Localização de Selas Caóticas e suas Variedades no Mapa de Hénon

Plínio M. P. Ribeiro[1], **Elbert E. N. Macau**[2]

[1]Programa de Mestrado em Computação Aplicada – CAP/LAC,

[2]Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada – LAC,
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE,
São José dos Campos – SP – Brazil

{plinio.ribeiro,elbert}@lac.inpe.br

Abstract. *Chaotic saddles are non-attracting invariant chaotic sets originated by the intersections of stable and unstable manifolds. The goal of this work is to present two general methods that they reveal the space location of those sets, the Sprinkler method [Kantz and Grassberger 1985] and the PIM-triple method [Nusse and Yorke 1989]. Using the first method is also possible to obtain an approach for the manifolds associated to these invariant sets. As application example, these methods are implemented for the Hénon map.*

Resumo. *Selas caóticas são conjuntos invariantes caóticos não-atrativos formados pelas intersecções das variedades estáveis e instáveis. O intuito deste trabalho é apresentar dois métodos gerais que revelam a localização espacial desses conjuntos, o método "Sprinkler" [Kantz and Grassberger 1985] e o "PIM-triple" [Nusse and Yorke 1989]. Usando o primeiro método também é possível obter uma aproximação para as variedades associadas à estes conjuntos invariantes. Como exemplo de aplicação, estes métodos são implementados para o mapa de Hénon.*

1. Introdução

Durante seu estudo, no final dos anos 60, Smale [Smale 1967] concebeu seu famoso modelo topológico da "ferradura" que explica matematicamente a manifestação de um movimento caótico contido numa certa região do espaço de fase (veja Figura 1).

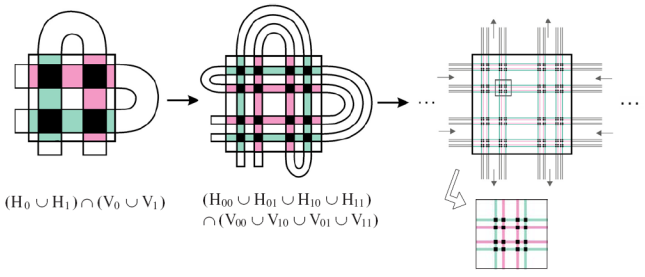

Figura 1. Construção geométrica de um conjunto invariante (quadrados pretos) do mapa da "ferradura" com iterações para frente e para trás.

Assim, facilitou a compreensão da dinâmica complexa presente no sistema quando ocorre intersecções entre as variedades estável e instável associadas às selas caóticas [Tyrkiel 2005].

A variedade estável W^s de um ponto periódico p é o conjunto de todos os pontos que tendem para o ponto p quando o sistema dinâmico evolui para frente no tempo, no caso da variedade instável W^u de p, este conjunto converge para o ponto p quando o sistema evolui para trás no tempo (veja a Figura 2).

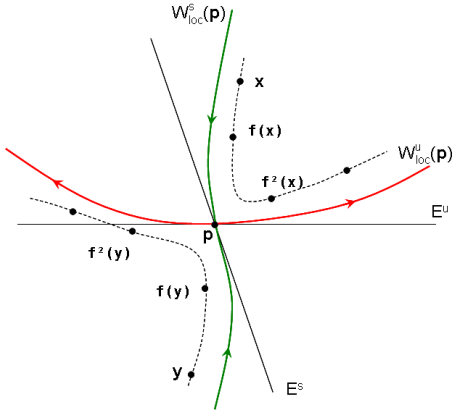

Figura 2. Variedades estável e instável de um ponto p. Note que as trajetórias próximas a variedade estável se aproximam da sela e depois se afastam dela seguindo a direção da variedade instável.

No entanto, elas podem cruzar-se em outros pontos além de p, gerando intersecções homoclínicas, que ocorrem quando as variedades estável e instável de um ponto periódico p se cruzam (veja Figura 3(a)), e intersecções heteroclínicas, que surgem quando existem cruzamentos da variedade estável de um ponto p_1 com a variedade instável de um ponto p_2, ou vice-versa, como mostra a Figura 3(b).

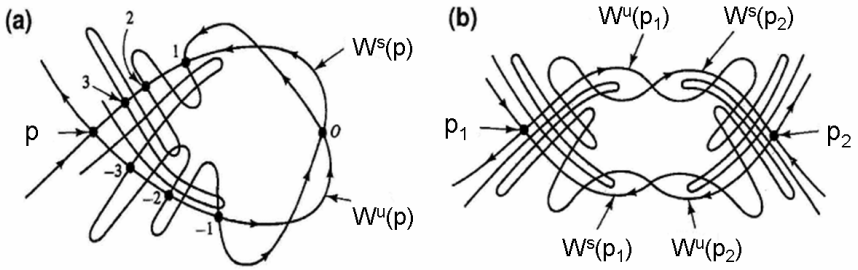

Figura 3. Representação dos cruzamentos entre as variedades. (a) Intersecções homoclínicas e (b) intersecções heteroclínicas.

As selas caóticas são conjuntos invariantes caóticos não-atrativos formados pelas intersecções de suas variedades estáveis e instáveis, onde estas variedades estão em conjuntos de Cantor [Hsu et al. 1988, Ott and Tél 1993].

2. Metodologia e Resultados

Neste estudo utiliza-se dois métodos para localização de selas caóticas em sistemas de baixa dimensão, o método "Sprinkler" [Kantz and Grassberger 1985], que é o

mais direto para localização de selas caóticas e suas variedades, e o método "PIM-triple" [Nusse and Yorke 1989], cuja idéia principal é tentar obter uma órbita numérica que fica nas imediações da sela caótica por um longo período de tempo.

Para os experimentos realizados, utiliza-se as trajetórias geradas pelo mapa de Hénon,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} &= x_n, \end{aligned} \tag{1}$$

com alguns parâmetros de controle $a = 1.441, 1.66$ e $b = 0.3$.

Ambos os métodos fornecem uma visão aproximada do invariante caótico gerados através do mapa de Hénon. Por meio da análise dos resultados carateriza-se quando a utilização de cada método é mais adequada, sendo que, embora possibilite uma caracterização do invariante, o método "Sprinkler" possui uma resolução pobre e não pode servir de base para cálculo de medidas características do conjunto invariante caótico (tais como, expoente de Lyapunov) [Hsu et al. 1988, Nusse and Yorke 1989].

3. Considerações Finais

Sabe-se que os métodos aqui apresentados não funcionam para sistemas de dimensão elevada, que tem por conseguinte, mais de uma direção de expansão. Assim, modificações se fazem necessárias para que os métodos possam ser usados nesses sistemas [Moresco and Dawson 1999]. Estas modificações estão sendo estudas e implementadas, pavimentando o caminho que visa estender a aplicabilidade do controle de caos a estes sistemas [Macau and Grebogi 2006], conseqüentemente, dando continuidade ao trabalho de dissertação de mestrado.

Referências

Hsu, G. H., Ott, E., , and Grebogi, C. (1988). Strange saddles and the dimensions of their invariant manifolds. *Phys. Letters A*, 127:199–204.

Kantz, H. and Grassberger, P. (1985). Repellers, semi-attractors, and long-lived chaotic transients. *Physica D*, 17:75–86.

Macau, E. E. N. and Grebogi, C. (2006). Control of chaos and its relevancy to spacecraft steering. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 364:2463–2481.

Moresco, P. and Dawson, S. P. (1999). The pim-simplex method: an extension of the pim-triple method to saddles with an arbitrary number of expanding directions. *Phys. D*, 126(1-2):38–48.

Nusse, H. E. and Yorke, J. A. (1989). A procedure for finding numerical trajectories on chaotic saddles. *Physica D*, 36:137–156.

Ott, E. and Tél, T. (1993). Chaotic scattering: An introduction. *Chaos*, 3(4):417–426.

Smale, S. (1967). Differential dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817.

Tyrkiel, E. (2005). On the role of chaotic saddles in generating chaotic dynamics in nonlinear driven oscillators. *Inter. J. Bif. and Chaos*, 15(4):1215–1238.