

Congresso Nacional de Matemática Aplicada e
Computacional, 11., 1988

19

0189

Uma Pale

Belot^{hon}
MAC: SH MAC

Cachoeira Paulista, 14/03/94
ABO CNMAC 8 P

Meu Caro Gurú para assuntos algébricos:

Sing, L.; Klein, M.P.; Vataron, C.

Considere resolver

$$(1) \quad Ax = b \quad A \text{ } n \times n$$

e seja

$$A = LU$$

uma decomposição de A em matrizes triangulares inferior (L) e superior (U), com $l_{ii} = 1$, então (1) é equivalente a

$$(2 \text{ a}) \quad Ly = b$$

$$(2 \text{ b}) \quad Ux = y$$

Até aqui nada de novo. Então (2 a) equivale a
SOLVING $Ay = b$ VIA ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATIONS

$$y' = Jy + b.$$

Defina

$$(3) \quad y_{k+1} = J y_k + b$$

Como J é nilpotente, a solução de (3) é

$$y = \left(\sum_{i=0}^{n-1} J^i \right) b$$

Sejam D e G tais que $(UD)_{ii} = 1$, D diagonal, e $UD = I - G$.
Observe que como $\det(U) = \det(A)$, D sempre existe. Ela é simplesmente a inversa da diagonal de U. Então, de (2 b),

$$(4) \quad (I - G)(D^{-1}x) = y,$$

Cachoeira Paulista, 14/03/94

Meu Caro Gurú para assuntos algébricos:

O algoritmo do qual lhe falei é o seguinte

Considere resolver

$$(1) \quad Ax = b \quad A \text{ } n \times n$$

e seja

$$A = L U$$

uma decomposição de A em matrizes triangulares inferior (L) e superior (U), com $L_{ii} = 1$, então (1) é equivalente a

$$(2 \text{ a}) \quad Ly = b$$

$$(2 \text{ b}) \quad Ux = y$$

Até aqui nada de novo. Seja $L = I - J$, então (2 a) equivale a

$$y = J y + b,$$

Defina

$$(3) \quad Y_{k+1} = J Y_k + b$$

Como J é nilpotente, a solução de (3) é

$$y = \left(\sum_{i=0}^{n-1} J^i \right) b$$

Sejam D e G tais que $(U D)_{ii} = 1$, D diagonal, e $UD = I - G$. Observe que como $\det(U) = \det(A)$, D sempre existe. Ela é simplesmente a inversa da diagonal de U. Então, de (2 b),

$$(4) \quad (I - G) (D^{-1}x) = y,$$

$$\text{ou } D^{-1}x = G(D^{-1}x) + y.$$

Como G também é nilpotente,

$$D^{-1}x = \left(\sum_{i=0}^{n-1} G^i \right) y.$$

Finalmente,

$$x = D \left(\sum_{i=0}^{n-1} G^i \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} j^i \right) b,$$

ou, se preferir, em forma iterativa:

$$x_0 = b$$

$$x_{k+1} = T x_k + c,$$

onde

$$T = \begin{Bmatrix} J & & \\ G & & \\ D & & \end{Bmatrix} \quad c = \begin{Bmatrix} b \\ x_{n-1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} k \leq n-2 \\ n-1 \leq k \leq 2(n-1) \\ k = 2n-1 \end{matrix}.$$

Rodei seis exemplos tirados do Dählquist, em cinco deles obtive a solução rapidamente. O caso que não funcionou, foi devido à decomposição LU, mas terei que vê-lo com mais cuidado. O método é evidentemente mais lento que o LU e pode ser que, para uma boa aproximação, até que o Jacobi; a vantagem estaria em obter a solução exata, em forma iterativa, com um número finito de passos. Se estiver disposto a mais uma tentativa de publicar, vamos ~~em~~ frente.

Um abraço,

Sinay

$$(1-n)w_1 + (2+n)(1+n)g + {}_2w_8$$

$${}_1w_1 + {}_2w_8 + {}_2w_8 + {}_2w_8$$

$${}_1w_1 + {}_2w_8 + {}_2w_8 + {}_2w_8 + {}_2w_8$$

$$[0, 1, 2, \dots, n-1] w = w_0 + (1-n)w_1$$

$$w_0 + (1-n)w_1 + (1-n)w_1 + (1-n)w_1$$

$${}_1w_1 + (1-n)w_1 + (1-n)w_1 + (1-n)w_1$$

$$(1+n)(2+n)(3+n)(n+n)$$

some step h and, finally, the limit of $y(t)$, solution of the ODE, as $t \rightarrow \infty$ is equal to the solution of (1), thus providing an alternative method for solving the linear algebraic equation. The restriction that the eigenvalues of the iteration matrix for the IS have modulus less than 1 is improved to only have real part smaller than 1. In fact, it is known that, in this case, it is possible to find a β -extrapolation which converges, the difficulty resides in finding the extrapolating parameter, a problem which we avoid obtaining the DE. Furthermore, there is no reason for restricting the integration of the ODE to one-step integration methods, any good numerical one may yield an approximate solution of (1).

We believe that further investigation may lead to some significant results such as better computing times, better approximations for the same time, etc. Furthermore, other relations between ODE's and iterative schemes may appear, for example between conditional convergence and initial manifolds.

REFERENCES

- [1] David Young, On the consistency of linear stationary iterative methods, SIAM J. NUMER. ANAL., 9, 1, (1972), pp. 89-96.
- [2] P. Albrecht and M.P. Klein, Extrapolated iterative methods for linear systems, SIAM J. NUMER. ANAL., 21, 1, (1984).
- [3] P. Albrecht, Métodos de discretização, 9 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1973.

* on leave from the Department of App. Math., IME/USP.

SOLVING $Ay = b$ VIA ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Marcelo P. Klein

Department of Mathematics - UFCE and UECE

Cyro de C. Patarra*

Leon Sinay

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE/MCT
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
Caixa Postal 515, 12201, São José dos Campos, SP

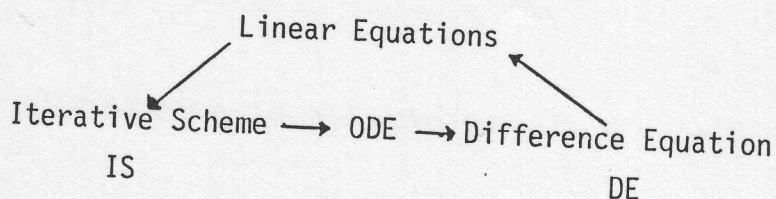
We analyse in this paper some relations between
iterative methods for solving the linear system

$$Ay = b \quad (1)$$

difference equations, B-extrapolations [2] and ordinary differential
equations.

We consider, through this work only $N \times N$ real matrices,
and $N \times 1$ real vectors. The matrix A in (1) is assumed to be
nonsingular.

We establish the diagram



and show that: the stability of the static solution of the ODE is
related to the convergence of both, the IS and the DE; if the DE is
obtained by the Euler discretization, then the IS and the DE coincide;
the static solution of the ODE is stable if and only if the DE
obtained by a numerical Taylor integration method is convergent for

* on leave from the Department of App. Math., IME/USP.