen, and A. Hansen, “Determination of the Hurst exponent by use of wavelet transform”, Physical Review E, Vol. 58, No. 03, pp. 2779-2787, February 1998.
- [3] S. G. Mallat, “A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, IEEE Trans. PAMI, Vol. 11, pp. 674-693, 1989.
- [4] S. G. Mallat, “Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L_2(\mathbb{R})$ ”, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 315, No. 1, 1989.
- [5] M. Farge, “Wavelet Transforms and their applications to turbulence”, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 24, pp. 395-457, 1992.
- [6] S. Giordano, S. Miduri, M. Pagano, F. Russo and S. Tartarelli, “A Wavelet-based approach to the estimation of the Hurst Parameter for self-similar data”, In Proceedings of DSP’97, pp. 479-482, July 1997.
- [7] P. Abry and D. Veitch, “Wavelet Analysis of Long-Range-Dependent Traffic”, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 44, No. 1, pp. 1-15, January 1998.
- [8] I. Daubechies, “Ten Lectures on Wavelets”, SIAM, New York, 1992.
- [9] C. Ashutosh, R. B. Abhey and V. P. Dimri, “Wavelet

and rescaled range approach for the Hurst coefficient for short and long time series”, *Computers & Geosciences*, Vol.33, pp. 83-93, 2007.

- [10] K. Sergei, I. L’Heureux, “Are Hurst exponents estimated from short or irregular time series meaningful?”, *Computers & Geosciences*, Vol.29, pp. 1085-1089, 2003.
- [11] GNU/Octave “Documentation Octave”, 2007. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/octave/>>. Acesso em: 04 abr. 08.
- [12] MathWorks, “Documentation Wavelet Toolbox”. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/wavelet/>>. Acesso em: 02 abr. 08.