Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 7, 1984 - SP - UNICAMP, Campinas

(23)

set.

0184

DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DA BIFURCAÇÃO

SUBCRÍTICA DAS SOLUÇÕES PERIÓDICAS

PARA AS EQUAÇÕES DE LORENZ

DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DA BIFURCAÇÃO SUBCRÍTICA DAS SOLUÇÕES PERIÓDICAS PARA AS EQUAÇÕES DE LORENZ

Leon Sinay *

Jorge Passamani Zubeli *

Este trabalho tem dois objetivos: o primeiro é descrever um método consistente no desenvolvimento em séries de potências e Fourier que permite reduzir as equações de Lorenz a um sistema recursivo de equações algébricas; o segundo, mostrar como a aplicação desse método permite determinar analiticamente que a bifurcação de soluções periódicas das equações de Lorenz é subcrítica.

Os seguintes resultados sobre as equações de Lorenz, (Lorenz (1963))

$$\frac{dx}{d\tau} = -\sigma(x - y)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = rx - y - xz \qquad \sigma, b > 0 \quad \sigma > b + 1 \tag{1}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -bz + xy$$

são conhecidos e podem ser encontrados na literatura, como por exemplo, Marsden e McCraken (1976) e Sparrow (1982):

1. $x = x_o = 0$, $y = y_o = 0$, $z = z_o = 0$ é uma solução de (1) para todo valor de r, b e σ.

2. $x = x_1^{\pm} = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $y = y_1^{\pm} = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $z = z_1^{\pm} = r-1$ são soluções estáticas de (1) que bifurcam de (x_o, y_o, z_o) em $r=1$.

3. Existem soluções periódicas de (1) que bifurcam de $(x_1^{\pm}, y_1^{\pm}, z_1^{\pm})$ em
$$r = r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$
A bifurcação é do tipo Hopf.

---

* Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento do LCC
R. Lauro Muller, 455 - 22.290 - Rio de Janeiro - RJ

4. O sistema (1) tem sido resolvido numericamente para alguns valores fixos de r, b e σ. Os resultados numéricos sugerem que a bifurcação em $r = r_c$ seria subcrítica para todo $b,\sigma > 0$, tais que $\sigma > b + 1$.

Demonstraremos analiticamente em seguida que, de fato, a bifurcação é subcrítica como sugerido pelos resultados numéricos.

Por simplicidade na notação restringiremos a análise que segue às soluções periódicas que bifurcam de (x_1^+, y_1^+, z_1^+), omitindo o símbolo + .

Sejam

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + u_1 \\
y &= y_1 + u_2 \\
z &= z_1 + u_3 \\
\mu &= \sqrt{b(r-1)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Sendo a bifurcação em $r = r_c$ do tipo Hopf, temos que a solução periódica é dada parametricamente na forma (Crandall (1976)):

$$u_j = u_j(t,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{jn}(t)\ \varepsilon^n \quad j=1,2,3, u_{jn}(t+2\pi) = u_{jn}(t)$$

$$
\begin{aligned}
\mu &= \mu(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n\ \varepsilon^n \\
\omega &= \omega(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\ \varepsilon^n \\
t &= \omega\tau
\end{aligned}
\tag{3}
$$

onde ω é a frequência da solução, os coeficientes $u_{jn}(t)$, μ_n e ω_n podem ser determinados recursivamente pelo método de Poincaré--Lindsted e ε varia em um entorno de zero.

Introduzindo (2), (3) em (1) e derivando sucessivamente em relação a ε em $\varepsilon=0$ é possível demonstrar por indução que as funções $u_{jn}(t)$ são soma de, no máximo, as primeiras n harmônicas.

Generalizando para sistemas não lineares o método descrito em Sinay e Sinay (1982), desenvolvemos as funções $u_{jn}(t)$ em séries de Fourier (somas finitas neste caso)

$$u_{jn}(t) = \hat{u}^+_{jn}(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\hat{u}^+_{jn}(k)\cos kt + \hat{u}^-_{jn}(k)\ \text{sen}\ kt\right] \qquad (4)$$

e substituimos x,y,z,r e t em (1) por (2)-(4), obtendo um sistema recursivo de equações algébricas que pode ser escrito na forma:

$$M(k)\hat{U}_n(k) = \omega_{n-1}\phi_1(k) + \mu_{n-1}\phi_2(k) + T(k) \quad n>1 \qquad (5)$$

onde

$$\hat{U}_n(k) = (\hat{u}^+_{1n}(k),\hat{u}^+_{2n}(k),\hat{u}^+_{3n}(k),\hat{u}^-_{1n}(k),\hat{u}^-_{2n}(k),\hat{u}^-_{3n}(k))^t,$$

ϕ_1,ϕ_2 e T são funções vetoriais de $\hat{U}_j(\ell)$, $1\leq j<n$ e ω_j,μ_j $0\leq j<n-1$. As matrices M(k) (3 x 3 se k=0, 6 x 6 para k≠0) são inversíveis para todo k ≠ 1. A dimensão do núcleo de M(1) é dois. Se ψ_j, j=1,2 é uma base do núcleo da matriz $M^t(1)$, transposta de M(1), temos que, para cada n fixo, (5) tem solução quando k=1 se e só se o segundo membro é ortogonal a ψ_j, j=1,2 em R^6, o que define um sistema de duas equações nas incógnitas ω_{n-1}, μ_{n-1}. A matriz

$$(\ <\phi(1);\psi_j>\ )\quad ,\quad <\ ;\ >\ \text{produto escalar em}\ R^6,$$

é inversível e independente de n com o que ω_{n-1} e μ_{n-1} podem ser calculados qualquer que seja n > 1. A solução de (5) para k=1 é então a soma de uma solução particular mais uma solução da equação homogênea, sendo esta última univocamente fixada por condições impostas naturalmente pelo teorema de Hopf. Os restantes vetores $\hat{U}_n(k)$ são soluções unívocas de (5). Calculando os coeficientes $\hat{u}^+_{j1}(1)$, ω_o e μ_o da equação variacional de (1) e utilizando recursivamente o método descrito determinamos que ω_2 e μ_2 são negativos para todo b,σ > 0 tais que σ > b + 1 e consequentemente a bifurcação é subcrítica.

BIBLIOGRAFIA

Crandall,M,G., (1976). "An Introduction to Constructive Aspects of Bifurcation and the Implict Function Theorem", em Applica - tions of Bifurcation Theory, Rabinowitz, P.H. ed, Academic Press, Inc. N.Y., 1-35

Lorenz,E.N., (1963). "Deterministic Nonperiodic Flow", J.atmos . Sci, 20, 130-141

Marsden, J.E. and McCraken, M., (1976). The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, N.Y.

Sinay, M.C. and Sinay, L.R., (1982). "Stability boundaries in the elliptic restricted three-body problem, I. Periodic Solutions", Mat.Apl.Comp., 1, 2, 143-152.

Sparrow, C., (1982). The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors, Springer-Verlag, N.Y.