

INPE-434-LAFE
DPD

*UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE LINHAS
ESCONDIDAS NO TRAÇADO DE POLIEDROS
POR COMPUTADOR*

José Antonio Gonçalves Pereira

Dezembro 1973



PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA
CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
INSTITUTO DE PESQUISAS ESPACIAIS
São José dos Campos - Estado de S. Paulo - Brasil

*UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE LINHAS ESCONDIDAS
NO TRAÇADO DE POLIEDROS POR COMPUTADOR*

Este trabalho foi apresentado, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Computação Aplicada, por José Antonio Gonçalves Pereira deste Instituto e a presente publicação foi autorizada pelo abaixo assinado.

Fde Mendonça
Fernando de Mendonça
Diretor Geral

RESUMO

O problema de "linhas escondidas" para poliedros traçados por computador é o problema de determinar quais arestas, ou partes de arestas, de um poliedro são visíveis para um dado ponto de observação. O presente trabalho propõe um novo algoritmo para resolver o problema das linhas escondidas. É descrito um método de classificação de arestas que elimina imediatamente a maioria das arestas totalmente escondidas. As restantes são testadas individualmente, em segmentos correspondentes às intersecções da aresta com as demais, na projeção, até que se tenha examinado todo o poliedro. Os testes são estabelecidos de maneira a minimizar os cálculos. Conseqüentemente, o método aqui apresentado é extremamente rápido, comparando-se favoravelmente com a maioria dos algoritmos apresentados na literatura.

ABSTRACT

The "hidden line" problem for computer-drawn polyhedra is the problem of determining which edges, or parts of edges, of a polyhedron are visible from a given vantage point. The method presented here for solving this problem is believed to be as fast as or even faster than previously known methods. An edge classification scheme is described that eliminates at once most of the totally invisible edges. The remaining are tested individually until the whole polyhedron is examined. The tests are established in order to minimize calculation.

AGRADECIMENTOS

Inúmeras pessoas contribuíram para o bom termo deste trabalho, seja por incentivo, seja por ajuda incidental. Não podendo enumerá-las, gostaríamos no entanto de mencionar a nossa particular gratidão às seguintes:

Nosso orientador, Dr. Nelson Castro Machado, que conseguiu achar entre seus inúmeros afazeres tempo suficiente para conselhos, leituras e revisões que deram a este trabalho sua forma definitiva.

O Dr. A. Dutta-Roy e o Eng. Almir Paes de Lima, pela leitura criteriosa dos originais e as contribuições à sua forma e conteúdo.

Os chefes e amigos Arry C. Buss Filho e Iberê L. R. Teixeira pela inestimável paciência e colaboração prestadas.

E finalmente a Srta. Maria Lúcia dos Santos, cuja paciência e dedicação tornaram possível a apresentação gráfica deste trabalho.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO II

TRANSFORMAÇÕES DE PERSPECTIVA

2.1 - Transformações de perspectiva	5
---	---

CAPÍTULO III

SISTEMAS DE COORDENADAS - DADOS DE ENTRADA

3.1 - Sistemas de coordenadas	17
3.2 - Dados de entrada	17
3.3 - Armazenamento dos dados	19
3.4 - Encadeamento dos vértices	20

CAPÍTULO IV

CLASSIFICAÇÃO DAS FACES

4.1 - Vetor normal "interno"	23
4.2 - Determinação do sinal do vetor normal interno	25
4.3 - Determinação da intersecção entre duas retas	29
4.4 - Critério para ponto interior	34
4.5 - Critério para ponto exterior	35
4.6 - Tipos de faces	36

CAPÍTULO V

CLASSIFICAÇÃO DAS ARESTAS

5.1 - Tipos de arestas	39
5.2 - Arestas positivamente invisíveis	
5.2.1 - Aresta tipo 1	40
5.2.2 - Aresta tipo 2	41
5.3 - Arestas potencialmente visíveis	
5.3.1 - Aresta tipo 3	41
5.3.2 - Aresta tipo 4	42
5.4 - Procedimento computacional	42

CAPÍTULO VI

VISIBILIDADE DAS ARESTAS

6.1 - Planos Ocultantes	45
6.2 - Interposição de planos	46
6.3 - Verificação da posição relativa do traço da aresta no plano suporte em relação à face e ao observador...	47
6.3.1 - Determinação do traço da aresta	49
6.3.2 - Determinação de pontos contidos em um semi- plano	50
6.3.3 - Determinação de ponto simétrico	51
6.4 - Recobrimento por face	52
6.5 - Algoritmo para teste de recobrimento	54
6.6 - Algoritmo de teste na projeção	56

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

7.1 - Implementação	59
7.2 - Eficiência	60
7.3 - Possibilidades de extensão	60

BIBLIOGRAFIA	63
--------------------	----

APÊNDICE A

NOTAÇÃO EMPREGADA	65
-------------------------	----

APÊNDICE B

EXEMPLO	67
---------------	----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Com o recente e crescente desenvolvimento dos gráficos por computador, cada vez mais utilizados para a visualização de estruturas, soluções de problemas arquitetônicos, estudos de insolação de construções e iluminação de objetos, determinação de regiões de sombra, etc, surgiu a necessidade de se pôr em termos matemáticos e computacionais, a representação de objetos cujas partes "trazeiras" se apresentem ocultas pelas faces que se interponham entre elas e o observador, ou seja, surgiu a necessidade de caracterizar matematicamente a "ocultação" por faces.

Muito se tem feito e muito pouco se tem publicado a este respeito, mormente no que se refere a um algoritmo implantável em um computador convencional, já que a maioria dos sistemas de que se tem notícia, desenvolvidos por grandes companhias, universidades e entidades governamentais, (inclusive militares) são projetos específicos para as suas finalidades, e envolvem frequentemente implementação de "hardware" específico.

O problema foi encarado, até hoje, de várias maneiras, incluindo a mais elementar, que consiste na decomposição de cada linha em um número muito grande de pontos e o teste de cada ponto contra o restante da superfície. É um processo facilmente implementável e que permite al

tíssima resolução (i.e. é possível determinar com precisão máxima os pontos de transição visível-invisível) (Ref. 1).

Uma outra abordagem do problema, mais apropriado ao uso de tubos de raios catódicos, de inerente baixa resolução, é o da divisão da figura em partes (usualmente quadrados) e sua subsequente subdivisão até que se tenha decidido a respeito de todos os detalhes. Muito embora este processo seja muito rápido para sistemas de baixa resolução, permitindo inclusive a introdução de tons de cinza, é inadequado para uso em uma máquina de grande resolução, como uma "plotter" ou microfilmadora para (Ref. 1, 2 e 3).

Nossa abordagem do problema segue mais a primeira idéia do que a segunda, tendo tido o trabalho de LOUTRELL (Ref. 4 e 5) como ponto de partida. O citado autor, no entanto, usa como maneira de investigar as arestas, a idéia de fazer um ponto "percorrê-la" até que eventualmente deixe de ser visível, o que sem dúvida é uma grande economia de trabalho em relação à subdivisão total da aresta em pontos.

Em nossa aproximação, com o mesmo rigor matemático, utilizamos uma subdivisão da aresta em um número mínimo de segmentos, correspondentes a intersecções reais na projeção da aresta em estudo com as arestas de uma dada face, diminuindo assim ainda mais a repetição dos procedimentos de visibilidade. Obviamente, cada um destes segmentos é ou totalmente visível ou totalmente invisível com relação à dada face. Assim,

somente se pesquisa a visibilidade do segmento como um todo. O processo é repetido com relação a todas as demais faces, levando, se necessário, a repetidas subdivisões dos segmentos da aresta. Não obstante ser nosso processo exato, limitado em tempo apenas pelo número de elementos da figura, é possível ainda "apressar" o processo se nos limitamos à resolução máxima desejada, ignorando os segmentos menores que o limite de resolução, sendo, portanto, tão mais rápido quanto menor a resolução do aparelho disponível, e portanto, eficiente para terminais de raios catódicos.

O fato do método ser limitado a poliedros se deve basicamente à maior rapidez de cálculos quando são envolvidos apenas planos e retas. Tal restrição não chega a ser um empecilho real, já que a maioria dos sólidos estudáveis pode ser aproximada por um poliedro.

Para a visualização da figura optamos pela perspectiva cônica, que embora sendo raramente utilizada em tais trabalhos, por ser mais trabalhosa, é a que mais se aproxima da visão natural dos objetos.

CAPÍTULO II

2.1 - TRANSFORMAÇÕES DE PERSPECTIVA.

A projeção plana que melhor representa objetos reais, tal como vistos a olho nu através de um meio homogêneo, é a perspectiva. Este tipo de projeção mapeia um ponto arbitrário, P , no espaço, como um ponto P' em um plano π , de tal modo que todas as retas $\overline{PP'}$ se encontram em um ponto comum C , chamado centro de projeção; o ponto C corresponde ao olho do observador (fig. 2.1).

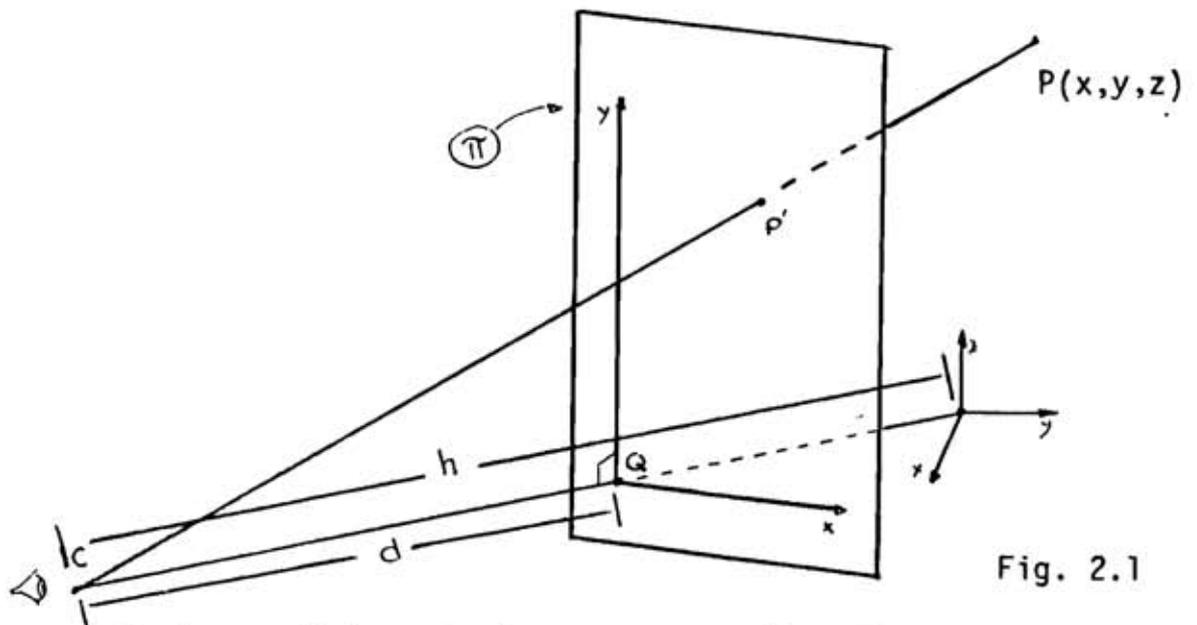


Fig. 2.1

O plano π é chamado plano de projeção e é orientado perpendicularmente à linha de visada que, em nosso caso, para simplificação, é admitida como sendo a linha que une o ponto C ao ponto de coordenadas $(0, 0, 0)$ do sistema de eixos coordenadas (Ref. 6 e 7).

Seja a função a ser traçada:

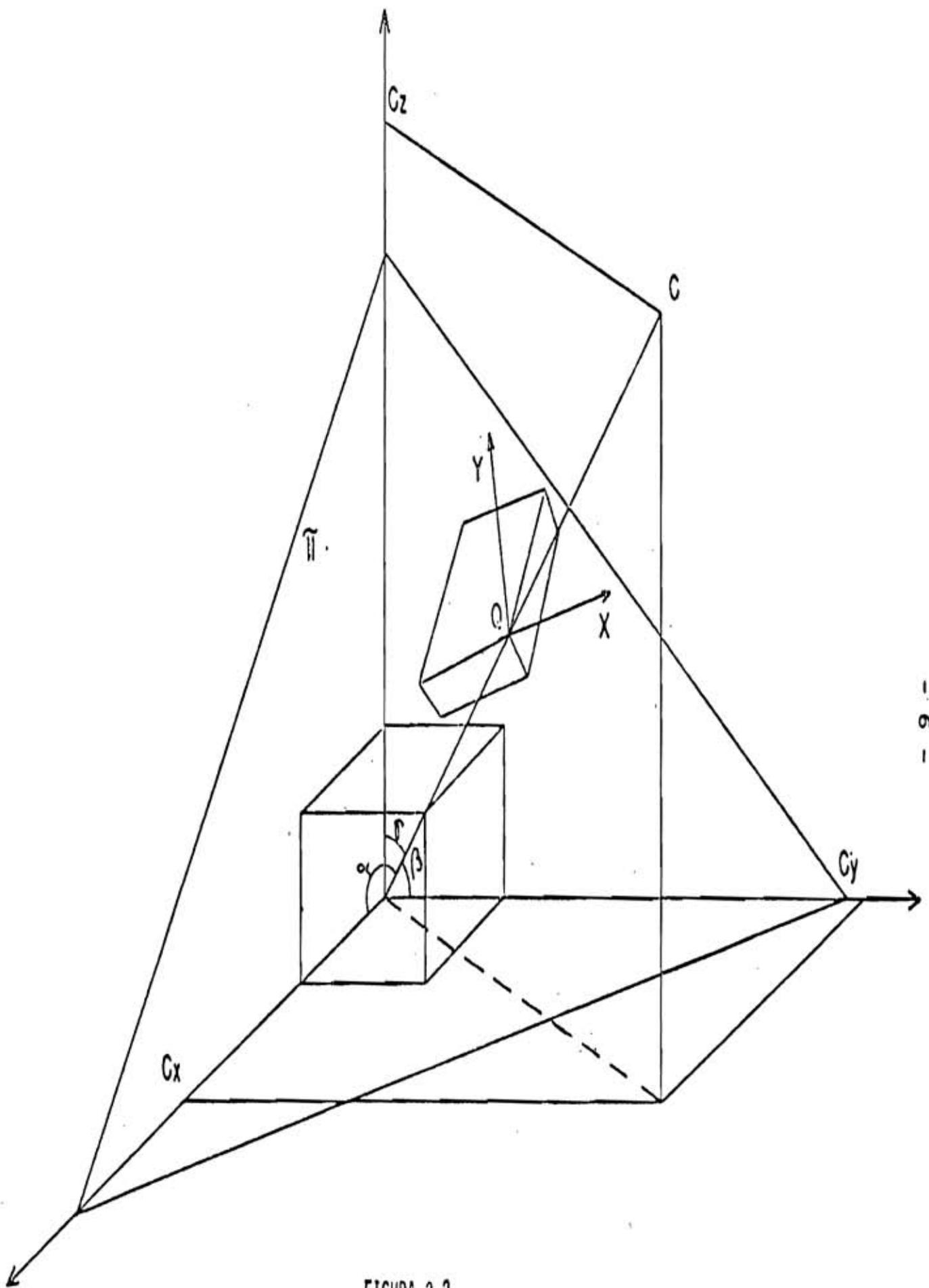


FIGURA 2.2

$$z = f(x,y) \quad (2.1)$$

dada em termos de um sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) retangulares.

Examinemos as figuras (2.1) e (2.2) e suponhamos o olho do observador no ponto C , com coordenadas C_x, C_y e C_z , referentes ao mesmo sistema de coordenadas, e ainda, que a linha de visada faça ângulos α, β e γ com a direção positiva dos eixos x, y e z respectivamente.

Seja a distância d , dada; definimos o ponto $Q(Q_x, Q_y, Q_z)$, tal que \overline{CQ} é a direção de visada e $CQ = d$. Seja π o plano de projeção, construído sobre Q e normal a \overline{CQ} .

A linha reta que une o ponto C a um ponto arbitrário P do espaço, de coordenada (x,y,z) , encontrará o plano π em um ponto $P'(\xi, \eta, \zeta)$. P' é a imagem perspectiva de P em π com relação a C . Suponhamos ainda que a reta \overline{CQ} contém o ponto $(0,0,0)$.

Da geometria segue-se

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= C_x - d \cos\alpha \\ Q_y &= C_y - d \cos\beta \\ Q_z &= C_z - d \cos\gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

e por semelhança de triângulos

$$\frac{\xi - C_x}{x - C_x} = \frac{\eta - C_y}{y - C_y} = \frac{\zeta - C_z}{z - C_z} = K \quad (2.3)$$

onde K é a razão comum e varia univocamente com P .

Por definição:

$$\vec{CQ} = d (\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}) \quad (2.4)$$

já que P' está no plano π deve satisfazer a

$$\vec{CQ} \cdot \vec{QP'} = 0 \quad (2.5)$$

já que \vec{CQ} é uma das retas normais ao plano π .

Como

$$\vec{CQ} \cdot \vec{QP'} = \vec{CQ} \cdot (\vec{QC} + \vec{CP'}) = 0$$

conclui-se que:

$$\vec{CQ} \cdot \vec{CP'} = \vec{CQ} \cdot \vec{CQ} \quad \text{ou}$$

$$(\xi - C_x) \cos\alpha + (\eta - C_y) \cos\beta + (\zeta - C_z) \cos\gamma = d \quad (2.6)$$

substituindo as equações (2.3) na (2.6) obtemos:

$$K = \frac{d}{(x - C_x) \cos\alpha + (y - C_y) \cos\beta + (z - C_z) \cos\gamma} \quad (2.7)$$

que, junto com as equações (2.3) define P' como

$$\left. \begin{aligned} \xi &= C_x + K(x - C_x) \\ \eta &= C_y + K(y - C_y) \\ \zeta &= C_z + K(z - C_z) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Permanece porém o problema de expressar P' em termos das coordenadas (XY) do plano Π . A equação de Π , (isto é a equação (2.5)), pode ser aceita como

$$(\xi - Q_x) \cos\alpha + (\eta - Q_y) \cos\beta + (\zeta - Q_z) \cos\gamma = 0 \quad (2.9)$$

a reta definida pela intersecção do plano horizontal $\zeta - Q_z = 0$ com o plano Π é

$$\frac{\xi - Q_x}{\cos\beta} = \frac{\eta - Q_y}{-\cos\alpha} = \frac{\zeta - Q_z}{0} \quad (2.10)$$

Um dos novos eixos coordenados em Π , (o eixo X), será definido ao longo desta linha. Um vetor unitário, na direção positiva do eixo X , em termos das coordenadas originais, é dado por

$$\vec{u}_x = \frac{S_1 [(\cos\beta) \vec{i} - (\cos\alpha) \vec{j}]}{\sin\gamma} \quad (2.11)$$

onde $S_1 = \pm 1$

Para definir o outro eixo coordenado (o eixo Y) um unitário \hat{U}_y deve satisfazer a

$$\hat{U}_x \cdot \hat{U}_y = 0 \quad (2.12)$$

seja

$$\hat{U}_y = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \quad (2.13)$$

a equação (2.12) impõe que

$$a(\cos\beta) - b(\cos\alpha) = 0 \quad (2.14)$$

já que \hat{U}_y está em Π , deve ser normal a \overline{CQ} .

Então,

$$a(\cos\alpha) + b(\cos\beta) + c(\cos\gamma) = 0 \quad (2.15)$$

e, do fato de \hat{U}_y ser unitário vem que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (2.16)$$

A solução simultânea de (2.14), (2.15) e (2.16) leva à relação:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{S_2 \cos\alpha \cos\gamma}{\sin\gamma} \\ b &= \frac{S_2 \cos\beta \cos\gamma}{\sin\gamma} \\ c &= -S_2 \sin\gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

onde $S_2 = \pm 1$

Os sinais de S_1 e S_2 dependerão das direções de X positivo e Y positivo. Se o observador está orientado de tal maneira que "para cima" corresponde a uma componente crescente de z e é seguida a convenção usual (isto é X positivo para a direita e Y positivo para cima), \hat{U}_y deve ter uma componente positiva na direção z positiva.

Então

$$\hat{U}_y \cdot \hat{k} > 0 \quad (2.18)$$

Mais ainda, $\hat{U}_x \times \hat{U}_y$ deve ser paralelo à linha de visada e deve apontar para o observador

$$\hat{U}_x \times \hat{U}_y = \frac{-1}{d} \cdot \hat{r} \quad (2.19)$$

Substituição das equações (2.4), (2.11), (2.12) e (2.17) nas relações (2.18) e (2.19) conduz a

$$S_2 \sin \gamma < 0 \quad \text{e} \quad S_1 \cdot S_2 = -1$$

já que $0 < \gamma < \pi$

$$\sin \gamma > 0,$$

$$S_1 = 1, \quad \text{e}$$

$$S_2 = -1$$

Se o novo sistema tem origem em Q, as componentes de P' em termos dos novos eixos serão

$$(\overline{QP'} \cdot \hat{U}_x, \overline{QP'} \cdot \hat{U}_y)$$

Segue-se então que

$$x = \frac{(\xi - Q_x) \cos \beta - (\eta - Q_y) \cos \alpha}{\sin \gamma}$$

(2.20)

$$y = \frac{(\xi - Q_z)}{\sin \gamma}$$

Nota-se que $\sin \gamma \neq 0$ necessariamente, ou a transformação será singular.

Este fato, porém, não tem importância na prática, já que se for necessário colocar a linha de visada na vertical, o eixo x pode ser

definido como a intersecção do plano π com o plano vertical $n - Q_y = 0$.

Como a utilização das fórmulas precedentes não é cômoda sob o ponto de vista do usuário, já que o uso mais corrente é o das chamadas coordenadas esféricas, façamos algumas modificações nas fórmulas anteriores. Sejam os ângulos θ - ângulo que \overline{OC} faz com o eixo (z) positivo ($= \gamma$) e ϕ o ângulo que a projeção de \overline{OC} no plano (xy) faz com o eixo (x) positivo. Além das equações (2.2) podemos definir as coordenadas C_x, C_y, C_z da forma (Fig. 2.1 e 2.2).

$$\begin{aligned}C_x &= h \sin\gamma \cos\phi = h \sin\theta \cos\phi \\C_y &= h \sin\gamma \sin\phi = h \sin\theta \sin\phi \\C_z &= h \cos\gamma = h \cos\theta\end{aligned}\tag{2.21}$$

Mais ainda

$$\begin{aligned}h^2 &= C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 \\h^2 &= h^2 (\sin^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta)\end{aligned}$$

das equações (2.21) vem

$$h^2 = h^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\tag{2.22}$$

concluimos que não basta especificar dois dos três ângulos para ter completamente definida a direção de \overline{OC} .

Usaremos, então, os ângulos θ e ϕ acima definidos em vez de dois quaisquer dentre α , β ou γ , por ser simples. As transformações são

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \arccos(\cos\phi \sin\theta) \\ \beta &= \arccos(\sin\phi \sin\theta) \\ \gamma &= \arccos(\cos\theta) = \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

As equações precedentes foram deduzidas para um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais por ser o mesmo o mais usual. Se um particular problema exigir eixos oblíquos, a extensão é imediata, embora envolva uma grande manipulação algébrica.

Como exemplo de utilização temos o seguinte exemplo:

Suponhamos uma superfície plana limitada por um quadrado de vértices

$$V_1(2,2,1)$$

$$V_2(2,-2,1)$$

$$V_3(-2,-2,1)$$

$$V_4(-2,2,1)$$

e vejamos como se projetariam estes quatro vértices em um plano a distância de 3 unidades métricas do observador, o qual está a 15 unidades da origem e cujos ângulos polares são

$$\theta = 75^\circ$$

$$\phi = 60^\circ$$

utilizando-nos das equações (2.17) obteremos para os cossenos dos ângulos os seguintes valores:

$$\cos\alpha = .4830$$

$$\cos\beta = .8365$$

$$\cos\gamma = .2588$$

lembrando que $\cos^2x + \sin^2x = 1$ teremos que

$$\sin\gamma = .9659$$

as projeções das coordenadas do observador, C_x , C_y e C_z são, pela sua de finição

$$C_x = h \cos\alpha \quad \text{etc}$$

e temos então os valores

$$C_x = 7.2445$$

$$C_y = 12.5476$$

$$C_z = 3.8824$$

das equações (2.2) tiramos imediatamente os valores de Q

$$Q_x = 5.7956$$

$$Q_y = 10.0380$$

$$Q_z = 3.1059$$

Para cada vértice V_i teremos que calcular, sucessivamente:

$$K \quad (\text{eq.2.7})$$

$$\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right\} (\text{eq.2.8})$$

$$\left. \begin{matrix} X_i \\ Y_i \end{matrix} \right\} (\text{eq.2.20})$$

obtendo, então, os valores da tabela 1.

K	ξ	η	ζ	X	Y
-.2479	8.5446	15.1622	4.5969	-.1815	-1.5436
-.2296	8.9076	14.9690	4.5441	-.2295	-1.4886
-.2178	8.3867	15.2802	4.5101	-.3772	-1.4538
-.2035	8.7189	15.1012	4.4690	-.0000	-1.4112

TABELA 1

das equações (2.2) tiramos imediatamente os valores de Q

$$Q_x = 5.7956$$

$$Q_y = 10.0380$$

$$Q_z = 3.1059$$

Para cada vértice V_i teremos que calcular, sucessivamente:

$$K \quad (\text{eq.2.7})$$

$$\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right\} (\text{eq.2.8})$$

$$\left. \begin{matrix} X_i \\ Y_i \end{matrix} \right\} (\text{eq.2.20})$$

obtendo, então, os valores da tabela 1.

K	ξ	η	ζ	X	Y
-.2479	8.5446	15.1622	4.5969	-.1815	-1.5436
-.2296	8.9076	14.9690	4.5441	-.2295	-1.4886
-.2178	8.3867	15.2802	4.5101	-.3772	-1.4538
-.2035	8.7189	15.1012	4.4690	-.0000	-1.4112

TABELA 1

CAPÍTULO III

SISTEMAS DE COORDENADA DADOS DE ENTRADA

3.1 - SISTEMAS DE COORDENADAS.

Trabalharemos, essencialmente, em 2 sistemas de coordenadas distintos, que são, naturalmente, os dois sistemas vistos quando do desenvolvimento das fórmulas que nos dão a projeção - o sistema de coordenadas no qual está definido o objeto a projetar, e o sistema de coordenadas obtido quando efetuada a projeção do objeto, essencial para uso da "plotter".

Teremos, no entanto, necessidade, em certa parte do algoritmo, de definir alguns outros sistemas bidimensionais, que, toda ora, são partes do sistema tridimensional no qual se define o poliedro, ou seja, os sistemas planos definidos pelos pares de eixos (X,Y) , (X,Z) e (Y,Z) .

3.2 - DADOS DE ENTRADA.

A maneira de entrar com os dados é fundamental para o bom desenvolvimento do algoritmo, e por isto será citada em minúcia.

Suponhamos o nosso poliedro definido em termos de um sistema de coordenadas ortonormal, definido pelos eixos X , Y e Z , tal como no Capítulo II.

Como é evidente, um poliedro estará completamente definido se especificarmos os ternos coordenados x , y , z que definem seus vértices, e se especificarmos, também, quais vértices se ligam a quais outros, ou seja, se definirmos as extremidades das arestas.

A especificação dos ternos coordenados é imediata, mas para especificar as extremidades de cada aresta vários procedimentos são igualmente tentadores.

Visando a procedimentos futuros, no algoritmo, optamos por definir as arestas a partir de cada polígono que constitui o poliedro, da forma abaixo.

Situamos o observador em frente ao polígono a especificar, e do lado de fora do poliedro, e percorremos seus lados, a partir de um vértice qualquer, no sentido horário, sem repetir nenhum vértice, até retornarmos ao ponto de partida, sem repeti-lo.

Naturalmente, fazemos isto para todos os polígonos que constituem o poliedro. Evidentemente, ao especificarmos dois polígonos que têm uma aresta ou um vértice comum, haverá uma repetição daquele ponto ou

daquela aresta. Na verdade, cada aresta será especificada duas e somente duas vezes, porém quando a especificarmos pela segunda vez, os pontos que definem os vértices aparecerão em ordem inversa (conforme a figura abaixo).



Fig. 3.1

É interessante observar aqui que o procedimento acima para especificar as arestas, principalmente propriedades que aparecem sublinhadas, é fundamental para o desenvolvimento do algoritmo.

3.3 - ARMAZENAMENTO DOS DADOS.

Os dados serão armazenados na sequência de entrada, em três vetores PX, PY e PZ, reservando-se porém, uma posição no início de cada face, que no decorrer do procedimento, virá a armazenar os componentes do vetor normal àquela face. Assim, as dimensões destes três vetores deverão ser iguais à soma dos números de pontos que constituem cada face, mais o número de faces do poliedro.

Paralelamente, sempre que nos deparamos com uma nova face, construímos dois outros vetores, NFAÇES onde guardamos em que posi

ção das matrizes PX, PY e PZ se inicia o armazenamento desta nova face (a posição que será ocupada depois pelo vetor normal), e NAREST, onde armazenamos o número de vértices da face em questão.

Naturalmente, ambas as matrizes terão dimensão igual ao número de faces do poliedro.

3.4 - ENCADEAMENTO DE VÉRTICES.

Para facilitar o processamento da informação, bem como a determinação das faces que possuem arestas comuns, passamos em seguida a encadear os vetores PX, PY e PZ em múltiplas cadeias que ligam os pontos destes vetores que têm coordenadas idênticas (representam o mesmo vértice, apenas especificado em faces diferentes). Note-se que, devido ao fato de um vértice de um poliedro qualquer ser formado por pelo menos três planos, cada uma destas cadeias conterà pelo menos três nós.

Os ponteiros do encadeamento serão armazenados num vetor de dimensão idêntica a PX, PY e PZ, aqui chamada NINDEX, e que contém, numa posição genérica, I, a posição da próxima ocorrência de um ponto de coordenadas (PX(I), PY(I), PZ(I)). Para maior comodidade, estas cadeias são construídas fechadas, de modo a podermos percorrê-las de modo circular.

Naturalmente, as posições do vetor NINDEX, correspondentes

ãs "cabeças" das faces (vetores normais) terão informação irrelevante, e serão, portanto, mais tarde utilizadas para armazenar o tipo das faces em questão (cap. 4).

Paralelamente a este encadeamento, em uma matriz NINDIC que possui igual dimensão, armazenamos, para a mesma posição I o número (da ordem em que for armazenada) da face que contém o próximo ponto idêntico. Novamente aqui, as informações correspondentes a posições de "cabeça" de face, não têm significado.

Na tabela que se segue podemos ver, para um cubo de arestas unitárias, o resultado do armazenamento e encadeamento dos pontos. As posições de cabeça de face estão assinaladas com uma seta, e contêm informação zero.

PX	PY	PZ	NFACES	NAREST	NINDEX	NINDIC
0.0000	0.0000	0.0000	1	4	0	0
1.0000	1.0000	1.0000	6	4	7	2
1.0000	1.0000	0.0000	11	4	10	2
1.0000	0.0000	0.0000	16	4	20	4
1.0000	0.0000	1.0000	21	4	19	4
0.0000	0.0000	0.0000	26	4	0	0
1.0000	1.0000	1.0000	0	0	22	5
0.0000	1.0000	1.0000	0	0	13	3
0.0000	1.0000	0.0000	0	0	12	3
1.0000	1.0000	0.0000	0	0	29	6
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	1.0000	0.0000	0	0	30	6
0.0000	1.0000	1.0000	0	0	25	5
0.0000	0.0000	1.0000	0	0	18	4
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	17	4
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	27	6
0.0000	0.0000	1.0000	0	0	24	5
1.0000	0.0000	1.0000	0	0	23	5
1.0000	0.0000	0.0000	0	0	28	6
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
1.0000	1.0000	1.0000	0	0	2	1
1.0000	0.0000	1.0000	0	0	5	1
0.0000	0.0000	1.0000	0	0	14	3
0.0000	1.0000	1.0000	0	0	8	2
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	15	3
1.0000	0.0000	0.0000	0	0	4	1
1.0000	1.0000	0.0000	0	0	3	1
0.0000	1.0000	0.0000	0	0	9	2

CLASSIFICAÇÃO DE FACES

4.1 - VETOR NORMAL "INTERNO".

Para proceder a uma classificação das faces, o que veremos mais adiante, primeiro definimos e determinamos o sentido do que chamamos VETOR NORMAL INTERNO. Consideremos a figura abaixo:

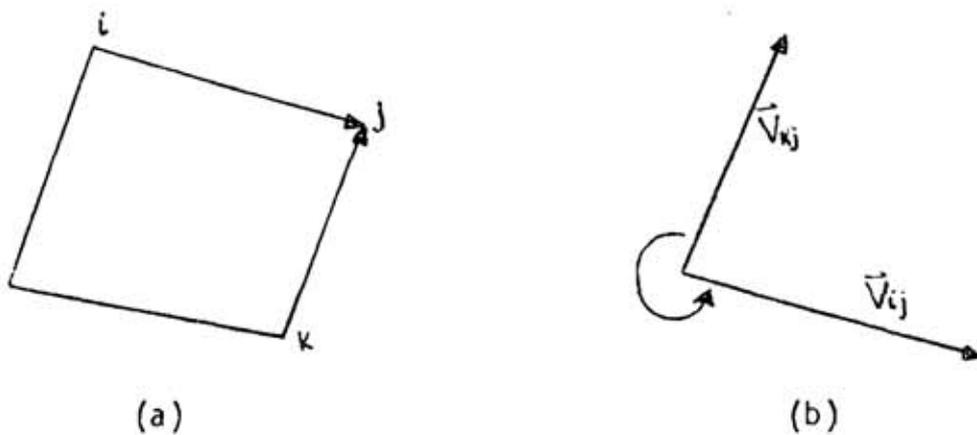


Fig. 4.1

Sejam 3 vértices consecutivos i, j, k , nesta ordem.

A partir dos mesmos, definamos dois vetores \vec{V}_{kj} e \vec{V}_{ij} e façamos o seu produto vetorial:

$$\vec{n} = \vec{V}_{kj} \times \vec{V}_{ij} \quad (4.1)$$

Lembrando que a ordem dos pontos segue um percurso no sentido horário, é fácil ver que tal produto vetorial assume a direção "para dentro" do papel,

jã que o ângulo relativo dos mesmos a considerar \bar{e} maior que π .

Se supomos que o quadrilãtero mostrado \bar{e} uma das faces do poliedro, vista de fora, podemos definir $\vec{n} = \vec{v}_{kj} \times \vec{v}_{ij}$ como o vetor normal "interno" desta face, visto que seu sentido \bar{e} para dentro do poliedro.

No caso acima, bastará a realização do produto vetorial para se ter certeza do sentido correto do vetor normal interno. Porém, no caso acima, consideramos, da nossa face, um vértice j convexo, isto \bar{e} , um vértice cujo ângulo interno \bar{e} menor que π . Nada nos impede, no entanto, de escolher para vértice j um vértice côncavo, ou seja, um vértice cujo ângulo interno seja maior que π , como na figura abaixo:

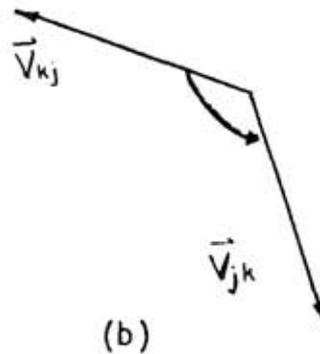
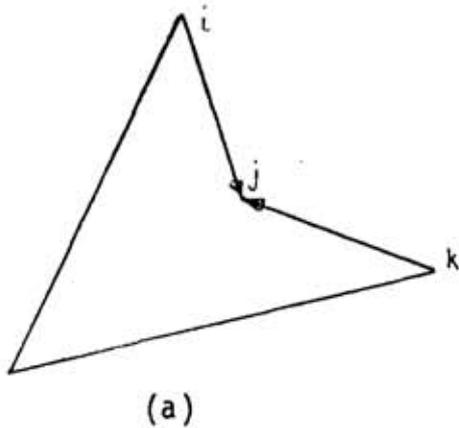


Fig. 4.2

e, se neste caso calculamos o nosso vetor normal $\vec{n} = \vec{v}_{kj} \times \vec{v}_{ij}$, notamos, feitas as mesmas suposições do caso anterior, que, para nosso desagrado, \vec{n} apontará para fora do poliedro.

Desta forma, para se determinar o sentido correto de \vec{n} , a partir de um vértice genérico j, \bar{e} necessário determinar se o mesmo \bar{e} côncavo ou convexo, o que se pode determinar com o procedimento abaixo.

4.2 - DETERMINAÇÃO DO SINAL DO VETOR NORMAL INTERNO.

Consideremos o próprio plano da face em estudo ou um plano de projeção não ortogonal ao plano da face (para que as projeções das arestas da face sobre este plano não caiam todas sobre a mesma reta, ou seja, para que a face se projete como um polígono e não como um segmento de reta).

Para maior comodidade, trabalharemos com um dos planos definidos pelos eixos do sistema de coordenadas, sejam

XY , XZ e YZ

Como nenhum plano pode ser simultaneamente ortogonal a três planos já ortogonais entre si, podemos ter certeza que um dos três planos acima é apropriado para nossos propósitos.

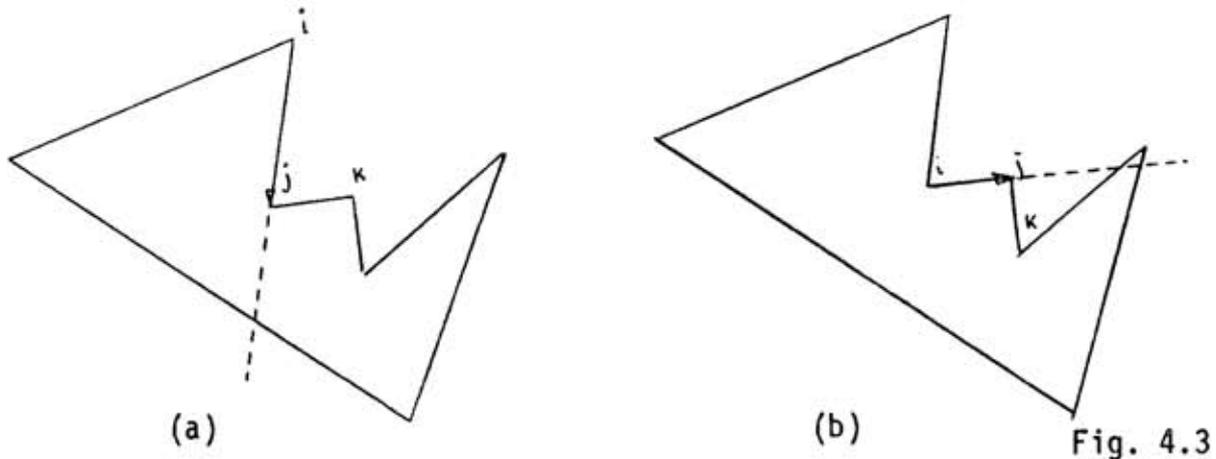
Para determinar qual dos três planos nos servirá, usamos o procedimento seguinte:

- 1) Verificamos a componente n_z do vetor normal definido na equação (4.1). Caso esta componente seja nula, \vec{n} será paralelo ao plano xy e, consequentemente a face é perpendicular a este plano, sendo, consequentemente, rejeitada, e passamos ao item 2.
Caso n_z não seja nulo, o plano nos serve, e ficamos por aqui mesmo.

2) Fazemos o mesmo teste com relação ao plano XZ, usando n_y . No caso de se verificar a nulidade também da componente n_y , o plano a ser utilizado será o plano YZ; caso contrário, o plano XZ.

As coordenadas das projeções, qualquer que seja o plano escolhido para projetar a face, são obtidas diretamente de uma escolha adequada entre duas das três componentes dos pontos armazenados em PX, PY e PZ.

Imaginemos agora que a face projetada seja as figuras abaixo, onde escolhemos o vértice j em duas posições tais que ilustram as duas possibilidades.



Vemos imediatamente que o prolongamento da aresta \overline{ij} na direção de i para j, e naturalmente, a partir de j, nos dá a solução, ou seja, se o número de intersecções do prolongamento de \overline{ij} com os segmentos de reta definidos pelas arestas projetadas for nulo ou par, o vértice é convexo. Caso seja ímpar, será côncavo.

Um caso particular, no entanto, complica o algoritmo acima, como vemos abaixo:

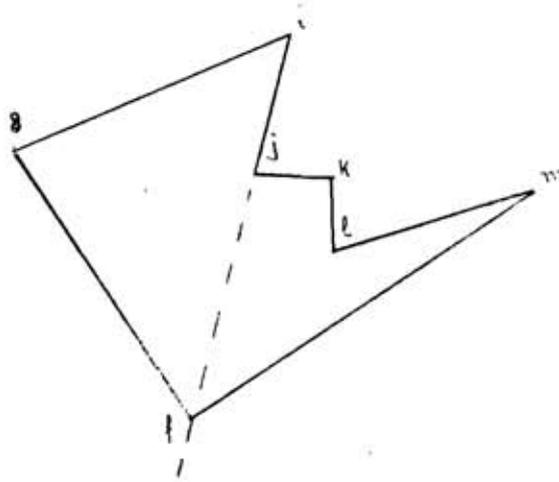


Fig. 4.4

Se um particular prolongamento corta um vértice da face, o critério se inverte. Precisamos, pois, encontrar uma maneira de detectar se há uma intersecção sobre um vértice.

Para podermos utilizar o mesmo subprograma em outra parte do nosso problema, tivemos que definir a aresta como um conjunto fechado de pontos, isto é, não excluimos o vértice. Assim sendo, temos que usar de um truque.

Primeiro, notemos, na figura acima, que as arestas \overline{gi} e \overline{kj} não podem ter outra intersecção com as arestas \overline{ij} e \overline{jk} respectivamente, que os próprios pontos i e k .

Assim sendo, quando testamos o prolongamento de \overline{ij} com as arestas, excluimos propositadamente as arestas gi e kl , por economia de cálculo.

Pelo mesmo motivo, os pontos g e l jamais serão determinados como intersecções do prolongamento de \overline{IJ} .

Podemos então afirmar que em caso de intersecção com um vértice do polígono, o ponto implicado será necessariamente coincidente com a intersecção com a aresta anterior, se a houve. E se não houve intersecção com o segmento precedente, não há condição de se estar sobre um vértice.

Resumindo, com um indicador da última intersecção e uma comparação com as coordenadas da mesma, podemos facilmente decidir se estamos sobre um vértice.

Resta resolver o problema de encontrar uma intersecção sobre um vértice, o que é muito simples, basta mudar ligeiramente as coordenadas de um dos pontos i ou j , e percorrer as arestas, contando as intersecções e adotando o mesmo critério.

Caso haja coincidência de uma aresta como o prolongamento, as intersecções com as arestas anterior e posterior são os vertices que formam a aresta em estudo. Como são conhecidos, este caso também é imediato.

Supondo que o número de intersecções detectadas é K , as verdadeiras componentes do vetor normal serão:

$$n_x = n_x(-1)^k, \quad n_y = n_y(-1)^k, \quad n_z = n_z(-1)^k$$

4.3 - DETERMINAÇÃO DA INTERSECÇÃO ENTRE DUAS RETAS.

Muito embora a intersecção de duas retas seja um procedimento corriqueiro que consiste essencialmente em resolver um sistema de duas equações do primeiro grau, um processo computacional tem que se acerbir de cuidados especiais, pois casos de paralelismo entre as retas e paralelismo a um dos eixos poderá fazer facilmente as fórmulas divergirem, sendo necessário um certo número de testes e cuidados. Aqui examinaremos os casos que poderão ser fonte de problemas e os testes a serem feitos.

No nosso caso, ambas as retas são definidas a partir de dois pontos, dados em forma de suas coordenadas cartesianas a duas dimensões.

A equação, para a reta definida por I e J é obtida, por semelhança de triângulos, para um ponto interior a \overline{IJ} , e é da forma

$$\frac{x - I_x}{J_x - I_x} = \frac{y - I_y}{J_y - I_y}$$

ou seja

$$(x - I_x)(J_y - I_y) - (J_x - I_x)(y - I_y) = 0$$

ou ainda

$$x(J_y - I_y) - I_x(J_y - I_y) - y(J_x - I_x) + I_y(J_x - I_x) = 0 \quad (4.1)$$

chamando

$$J_y - I_y = Y$$

$$J_x - I_x = X$$

teremos:

$$Y_x - X_y - YI_x + XI_y = 0 \quad (4.2)$$

A equação acima pode apresentar duas reduções particulares, no caso da reta ser paralela a algum dos eixos.

1) $Y = 0$ - reta paralela a \overline{OX}

$$X_y - XI_y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \text{cte} \quad (4.3)$$

2) $X = 0$ - reta paralela a \overline{OY}

$$Y_x - YI_x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \text{cte} \quad (4.4)$$

Sejam duas retas, agora, definidas por dois pares de pontos (i,j) e (k,l) .

Sua intersecção será dada pela solução do seguinte sistema:

$$Y_{ij}x - X_{ij}y - Y_{ij}I_x + X_{ij}I_y = 0 \quad (4.5)$$

$$Y_{kl}x - X_{kl}y - Y_{kl}I_x + X_{kl}I_y = 0 \quad (4.6)$$

onde, analogamente à definição de (4.2).

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= J_y - I_y \\ X_{ij} &= J_x - I_x \\ Y_{kl} &= K_y - L_y \\ X_{kl} &= K_x - L_x \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como cada uma das retas pode estar sujeita aos dois casos particulares já vistos de paralelismo a eixos, estudemos agora cada um deles.

1) $X_{ij} = 0$; demais coeficientes não nulos

$$x = \text{cte}$$

$$y = \frac{Y_{kl}(J_x - K_x)}{X_{kl}} + K_y \quad (4.8)$$

por substituição direta.

2) $X_{ij} = Y_{ij} = 0$ - não existe reta.

3) $X_{ij} = 0$; $X_{kl} = 0$; demais não nulos-retas paralelas, não há solução.

4) $X_{ij} = 0$; $Y_{kl} = 0$; demais não nulos-retas ortogonais

$$x = \text{cte} = J_x = I_x$$

$$y = \text{cte} = K_y = L_y$$

(4.9)

5) $X_{ij} = 0$; $Y_{k1} = 0$, $X_{k1} = 0$ - não existe reta $k1$.

6) $Y_{ij} = 0$; demais não nulos.

$$\begin{aligned} y &= \text{cte} = I_y - J_y \\ x &= \frac{X_{k1}(J_y - K_y)}{Y_{k1}} + K_x \end{aligned} \quad (4.10)$$

7) $Y_{ij} = 0$; $X_{k1} = 0$; demais não nulos
retas ortogonais

$$\begin{aligned} x &= \text{cte} = K_x = L_x \\ y &= \text{cte} = J_y = I_x \end{aligned} \quad (4.11)$$

8) $Y_{ij} = 0$; $Y_{k1} = 0$; demais não nulos; retas paralelas, não há solução.

9) $Y_{ij} = 0$; $Y_{k1} = 0$; $X_{k1} = 0$ - não existe reta $k1$; os casos de nulidade de X_{ij} e/ou Y_{ij} já estão cobertos. Vejamos então o que acontece se apenas um dos coeficientes X_{k1} ou Y_{k1} se anula.

10) $X_{k1} = 0$

$$\begin{aligned} x &= \text{cte} = K_x = L_x \\ y &= \frac{Y_{ij}(K_x - I_x)}{X_{ij}} - I_y \end{aligned} \quad (4.12)$$

11) $Y_{k1} = 0$

$$y = cte = K_y = L_y \quad (4.13)$$

$$x = \frac{X_{ij}(K_y - I_y)}{Y_{ij}} + I_x$$

e finalmente o caso em que nenhum \bar{e} nulo, ou seja, o caso geral.

- 1) Multiplicando a equação (4.5) por $-Y_{kl}$, multiplicando a equação (4.6) por Y_{ij} , somando e evidenciando y teremos:

$$y = \frac{Y_{ij}Y_{kl}(I_x - K_x) - X_{ij}Y_{kl}I_y + X_{kl}Y_{ij}K_y}{X_{ij}Y_{kl} - X_{kl} - Y_{ij}} \quad (4.14)$$

x - equação (4.10) | ou equação (4.13)

e aqui surge o derradeiro problema de paralelismo, evidenciado se o de nominador da equação (4.14) for nulo.

4.4 - CRITERIO PARA PONTO INTERIOR.

Para verificar se o ponto \bar{e} é uma intersecção a contabilizar, é necessário verificar se está sobre o segmento que define a aresta testada e não em qualquer outro ponto de seu suporte.

Basta calcularmos as distâncias

d_1 - do ponto a I

d_2 - do ponto a J

D - de I até J

e testamos se $d_1 + d_2 = D$.

Como porém tal cálculo envolve extração de raízes, para evitar erros de arredondamento, o teste de igualdade deverá ser mudado para um teste de igualdade dentro de certa precisão, estabelecida de acordo com o número de significativos dos dados de entrada; testamos então se

$$\frac{d_1 - d_2}{D} - 1 = \text{TOL}$$

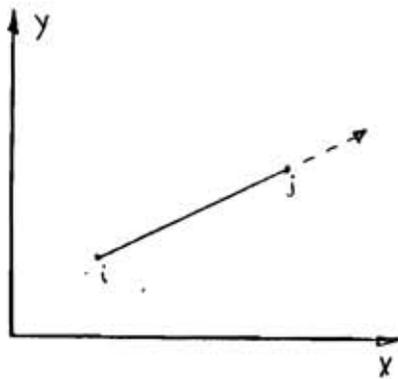
onde TOL é a tolerância do critério, que deve ser bem estipulada, caso contrário teremos pontos dentro e fora ao mesmo tempo.

4.5 - CRITÉRIO PARA PONTO EXTERIOR.

Uma outra verificação a ser feita antes do ponto ser contabilizado é verificar se o ponto pertence ao prolongamento de \overline{ij} na direção \overline{ij} e a partir de j .

Conforme as inclinações da reta, ou melhor, os sinais de X_{ij} e Y_{ij} , poderemos ter quatro casos, a saber:

1)

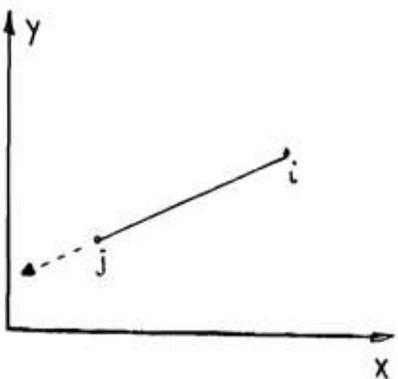


$$X_{ij} \geq 0 ; Y_{ij} \geq 0$$

TESTES

$$y \geq J_y \text{ e } x \geq J_x$$

2)

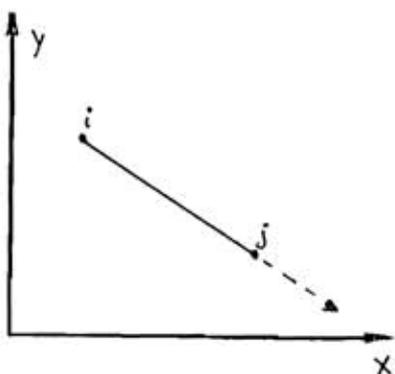


$$X_{ij} < 0 ; Y_{ij} < 0$$

TESTES

$$y < J_y \text{ e } x < J_x$$

3)

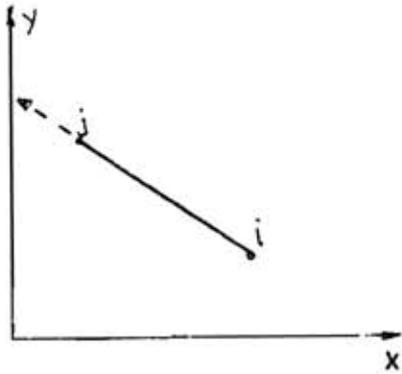


$$X_{ij} \geq 0 ; Y_{ij} < 0$$

TESTES

$$y < J_y \text{ e } x \geq J_x$$

4)



$$X_{ij} < 0 ; Y_{ij} \geq 0$$

TESTES

$$y \geq J_y \text{ e } x < J_x$$

4.6 - TIPOS DE FACES.

Tendo já obtido o número de intersecções, ou seja, k , e portanto, o sinal correto do vetor normal interno n , consideremos

$$\Delta p = \vec{n} \cdot \vec{v_j} \quad (4.15)$$

onde $\vec{v_j}$ é o vetor cujo suporte passa pelo observador e pelo ponto j e o sentido é do primeiro para o último, ou seja, se as coordenadas do observador são (x, y, z) , as componentes de $\vec{v_j}$ serão

$$\begin{aligned} X_{0j} &= J_x - x \\ Y_{0j} &= J_y - y \\ Z_{0j} &= J_z - z \end{aligned} \quad (4.16)$$

Se $p > 0$, n e $\vec{v_j}$ apontam para a mesma direção, ou seja, para fora do observador; deverá portanto a face em questão ser frontal ao observador.

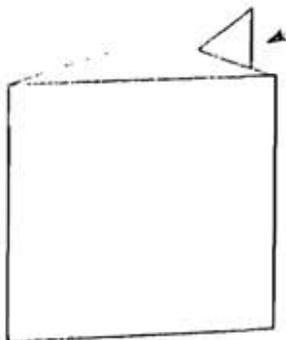
Se $\Delta\phi > 0$ a face tem seu vetor normal \vec{n} apontado na direção do observador. Se consideramos que nosso poliedro \tilde{E} é fechado, tais faces evidentemente serão invisíveis, pois a menos de uma aresta, que eventualmente se limite com uma face frontal visível, a citada face frontal a esconde inteiramente; tais faces invisíveis são ditas traseiras.

Para poliedros convexos, ou seja, para poliedros em que nenhum ângulo diedro interno é maior que π o problema de visibilidade termina aqui, ou seja,

FACES FRONTAIS são visíveis

FACES TRASEIRAS são invisíveis

Consideremos, porém, o sólido abaixo:



A face apontada pela seta, embora uma face frontal, é apenas parcialmente visível, e poderia, dependendo da posição do observador, ser completamente invisível.

Podemos, ainda, notar que o ângulo diedro interno com a face (no caso traseira) que lhe partilha uma aresta, é maior que π , ou seja, temos um poliedro côncavo.

Como no caso mais geral não podemos prever, com o até agora visto, a visibilidade de tais poliedros; teremos que nos aprofundar no

estudo das faces e, agora, de aresta por aresta, pois como vimos no exem
plo acima, as arestas podem ser, inclusive, visíveis em parte.

CAPÍTULO V

CLASSIFICAÇÃO DAS ARESTAS

5.1 - TIPOS DE ARESTAS.

Como uma aresta \bar{e} sempre partilhada por duas faces, segundo a natureza destas faces, teremos quatro tipos possíveis de arestas, que numeraremos de um a quatro, e que se dividem em duas categorias -

POSITIVAMENTE INVISÍVEIS (1 e 2)

POTENCIALMENTE VISÍVEIS (3 e 4)

Para o nosso estudo s \bar{o} interessar \bar{a} o, evidentemente as de n \bar{u} mero 3 e 4, que s \bar{a} o as \bar{u} nicas com possibilidade de serem vis \bar{i} veis, ainda que parcialmente.

Adotaremos um crit \bar{e} rio de exaust \bar{a} o - uma aresta ser \bar{a} de clarada vis \bar{i} vel se n \bar{a} o se conseguir demonstrar que \bar{e} invis \bar{i} vel.

Sejam duas faces P e Q.

Sejam Δ_p e Δ_q definidos como na equa \bar{c} o (4.15) - os produtos escalares que nos d \bar{a} o o tipo das faces - frontal ou traseira.

Consideremos ainda a figura seguinte, onde \vec{n}_p e \vec{n}_q são, respectivamente, os vetores normais às faces P e Q.

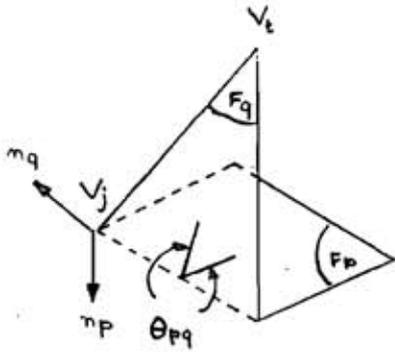


Fig. 5.1

Seja θ_{pq} o ângulo diedro interno entre as faces P e Q.

Definamos ainda o produto misto.

$$\Delta_{pq} = (\vec{n}_p \times \vec{n}_q) \cdot \vec{v}_{ij} \quad (5.1)$$

onde \vec{v}_{ij} é o velho vetor usado para determinar o vetor normal à face (i e j em ordem horária por fora).

Geometricamente podemos ver que $\vec{n}_p \times \vec{n}_q$ terá sentido oposto a \vec{v}_{ij} se $\theta_{pq} > \pi$ e mesmo sentido se $\theta_{pq} < \pi$. Ou seja, resumindo:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{pq} \leq 0 \quad \text{se} \quad \theta_{pq} \geq \pi \\ \Delta_{pq} > 0 \quad \text{se} \quad \theta_{pq} < \pi \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

5.2 - ARESTAS POSITIVAMENTE INVISÍVEIS.

5.2.1 - ARESTA TIPO 1.

É uma intersecção entre duas faces traseiras, e é evidentemente invisível, já que uma face traseira sempre o é.

Matematicamente uma aresta \bar{e} tipo 1 se

$$(\Delta_p \leq 0) \wedge (\Delta_q \leq 0) \quad (5.3)$$

onde \wedge indica o "E" lógico.

5.2.2 - ARESTA TIPO 2.

É a intersecção entre uma face frontal P e uma face traseira Q, dispostas de tal maneira que a face traseira Q oculta a dianteira P em relação ao observador. Evidentemente, tal situação só pode ocorrer para um par de faces cujo ângulo diedro interno é maior que π . Como toda face traseira é por sua vez ocultada por uma ou mais faces dianteiras (vide figura 5.1) é fácil ver que uma aresta nestas condições é certamente invisível.

A expressão lógica a ser satisfeita para classificar uma aresta como tipo 2 é de $\theta_{pq} > \pi$; $\Delta_p > 0$ e $\Delta_q \leq 0$ ou

$$(\Delta_p > 0) \wedge (\Delta_q \leq 0) \wedge (\Delta_{pq} \leq 0) \quad (5.4)$$

5.3 - ARESTAS POTENCIALMENTE VISÍVEIS.

5.3.1 - ARESTA TIPO 3.

Uma aresta \bar{e} potencialmente visível se as duas faces envolvidas P e Q são também, como no tipo 2, uma frontal e outra traseira, mas

desta vez a frontal se interpõe entre o observador e a traseira.

(P traseira, Q frontal e θ_{pq} o complemento do assinalado na figura 5.1) e isto naturalmente implica em $\theta_{pq} < \pi$ caso. Contrário ambas as faces se riam dianteiras para o observador.

Matematicamente, podemos dizer:

$$(\Delta_p > 0) \wedge (\Delta_q \leq 0) \wedge (\Delta_{pq} > 0) \quad (5.5)$$

5.3.2 - ARESTA TIPO 4.

Naturalmente, resta-nos agora para a aresta tipo 4 a ares ta comum a duas faces frontais, aresta esta que obviamente tem possibilida des de ser visível. O critério de classificação será então o acima, sem importar o ângulo interno entre as duas faces.

Matematicamente, temos:

$$(\Delta_p > 0) \wedge (\Delta_q > 0) \quad (5.6)$$

5.4 - PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL.

Computacionalmente falando, tal procedimento não deve apresentar problemas, pois a esta altura já devemos ter as componentes do ve tor normal interior de cada face armazenadas nas posições cabeça de face dos vetores PX, PY e PZ, posições esta devidamente apontada por NFACES, e o

tipo da face armazenada na posição correspondente de NINDEX. Basta-nos apenas montar o vetor \vec{v}_{ij} e realizar o produto misto, o que é elementar.

CAPITULO VI

VISIBILIDADE DAS ARESTAS

6.1 - PLANOS OCULTANTES

Como já foi explicado, uma aresta potencialmente visível, ou seja, tipo 3 ou tipo 4, terá que sofrer mais alguns testes para se verificar se é, parcial ou totalmente, invisível.

Deve ficar claro que testamos a invisibilidade da aresta, ou seja, esta será declarada visível apenas quando não encontrarmos nenhum motivo para declará-la invisível.

Torna-se evidente que tais testes precisam ser feitos em relação as faces do poliedro, como projetadas.

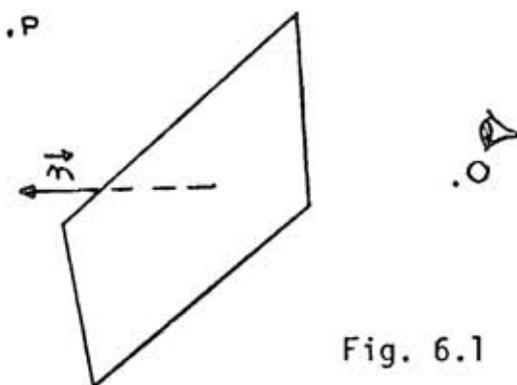
Uma propriedade de ocultação é, desde já imediata - não temos necessidade de realizar o teste com nenhuma face traseira (o que se torna evidente se nos lembramos de que as faces traseiras são, por sua vez, ocultas por faces frontais). Assim se testamos uma aresta com relação a todas as faces frontais que não a contêm, podemos ter certeza de que implicitamente já a testamos em relação a todas as faces do poliedro.

Alguns testes, bastante envolvidos, nos dirão se, ou que parte, não é ocultado.

6.2 - INTERPOSIÇÃO DE PLANOS

É evidente que, para uma aresta ter possibilidade de ser escondida por uma face, o plano que suporta a face deverá se interpor entre o observador e a aresta (ou pelo menos parte da aresta).

Para a verificação de tal interposição entre o observador e um qualquer ponto da reta, o critério é imediato. Basta verificar se a



face, que já vimos ser frontal em relação ao observador, é traseira em relação a um observador situado no ponto P a testar, utilizando-se o já conhecido processo do produto escalar.

Fig. 6.1

Estamos, porém interessados em verificar arestas, ou seja, segmentos de reta, e não pontos.

A solução adotada foi a de verificar os 2 extremos do segmento. Três casos poderão acontecer:

- 1). O plano não se interpõe entre a aresta e o observador. Neste caso não há possibilidade de ocultação da aresta pela face em teste.

- 2). O plano se interpõe entre a aresta interna e o observador. Neste caso, há a possibilidade de ocultação, e deveremos proceder a testes no plano de projeção, descritos na seção 6.4.

- 3). O plano se interpõe entre o observador e parte da aresta, ou seja, o segmento que a define fura o plano suporte da face em teste (mas não a parte deste plano que define a face. É evidente que uma aresta de outra face pode ter com esta apenas uma extremidade (ou vértice) comum.

O tratamento de tais casos constitui um procedimento preparatório para o teste na projeção, descrito na seção 6.4 e será definido a seguir.

6.3 - VERIFICAÇÃO DA POSIÇÃO RELATIVA DO TRAÇO DA ARESTA NO PLANO SUPORTE EM RELAÇÃO À FACE E AO OBSERVADOR.

Suponhamos as duas arestas e a face da figura abaixo:

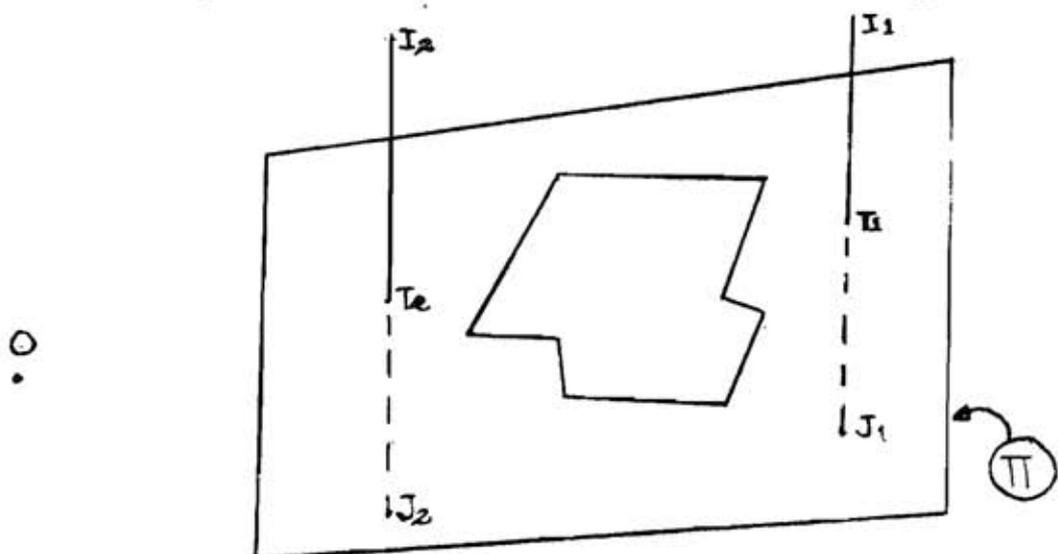


Fig. 6.2

É evidente que a aresta I_2J_2 será visível em relação à face de teste, mas a aresta I_1J_1 deverá ser testada na projeção. Mais ainda, não deveremos testar I_2J_2 na projeção, pois parte de sua projeção poderá ser coincidente com um segmento de reta contido na área (projetada) da face e teremos uma visibilidade falsa.

Aqui, porém, ao contrário do procedimento indicado na seção precedente, verificar se a aresta está "entre" o observador e a face, ou "atrás" da face, em relação ao observador, não é algo de percepção imediata e que se resolve com um mero produto escalar.

Suponhamos a figura abaixo,

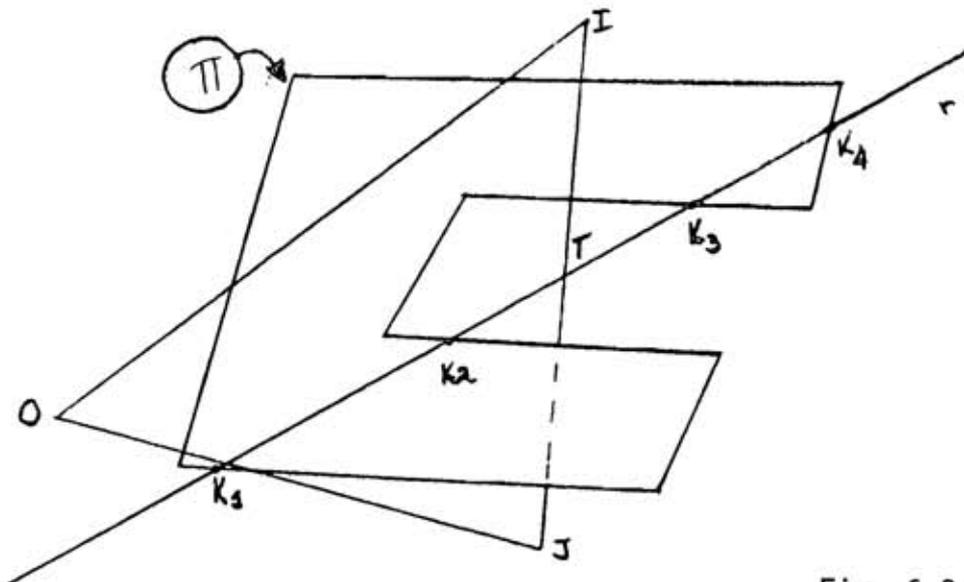


Fig. 6.3

onde I e J são os extremos da aresta, T e seu traço no plano π que suporta a face em teste, O o observador e r a reta intersecção dos planos π e do plano definido pela aresta IJ e o ponto O.

K_1, K_2, K_3 e K_4 são as intersecções de r com os segmentos que definem as arestas da face de teste, ou seja, que pertencem a r e interiores a uma qualquer aresta. O processo se resume em encontrar algum ponto K_i , e caso encontrado, qual, que se situe no semiplano que contém o ponto O e seja suportado pelo plano definido por OJI .

O teste na projeção deverá ser realizado sempre que houver um tal ponto K_i , porém, não necessariamente toda a aresta será verificada.

Se nos referimos ao segmento IT da figura anterior, vemos que o mesmo é inteiramente visível. Portanto, devemos testar a aresta apenas contra as arestas que produziram intersecção K_i do tipo referido acima, sob pena de cortar a aresta em outros pontos irrealis e esconder partes da mesma que são necessariamente visíveis.

6.3.1 - DETERMINAÇÃO DO TRAÇO DA ARESTA

O ponto T , traço da aresta no plano da face, é o ponto comum aos três seguintes planos - plano da face e os dois planos que formam a aresta em questão.

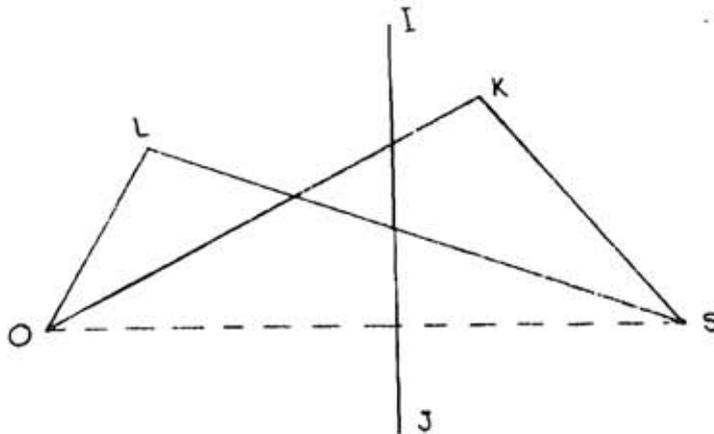
Já temos os vetores normais a todos os planos que suportam faces; a equação de cada um destes planos ficará determinada se encontrarmos o termo independente de cada uma delas. Isto é facilmente obtível substituindo-se numa equação genérica do 1º grau a 3 incógnitas os coefi

cientes das variáveis pelas componentes do vetor normal e as variáveis pelas coordenadas de um qualquer ponto do plano (i.e., um dos vertices da face que este plano suporta).

Uma vez obtidas as 3 equações, a solução simultânea das mesmas será o terno de coordenadas do ponto T.

6.3.2 - DETERMINAÇÃO DE PONTOS CONTIDOS EM UM SEMIPLANO

Observemos a figura abaixo:



Seja o semiplano do plano OIJ em questão delimitado pelo suporte do segmento IJ , e que contém O .

Seja o ponto S o simétrico, em relação à reta acima mencionada, do ponto O (um qualquer ponto conhecido do semiplano, no caso a posição do observador).

Suponhamos dois pontos, L e K , respectivamente pertencente e não pertencente ao semiplano, mas sempre em seu suporte OIJ .

É evidente que $|OL| < |LS|$ e $|OK| > |KS|$, o que nos fornece imediatamente o critério de escolha.

Naturalmente, o maior problema consiste em determinar o ponto S , simétrico de O , já que distâncias entre pontos são de determinação elementar.

6.3.3 - DETERMINAÇÃO DO PONTO SIMÉTRICO.

Seja a figura abaixo

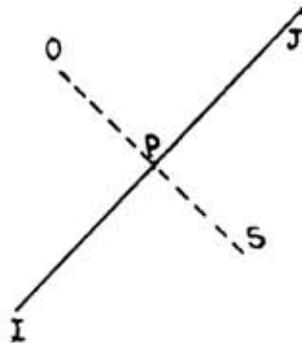


Fig. 6.5

Conhecido o ponto P , ponto médio da reta OS e que pertence a IJ , as coordenadas do ponto S são obtidas, a partir de P e O pelas fórmulas evidentes:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= 2P_x - O_x \\ S_y &= 2P_y - O_y \\ S_z &= 2P_z - O_z \end{aligned} \right\}$$

O problema se resume então em encontrar o ponto P .

Notemos que o ponto P pertence aos 3 planos seguintes.

- 1). Os dois planos que definem a aresta IJ , de equação conhecida.

2). Ao plano que contém O e é normal à reta suporte de IJ , cuja equação precisamos determinar.

Sabemos porém que a equação de um plano normal a uma reta que passa por um ponto \bar{e} é dada por

$$a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + c(z - \bar{z}) = 0$$

onde a , b e c são proporcionais aos cossenos diretores da reta com relação aos eixos x , y , e z respectivamente.

Assim, se fazemos

$$\left. \begin{aligned} a &= X_j - X_i \\ b &= Y_j - Y_i \\ c &= Z_j - Z_i \end{aligned} \right\}$$

temos imediatamente a equação do terceiro plano, e a resolução simultânea das 3 equações de planos nos dará o ponto P .

6.4 - RECOBRIMENTO POR FACE

Uma vez encontrado um plano que se interponha entre a aresta e o observador, resta investigar se a projeção, ressalvadas as arestas que estão atrás da face no plano de projeção, recobre, pelo menos em parte,

o segmento de reta que constitui a projeção da aresta no mesmo plano.

A realização de tal façanha se efetua de forma semelhante à verificação da concavidade de um particular vértice numa face (cap. 3).

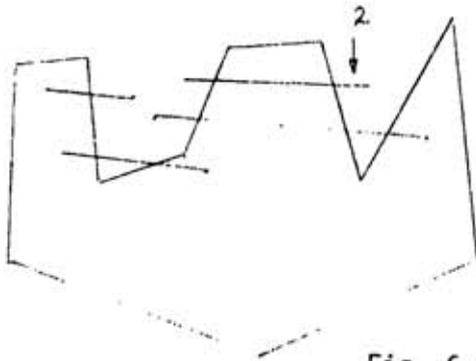


Fig. 6.6

Podemos ver, na figura ao lado, que se o prolongamento de uma aresta em um particular sentido é cortada por um número nulo ou par de arestas da face, o segmento com

preendido entre o vértice prolongado e a primeira interseção da aresta projetada com alguma aresta da face projetada (e caso não haja interseção no interior do segmento, o outro vértice) é visível. Caso seja ímpar, é invisível. Caso tenhamos mais de uma interseção dentro, é possível que mais de um segmento seja visível, como no caso da reta 2 acima. Neste caso, os segmentos em que se dividiu a aresta se alternam como visíveis e invisíveis, em relação àquela particular face, sendo que o primeiro segmento (que contém um vértice) será visível ou não, de acordo com o critério acima mencionado. Naturalmente, este manuseio pressupõe em algum ponto uma ordenação das interseções dentro do segmento de maneira que a alternância se verifique.

Dois casos particulares chamam de imediato a atenção.

1). O segmento tangencia um vértice da face projetada, dando duas interseções superpostas. Não constitui problema porque alternaremos com um segmento de comprimento nulo.

2). Um dos extremos do segmento coincide com um ponto de uma aresta da face projetada, ou com um de seus v̄ertices, produzindo assim um ponto duplo ou triplo que estragaria o nosso crit̄erio de ĩmpar-par e a nossa alternativa vis̄ivel-invis̄ivel.

No caso de ponto duplo, as redundâncias s̄ao simplesmente removidas, retirando-se um dos pontos do vetor que armazena as interseções, e recaĩmos nos crit̄erios normais.

Se detectamos, por̄em, um ponto triplo, o jeito ĩ usar o mesmo processo explicado no capĩtulo 3 de deslocar ligeiramente uma das extremidades da reta, e refazer. Este ĩ, aliás, um caso muito comum.

Voltando ao fato de possĩvelmente termos o segmento dividido em v̄arios outros, devemos guardar os considerados vis̄iveis em relação a esta face em uma pilha para podermos testar cada um deles com as demais.

O processo da pilha, permite inclusive que novas subdivisões, advindas de outros testes, sejam acrescentadas à fila de testes.

6.5 - ALGORITMO PARA O TESTE DE RECOBRIMENTO

Apresentamos a seguir uma descriç̄ao mais detalhada do estudo de visibilidade das arestas.

- 1). Procuramos uma aresta. Se não for das tipos 3 ou 4, procuramos a seguinte.
- 2). Obtemos seus extremos no espaço e no plano de projeção.
- 3). Fazemos uma varredura por todas as faces, abandonando faces traseiras ou que contenham a aresta.

A seguir verificamos se esta face é traseira em relação a pelo menos um dos extremos, da maneira já estudada no capítulo V. Em caso negativo, abandonamos também esta face.

- 4). A esta altura do procedimento são chegadas faces que oferecem possibilidade de ocultação e precisam ser testadas na projeção.

Assim ligamos o indicador de teste no plano e ramificamos para o procedimento de testes no plano (6.6).

Após o retorno, fazemos algumas verificações quanto ao número de pontos que retornaram como extremos de segmentos a traçar.

Se apenas dois, fazemos os extremos das arestas iguais a estes pontos e prosseguimos os testes com outros planos. Caso não haja mais planos, simplesmente traçamos.

Se não retornou nenhum ponto, vamos à pilha onde há segmentos da aresta a testar e vemos se há mais algum a testar com esta particular face e as seguintes. Se houver, fazemos os extremos iguais a estes dois pontos e reiteramos. Caso não haja nenhum, partimos para o teste de outra aresta.

Se retornaram mais de dois, ou seja, a aresta foi quebrada em vários segmentos, acrescentamos à pilha e, fazendo os extremos a testar iguais aos pontos do topo, passamos a testar este, e depois os outros, com o mesmo plano e todas as faces que se seguem.

Se porém chegamos a examinar todas as faces e não houve teste no plano, isto significa que a aresta é visível, já que não há plano que a possa ocultar. Neste caso, traçamos a aresta como tal.

6.6 - ALGORITMO DE TESTE NA PROJEÇÃO

Este procedimento recebe um par de pontos a testar contra um determinado polígono. Fazemos, portanto, uma varredura sobre todos os seus lados, invocando, pela ordem, os procedimentos abaixo, já descritos no capítulo 3.

- 1). Calculamos a intersecção das duas retas (lado e aresta).
- 2). Verificamos se pertence ao interior do lado. Caso pertença, colocamo-la em uma pilha (P_1).

- 3). Verificamos se pertence também ao interior da aresta, e caso afirmativo guardamo-la em uma segunda pilha (P2).
- 4). Percorrendo todos os pontos armazenados em P1 verificamos quantos deles pertencem a cada qual dos dois prolongamentos laterais da aresta, para o nosso critério de visibilidade.
- 5). Fazemos a seguir, um acrêscimo em P2 dos extremos da aresta e em seguida classificamos P2 numa ordem qualquer (tanto faz crescente ou decrescente) segundo as coordenadas x , ou, caso a aresta seja paralela ao eixo oy , segundo y , a fim de ter na pilha P2 um conjunto de pontos que realmente reproduza uma sucessão de pontos sobre o segmento projetado, (a fim de que cada par de pontos realmente seja um dos pequenos segmentos em que foi cortada a reta).
- 6). Como existe (já mencionada) a possibilidade de termos uma intersecção coincidente com um dos pontos extremos da reta (2 ou 3 pontos coincidentes), após o acrêscimo dos extremos e a classificação acima mencionada, é necessário chamar um procedimento que remova as redundâncias do topo e do fundo da pilha, se as houver, e contabilize quantos pontos foram removidos de cada extremidade.
- 7). Se houve um número par de intersecções em cada prolongamento da aresta, verificamos se houve 3 redundâncias em alguma extremidade da pilha.

Caso tenha havido, mudamos ligeiramente as coordenadas de um dos extremos da reta e refazemos todo o processo.

Como agora se trata de pontos a traçar, teríamos que restaurar as coordenadas destes pontos antes de traçá-los. Esta complicação adicional pode, contudo, ser contornada se a mudança de coordenadas for suficiente para remover a degenerescência dos critérios de visibilidade mas suficientemente pequena para ser inferior à precisão da máquina de traçamento.

Caso não tenha havido redundância tripla, retornamos, já que os dois extremos são visíveis.

8). Caso tenhamos um número ímpar de pontos em cada prolongamento da aresta, isto significa que ambos os pontos extremos originais da aresta são invisíveis, e por isto retiramos um ponto de cada extremo da fila, antes de retornar.

9). Sobra-nos o caso em que houve um número ímpar de intersecções em apenas um dos extremos originais da aresta. Como contabilizamos separadamente, sabemos exatamente qual o extremo a ser retirado. Se a pilha contém três elementos apenas, eliminamos o invisível e retornamos.

Caso contrário, retornamos com a pilha simplesmente.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

7.1 - IMPLEMENTAÇÃO.

O algoritmo descrito anteriormente foi implementado num computador B-6700 (Burroughs Co.), no INPE (Instituto de Pesquisas Espaciais).

A programação foi toda ela escrita em FORTRAN IV, "level H," resultando numa massa de aproximadamente 900 cartões, incluindo cerca de 100 de comentários. Foi levada ainda em conta a nossa "plotter", Calcomp mod. 565, "off-line" e todo o conjunto de rotinas básicas para ela desenvolvido.

O programa ocupa 2141 palavras de 48 bits e, para o último exemplo apresentado (Apêndice B) o espaço para matrizes é de 6.300 palavras. Cada uma das vistas, no referido exemplo, necessitou de um tempo de processamento de 20 segundos em média.

Muito embora tenha sido implementado para o B-6700, com uma cuidadosa segmentação e a mudança de alguns parâmetros transferidos para subrotinas, o programa em questão poderá rodar em computadores menores, co

mo o B-3500, por exemplo, muito embora o dispêndio de tempo seja bastante maior.

7.2 - EFICIÊNCIA.

Nossa única referência de tempo para termos de comparação é o citado na ref. 4 - de uma média de 8 segundos por vista, em um computador CDC 6600.

Nosso programa tem um tempo médio de 20 segundos por vista, para um sólido de complexidade equivalente, em um computador B-6700, cerca de 10 vezes mais lento, pelo menos, indicando assim um ganho aproximado de 4 vezes.

7.3 - POSSIBILIDADES DE EXTENSÃO.

O algoritmo é suficientemente simples para que seja estendido de modo a abranger furos em faces e linhas (elementos de fachada, no caso arquitetônico).

O mesmo algoritmo, se aplicado duas vezes, poderá determinar regiões de luz e sombra, se encarmos uma fonte pontual como um segundo observador.

Finalmente, uma segunda etapa poderia estender os conceitos

de maneira a abranger também superfícies curvas, por exemplo, cônicas de revolução.

Uma outra idéia interessante seria a de, uma vez determinada uma vista, partir para as demais, muito próximas, por um processo de perturbações, o que diminuiria sensivelmente a cintilação no caso de estudo de movimento em terminal de vídeo (vide ref. 8).

BIBLIOGRAFIA

- 1) BOUKNIGHT, W.J. - "A PROCEDURE FOR GENERATION OF THREE-DIMENSIONAL HALF-TONED COMPUTER GRAPHICS PRESENTATIONS".
Com. ACM. Vol., 13, nº 9, pag. 527, Sept. 1970.
- 2) ENCARNAÇÃO, J. e GILOI, W. - "PRADIS - AN ADVANCING PROGRAMMING SYSTEM FOR 3-D-DISPLAY".
AFIPS, Spring joint Computer Conference, 1972, pag. 985.
- 3) HANDLER, W. e WEIZENBAUM, J. (Editores) - "DISPLAY USE FOR MAN-MACHINE DIALOG".
CARL HANSER VERLAG, Munique, 1972.
- 4) FREEMAN, H. e LOUTRELL, P.P. - "AN ALGORITHM FOR THE SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL HIDDEN-LINE PROBLEM".
IEEE - Trans. on Elect. Comp. Vol. EC-16, pag. 784, Dec. 1967.
- 5) LOUTRELL, P.P. - "A SOLUTION TO THE HIDDEN-LINE PROBLEM FOR COMPUTER-DRAWN POLIHEDRA".
IEEE - Trans. on Computers, Vol. C-19, nº 3, pag. 205, March 1970.
- 6) PEREIRA, J.A.G. e BUSS FILHO, A.C. - "REPRESENTAÇÃO EM PERSPECTIVA DE FUNÇÕES A DUAS VARIÁVEIS".
INPE-264-RI/53 - Relatório interno-INPE, Nov. 1972.
- 7) KUBERT, B., SZAB, J. e GUGLIERI, S. - "THE PERSPECTIVE REPRESENTATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES".
J. ACM. - Vol. 15, nº 2, April 1968.
- 8) MATSUSHITA, Y. - "HIDDEN LINES ELIMINATION FOR A ROTATING OBJECT".
Com. ACM. Vol. 15, nº 4, pag. 245, April 1972.

9) DUDA, R.O. e HART, P.E. - "USE OF HOUGH TRANSFORMATION TO DETECT LINES AND CURVES IN PICTURES".

Com. ACM. Vol. 15, nº 1, pag. 11, Jan. 1972.

10) COMBA, P.G. - "A PROCEDURE FOR DETECTING INTERSECTION OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS".

J. ACM. - Vol. 15, pag. 354, July 1968.

APÊNDICE A

NOTAÇÃO EMPREGADA

A menos de referências explícita no texto, a notação obedece à seguinte convenção:

- 1) Letras latinas:- maiúsculas representam pontos.
 - maiúsculas seguidas de um subscrito representam coordenadas de pontos.
 - maiúsculas seguidas de dois subscritos representam diferenças de coordenadas de dois pontos.

- 2) Letras latinas minúsculas e gregas representam constantes e variáveis de um modo geral, a exceção da letra π que representa planos.

- 3) O sinal \wedge indica o operador "e" lógico.
 - O sinal \times indica produto vetorial.
 - O sinal \cdot indica produto escalar.

APÊNDICE B

EXEMPLO

Os dados devem ser organizados da seguinte forma.

Para cada face, entrar com os seguintes cartões:

- 1) Um cartão especificando número de arestas de cada face, e o número de arestas do buraco da face, se houver.

FORMATO 2I2.

- 2) Quantos cartões necessários para se especificar os ternos coordenados de cada vértice da face, até dois pontos por cartão.

FORMATO 6F10.0

Após todos os conjuntos de cartões de cada face, colocar um cartão em branco, que indica fim dos dados do poliedro.

Depois do cartão em branco acima mencionado, colocar os cartões que especificarão a vista que se deseja, contendo as seguintes informações:

- 1) ângulo de elevação do observador (em relação ao eixo z positivo).

- 2) ângulo de posicionamento do observador no plano xy (em relação ao eixo x positivo).
- 3) distância do observador à origem.
- 4) distância do plano de projeção ao observador.
- 5) largura máxima do desenho, em polegadas.
- 6) altura máxima do desenho, em polegadas.
- 7) ordenada x do ponto inferior esquerdo do desenho, em polegadas.
- 8) ordenada y do ponto inferior esquerdo do desenho, em polegadas.

FORMATO 8F10.0

Usar tantos cartões quantas vistas se quiser.

O programa é construído de modo a evitar que erros redundem em processamento inútil.

Assim, se um dado vértice pertencer a menos de 3 faces, uma mensagem de erro será emitida e não haverá prosseguimento.

O mesmo acontecerá se uma aresta pertencer a menos ou

a mais que duas faces.

Segue-se um exemplo dos cartões de entrada para um cubo, de faces paralelas aos eixos, com um vértice na origem, e um exemplo mais complicado, completo, com figuras e listagens produzidas, bem como listagem dos dados.

EXEMPLO DE DADOS
DE ENTRADA PARA
UM CUBO

4								
1.	1.	1.	1.	1.	1.	0.		
1.	0.	0.	0.	1.	0.	1.		
4								
1.	1.	1.	0.	1.	1.	1.		
0.	1.	0.	1.	1.	1.	0.		
4								
0.	1.	0.	0.	0.	1.	1.		
0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.		
4								
0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.		
1.	0.	1.	1.	1.	0.	0.		
4								
1.	1.	1.	1.	1.	0.	1.		
0.	0.	1.	0.	0.	1.	1.		
4								
0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.		
1.	1.	0.	0.	0.	1.	0.		
75.	30.	35.	25.	9.	7.	1.	1.	

Fig. B.1

DADOS DE SAIDA
PARA O CUBO

MM	NFACE					
PX	PY	PZ	NFACES	NAREST	NINDEX	NINDIC
0.0000	0.0000	0.0000	1	4	0	0
1.0000	1.0000	1.0000	6	4	7	2
1.0000	1.0000	0.0000	11	4	10	2
1.0000	0.0000	0.0000	16	4	20	4
1.0000	0.0000	1.0000	21	4	19	4
0.0000	0.0000	0.0000	26	4	0	0
1.0000	1.0000	1.0000	0	0	22	5
0.0000	1.0000	1.0000	0	0	13	3
0.0000	1.0000	0.0000	0	0	12	3
1.0000	1.0000	0.0000	0	0	29	6
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	1.0000	0.0000	0	0	30	6
0.0000	1.0000	1.0000	0	0	25	5
0.0000	0.0000	1.0000	0	0	18	4
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	17	4
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	27	6
0.0000	0.0000	1.0000	0	0	24	5
1.0000	0.0000	1.0000	0	0	23	5
1.0000	0.0000	0.0000	0	0	28	6
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
1.0000	1.0000	1.0000	0	0	2	1
1.0000	0.0000	1.0000	0	0	5	1
0.0000	0.0000	1.0000	0	0	14	3
0.0000	1.0000	1.0000	0	0	8	2
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	15	3
1.0000	0.0000	0.0000	0	0	4	1
1.0000	1.0000	0.0000	0	0	3	1
0.0000	1.0000	0.0000	0	0	9	2

Fig. B.2

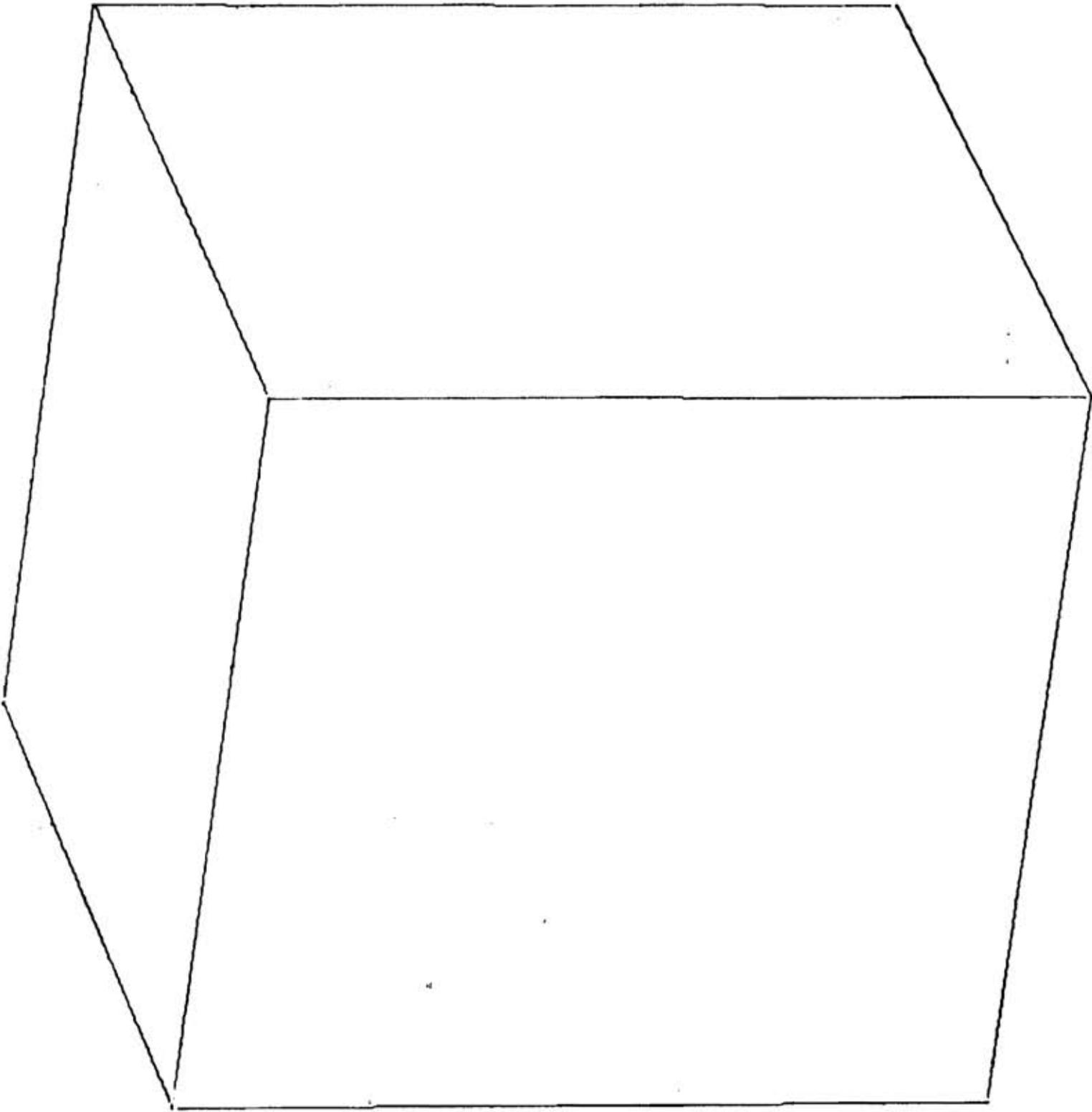


Fig. B.3

EXEMPLO DE DADOS ERRADOS
E MENSAGEM DE
ERRO

CONJUNTO DE POLIEDROS
DADOS DE ENTRADA

6					
6.	5.	0.	9.	5.	0.
10.5	7.5	0.	9.	10.	0.
6.	10.	0.	4.5	7.5	0.
3					
7.5	7.5	6.	4.5	7.5	0.
6.	10.	0.			
3					
7.5	7.5	6.	6.	10.	0.
9.	10.	0.			
3					
7.5	7.5	6.	9.	10.	0.
10.5	7.5	0.			
3					
7.5	7.5	6.	10.5	7.5	0.
9.	5.	0.			
3					
7.5	7.5	6.	9.	5.	0.
6.	5.	0.			
3					
7.5	7.5	6.	6.	5.	0.
4.5	7.5	0.			
4					
10.	10.	0.	13.	10.	0.
13.	13.	0.	10.	13.	0.
4					
10.	13.	3.	13.	13.	3.
13.	10.	3.	10.	10.	3.
4					
13.	10.	0.	10.	10.	0.
10.	10.	3.	13.	10.	3.
4					
10.	13.	0.	13.	13.	0.
13.	13.	3.	10.	13.	3.
4					
13.	13.	0.	13.	10.	0.
13.	10.	3.	13.	13.	3.
4					
10.	13.	0.	10.	13.	3.
10.	10.	3.	10.	10.	0.
4					
20.	8.	0.	14.	8.	0.
14.	5.	0.	20.	5.	0.
4					
20.	5.	2.	14.	5.	2.
14.	8.	2.	20.	8.	2.
4					
20.	5.	0.	14.	5.	0.
14.	5.	2.	20.	5.	2.

Fig. B.5

4							
14.	8.	0.	20.	8.	0.		
20.	8.	2.	14.	8.	2.		
4							
20.	8.	0.	20.	5.	0.		
20.	5.	2.	20.	8.	2.		
4							
14.	5.	0.	14.	8.	0.		
14.	8.	2.	14.	5.	2.		
75.	30.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	60.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	90.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	120.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	150.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	180.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	210.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	240.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	270.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	300.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	330.	35.	25.	9.	7.	1.	1.
75.	360.	35.	25.	9.	7.	1.	1.

Fig. B.5 (cont.)

CONJUNTO DE POLIEDROS
LISTAGEM DE SAIDA

MH NFACE

41 19

Px	PY	PZ	NFALES	NAREST	NINDEX	NINDIC
0.0000	0.0000	0.0000	1	6	0	0
6.0000	5.0000	0.0000	8	3	27	6
9.0000	5.0000	0.0000	12	3	23	5
10.5000	7.5000	0.0000	16	3	19	4
9.0000	10.0000	0.0000	20	3	15	3
6.0000	10.0000	0.0000	24	3	11	2
4.5000	7.5000	0.0000	28	3	10	2
0.0000	0.0000	0.0000	32	4	0	0
7.5000	7.5000	6.0000	37	4	13	3
4.5000	7.5000	0.0000	42	4	31	7
6.0000	10.0000	0.0000	47	4	14	3
0.0000	0.0000	0.0000	52	4	0	0
7.5000	7.5000	6.0000	57	4	17	4
6.0000	10.0000	0.0000	62	4	6	1
9.0000	10.0000	0.0000	67	4	18	4
0.0000	0.0000	0.0000	72	4	0	0
7.5000	7.5000	6.0000	77	4	21	5
9.0000	10.0000	0.0000	82	4	5	1
10.5000	7.5000	0.0000	87	4	22	5
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
7.5000	7.5000	6.0000	0	0	25	6
10.5000	7.5000	0.0000	0	0	4	1
9.0000	5.0000	0.0000	0	0	26	6
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
7.5000	7.5000	6.0000	0	0	29	7
9.0000	5.0000	0.0000	0	0	3	1
6.0000	5.0000	0.0000	0	0	30	7
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
7.5000	7.5000	6.0000	0	0	9	2
6.0000	5.0000	0.0000	0	0	2	1
4.5000	7.5000	0.0000	0	0	7	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
10.0000	10.0000	0.0000	0	0	44	10
13.0000	10.0000	0.0000	0	0	43	10
13.0000	13.0000	0.0000	0	0	49	11
10.0000	13.0000	0.0000	0	0	48	11
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
10.0000	13.0000	3.0000	0	0	51	11
13.0000	13.0000	3.0000	0	0	50	11
13.0000	10.0000	3.0000	0	0	46	10
10.0000	10.0000	3.0000	0	0	45	10
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
13.0000	10.0000	0.0000	0	0	54	12
10.0000	10.0000	0.0000	0	0	61	13
10.0000	10.0000	3.0000	0	0	60	13
13.0000	10.0000	3.0000	0	0	55	12
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
10.0000	13.0000	0.0000	0	0	58	13
13.0000	13.0000	0.0000	0	0	53	12

13.0000	13.0000	3.0000	0	0	56	12
10.0000	13.0000	3.0000	0	0	59	13
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
13.0000	13.0000	0.0000	0	0	35	8
13.0000	10.0000	0.0000	0	0	34	8
13.0000	10.0000	3.0000	0	0	40	9
13.0000	13.0000	3.0000	0	0	39	9
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
10.0000	13.0000	0.0000	0	0	36	8
10.0000	13.0000	3.0000	0	0	38	9
10.0000	10.0000	3.0000	0	0	41	9
10.0000	10.0000	0.0000	0	0	33	8
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
20.0000	8.0000	0.0000	0	0	79	17
14.0000	8.0000	0.0000	0	0	78	17
14.0000	5.0000	0.0000	0	0	74	16
20.0000	5.0000	0.0000	0	0	73	16
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
20.0000	5.0000	2.0000	0	0	76	16
14.0000	5.0000	2.0000	0	0	75	16
14.0000	8.0000	2.0000	0	0	81	17
20.0000	8.0000	2.0000	0	0	80	17
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
20.0000	5.0000	0.0000	0	0	84	18
14.0000	5.0000	0.0000	0	0	88	19
14.0000	5.0000	2.0000	0	0	91	19
20.0000	5.0000	2.0000	0	0	85	18
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
14.0000	8.0000	0.0000	0	0	89	19
20.0000	8.0000	0.0000	0	0	83	18
20.0000	8.0000	2.0000	0	0	86	18
14.0000	8.0000	2.0000	0	0	90	19
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
20.0000	8.0000	0.0000	0	0	63	14
20.0000	5.0000	0.0000	0	0	66	14
20.0000	5.0000	2.0000	0	0	68	15
20.0000	8.0000	2.0000	0	0	71	15
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
14.0000	5.0000	0.0000	0	0	65	14
14.0000	8.0000	0.0000	0	0	64	14
14.0000	8.0000	2.0000	0	0	70	15
14.0000	5.0000	2.0000	0	0	69	15

Fig. B.6

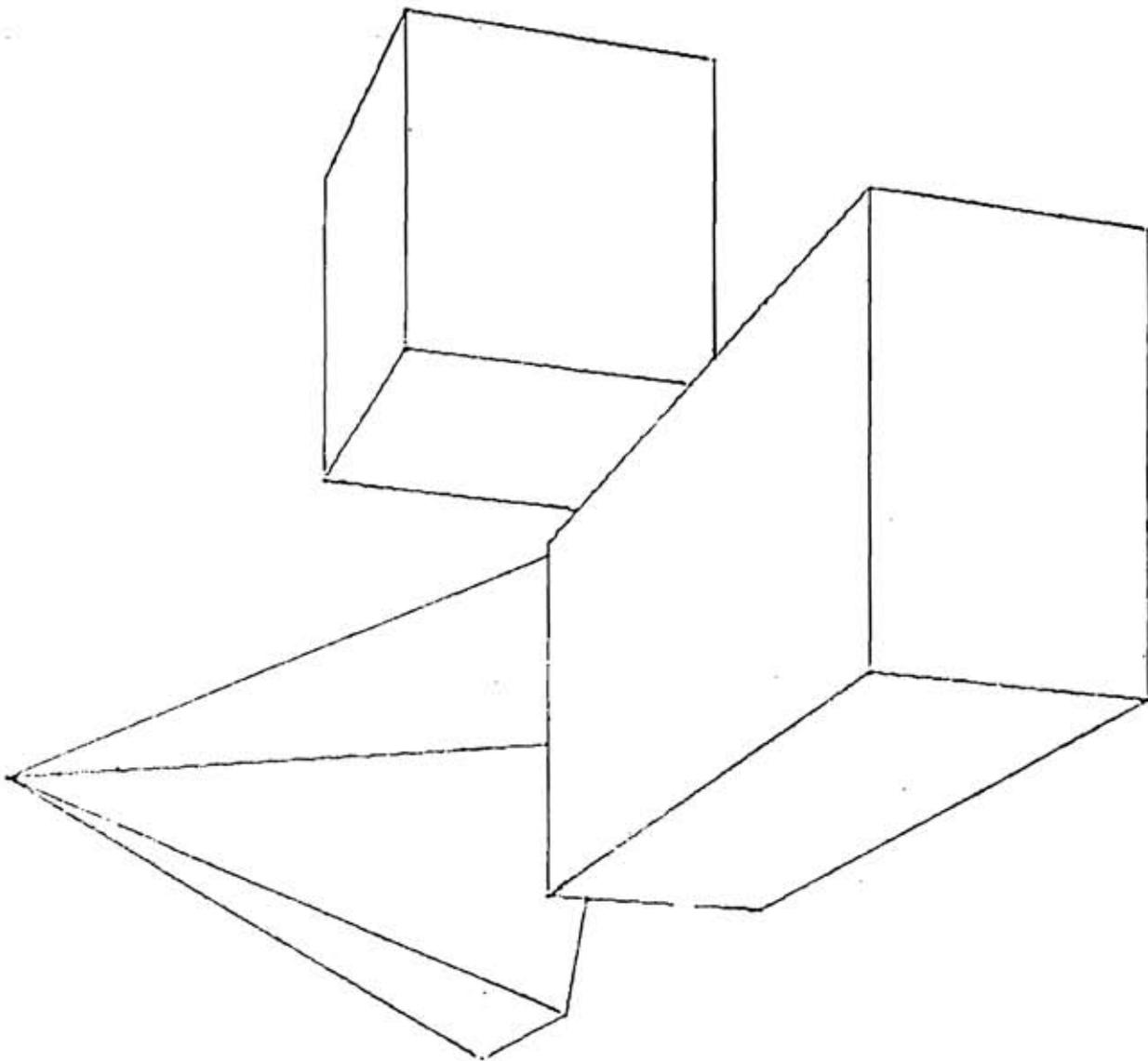
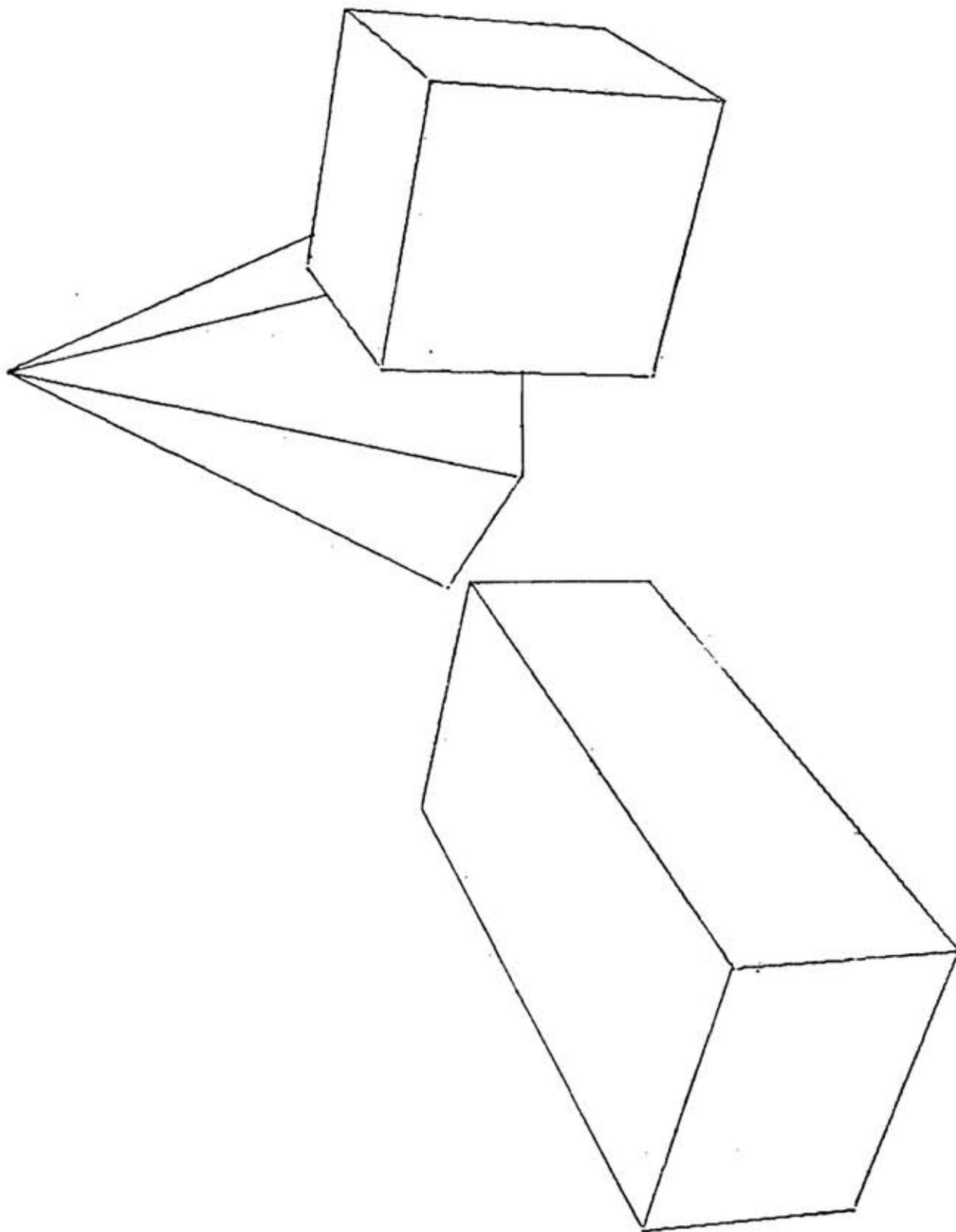
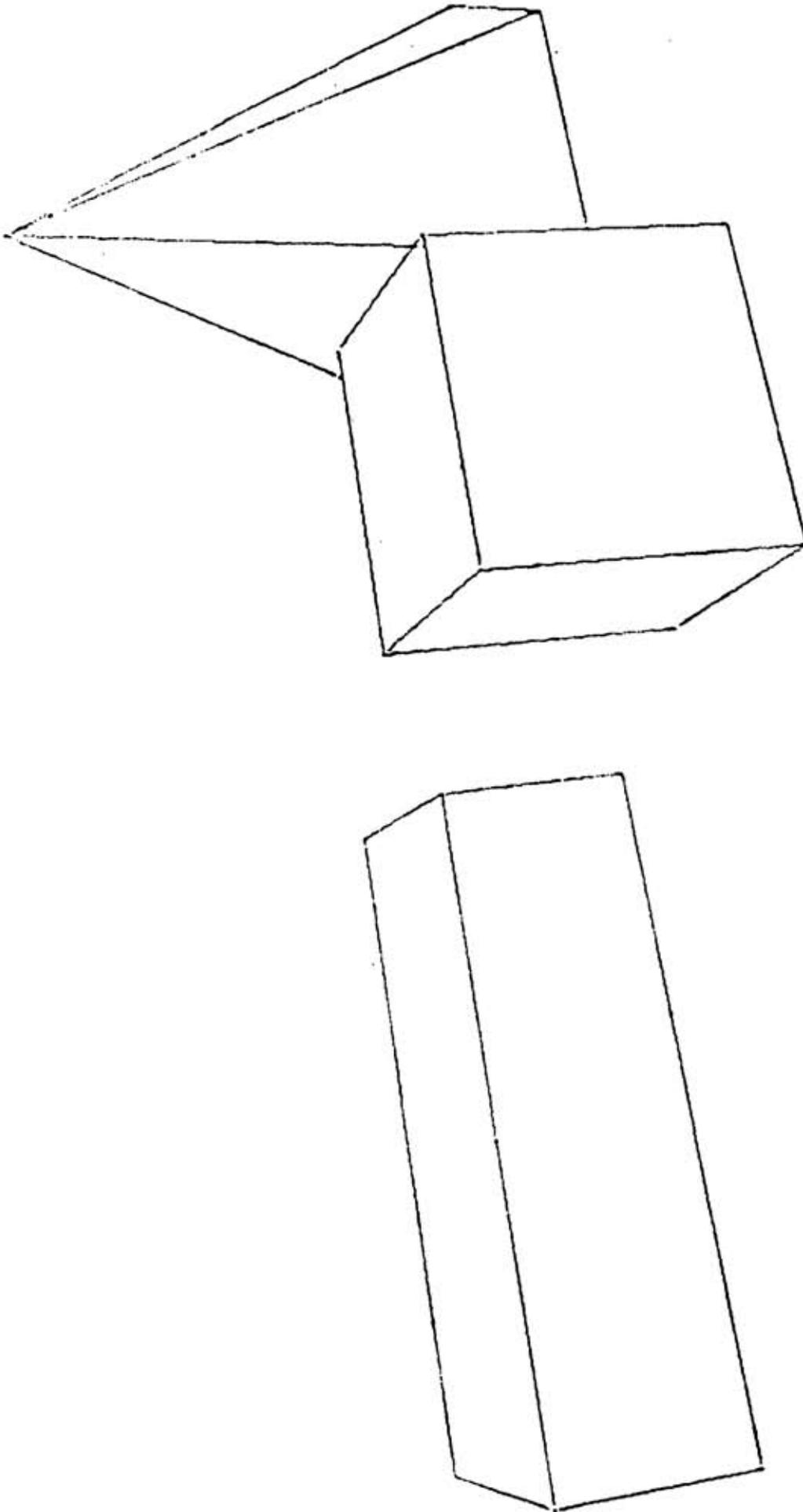


Fig. B.7 (a)





609

Fig. B.7 (c)

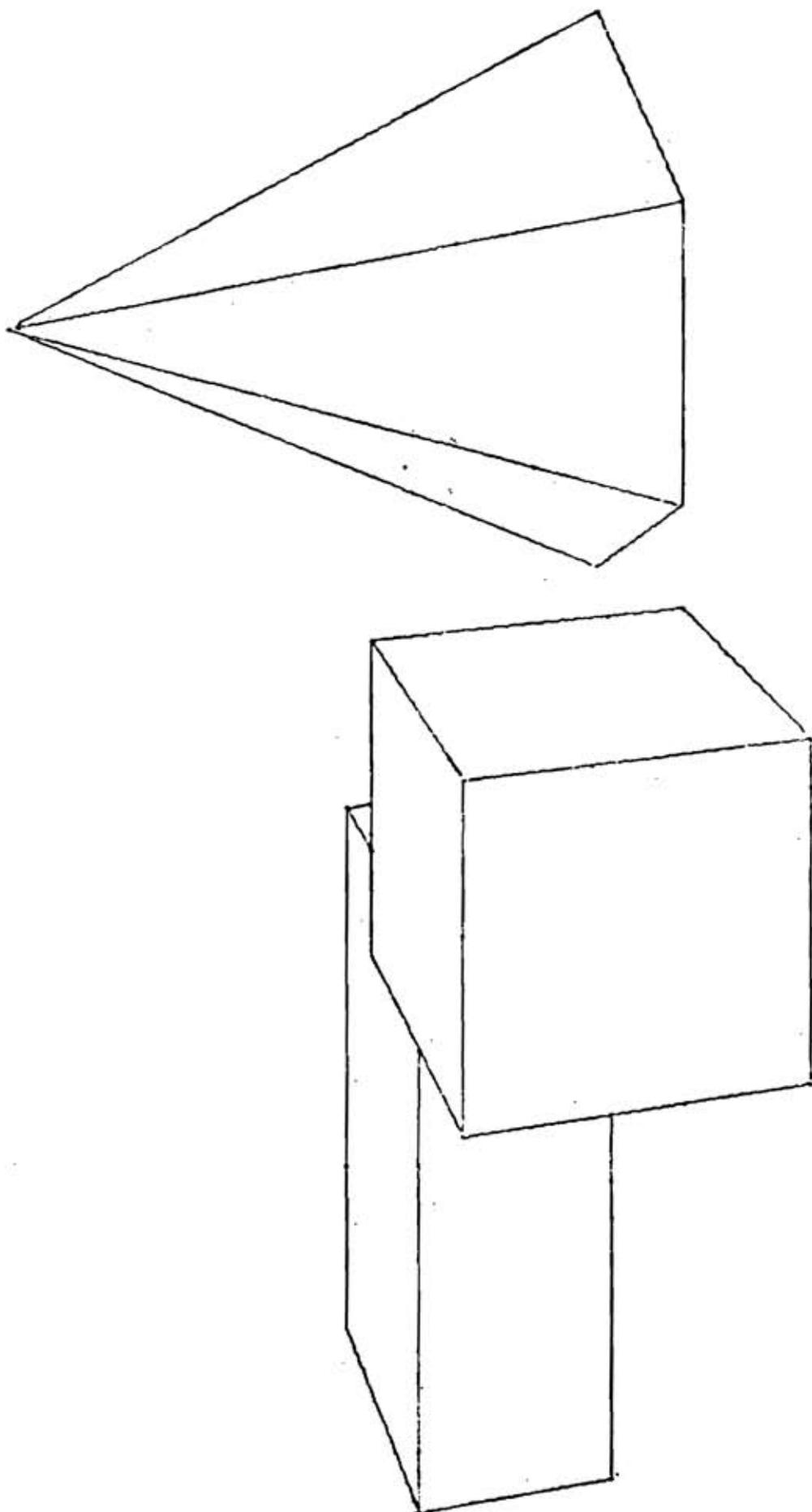
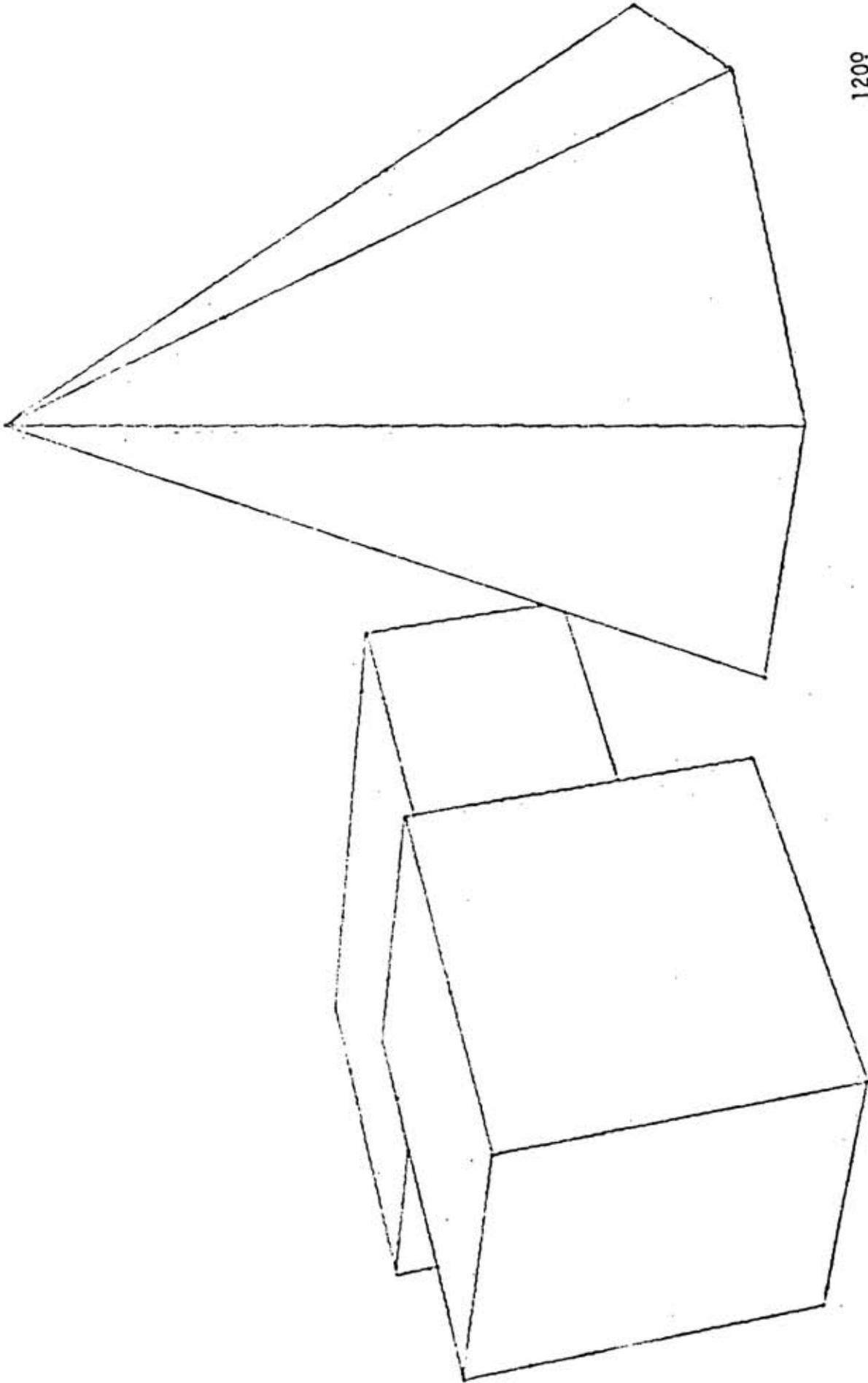


Fig. B.7 (d)



1209

Fig. B.7 (e)

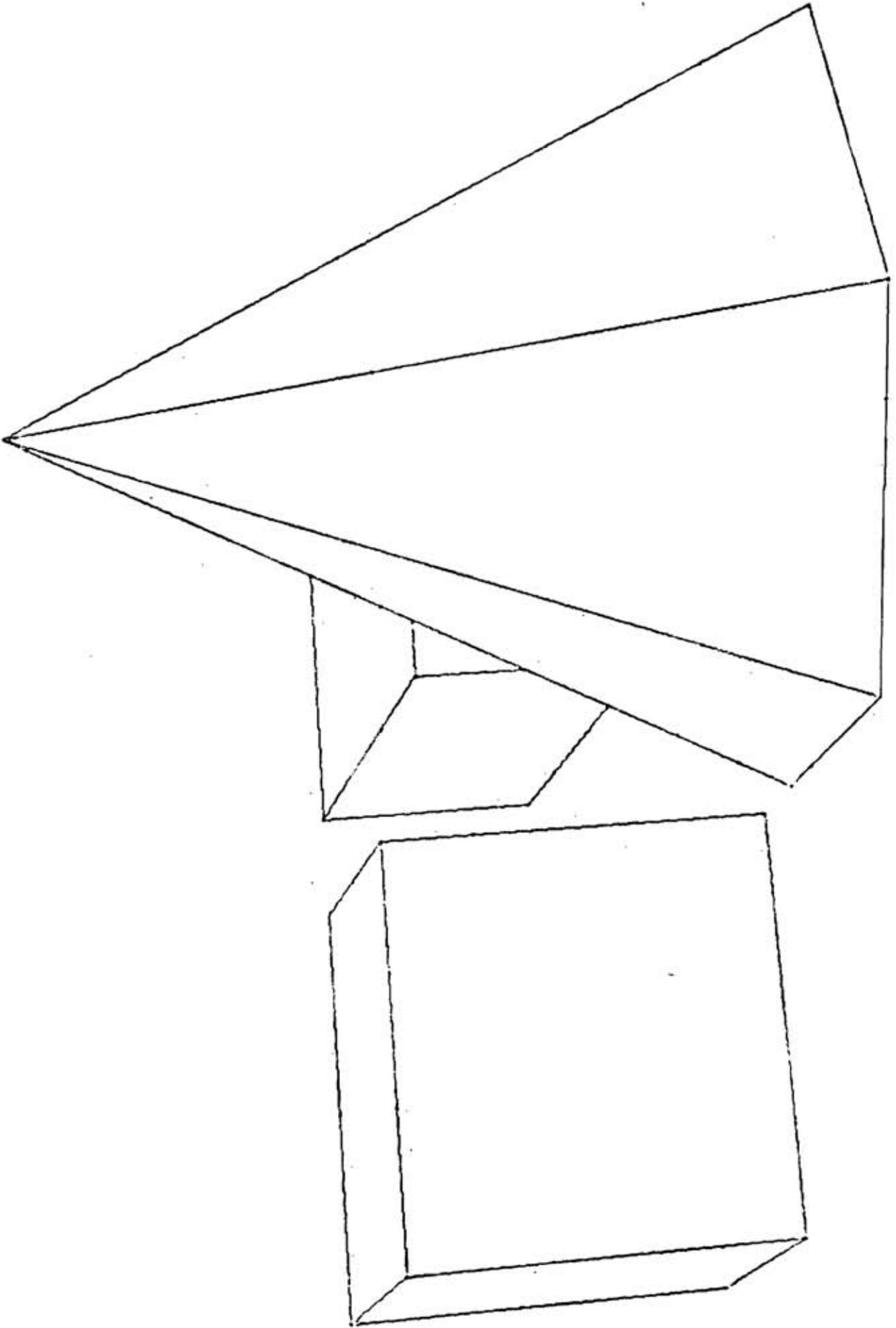
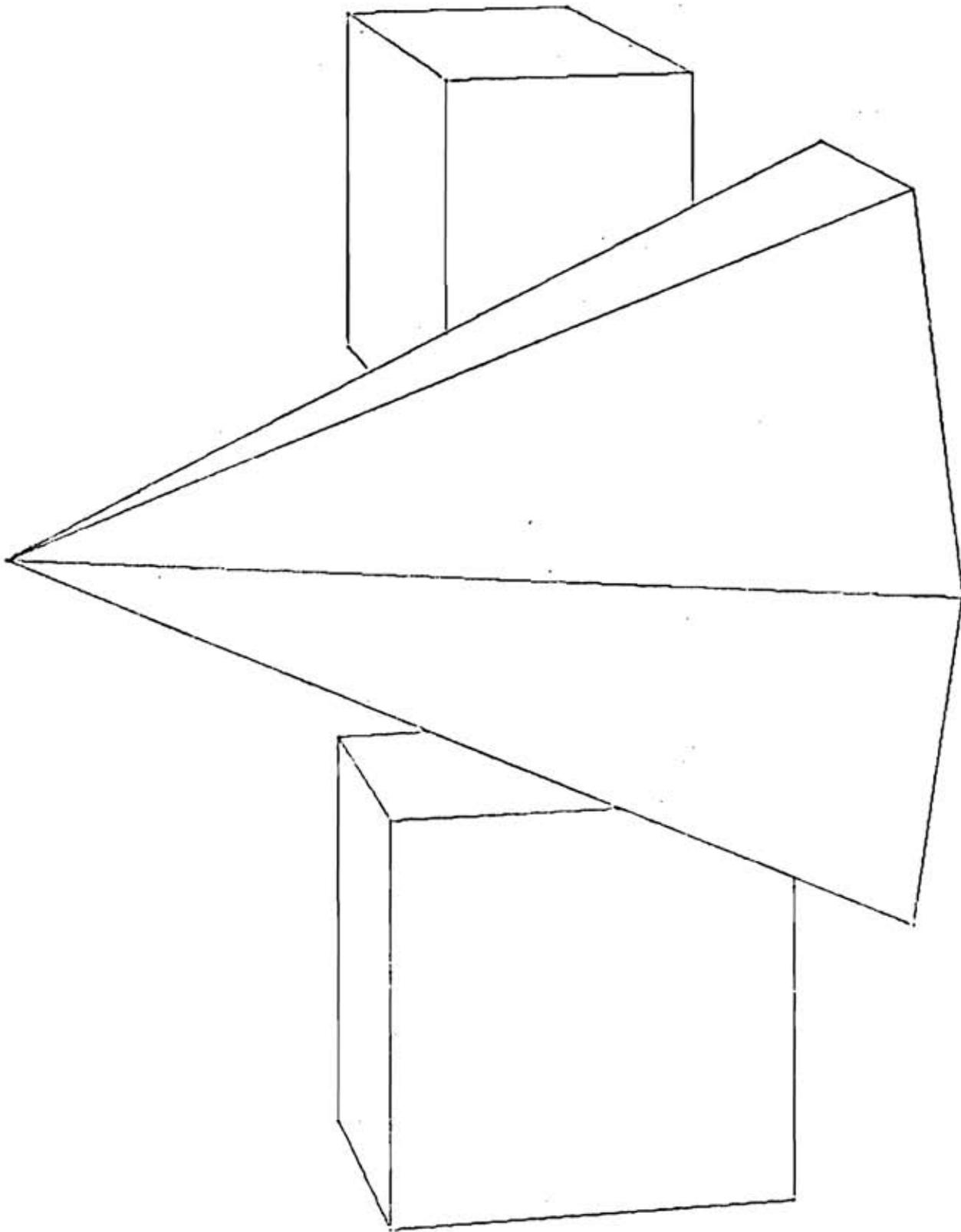
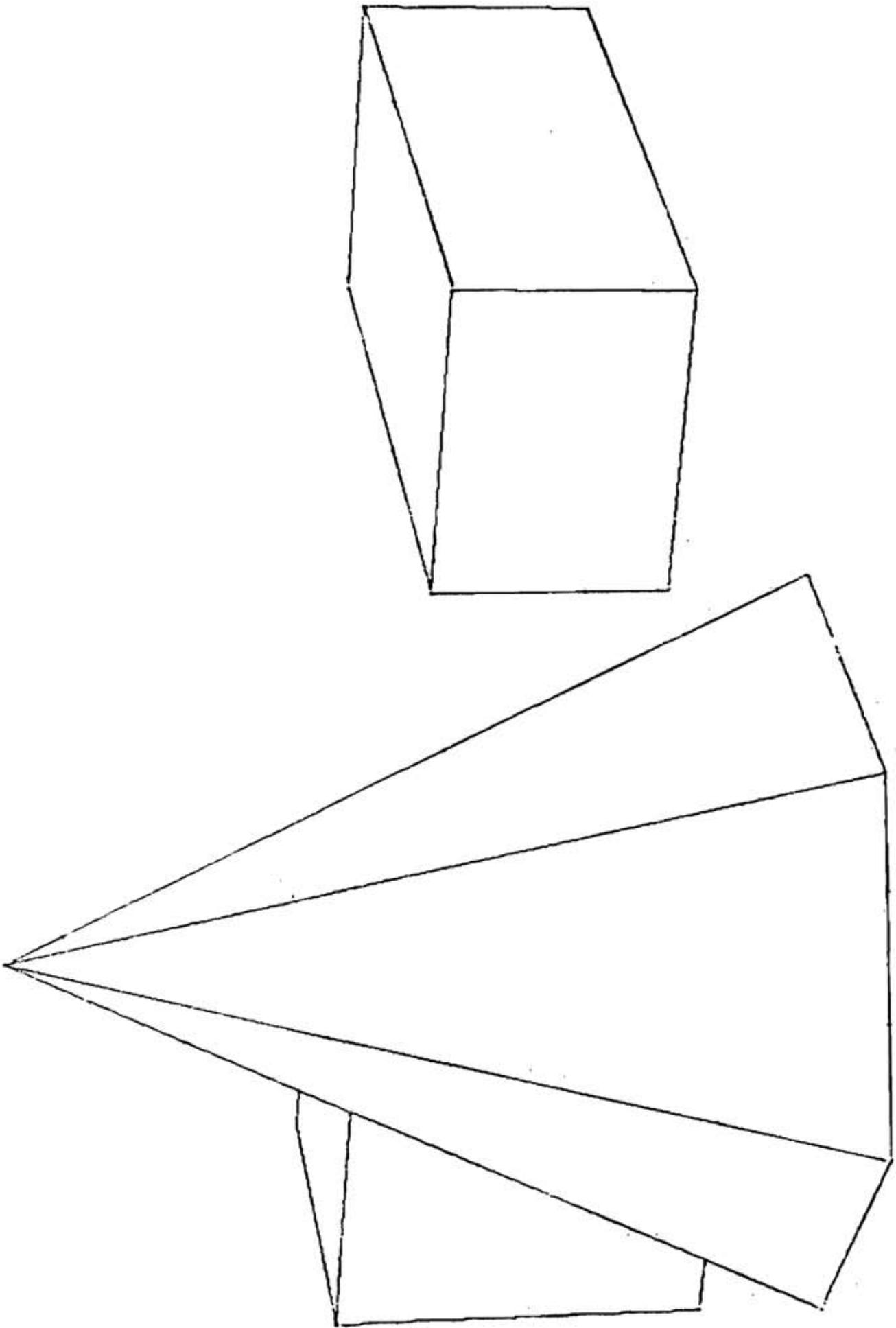


Fig. B.7 (f)



1809

Fig. B.7 (g)



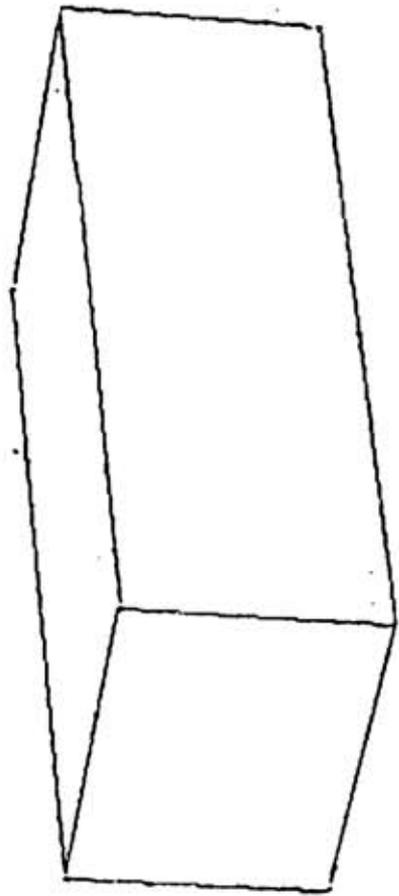
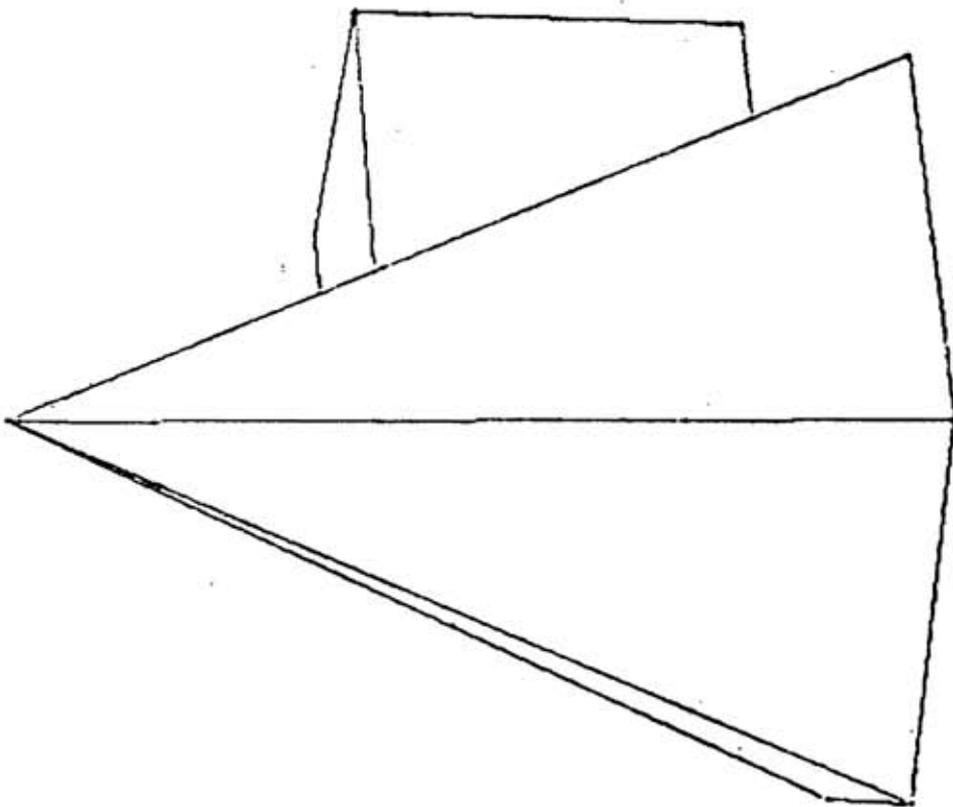
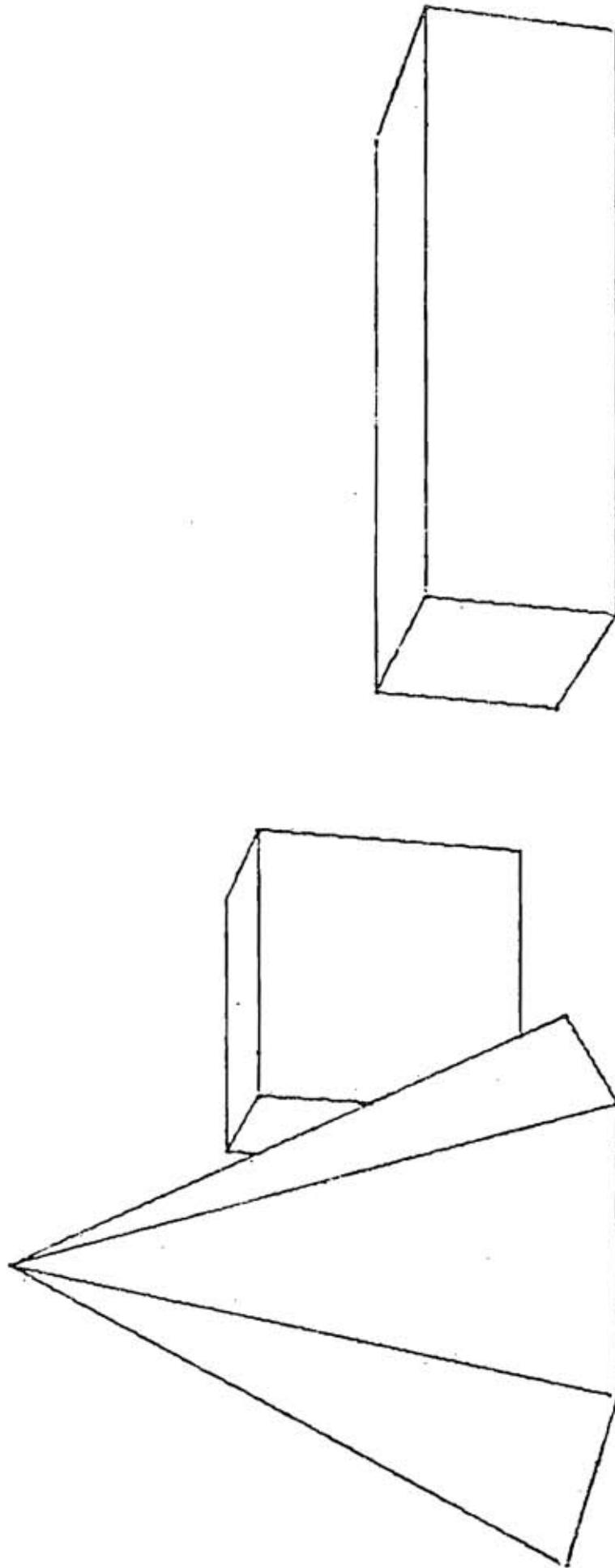


Fig. B.7 (i)

2409



2709

Fig. B.7 (j)

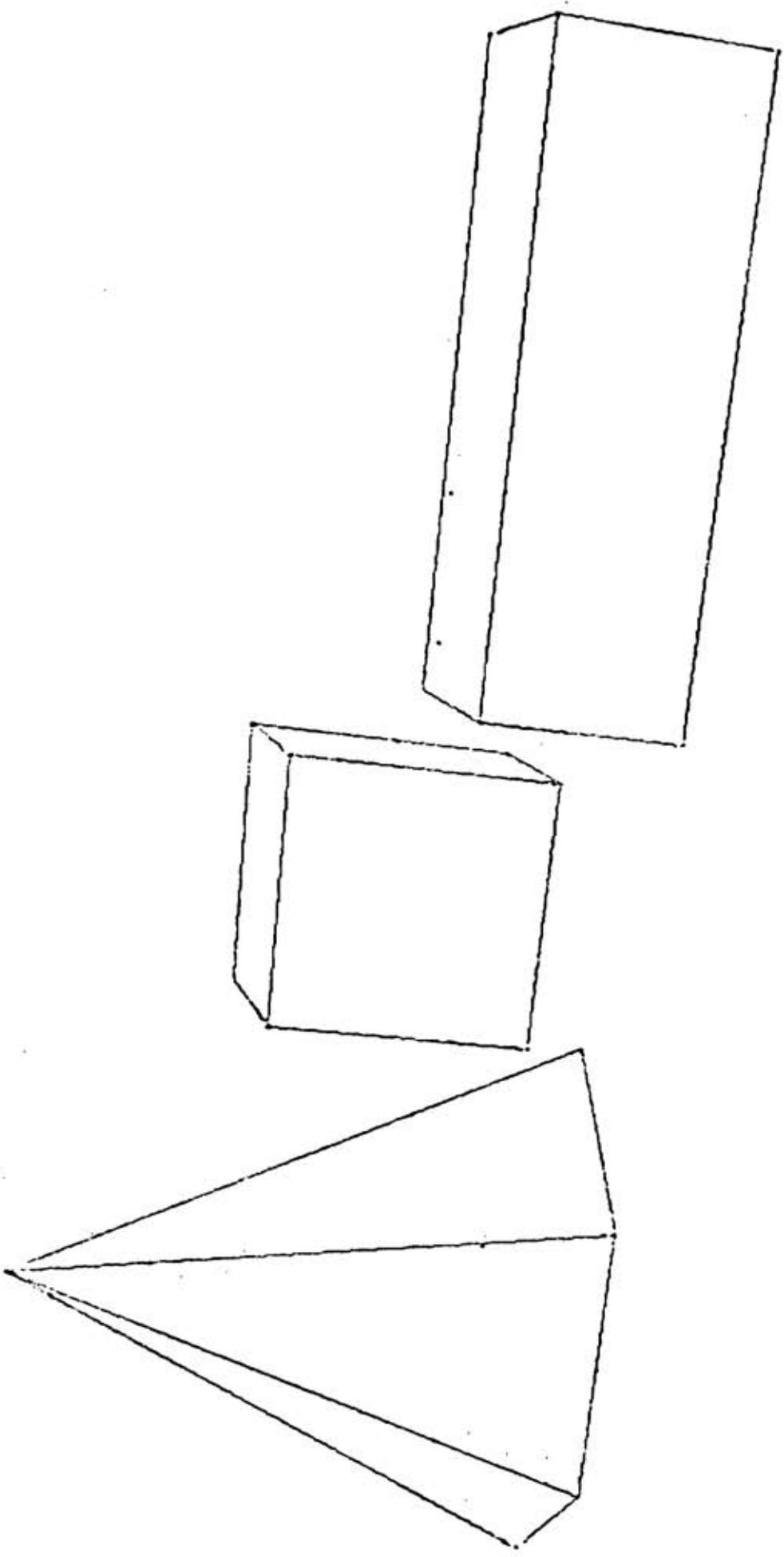
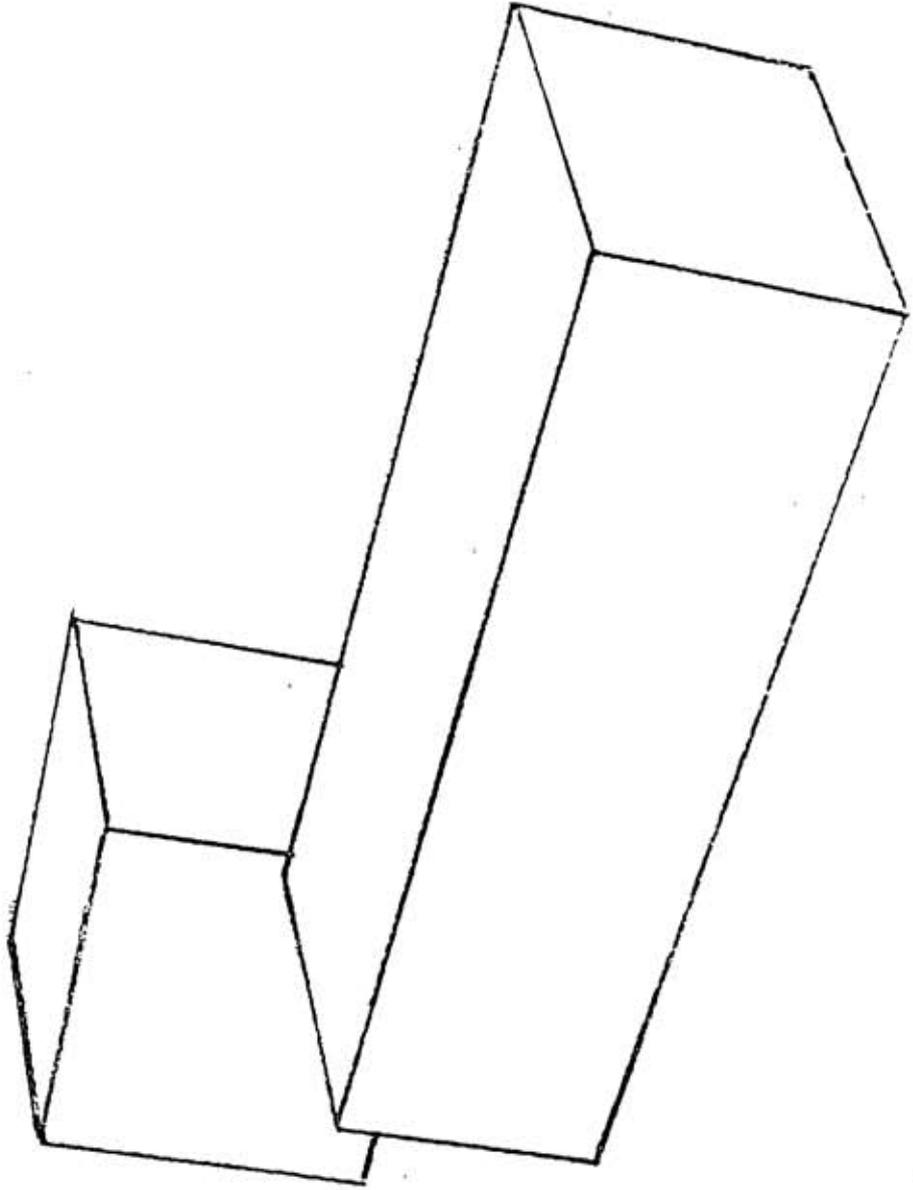
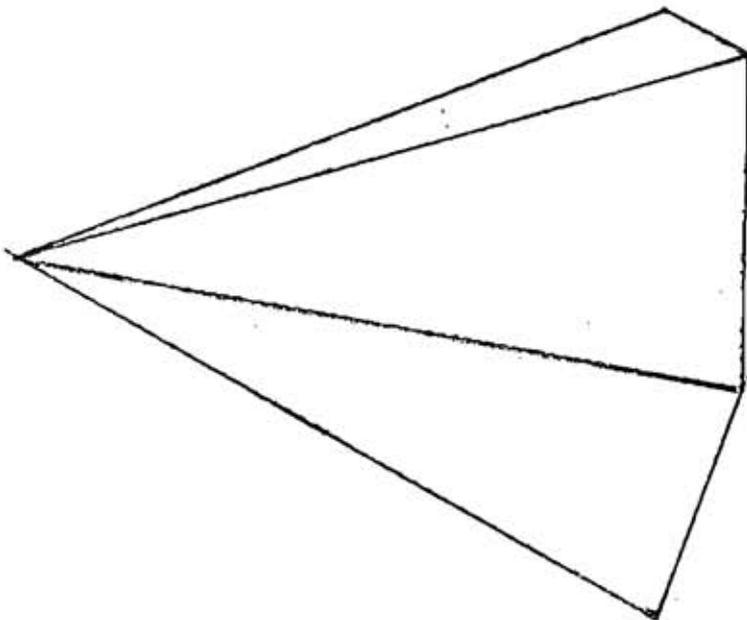


Fig. B.7 (1)

3009



3309

Fig. B.7 (m)

POLIEDRO CÔNCAVO
DADOS DE ENTRADA

19 ⁴					
0.	0.	2.	1.	0.	2.
1.	0.	3.	2.	0.	3.
2.	0.	2.	3.	0.	2.
3.	0.	3.	4.	0.	3.
4.	0.	2.	5.	0.	2.
5.	0.	3.	6.	0.	3.
6.	0.	1.	5.	0.	1.
4.	0.	0.	3.	0.	1.
2.	0.	0.	1.	0.	1.
0.	0.	1.	1.25	0.	2.25
1.75	0.	2.25	1.75	0.	2.75
1.25	0.	2.75			
9					
0.	3.	1.	1.	3.	1.
2.	3.	0.	3.	3.	1.
4.	3.	0.	5.	3.	1.
6.	3.	1.	6.	3.	2.5
0.	3.	2.5			
4					
0.	2.	2.5	6.	2.	2.5
6.	2.	2.	0.	2.	2.
4					
0.	3.	2.5	6.	3.	2.5
6.	2.	2.5	0.	2.	2.5
14					
0.	2.	2.	6.	2.	2.
6.	1.	2.	5.	1.	2.
5.	0.	2.	4.	0.	2.
4.	1.	2.	3.	1.	2.
3.	0.	2.	2.	0.	2.
2.	1.	2.	1.	1.	2.
1.	0.	2.	0.	0.	2.
4					
1.	1.	3.	2.	1.	3.
2.	0.	3.	1.	0.	3.
4					
3.	1.	3.	4.	1.	3.
4.	0.	3.	3.	0.	3.
4					
5.	1.	3.	6.	1.	3.
6.	0.	3.	5.	0.	3.
4					
0.	0.	1.	1.	0.	1.
1.	3.	1.	0.	3.	1.
4					
5.	0.	1.	6.	0.	1.
6.	3.	1.	5.	3.	1.
4					
4.	0.	3.	4.	1.	3.

Fig. B.8

4.	1.	2.	4.	0.	2.
⁴ 2.	0.	3.	2.	1.	3.
2.	1.	2.	2.	0.	2.
⁴ 5.	0.	2.	5.	1.	2.
5.	1.	3.	5.	0.	3.
⁴ 3.	0.	2.	3.	1.	2.
3.	1.	3.	3.	0.	3.
⁴ 1.	0.	2.	1.	1.	2.
1.	1.	3.	1.	0.	3.
⁴ ⁴ 1.	1.	2.	2.	1.	2.
2.	1.	3.	1.	1.	3.
1.25	1.	2.75	1.75	1.	2.75
1.75	1.	2.25	1.25	1.	2.25
⁴ 5.	1.	2.	4.	1.	2.
4.	1.	3.	3.	1.	3.
⁴ 5.	1.	2.	6.	1.	2.
6.	1.	3.	5.	1.	3.
⁶ 0.	0.	1.	0.	3.	1.
0.	3.	2.5	0.	2.	2.5
0.	2.	2.	0.	0.	2.
⁸ 6.	0.	3.	6.	1.	3.
6.	1.	2.	6.	2.	2.
6.	2.	2.5	6.	3.	2.5
6.	3.	1.	6.	0.	1.
⁴ 5.	0.	1.	5.	3.	1.
4.	3.	0.	4.	0.	0.
⁴ 3.	0.	1.	3.	3.	1.
2.	3.	0.	2.	0.	0.
⁴ 4.	0.	0.	4.	3.	0.
3.	3.	1.	3.	0.	1.
⁴ 2.	0.	0.	2.	3.	0.
1.	3.	1.	1.	0.	1.

Fig. B.8 (cont.)

4					
1.25	0.	2.25	1.25	0.	2.75
1.25	1.	2.75	1.25	1.	2.25
4					
1.75	0.	2.75	1.75	0.	2.25
1.75	1.	2.25	1.75	1.	2.75
4					
1.75	0.	2.25	1.25	0.	2.25
1.25	1.	2.25	1.75	1.	2.25
4					
1.25	0.	2.75	1.75	0.	2.75
1.75	1.	2.75	1.25	1.	2.75

PONTOS							
75.	30.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	60.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	90.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	120.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	150.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	180.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	210.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	240.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	270.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	300.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	330.	15.	10.	9.	7.	1.	1.
75.	360.	15.	10.	9.	7.	1.	1.

Fig. B.8 (cont.)

POLIEDRO CÔNCAVO
LISTAGEM DE SAIDA

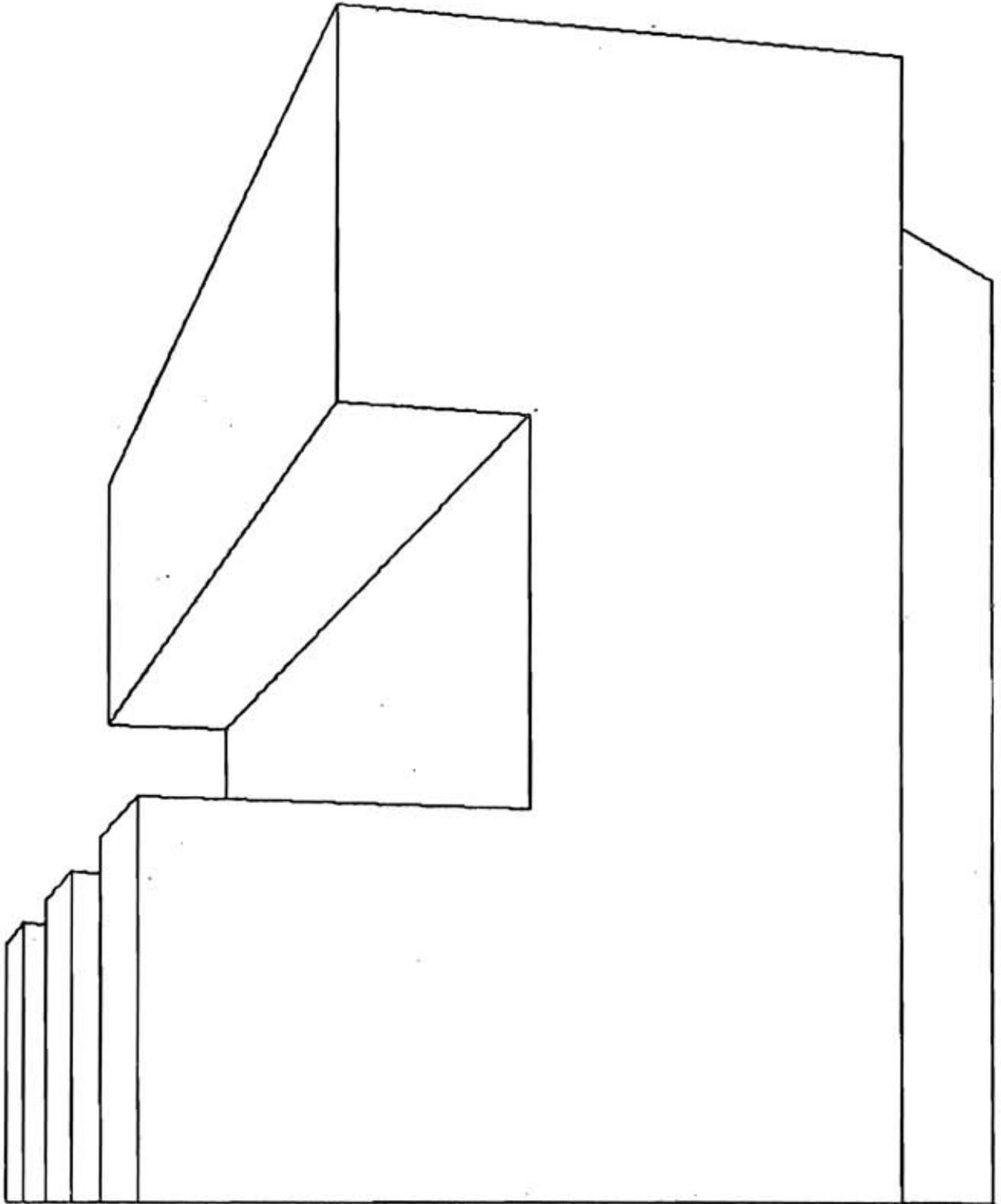
MM NFACE
156 24

PX	PY	PZ	NFACES	NAREST	NINDEX	NINDIC
0.0000	0.0000	0.0000	1	19	0	0
0.0000	0.0000	2.0000	21	9	55	5
1.0000	0.0000	2.0000	31	4	54	5
1.0000	0.0000	3.0000	36	4	60	6
2.0000	0.0000	3.0000	41	14	59	6
2.0000	0.0000	2.0000	56	4	51	5
3.0000	0.0000	2.0000	61	4	50	5
3.0000	0.0000	3.0000	66	4	65	7
4.0000	0.0000	3.0000	71	4	64	7
4.0000	0.0000	2.0000	76	4	47	5
5.0000	0.0000	2.0000	81	4	46	5
5.0000	0.0000	3.0000	86	4	70	6
6.0000	0.0000	3.0000	91	4	69	8
6.0000	0.0000	1.0000	96	4	78	10
5.0000	1.0000	1.0000	101	4	77	10
4.0000	1.0000	0.0000	106	4	141	21
3.0000	1.0000	1.0000	111	4	143	22
2.0000	1.0000	0.0000	116	4	146	22
1.0000	0.0000	1.0000	121	6	73	9
0.0000	0.0000	1.0000	128	8	72	9
0.0000	0.0000	0.0000	137	4	0	0
0.0000	3.0000	1.0000	142	4	75	9
1.0000	3.0000	1.0000	147	4	74	9
2.0000	3.0000	0.0000	152	4	145	22
3.0000	3.0000	1.0000	0	0	144	22
4.0000	3.0000	0.0000	0	0	140	21
5.0000	3.0000	1.0000	0	0	60	16
6.0000	3.0000	1.0000	0	0	79	10
6.0000	3.0000	2.5000	0	0	38	4
0.0000	3.0000	2.5000	0	0	37	4
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	2.0000	2.5000	0	0	40	4
5.0000	2.0000	2.5000	0	0	39	4
5.0000	2.0000	2.0000	0	0	43	5
7.0000	2.0000	2.0000	0	0	42	5
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	3.0000	2.5000	0	0	124	19
6.0000	3.0000	2.5000	0	0	134	20
5.0000	2.0000	2.5000	0	0	133	20
0.0000	2.0000	2.5000	0	0	125	19
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	2.0000	2.0000	0	0	126	19
6.0000	2.0000	2.0000	0	0	132	20
6.0000	1.0000	2.0000	0	0	118	18
5.0000	1.0000	2.0000	0	0	93	13
5.0000	0.0000	2.0000	0	0	92	13
4.0000	0.0000	2.0000	0	0	85	11
4.0000	1.0000	2.0000	0	0	84	11
3.0000	1.0000	2.0000	0	0	98	14

3.0000	0.0000	2.0000	0	0	97	14
2.0000	0.0000	2.0000	0	0	90	12
2.0000	1.0000	2.0000	0	0	89	12
1.0000	1.0000	2.0000	0	0	103	15
1.0000	0.0000	2.0000	0	0	102	15
1.0000	0.0000	2.0000	0	0	127	19
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
1.0000	1.0000	1.0000	0	0	104	15
2.0000	1.0000	3.0000	0	0	88	12
2.0000	0.0000	3.0000	0	0	87	12
1.0000	0.0000	3.0000	0	0	105	15
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
1.0000	1.0000	3.0000	0	0	99	14
0.0000	1.0000	3.0000	0	0	63	11
0.0000	0.0000	3.0000	0	0	82	11
3.0000	0.0000	3.0000	0	0	100	14
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
5.0000	1.0000	3.0000	0	0	94	13
6.0000	1.0000	3.0000	0	0	119	16
6.0000	0.0000	3.0000	0	0	127	20
5.0000	0.0000	3.0000	0	0	95	13
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	1.0000	0	0	122	19
1.0000	0.0000	1.0000	0	0	156	24
1.0000	0.0000	1.0000	0	0	155	24
0.0000	1.0000	1.0000	0	0	123	19
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
5.0000	0.0000	1.0000	0	0	138	21
5.0000	0.0000	1.0000	0	0	136	20
5.0000	3.0000	1.0000	0	0	135	20
5.0000	3.0000	1.0000	0	0	130	21
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	9	1
4.0000	1.0000	3.0000	0	0	114	17
4.0000	1.0000	2.0000	0	0	113	17
4.0000	0.0000	2.0000	0	0	10	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
2.0000	0.0000	3.0000	0	0	5	1
2.0000	1.0000	1.0000	0	0	109	16
2.0000	1.0000	2.0000	0	0	108	16
2.0000	0.0000	2.0000	0	0	6	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
5.0000	0.0000	2.0000	0	0	11	1
5.0000	1.0000	2.0000	0	0	117	16
5.0000	1.0000	3.0000	0	0	120	18
5.0000	0.0000	3.0000	0	0	12	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
3.0000	0.0000	2.0000	0	0	7	1
3.0000	1.0000	2.0000	0	0	112	17
3.0000	1.0000	3.0000	0	0	115	17
3.0000	0.0000	3.0000	0	0	0	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
1.0000	0.0000	2.0000	0	0	3	1
1.0000	1.0000	2.0000	0	0	107	16
1.0000	1.0000	3.0000	0	0	110	16
1.0000	0.0000	3.0000	0	0	4	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
1.0000	1.0000	2.0000	0	0	53	5
2.0000	1.0000	2.0000	0	0	52	5
2.0000	1.0000	3.0000	0	0	58	6
1.0000	1.0000	3.0000	0	0	57	6

0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
3.0000	1.0000	2.0000	0	0	49	5
4.0000	1.0000	2.0000	0	0	43	5
4.0000	1.0000	3.0000	0	0	63	7
3.0000	1.0000	3.0000	0	0	62	7
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
5.0000	1.0000	2.0000	0	0	45	5
6.0000	1.0000	2.0000	0	0	131	20
6.0000	1.0000	3.0000	0	0	130	20
5.0000	1.0000	3.0000	0	0	67	8
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	1.0000	0	0	20	1
0.0000	3.0000	1.0000	0	0	22	2
0.0000	3.0000	2.5000	0	0	30	2
0.0000	2.0000	2.5000	0	0	32	3
0.0000	2.0000	2.0000	0	0	35	3
0.0000	0.0000	2.0000	0	0	2	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
6.0000	0.0000	3.0000	0	0	13	1
6.0000	1.0000	3.0000	0	0	68	8
5.0000	1.0000	2.0000	0	0	44	5
6.0000	2.0000	2.0000	0	0	34	3
6.0000	2.0000	2.5000	0	0	33	3
6.0000	3.0000	2.5000	0	0	29	2
6.0000	3.0000	1.0000	0	0	28	2
6.0000	0.0000	1.0000	0	0	14	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
5.0000	0.0000	1.0000	0	0	15	1
5.0000	3.0000	1.0000	0	0	27	2
4.0000	3.0000	0.0000	0	0	149	23
4.0000	0.0000	0.0000	0	0	148	23
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
3.0000	0.0000	1.0000	0	0	151	23
3.0000	3.0000	1.0000	0	0	150	23
2.0000	3.0000	0.0000	0	0	154	24
2.0000	0.0000	0.0000	0	0	153	24
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
4.0000	0.0000	0.0000	0	0	16	1
4.0000	3.0000	0.0000	0	0	26	2
3.0000	3.0000	1.0000	0	0	25	2
3.0000	0.0000	1.0000	0	0	17	1
0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
2.0000	0.0000	0.0000	0	0	18	1
2.0000	3.0000	0.0000	0	0	24	2
1.0000	3.0000	1.0000	0	0	23	2
1.0000	0.0000	1.0000	0	0	19	1

Fig. B.9



09

Fig. 10 (a)

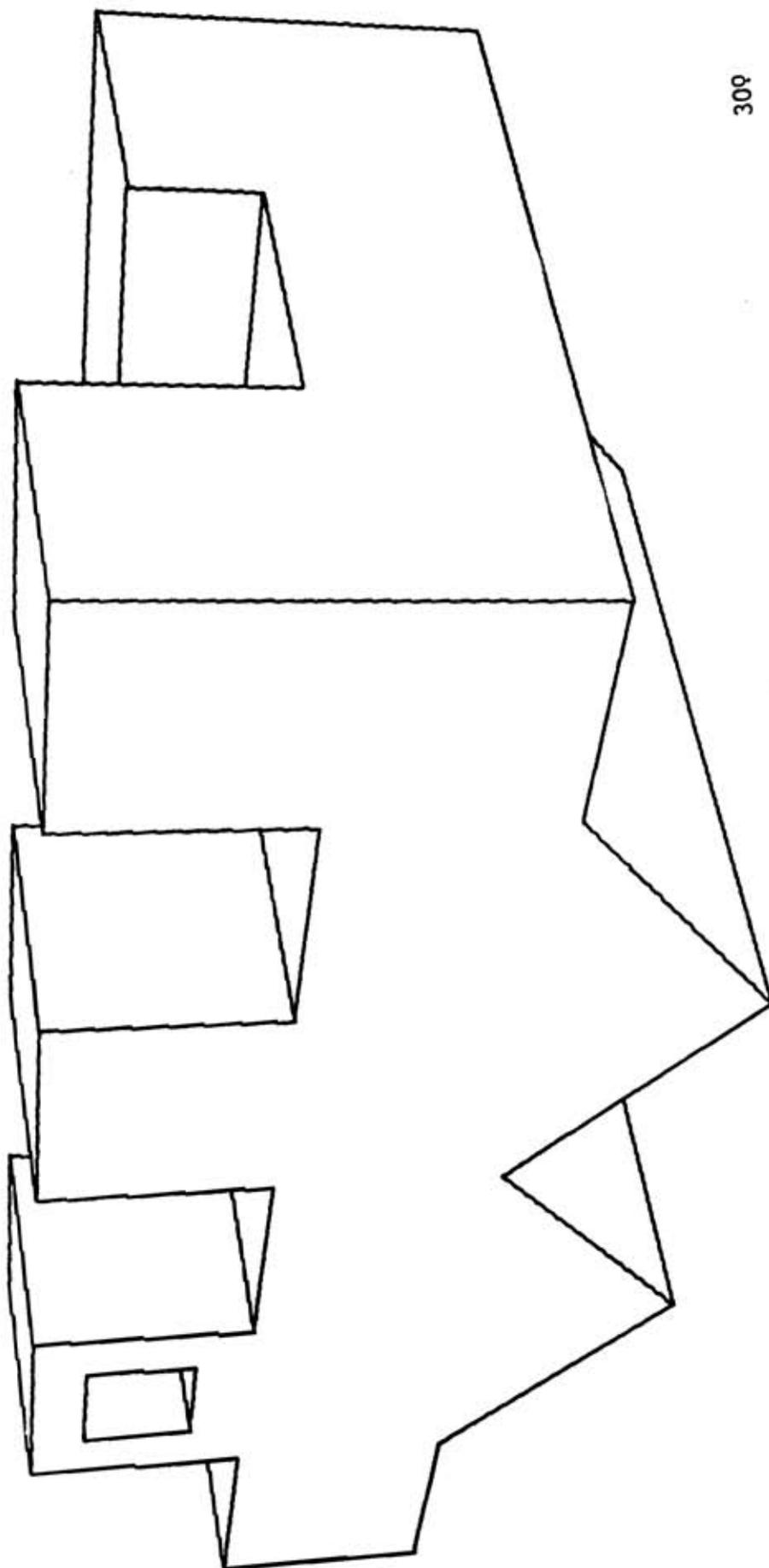
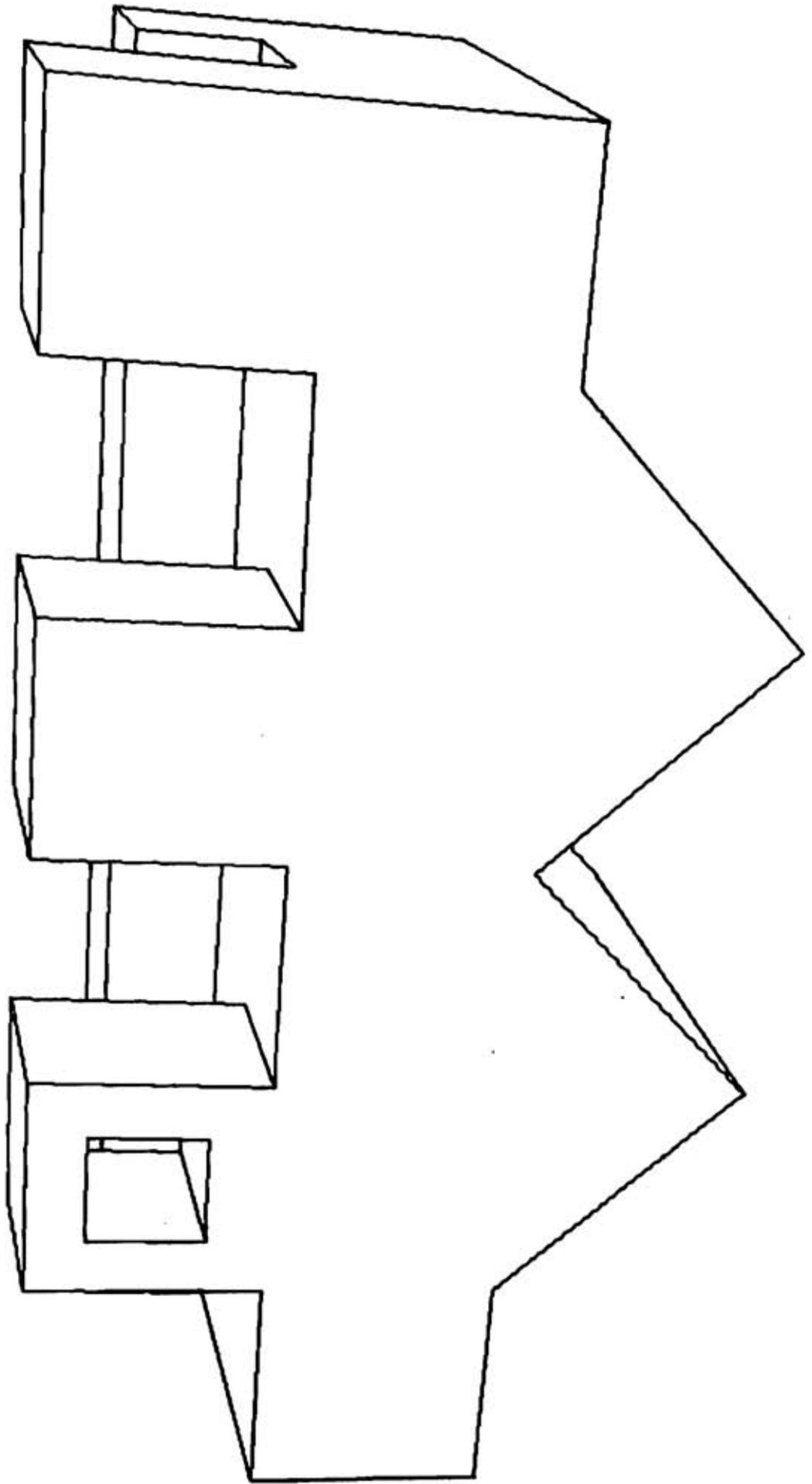


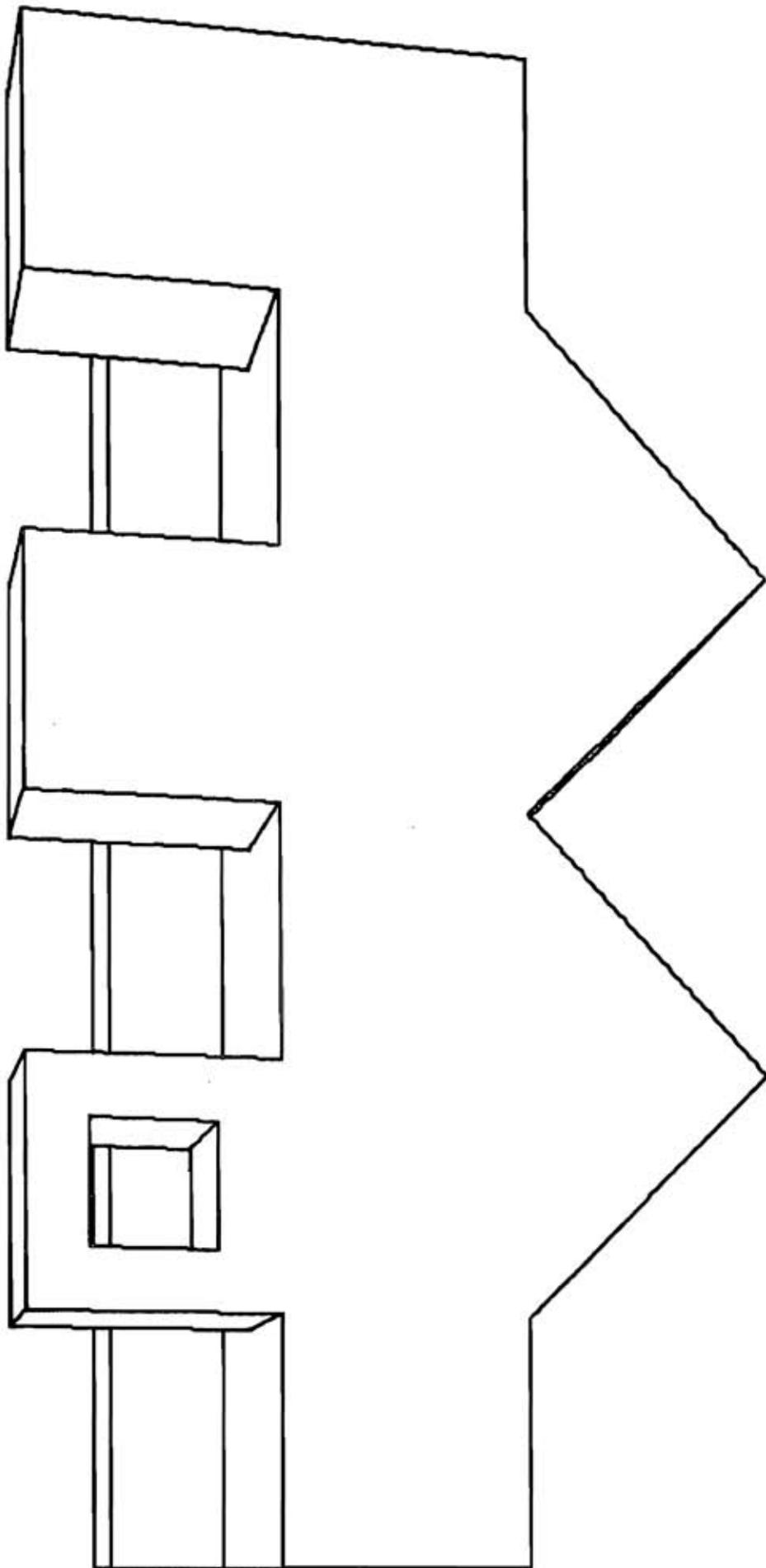
Fig. 10 (b)

300



609

Fig. 10 (c)



900

Fig. 10 (d)

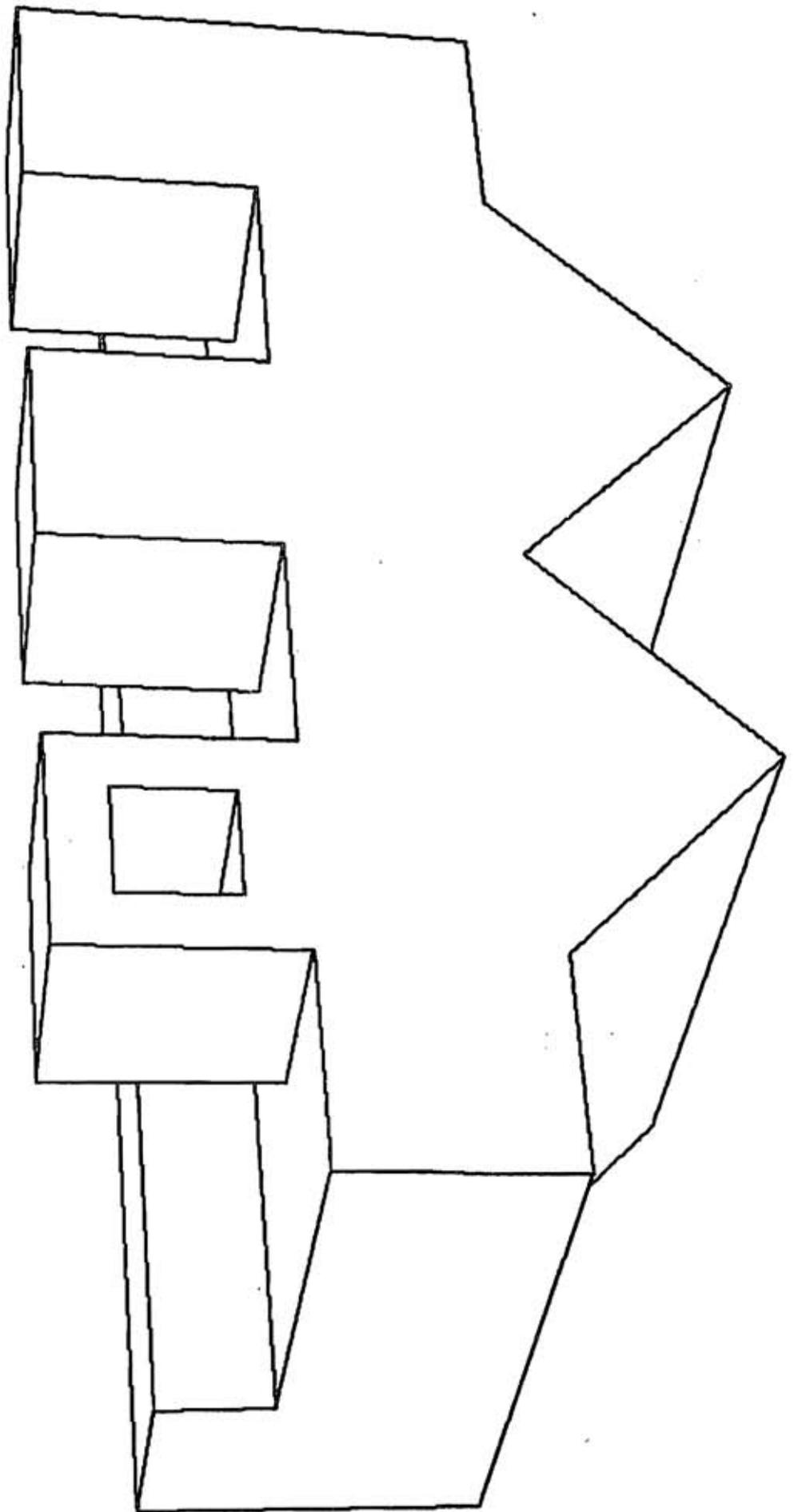


Fig. 10 (e)

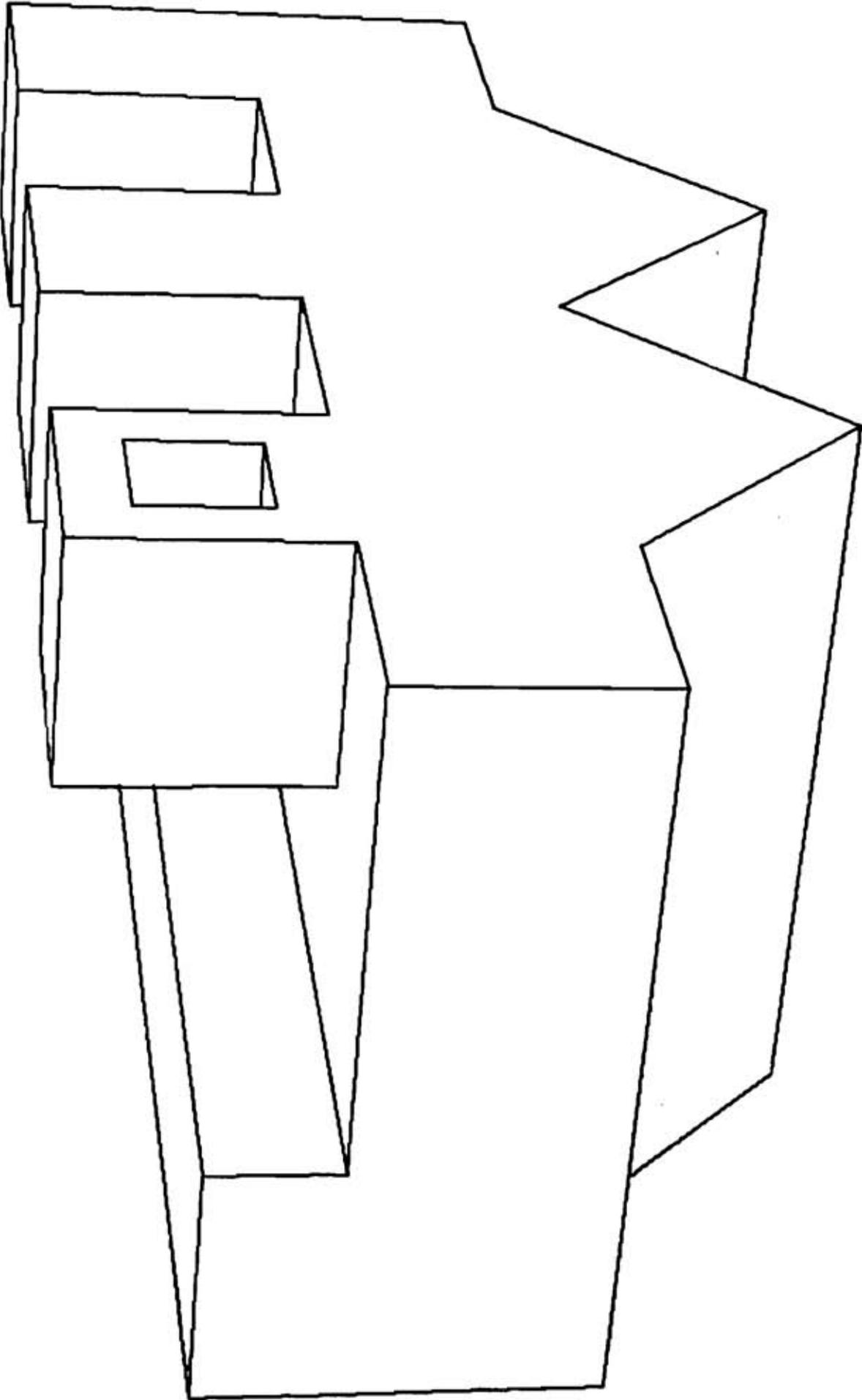


Fig. 10 (f)

1509

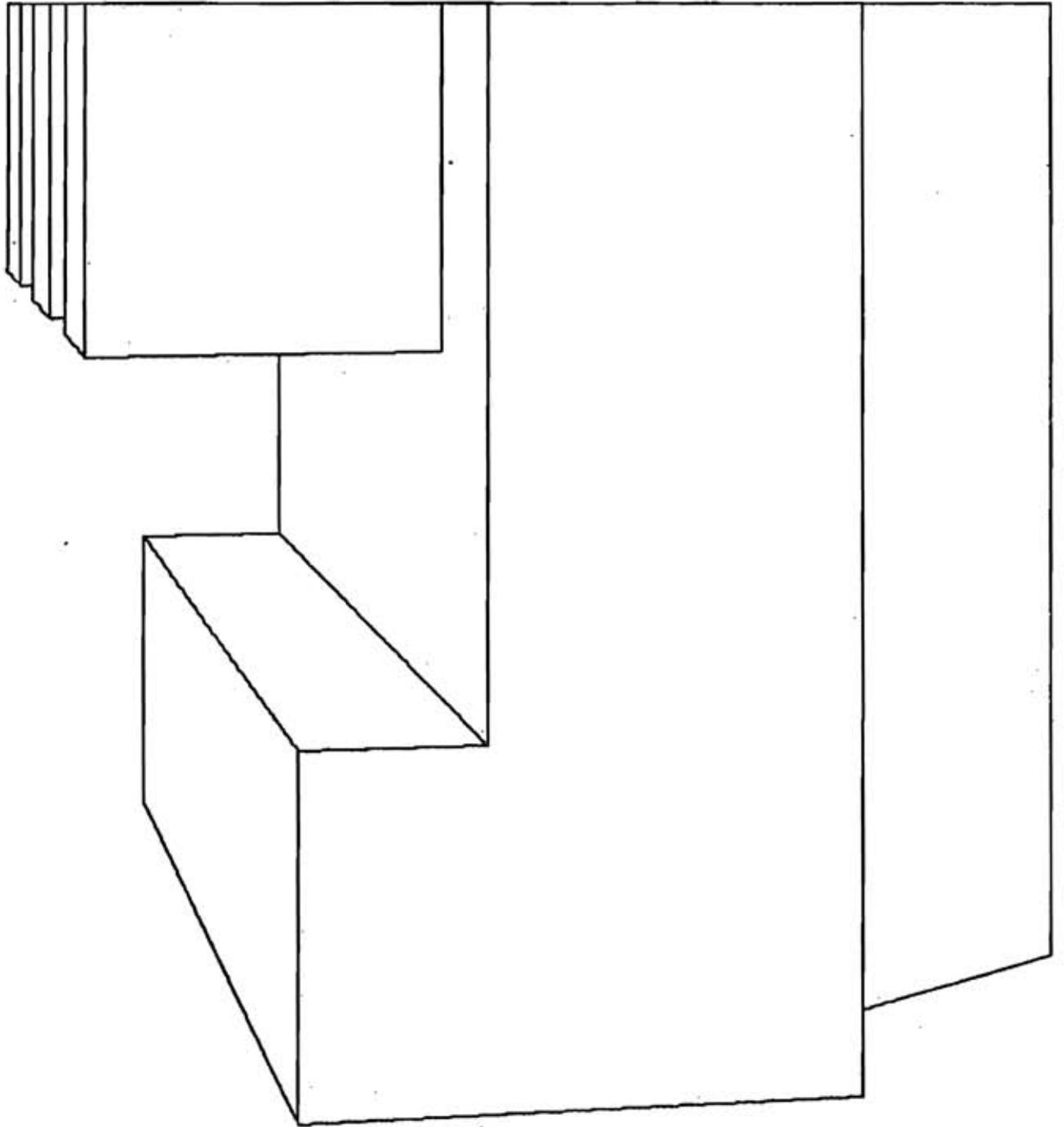


Fig. 10 (g)

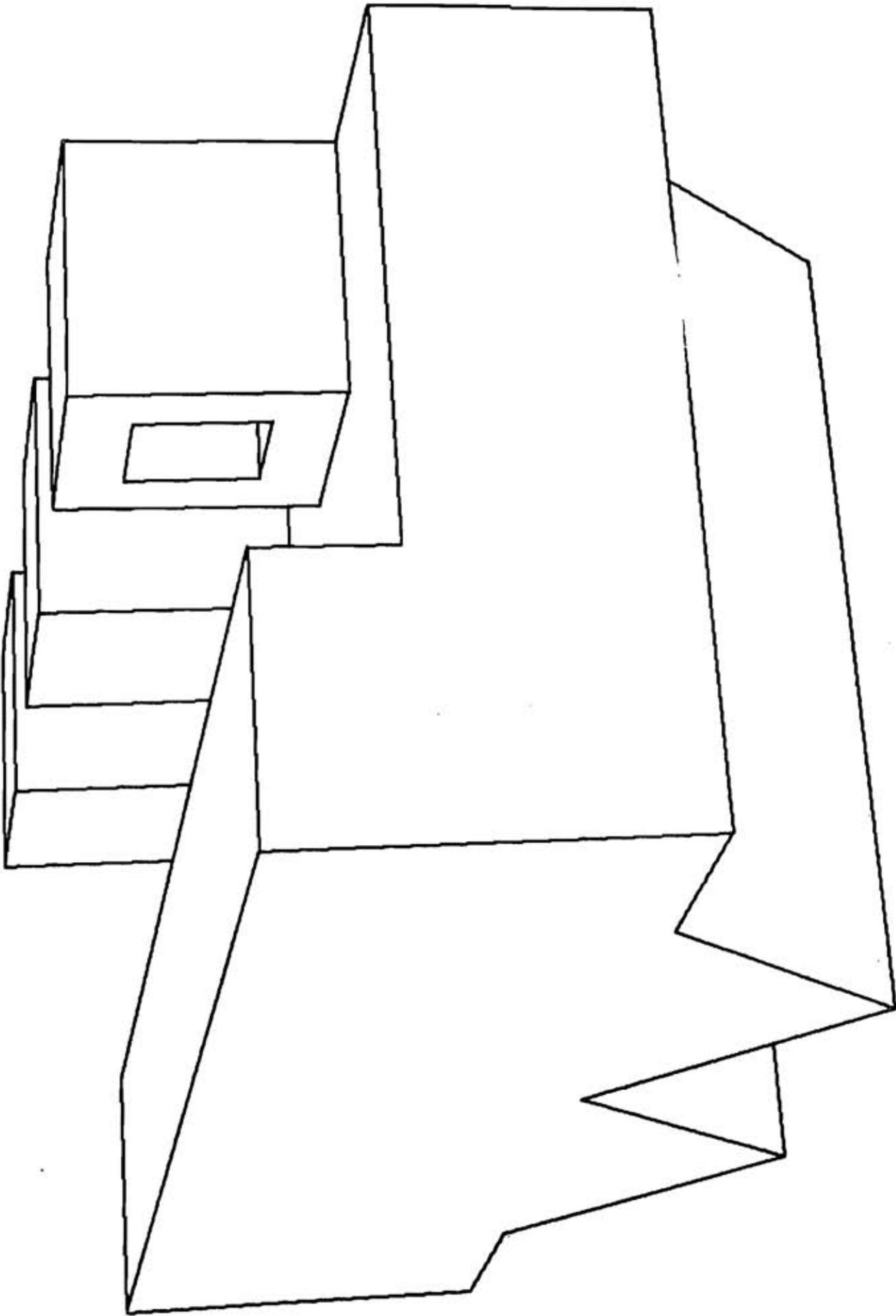
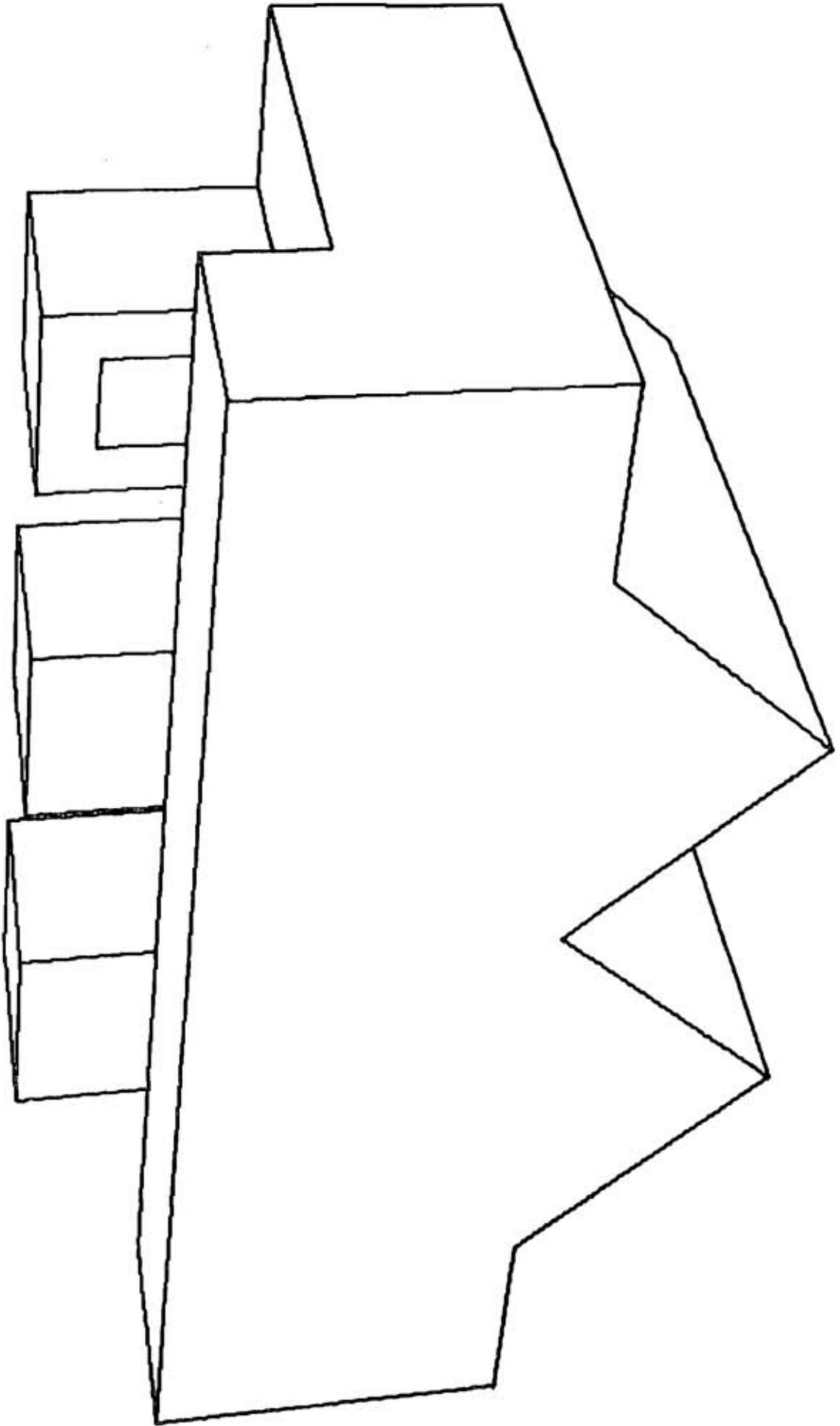
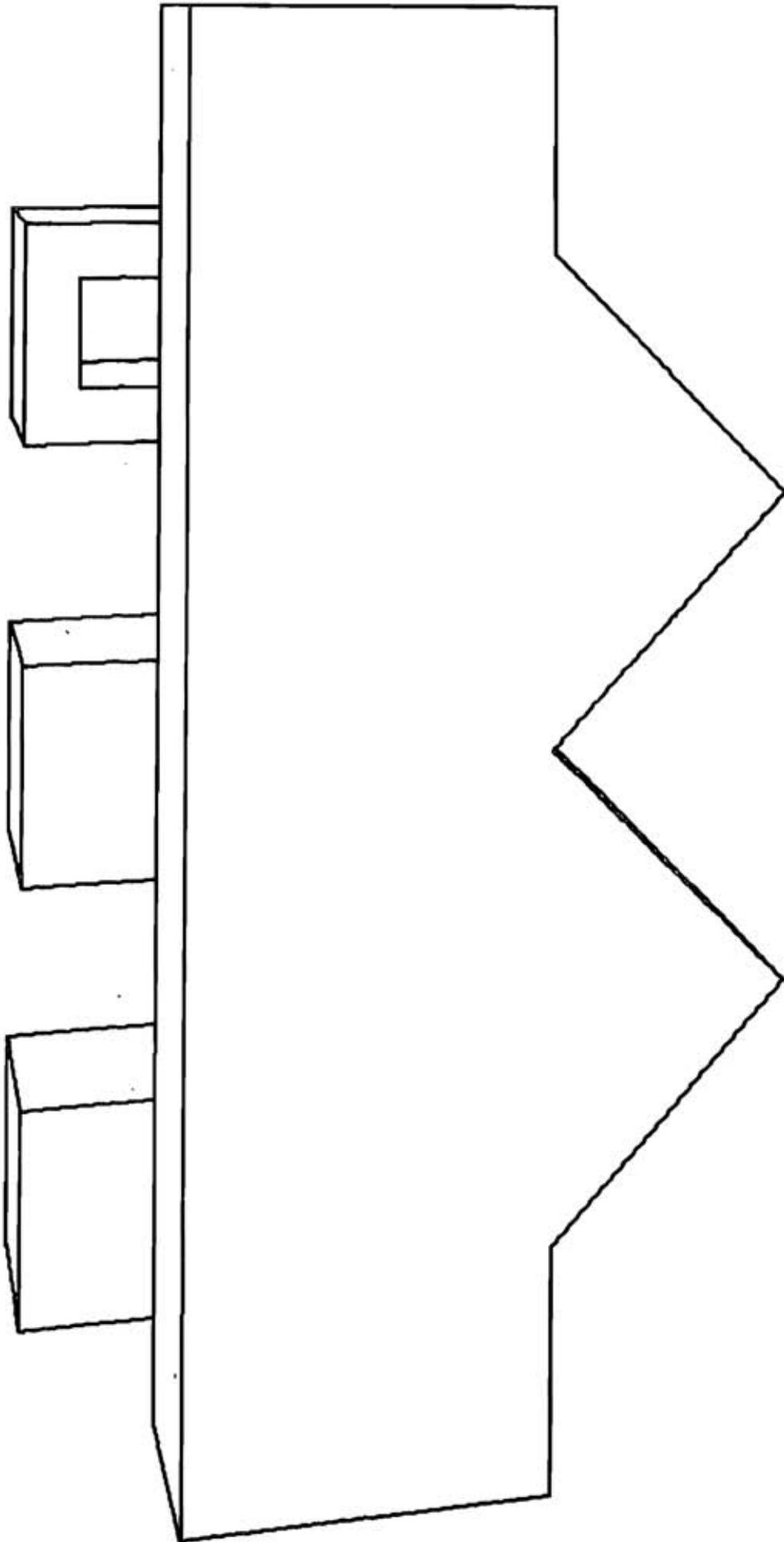


Fig. 10 (h)

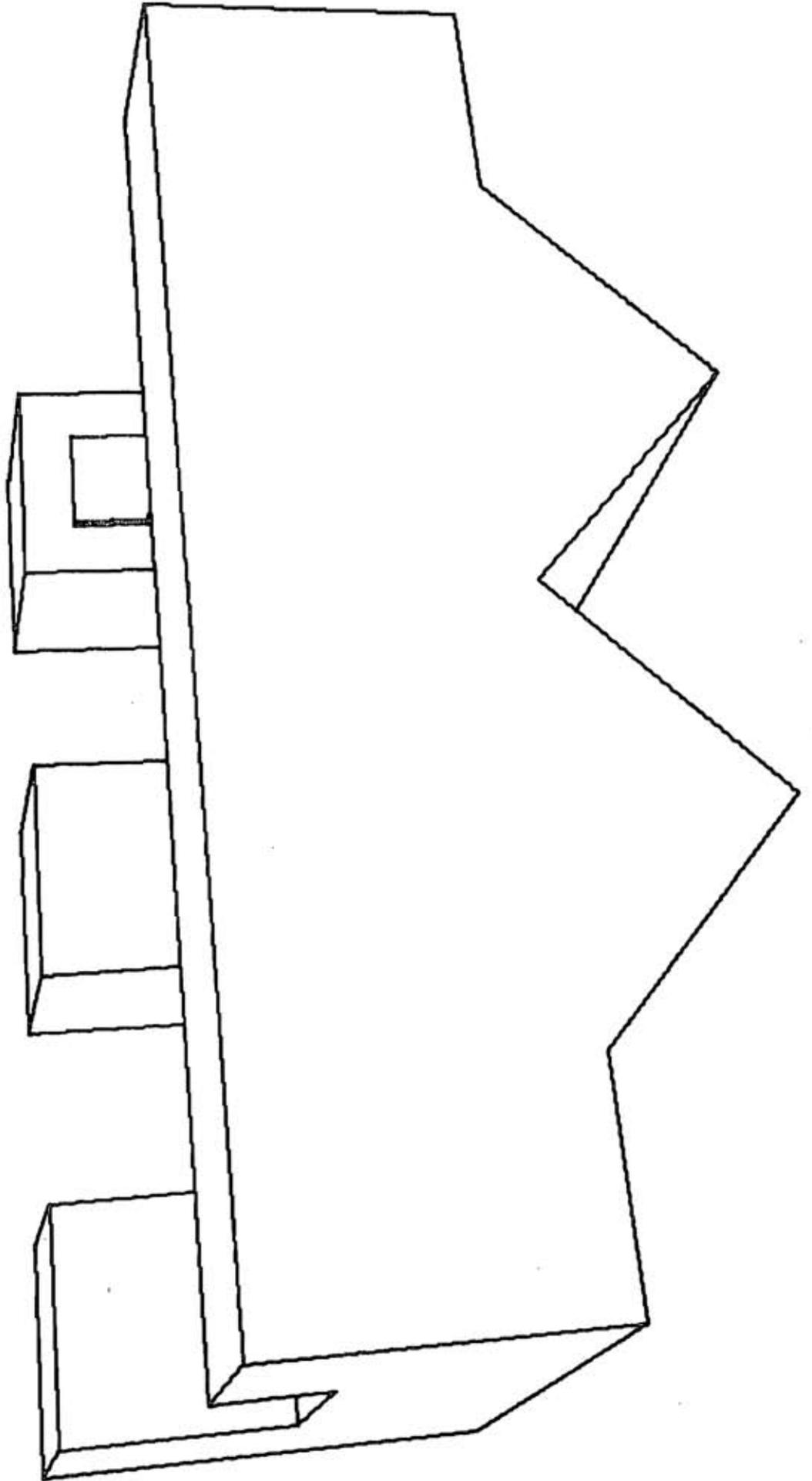
2109





2709

Fig. 10 (j)



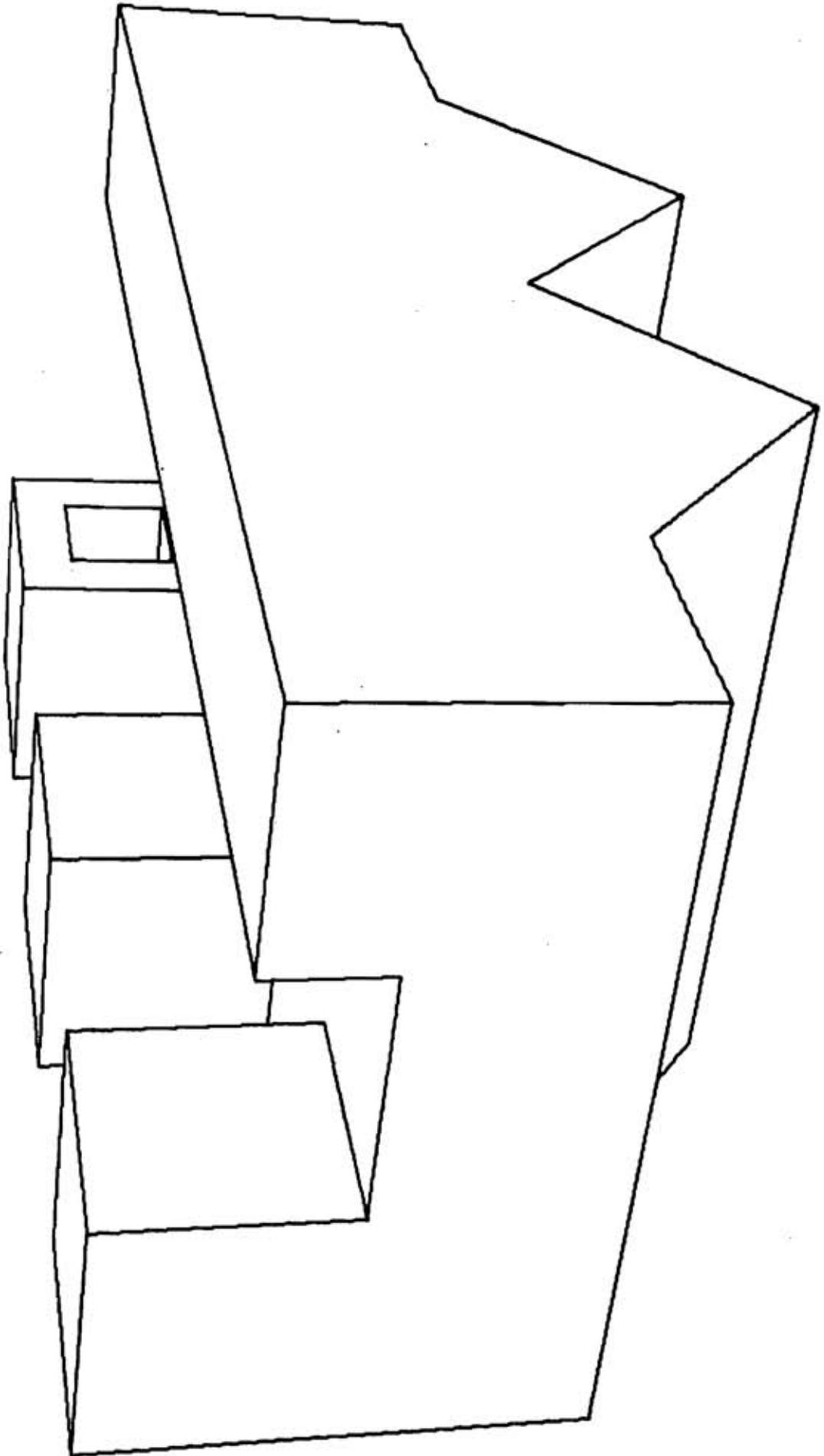


Fig. 10 (m)

3309