

Rede de Elementos Caóticos Acoplados Globalmente

Rosagela Follmann¹, Elbert E. N. Macau²

¹ Programa de Pós-graduação em Computação Aplicada - CAP
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

²Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LAC
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

rosangela@lac.inpe.br, elbert@lac.inpe.br

Resumo. *Redes de Mapas Globalmente Acoplados (GCM) é um conjunto de elementos geometricamente organizados cuja dinâmica global pode ser usada para armazenar e processar. Neste trabalho será investigado o modelo S-GCM constituído com elementos que possuem dinâmica caótica. Algumas características espaço-temporais dos atratores que tornam a rede capaz de processar informação são analisadas. Também é calculada a taxa de preservação da informação do modelo. Alguns testes são realizados com dois tipos de padrões memorizados e os resultados são apresentados.*

1. Introdução

O estudo de redes com elementos caóticos é importante não apenas como um modelo para sistemas não lineares com muitos graus de liberdade, mas também do ponto de vista do armazenamento e do processamento de informações com perspectivas de eficiência em possíveis aplicações específicas em engenharia. Seu emprego nessas áreas os faz representar, de certa forma, o cérebro onde a informação é armazenada em redes de neurônios e cujo comportamento de percepção sensorial surge, segundo experimentos, de comunicações extremamente complexas entre neurônios, inclusive entre grupos distintos [Sauseng and Klimesch 2008]. [Kaneko 1990] introduziu um modelo constituído por mapas globalmente acoplados, denominado GCM (*Globaly Coupled Map*), o qual possui características que o tornam capazes de processar informação. Os primeiros estudos foram feitos usando o mapa logístico como elemento caótico da rede. O mapa logístico é uma função quadrática e possui um comportamento dinâmico caótico dependendo do valor do parâmetro de controle. Posteriormente, [Ishii et al. 1996] propôs um modelo, denominado S-GCM (*Symmetric Globaly Coupled Map*), no qual substitui o mapa logístico por um mapa simétrico, tendo a característica de possuir duas órbitas atratoras que coexistem num mesmo espaço de parâmetros de interesse.

Neste trabalho será investigado o modelo S-GCM com aplicação em processamento de informação.

2. Rede de Mapas Globalmente Acoplados

Uma rede de mapas acoplados é um modelo simples para o estudo dos fenômenos relacionados com o caos espaço-temporal. Este modelo consiste de uma cadeia de mapas que interagem segundo um acoplamento bem definido, sendo o espaço e o tempo discretos e a variável de estado contínua. Essas redes são usadas para modelar sistemas dinâmicos acoplados e estudar as propriedades decorrentes da interação entre esses sistemas. Aqui

será usada uma rede de mapas globalmente acoplados. Neste tipo de acoplamento todos os elementos (sítios) interagem com todos.

2.1. Modelo S-GCM

O modelo S-GCM (*Symmetric Globally Coupled Map*) é definido por:

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)), \quad (1)$$

onde n é o passo de tempo discreto, ϵ é o termo de acoplamento e i é o índice de cada elemento. A função $f(x)$ descreve a dinâmica caótica de cada elemento, a qual será definida por uma função simétrica dada por:

$$f(x) = \alpha x^3 - \alpha x + x \quad x \in [-1, 1] \quad (2)$$

O parâmetro α controla a dinâmica do mapa. Para $\alpha > 2$ o mapa possui dois extremos e portando tem ao menos duas órbitas atratoras. Quando o mapa simétrico possui duas órbitas atratoras, estas órbitas coexistem simetricamente como pode ser visto na Figura 1(a). Na Figura 1(b) é mostrado o diagrama de bifurcação em relação ao parâmetro α .

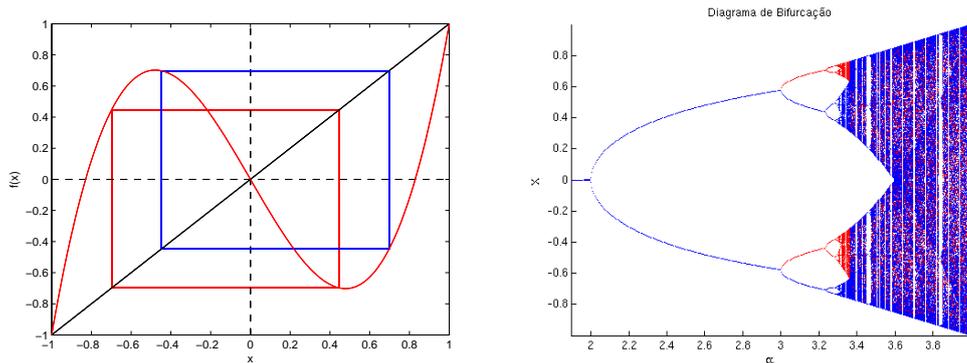


Figure 1. (a) Duas órbitas periódicas de período dois do mapa simétrico; (b) Diagrama de Bifurcação sobre o parâmetro α .

O modelo S-GCM possui dois parâmetros: α , que controla a dinâmica do mapa e ϵ , que é o termo de acoplamento. Quando estes parâmetros são ajustados a valores específicos, o sistema é atraído para atratores chamados de *cluster frozen attractors* (CFA) ou *atratores agrupados congelados*. Uma vez que o sistema seja atraído para um *cluster frozen attractor*, os elementos pertencentes ao mesmo *cluster* tendem a uma mesma órbita. Na Figura 2(a) tem-se a evolução temporal para 100 mapas acoplados com $\epsilon = 0.1$ e $\alpha = 3.4$ inicializados aleatoriamente com valores entre -1 e 1. A Figura 2(b) mostra a mesmas séries temporais para cada dois passos de tempo. Observe que, mesmo quando os valores iniciais dos elementos variam, eles se dividem em quatro *clusters* e os elementos que pertencem ao mesmo *cluster* tendem a uma mesma órbita, neste caso, a uma órbita atratora de período 2.

2.2. Características da Fase no S-GCM

As características espaço-temporais dos atratores S-GCM são basicamente determinadas pelos valores dos parâmetros; α , o parâmetro de bifurcação do mapa simétrico que indica

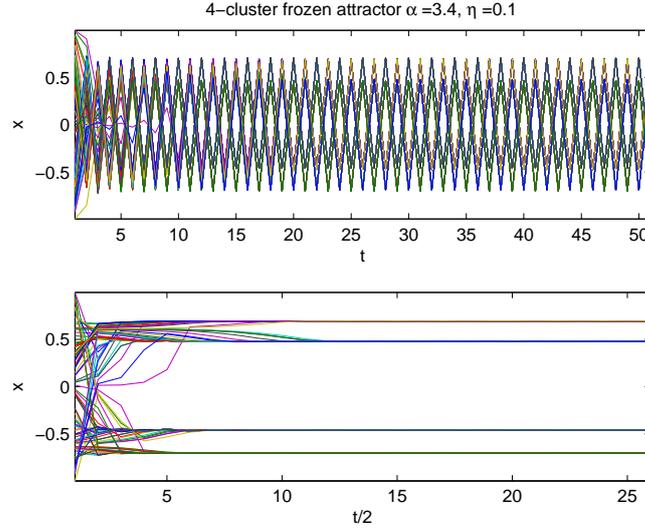


Figure 2. Quatro *cluster frozen attractors*. (a) Série temporal de todos os elementos; (b) Mesmas séries temporais para cada dois passos de tempo.

a intensidade de caos em cada elemento da rede, e ϵ que indica a intensidade dos acoplamentos. Sendo assim, os atratores são classificados de acordo com suas características espaço-temporais em:

- **Fase Coerente:** Quando α é pequeno e ϵ é grande, todas os elementos tendem para a mesma órbita.
- **Fase Ordenada:** O sistema tende para *cluster frozen attractors*. Esta fase é dividida em varias áreas de acordo com o número de clusters dominantes.
- **Fase Ordenada Parcial:** Tem-se a coexistência de muitos e poucos atratores.
- **Fase Turbulenta:** Quando α é grande e ϵ é pequeno, a dinâmica caótica é prevalente e cada elemento segue em sua própria órbita caótica. A fase turbulenta pode ser classificada de acordo com a preservabilidade da informação.

2.3. Preservação da Informação

Para aplicar o S-GCM no processamento de informação definimos uma relação entre suas entradas e saídas. O sinal de entrada, a ser processado pelo S-GCM é associado aos estados iniciais, enquanto o sinal de saída é obtido a partir da composição dos valores dos estados dos mapas após um "tempo de processamento". A informação é assim "processada" por um sistema dinâmico S-GCM.

Um vetor de estado $x \in [-1, 1]^N$ pode ser convertido em um vetor binário $C(x) \in \{-1, 1\}^N$ com o uso de uma função de codificação binária N-dimensional, dada por:

$$C(x)_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \geq x^* \\ -1 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3)$$

onde x^* é o ponto fixo do mapa simétrico, que neste caso é 0.

A taxa de preservação da informação, R , é definida por:

$$R = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} R_M(t) \quad (4)$$

$$R_M(t) = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C(x^h(0))_i C(x^h(t))_i, \quad (5)$$

onde h denota o índice da amostra, M o número de amostras, N número de elementos, $x^h(0)$ h -ésimo vetor de estado inicial e $x^h(t)$ h -ésimo vetor de estado no tempo t . A taxa de preservação da informação, R , indica a correlação entre os sinais de entrada e de saída do sistema depois de um certo tempo. Se R se encontra próximo de 1, considera-se que o sistema preserva a da informação inicial. Por outro lado se R tende a zero o sistema perde a correlação com o sinal de entrada, ou seja, com a informação inicial que lhe é submetida.

A taxa de preservação da informação é calculada sobre os parâmetros α e ϵ do S-GCM. Para $N=200$ (número de elementos da rede) e $M=100$ (número de amostras a serem analisadas), o resultado pode ser visto na Figura 2.3. A taxa R cresce gradativamente com o aumento de α , partindo de 0,65. Então, repentinamente, reduz para 0 em $\alpha \approx 3,6$, indicando a perda da correlação com o estado inicial. Se R é grande, o sistema preserva parte da informação inicial, mesmo que o sistema se encontra na fase turbulenta.

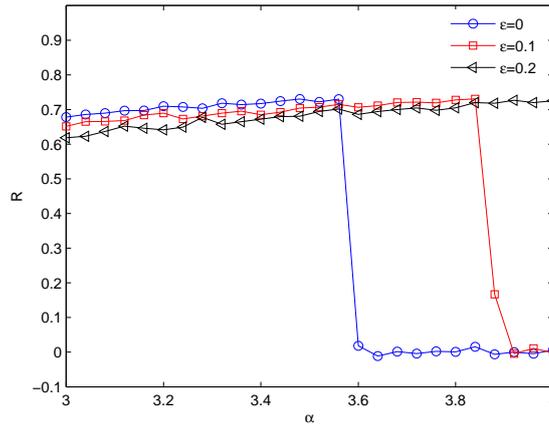


Figure 3. Taxa de preservação da informação.

Quando o S-GCM é aplicado ao processamento de informação, o seu estado inicial corresponde a informação de entrada adequadamente codificada, enquanto ao seu atrator de regime, ao sinal de saída. A existência destes dois modos, R próximo de 1 ou próximo de zero, na taxa de preservação mostra que o modelo tem dois modos de processamento, a informação é preservada ou destruída.

A seguinte forma de codificação inicial será adotada:

$$V(I)_i = \begin{cases} x^+ + rand & \text{se } I_i = 1 \\ x^- + rand & \text{se } I_i = -1 \end{cases} \quad (6)$$

A função V N -dimensional converte um vetor binário $I \in \{-1, 1\}^N$ em um vetor de estado $V(I) \in [-1, 1]^N$, onde x^+ e x^- denotam valores das duas órbitas periódicas de período 2, e $rand$ é um pequeno valor aleatório. Cada elemento assume um valor inicial de acordo com o vetor de entrada binário I .

3. Aplicação em Processamento de Informação

O S-GCM como um sistema de processamento de informação processa um vetor binário $I \in \{-1, 1\}^N$, transformando-o em um vetor de saída $O \in \{-1, 1\}^N$.

$$I \xrightarrow{V} x(0) \xrightarrow{S-GCM} x(T) \xrightarrow{C} O \quad (7)$$

No esquema 7, C converte um vetor de estado em um vetor binário, enquanto V converte um vetor binário em um vetor de estado, segundo a codificação definida anteriormente. A ideia é controlar os valores do parâmetro para obter uma comutação local entre mapeamento idêntico e randômico, ou seja, preservação ou destruição da informação.

Seja um conjunto de padrões memorizados $\{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m | \xi^k \in \{1, -1\}^N\}$, onde ξ_i^k é o valor do i -ésimo elemento no k -ésimo padrão memorizado e m é o número de padrões memorizados.

Um sistema de memória associativa deve ser capaz de recuperar o padrão memorizado a partir de uma entrada relativamente similar ao padrão desejado. O método de aprendizagem é do tipo convencional de covariância como no processo de aprendizado de Hebb [Hebb 1949]. A matriz de covariância do conjunto de padrões memorizados é dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \xi_i^k \xi_j^k \quad (8)$$

O sistema de memória associativa é definido:

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f_i(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f_i(x_n(j)) \quad (9)$$

$$f_i(x) = \alpha_i x^3 - \alpha_i x + x, \quad x \in [-1, 1] \quad (10)$$

Note que α_i é diferente para cada elemento. A evolução de α_i é dada por

$$\alpha' = \alpha_i + (\alpha_i - \alpha_{min}) \tanh(\beta E_i) \quad (11)$$

$$E_i = -x_i \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_j \quad (12)$$

onde os parâmetros α_{min} , valor mínimo que α pode assumir, e β , taxa de modificação ou ganho, são parâmetros constantes. Considerando $E = \sum_i E_i$ como uma função de energia convencional, pode-se considerar E_i a i -ésima energia parcial. Este sistema procura por um mínimo local da função de energia, tornando cada energia parcial pequena e negativa. Se E_i é grande e positivo, significa que o i -ésimo valor do elemento x_i não satisfaz a matriz de covariância, o que faz com que α_i aumente de acordo com a Eq. 11 e o elemento torna-se perturbado. Assim, durante o percurso da perturbação o modo processamento é alterado para o modo destruir.

4. Resultados Preliminares

Nos resultados mostrados a seguir, os parâmetros usados foram: $\alpha_{min} = 3.4$, $\beta = 2$ e $\epsilon = 0.1$. Na Equação 11, cada α_i é controlado entre α_{min} e $\alpha_{max} = 4.0$. Os valores de α_i são atualizados a cada 16 passos de tempo. Foram memorizados dois conjuntos distintos de padrões para a rede de mapas acoplados: (a) um conjunto com 4 padrões binários com 100 unidades, representando as letras A, B, C e D do alfabeto (Figura 4(a)); (b) 4 padrões geométricos ilustrados na Figura 4(b).

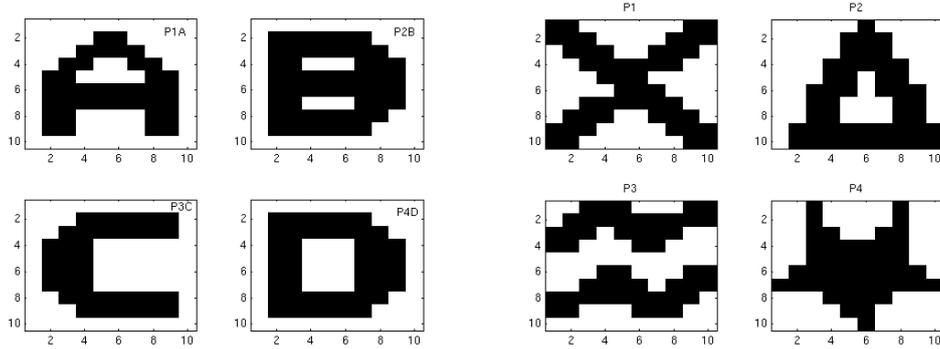


Figure 4. Padrões memorizados

No primeiro exemplo, o vetor de entrada binário I é o padrão **P1A** perturbado em 5%. Na Figura 5 é mostrada a evolução dos mapas a cada 16 passos de tempo. No início o movimento é caótico e à medida que o tempo passa, os movimentos tornam-se menos vigorosos e a associação é completada quando o sistema entra nos quatro *cluster frozen attractors*. Neste momento, a representação binária da saída O é equivalente ao padrão memorizado (Figura 6, em $t = 12$). A Figura 7(a) ilustra a energia parcial de cada elemento. À medida que o tempo evolui a energia parcial torna-se pequena e negativa, o que faz com que a energia total atinja um mínimo. Os valores de cada α_i ao longo do tempo podem ser vistos na Figura 7(b). Observa-se que nos primeiros passos os valores são altos e aos poucos vão se ajustando a um valor adequado, que neste caso é $\alpha_i = \alpha_{min}$. Ou seja o sistema tende para os *cluster frozen attractors*.

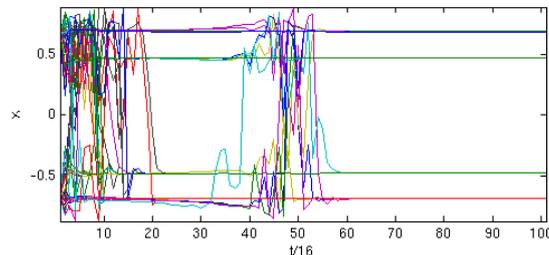


Figure 5. Evolução dos mapas ao longo do tempo

No segundo exemplo, foram memorizados quatro padrões com formas distintas, os quais podem ser vistos na Figura 4(b). O padrão **P3** foi modificado com uma perturbação de 5% e foi apresentado para o S-GCM. Novamente, no início os movimentos são caóticos e após algumas iterações o sistema tende para o *cluster frozen attractors* (Figura 8). A recuperação do padrão desejado é realizado em poucos passos de tempo, como pode ser visto na Figura 9. A energia parcial torna-se pequena e negativa, e os parâmetros α_i tendem ao α_{min} (Figura 10).

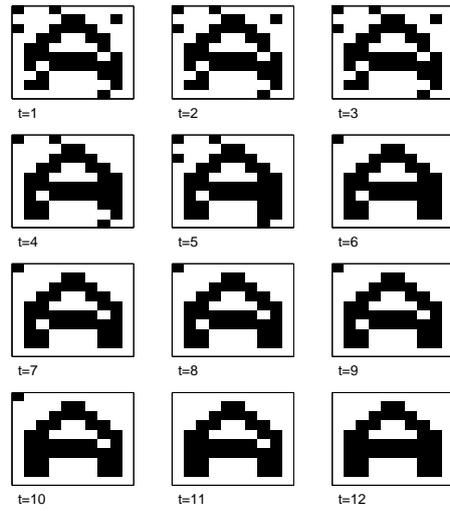


Figure 6. Recuperação do padrão P1A com ruídos.

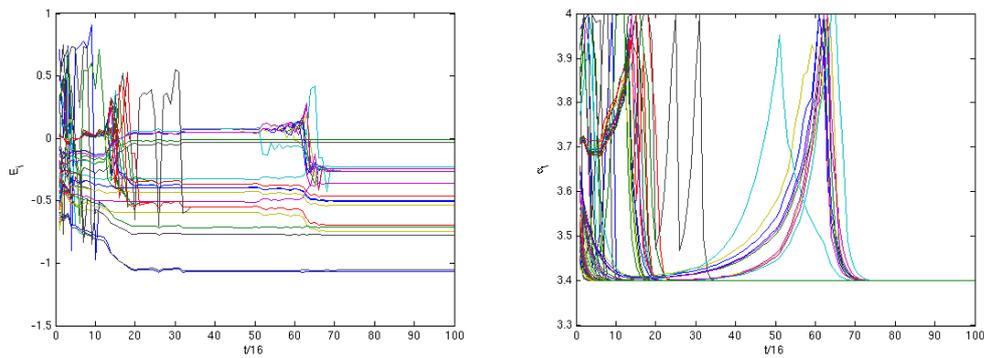


Figure 7. (a) Energia ao longo do tempo (b) Parâmetro α ao longo do tempo

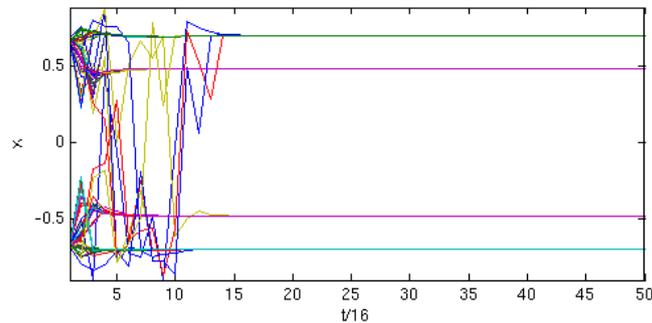


Figure 8. Evolução dos mapas ao longo do tempo.

Também foi apresentado uma vetor de entrada com uma perturbação maior, de 35%. O resultado é mostrado na Figura 11, onde podemos observar que o sistema S-GCM processa a informação com um ruído maior e recupera 100% do padrão memorizado, com apenas algumas iterações a mais, mostrando a robustez deste modelo.

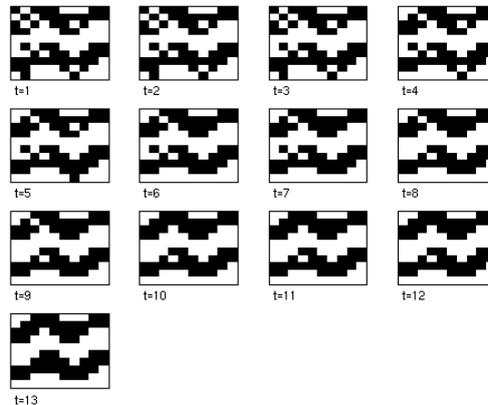


Figure 9. Recuperação do padrão P3 com perturbação 5%.

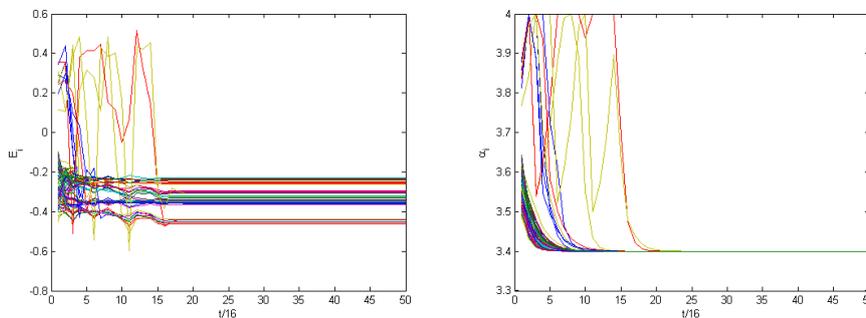


Figure 10. (a) Energia parcial ao longo do tempo; (b) Evolução do parâmetro α ao longo do tempo.

5. Considerações Finais

Neste trabalho fez-se um estudo sobre redes de mapas globalmente acoplados com aplicação em processamento de informação. Devido a característica do sistema S-GCM entrar em *cluster frozen attractor*, este mostrou uma recuperação em 100% dos padrões memorizados.

Dando prosseguimento, pretende-se investigar sob quais condições a informação pode ser processada com uma rede de mapas não idênticos, ou seja como o armazenamento e o processamento de informação em cluster e estados síncronos de fase pode ser empreendido.

References

- Hebb, D. (1949). *The organization of behavior*. New York, 1th edition.
- Ishii, S., Fukumizu, K., and Watanabe, S. (1996). Network of chaotic elements for information processing. *Neural Networks*, 9(1):25 – 40.
- Kaneko, K. (1990). Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements. *Physica D*, 41:137 – 172.
- Sauseng, P. and Klimesch, W. (2008). What does phase information of oscillatory brain activity tell us about cognitive processes? *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, 32(5):1001 – 1013.

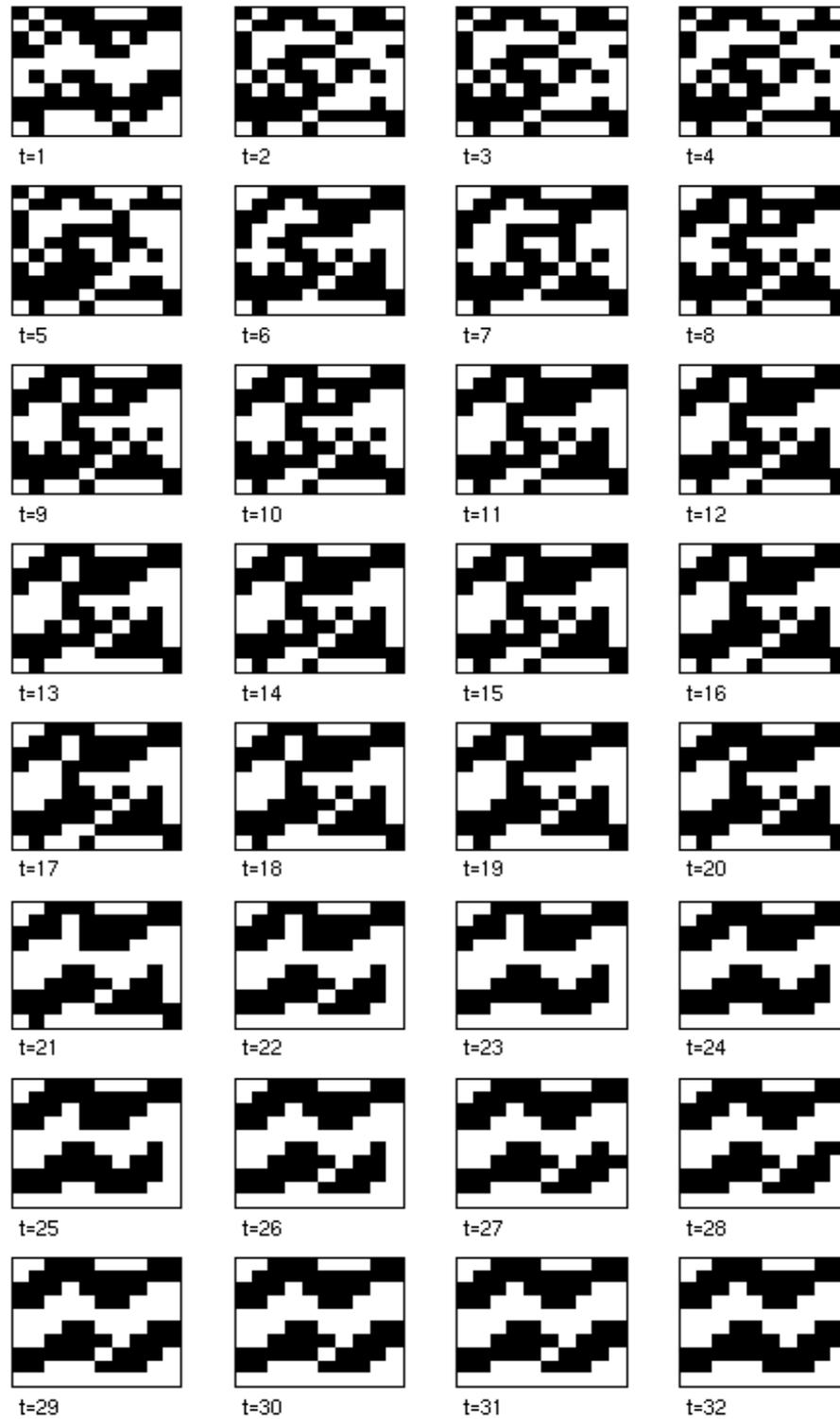


Figure 11. Recuperação do padrão P3 com perturbação 35%.