



Ministério da  
**Ciência e Tecnologia**



sid.inpe.br/mtc-m19/2011/02.09.22.17-TDI

# ABORDAGEM HIERÁRQUICA AO MÉTODO HÍBRIDO DE ESTIMAÇÃO DE DANOS EM ESTRUTURAS AEROESPACIAS

Leonardo Bacelar Lima Santos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada,  
orientada pelo Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho, aprovada em 28 de fevereiro  
de 2011

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3965BH5>>

INPE  
São José dos Campos  
2011

## **PUBLICADO POR :**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr<sup>a</sup> Regina Célia dos Santos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Horácio Hideki Yanasse - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

### **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

### **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Vivéca Sant'Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência e Tecnologia**



sid.inpe.br/mtc-m19/2011/02.09.22.17-TDI

## **ABORDAGEM HIERÁRQUICA AO MÉTODO HÍBRIDO DE ESTIMAÇÃO DE DANOS EM ESTRUTURAS AEROESPACIAS**

Leonardo Bacelar Lima Santos

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Computação Aplicada,  
orientada pelo Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho, aprovada em 28 de fevereiro  
de 2011

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3965BH5>>

INPE  
São José dos Campos  
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Santos, Leonardo Bacelar Lima.

Sa59a Abordagem hierárquica ao método híbrido de estimação de danos em estruturas aeroespaciais / Leonardo Bacelar Lima Santos. – São José dos Campos : INPE, 2011.  
xx+83 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2011/02.09.22.17-TDI)

Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2011.

Orientador : Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho.

1. Dano estrutural. 2. Problemas inversos. 3. Algoritmo genético. 4. Método de gradiente conjugado. 5. Busca hierárquica. I.Título.

CDU 004.942

---

Copyright © 2011 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2011 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em  
Computação Aplicada

Dr. Solon Venâncio de Carvalho

Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho

Orientador(a) / INPE / São José dos Campos - SP

Dr. Fernando Manuel Ramos

Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Elcio Hideiti Shiguemori

Convidado(a) / IEAv/CTA / São José dos Campos - SP

Dr. Fernando Alves Rochinha

Convidado(a) / UFRJ / Rio de Janeiro - RJ

Aluno (a): Leonardo Bacelar Lima Santos

São José dos Campos, 28 de fevereiro de 2011



*“O nordestino é, antes de tudo, um forte.”*

ADAPTADO DA OBRA OS SERTÕES,  
DE EUCLIDES DA CUNHA



*A todos que deixam seus lares para encarar o desafio da  
pós-graduação, e a todos que me apoiaram neste meu,  
em especial meus queridos pais.*



## AGRADECIMENTOS

Tenho, Oxalá, diversos agradecimentos a deixar registrados neste texto e gostaria de o fazer seguindo uma ordem cronológica.

Primeiro a todos que me incentivaram a vir ao programa de pós graduação em Computação Aplicada do INPE, o que representaria (e de fato representou) não apenas uma mudança de área de estudo e cidade, mas acima de tudo de hábitos de comportamento e clima (não apenas físico). Sem o apoio, no mais amplo dos sentidos, da minha família e em especial dos meus pais, Lêda e Tony, essa tarefa teria sido ainda mais difícil. Pude contar também com duas amigas, Suani e Mayane, cujo incentivo foi fundamental.

Em São José dos Campos algumas pessoas, logo nos primeiros meses, me ajudaram muito, nos bons (e nos assim não tão bons) momentos, especialmente dona Lúcia, dona Maria Helena, seu Edson, Miquéias, Tiago e seu Juca, bem como os novos amigos inpeanos Fábio, Luis, Marlon, Gustavo, Mirian e Laurita, cujas companhias sempre agradáveis se transformaram em ótimas amizades. Nos dois anos de estudos e pesquisas no INPE algumas pessoas me foram importantes, seja pelo conhecimento transmitido ou pelo exemplo de postura acadêmica, em especial o meu orientador, Haroldo - sem dúvida um dos pesquisadores mais brilhantes que já conheci, e os professores Solon, Elbert, Ezzat, Stephan e Rita. Não teria como não agradecer aqui também à secretária do curso, Cláudia, não apenas pela competência mas pela sempre presente prestatividade e agilidade.

Quebrando agora a linearidade temporal, gostaria de deixar registrado o quanto algumas pessoas que encontrei na minha caminhada científica me influenciaram: Eduardo, Ivan, Charles, Rodolfo, Garcia, Roberto, Thierry, Ernesto, Charbel e Ari. Ótimos dias passei também no estágio na UNISINOS, na qual fui muito bem recebido, especialmente pelo gaúcho Leonardo, pelo alagoano Lucas e pela paraense Tássia - a todos meu sincero obrigado.

Finalmente agradeço aos amigos de Salvador que mesmo com a distância, continuaram o sendo, e às amigas construídas em solo joseense, com carinho destacado à Lívia, Lino, Jussara, Polyanna e Izabel; e à Roberta, pelo amor de sempre, e paciência adicional na reta final desta dissertação.

Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP.



## RESUMO

A estratégia de monitoramento e detecção de dano estrutural, que tem como base a análise da resposta vibratória (global) do sistema para detectar dano (local), é referida como monitoramento da saúde estrutural por avaliação não-destrutiva, e pode ser efetuada via resolução de um problema inverso em vibrações mecânicas. Há conhecimento de observáveis dinâmicos e deseja-se saber os componentes da matriz de rigidez global do sistema. O confronto do valor de rigidez estimado (a qualquer tempo) com o apresentado no projeto da estrutura (configuração íntegra) permite inferir a presença de dano estrutural no sistema em avaliação. Dentre os resultados originais apresentados nesta dissertação estão a análise de robustez do método híbrido (Algoritmo Genético Epidêmico + Formulação Variacional resolvida pelo Método do Gradiente Conjugado) frente à quantidade de elementos danificados e intensidade do dano e a aplicação do método híbrido ao problema de propagação do calor em regime hiperbólico (onda amortecida). Para operar em estruturas com muitos GDL é necessário uma melhoria de desempenho na forma como a busca pelo dano é realizada. Uma busca hierárquica é proposta como possível solução. Nela não se aplica uma discretização que provê muitos graus de liberdade, mas uma iterada (sequência) de discretizações com menos elementos finitos, cuja ordem temporal de aplicação é dependente do encontro de dano em cada região. O tempo de processamento via busca hierárquica chega a ser, em alguns casos, mais de 2960 vezes menor que o referente à busca tradicional, sem nenhum prejuízo à qualidade do mesmo. A busca hierárquica aponta como sendo uma abordagem promissora para tornar o método híbrido de estimação de dano competitivo no sentido de apresentar bons resultados a tempo computacional razoável.



# HIERARCHICAL APPROACH ON THE HYBRID METHOD FOR DAMAGE IDENTIFICATION IN AEROSPACE STRUCTURES

## ABSTRACT

The strategy of structural damage monitoring and detection which is based on the analysis of vibration response (global) to detect damage (local) is referred to as structural health monitoring by non-destructive evaluation, and can be performed by an inverse problem into mechanical vibrations: there are knowledge of observable dynamic and want to know the components of the system's global stiffness matrix. The comparison of the stiffness value estimated (at any time) against that shown in structure design (project configuration) allow us to infer the presence of structural damage to the system under evaluation. Among the original results presented in this master thesis are the robustness's analysis of the hybrid method (epidemic genetic algorithm + variational formulation solved by the conjugate gradient method) against the number of damaged elements and intensity of damage and application of the hybrid method to the hyperbolic heat propagation problem (damped wave). To operate in structures with many DOF was required a performance improvement in the damage search. A hierarchical search is proposed as a possible solution. It does not apply a discretization which provides many DOF, but an iterated (sequence) of pourer finite element discretizations whose temporal order of application is dependent on the gathering of damage in each region. The processing time by the hierarchical search becomes, in some cases, more than 2960 times smaller than the corresponding on the traditional search, without any detriment to quality. The hierarchical search is a promising approach to make the hybrid method for structural damage identification competitive in order to provide good results at a reasonable computational effort.



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Evolução do número de artigos ( <i>papers</i> ) publicados anualmente na área de problemas inversos (quadrados pretos) de identificação de dano estrutural no geral (círculos vermelhos) e na identificação de dano estrutural usando técnicas de problemas inversos (triângulos verdes). . . . .	3
1.2 Diagrama ilustrativo do problema de estimação de dano estrutural como um problema inverso. . . . .	6
2.1 Diagrama ilustrativo referente ao processo de regularização. . . . .	10
2.2 Confronto entre a convergência do método de máxima descida (via gradiente único) com tamanho de passo ótimo (em verde) e o método do gradiente conjugado (em vermelho) para a minimização de uma forma quadrática. . . . .	11
2.3 Fluxograma do processo de monitoramento da integridade estrutural. . .	12
3.1 Elemento de barra genérico sujeito à vibração longitudinal. . . . .	19
3.2 Elemento de barra inclinado em relação ao sistema $X - Y$ . . . . .	21
3.3 Treliça de quatro elementos engastada. . . . .	24
3.4 Pseudocódigo do Algoritmo Genético empregado. . . . .	27
3.5 Primeiras etapas de discretização de um avião sob a abordagem hierárquica.	35
4.1 Erro médio de estimação para o MGC (a) e para o método híbrido (b). A cor de cada retângulo corresponde ao valor do erro médio de estimação do dano - valor $(i, j)$ - no sistema de $i$ elementos danificados, com dano de intensidade $j$ . De azul a vermelho são apresentadas 20 cores, cada cor correspondendo a um intervalo de 5% de erro de estimação. . . . .	42
4.2 Erro mínimo de estimação para o MGC (a) e para o método híbrido (b). A cor de cada retângulo corresponde ao valor do erro mínimo de estimação do dano - valor $(i, j)$ - no sistema de $i$ elementos danificados, com dano de intensidade $j$ . De azul a vermelho são apresentadas 20 cores, cada cor correspondendo a um intervalo de 5% de erro de estimação. . .	43

4.3	Resultados da inversão para o problema parabólico via AG (a) e MV (b). Em quadrados pretos a condição inicial verdadeira, em círculos vermelhos e em triângulos verdes, respectivamente, a condição inicial estimada via (a) AG sem e com regularização e (b) MV sem e com o critério de parada de Morozov. . . . .	54
4.4	Resultados da inversão para o problema hiperbólico via AG (a) e MV (b). Em quadrados pretos a condição inicial verdadeira, em círculos vermelhos e em triângulos verdes, respectivamente, a condição inicial estimada via (a) AG sem e com regularização e (b) MV sem e com do critério de parada de <i>Morozov</i> e em triângulos verdes com uso de tal critério. . . . .	55
4.5	Resultados da estimação de condição inicial (quadrados pretos) para o problema parabólico (a) e hiperbólico (b) via MV, em ambos os casos sem ruído (círculos vermelhos) e com ruído de intensidade de 15% (triângulos verdes). . . . .	56
4.6	Discretização da barra teste sob a abordagem tradicional. Os elementos com faixa vermelha são os danificados. . . . .	57
4.7	Etapas de discretização da barra teste sob a abordagem hierárquica. Os elementos com faixa vermelha são os danificados. . . . .	58
4.8	(a) Estação Espacial Internacional, (b) Discretização simplificada da Estação Espacial Internacional em 68 elementos finitos. . . . .	62
4.9	Níveis hierárquicos de discretização no primeiro caso: a) primeiro nível, 12 elementos finitos, b) segundo nível, 24 elementos finitos, c) terceiro nível, 28 elementos finitos (mesma precisão espacial das áreas danificadas que na discretização com 68 elementos finitos). Ao lado de cada figura a correspondência, via cores de fundo, com a estrutura discretizada em 68 elementos finitos . . . . .	65
4.10	Níveis hierárquicos de discretização no segundo caso: a) primeiro nível, 12 elementos finitos, b) segundo nível, 16 elementos finitos (mesma precisão espacial das áreas danificadas que na discretização com 68 elementos finitos). Ao lado de cada figura a correspondência, via cores de fundo, com a estrutura discretizada em 68 elementos finitos. . . . .	66

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GDL	–	Graus de liberdade
EDP	–	Equações Diferenciais Parciais
MH	–	Método Híbrido
AG	–	Algoritmo Genético
MGC	–	Método do Gradiente Conjugado
MV	–	Método Variacional
MPI	–	Message Passing Interface
FRF	–	Função Resposta a Frequência
TCPU	–	Tempo de Computação



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Sobre a relevância do tema . . . . .	1
1.2 Sobre o problema de pesquisa . . . . .	5
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1 Sobre Problemas Inversos . . . . .	9
2.2 Estimação de dano estrutural: etapas principais, métodos clássicos e método híbrido . . . . .	12
<b>3 METODOLOGIA DE DETECÇÃO DE DANOS</b> . . . . .	<b>17</b>
3.1 Discretização de estruturas usando elementos finitos . . . . .	18
3.1.1 O elemento finito do tipo Barra - matriz estrutural elementar . . . . .	18
3.1.2 O elemento finito do tipo Barra - matriz estrutural global . . . . .	19
3.1.3 O elemento finito do tipo Treliça - matriz estrutural elementar . . . . .	20
3.1.4 O elemento finito do tipo Treliça - matriz estrutural global . . . . .	23
3.2 O método híbrido de estimação de dano estrutural . . . . .	25
3.2.1 Algoritmo genético epidêmico . . . . .	25
3.2.1.1 Pseudocódigo do Algoritmo Genético . . . . .	26
3.2.2 O Método Variacional . . . . .	27
3.2.2.1 A Equação de Restrição - Problema Direto . . . . .	27
3.2.2.2 O Problema Adjunto e a Equação Gradiente . . . . .	28
3.2.2.3 O Problema de Sensibilidade . . . . .	31
3.2.2.4 Determinação do Comprimento Descendente . . . . .	32
3.2.2.5 O Algoritmo de Solução . . . . .	33
3.3 Busca hierárquica . . . . .	34
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .	<b>41</b>
4.1 Contribuição à análise: Análise de robutez . . . . .	41
4.2 Contribuição à aplicação: Propagação hiperbólica do calor . . . . .	44
4.2.1 Formulação para Propagação do Calor: Caso Parabólico . . . . .	47
4.2.2 Formulação para Propagação do Calor: Caso Hiperbólico . . . . .	48
4.2.3 Codificação genética e formulação de Alifanov . . . . .	51

4.2.4	Resultados e discussões das inversões . . . . .	53
4.3	Contribuição à aplicabilidade: Busca Hierárquica . . . . .	55
4.3.1	Estudo de caso em uma barra simples . . . . .	57
4.3.2	Estudo de caso na identificação de danos na Estação Espacial Interna- cional . . . . .	61
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>69</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>73</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Vivemos e nos locomovemos em estruturas; a avaliação da integridade de tais, sejam elas civis ou militares, terrestres ao aeroespaciais, é uma questão estratégica de suma relevância, especialmente por representar segurança a pessoas, ambientes e bens.

De acordo com James (1997) há nos EUA cerca de 10 mil pontes de estradas de ferro com idades da ordem de 100 anos. Também existem aproximadamente 500 mil pontes de estradas de rodagem, 40% apresentando deficiências, enquanto cerca de 150 a 200 pontes colapsam por ano. Segundo Carrilo (2007), alguns governos, como o dos EUA, chegam a gastar cerca de 10 bilhões de dólares anualmente com reparos de pontes obsoletas, verba utilizada na inspeção visual e aplicação de métodos locais de busca de danos. De 1990 a 2006, segundo o Departamento de Estradas de Rodagem (DER<sup>1</sup>) a frota brasileira mais que dobrou, totalizando 15.187.281 automóveis - a evolução da frota terrestre pode afetar a saúde estrutural de pontes e viadutos; e segundo a Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC<sup>2</sup>) a quantidade de aviões passou de 14.790 em 1996 a 18.708 em 2009, com a de helicópteros indo, no mesmo período, de 496 a 1194.

As propriedades mecânicas de uma estrutura podem sofrer mudanças com o passar do tempo, seja por efeitos de uso ou intemperismo. Tais alterações, chamadas de danos, podem comprometer a saúde estrutural do sistema. No problema de identificação de danos assume-se que mudanças nas propriedades de rigidez da estrutura geram alterações na resposta vibratória do sistema. A estratégia de monitoramento e detecção de dano, que tem como base a análise da resposta vibratória (global) do sistema para detectar dano (local), é referida como monitoramento da saúde estrutural (*structural health monitoring*) por avaliação não-destrutiva (*non-destructive evaluation*), e pode ser efetuada via resolução de um problema inverso em vibrações mecânicas (INMAN, 1994; MCCONNELL, 1995).

## 1.1 Sobre a relevância do tema

A área central da presente dissertação, problemas inversos, retornou em um site de pesquisa de extrema popularidade<sup>3</sup>, 7.150.000 registros para o termo *inverse problem*

---

<sup>1</sup>[www.der.sp.gov.br](http://www.der.sp.gov.br)

<sup>2</sup><http://www.anac.gov.br>

<sup>3</sup>[www.google.com.br](http://www.google.com.br), via navegador google chrome, sistema operacional windows xp, acessado em 26 de novembro

(sendo 640.000 quando com uso de aspas, e 161.000 quando a pesquisa foi feita com aspas e no site Google acadêmico); enquanto que um outro termo científico, mas também de grande popularidade (e usado em diversas áreas), *quantum mechanics*, retornou 9.630.000 registros (sendo 5.140.000 quando com uso de aspas, e 1.040.000 quando além das aspas foi usado o site Google acadêmico). Já na base de dados científicos do respeitado site *ISI - Web of Knowledge*<sup>4</sup>, *inverse problem* retornou 24.883 artigos publicados, contra 27.239 de *quantum mechanics*. Tais diferenças relativamente pequenas (no caso geral) mostram o quão atuante é a comunidade de problemas inversos; e os resultados das buscas referentes ao termo exato (uso de aspas) revelam que a expressão “problemas inversos” ainda é muito característica da sua comunidade acadêmica.

No mesmo banco de dados do *ISI*, há 1.740 artigos com o termo *structural damage identification*, sendo destes 86 referentes a estimação de dano estrutural usando técnicas de problemas inversos. Na Figura 1.1, é exibida a evolução do número de artigos (*papers*) publicados anualmente, neste século, na área de problemas inversos, de identificação de dano estrutural no geral e na identificação de dano estrutural usando técnicas de problemas inversos. Percebe-se em ambos casos, uma tendência crescente, em ritmo aproximadamente exponencial, com inclinações semelhantes. Tais resultados mostram a crescente relevância deste problema de pesquisa.

Segundo Campos Velho (2008) (CAMPOS-VELHO, 2008), pode-se caracterizar os desafios científicos para 3 períodos distintos desde suas raízes até o presente momento, tendo o século XX como referência: antes, durante e depois do século XX.

No primeiro período, buscava-se um modelo conceitual e quantitativo para a natureza. Pode ser representado pela formulação de leis físico-matemática (como as leis da mecânica – do método científico de Galileu ao *Principia* de Newton – termodinâmica e eletromagnetismo, e investigações sobre a evolução das espécies (teoria Darwiniana da evolução por seleção natural, posteriormente completada pelas leis da genética mendeliana: Neodarwinismo), além de sínteses entre considerações a primeiros princípios (independentes de experimentos físicos) e observações experimentais.

---

<sup>4</sup><http://apps.isiknowledge.com>, acessado em 26 de novembro

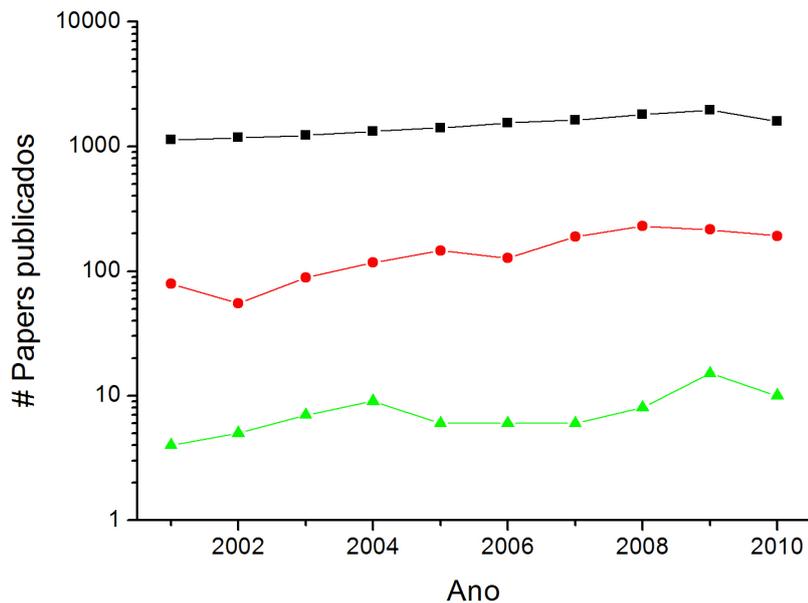


Figura 1.1 - Evolução do número de artigos (*papers*) publicados anualmente na área de problemas inversos (quadrados pretos) de identificação de dano estrutural no geral (círculos vermelhos) e na identificação de dano estrutural usando técnicas de problemas inversos (triângulos verdes).

Chega-se ao segundo período com as equações oriundas das generalizações (modelos) das observações e leis do primeiro período. Porém, como gerar as soluções matemáticas destes modelos, leis, equações? Os desenvolvimentos matemáticos aliados ao uso de um instrumento revolucionário, o computador eletrônico, permitem uma solução aproximada, mas suficientemente precisa, de problemas que requerem ou árduo tratamento analítico, ou mesmo quando a metodologia analítica mostra-se impossível: eis os métodos numéricos (HOFFMAN, 2001; LAX; RICHTMYER, 1956).

Na terceira fase, a Ciência tem boa parte das suas leis básicas, muitas formuladas em linguagem matemática, e, graças ao advento da computação, tem também as soluções aproximadas. A questão aqui é: como, a tempo viável, operar com uma quantidade tão grande de informações? E como usar as respostas até agora obtidas para gerar novas perguntas? Por exemplo: o processo de assimilação de dados (BENNETT, 2005) em 1980 para previsão meteorológica era feito com 200 mil dados; em 2010 é feito com 40 milhões de dados, e estima-se que em 2020 ter-se-á 10 bilhões de dados. Como fazer assimilação (leitura, avaliação da qualidade do dado e assimilação propriamente

dita) desta quantidade tamanha de dados na janela de tempo disponível dos Centros Operacionais de Previsão de tempo?

A computação volta a ser a chave para a solução deste desafio científico. Áreas como Genômica/proteômica<sup>5</sup> (NETO A; SANTOS, 2010; GALVAO et al., 2008), Sistemas Complexos (WEAVER, 1948; REIS et al., 2009; SANTOS, 2009a; SANTOS, 2009b; RANCK JUNIOR; SANTOS, 2010; MEDEIROS et al., 2010; SANTANA et al., 2009) e suporte à decisão com base em simulações (SILVA et al., 2010; FRANÇA et al., 2010) são exemplos de interface da emergência de uma nova ciência: a Ciência dos dados (“Data Science”).

A *ciência dos dados* utiliza-se de um vasto conjunto de técnicas, como análise de agrupamento (cluster analysis), análise estatística, análise de padrão gradiente (ROSA et al., 2000), análise via forma complexa da entropia (RAMOS et al., 2000), mineração de dados e inteligência computacional. Bem como, técnicas da computação: banco de dados, computação paralela, computação em grade e computação híbrida. A área de Problemas Inversos (CAMPOS-VELHO, 2008; CAMPOS-VELHO, 2007) é uma das técnicas sofisticadas que também está presente no grande domínio da ciência dos dados.

Tal classificação é coerente com a apresentada em (HEY et al., 2009), na qual há 4 paradigmas:

- a) Ciência puramente fenomenológica,
- b) Generalizações e modelagem matemática,
- c) Simulação computacional,
- d) Análise de dados e regras de inferência: unificação (e retro-alimentação) entre experimento, modelagem e simulação, com geração de conhecimento.

Os paradigmas 1 e 2 se encaixam no primeiro período. O 3º paradigma já surge na época do computador digital, e o 4º paradigma reforça o estabelecimento de uma “Ciência dos dados”.

---

<sup>5</sup>NCBI - <http://www.ncbi.nlm.nih.gov>

## 1.2 Sobre o problema de pesquisa

O campo básico de aplicação da pesquisa aqui apresentada é estimação de dano em estruturas aero-espaciais. Porém a técnica é aplicável, a princípio, também a outras áreas de problemas da engenharia mecânica, como civil e de petróleo, por exemplo.

A área espacial é um dos focos de aplicação, pois as missões espaciais já hoje, e também em futuro próximo, envolvem e envolverão a utilização de estruturas de grande porte (tamanho e peso), com equipamentos auxiliares como antenas, proteções e painéis solares. Uma das principais características das grandes estruturas espaciais flexíveis é a incerteza no conhecimento do seu comportamento estrutural dinâmico, bem como de métodos para detecção de suas alterações (HORTA; KVATERNIK, 2000), dificultadores da execução de bons programas de controle, uma vez que para realizar um melhor sistema de controle é importante saber, da melhor forma possível, as propriedades mecânicas da estrutura a tempo presente – não apenas o dado de projeto (DA FONSECA et al., 2007).

A comparação entre do valor de rigidez estimado (a qualquer tempo, via problema inverso) com o apresentado no projeto da estrutura (configuração íntegra, dado de projeto) permite inferir a presença de dano estrutural no sistema em avaliação (diagrama ilustrativo na Figura 1.2). Na literatura, são encontrados alguns trabalhos que apresentam uma ampla revisão dos diferentes métodos que utilizados neste tipo de problema inverso (LIU; HAN, 2003; AUWERAER; PEETERS, 2001; SALAWU, 1997; CAWLEY; ADAMS, 1979; ADAMS et al., 1978; CHEN et al., 1995; CHINCHALKAR, 2001).

O problema direto em vibrações mecânicas é caracterizado pelo conhecimento das propriedades mecânicas da estrutura (massa, coeficiente de amortecimento e rigidez), e condições complementares (condições iniciais e de contorno), tendo como respostas observáveis dinâmicos, como deslocamento, velocidade e aceleração. Um problema inverso é encarado quando se tem dados de observação, como deslocamento ou espectro de frequências (recolhidos via sensores de precisão e área de cobertura conhecidas), há domínio das condições complementares (experimento controlado) e deseja-se saber as propriedades mecânicas, por exemplo, o valor dos componentes da matriz de rigidez global do sistema (INMAN, 1994; MCCONNELL, 1995).

Problemas inversos podem ser resolvidos, por exemplo, via problema de otimização associado, minimizando a diferença entre os observáveis experimentais medidos e

- 1) Matriz de rigidez intacta (MRI) – dado de projeto
- 2) Matriz de rigidez danificada (MRD) – estimada via Problema Inverso:



- 3) Dano estimado: diferença entre MRI e MRD.

Figura 1.2 - Diagrama ilustrativo do problema de estimação de dano estrutural como um problema inverso.

os estimados via modelo matemático. O problema de otimização aqui apresentado é resolvido por um método híbrido (MH): uso de um Algoritmo Genético (AG) – meta-heurística estocástica de busca global (HOLLAND, 1992; GOLDBERG, 1989; MITCHELL, 1996) – para inicializar o Método do Gradiente Conjugado (MGC) – método determinístico de convergência a tempo finito (HOFFMAN, 2001; CHIWIA-COWSKY, 2005). Para operar em estruturas com um número muito elevado de graus de liberdade, é necessário uma redução da complexidade do problema de identificação de dano. Uma estratégia hierárquica é proposta como possível método de redução do esforço computacional.

A metodologia de estimação de dano estrutural aqui apresentada fornece um mapa das possíveis regiões com dano e suas intensidades, sendo material para apoio à decisão dos gestores de manutenção das estruturas: que poderá optar de reforços estruturais até o descarte da estrutura.

A dissertação está assim organizada: na presente seção foi apresentado o objetivo de estudo, e a relevância do tema e do problema de pesquisa. Na segunda seção, são discutidos os métodos clássicos de estimação de danos estruturais e mostram-se os objetivos da pesquisa: as inovações trazidas ao método híbrido de estimação de danos em estruturas aeroespaciais. A seção de metodologia traz a discretização da estrutura em elementos finitos, o uso do algoritmo genético para inicializar o método de gradiente conjugado, e a busca hierárquica pelo dano. Em seguida são exibidos e discutidos os resultados, sub-divididos em três blocos: contribuição à

análise, à aplicação e ao método. Por fim são proferidas as conclusões e perspectivas da investigação.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção é apresentada parte da teoria dos Problemas Inversos, bem como alguns métodos de resolução. Em sequência são discutidas as técnicas clássicas de estimação de dano estrutural e as inovações que o método híbrido apresenta. Por fim são declaradas as contribuições que a presente dissertação traz à área.

### 2.1 Sobre Problemas Inversos

Pode-se definir como Problema Direto quando a partir de “causas” conhecidas pode-se calcular os “efeitos”. Por exemplo: em um material não dielétrico, quando é estabelecida uma diferença de potencial elétrico (“causa”) é gerada uma corrente (“consequência”), que pode ser medida experimentalmente. Se, entretanto, o objetivo for descobrir qual o valor da diferença de potencial elétrico que gerou um corrente medida, então tal situação descreve o Problema Inverso associado (CAMPOS-VELHO, 2008).

Problemas inversos normalmente recaem na classe dos problemas mal-postos. Um problema é dito bem-posto quando a solução existe, é única e é estável em relação aos dados de entrada. Caso o contrário o problema é considerado mal-posto (HADAMARD, 1923). Como exemplo de problema mal-posto tem-se o problema de identificação de danos estruturais, que viola a terceira condição de Hadamar: a estabilidade.

Problemas inversos podem ser resolvidos, por exemplo, por:

- Métodos de regularização (TRUJILLO; BUSBY, 1997; TIKHONOV; ARSENIN, 1977; RAMOS et al., 1999; SHIGUEMORI et al., 2002): O critério dos mínimos quadrados não é suficiente para garantir um bom resultado de inversão, especialmente em casos nos quais há ruído experimental, pois quando o problema é matematicamente mal posto, a perturbação nos dados devido ao ruído pode acarretar em inversões errôneas ou até fisicamente inconsistentes. O método de regularização transforma um problema mal posto, num problema bem posto, que está *próximo* ao problema original. Desta forma, é possível controlar a influência do ruído, impondo soluções inversas suaves (ou regulares). Portanto, não haverá uma coincidência plena entre os dados experimentais e os dados calculados pelo modelo matemático:

requere-se a melhor coincidência dos dados (termo advindo do critério dos mínimos quadrados), levando-se em consideração um certo grau de suavidade desejado – ou imposto por necessidade de consistência matemática ou fenomenológica: isto configura as *informações adicionais* (ou *a priori*), ver Figura 2.1.

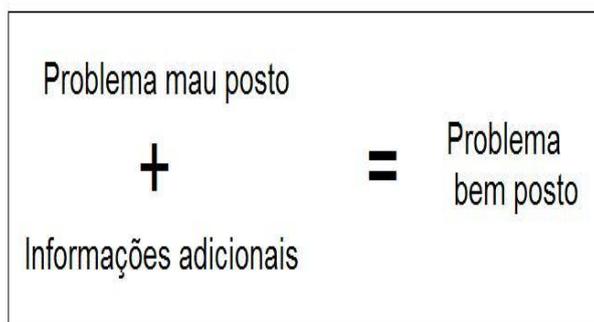


Figura 2.1 - Diagrama ilustrativo referente ao processo de regularização.

- Métodos de filtragem (KALMAN, 1960; MA; LIN, 2000): Um filtro é um algoritmo ótimo de processamento recursivo de dados, tal que todos os dados prévios, exceto o mais recente, não precisam ser armazenados após uma nova medida ter sido tomada – ex. filtro de Kalman, o qual compreende duas partes (predição e correção). Nesta opção de resolução, é aplicado um método inverso com uma técnica recursiva para estimar as magnitudes dos termos desconhecidos que consiste no uso do filtro de Kalman.
- Métodos variacionais (GILL et al., 1981; BAZARRA, 1990): O objetivo é minimizar um funcional. Em geral, o funcional é a discrepância entre o observável experimental e o valor estimado via solução do problema direto. Trata-se de um problema de otimização que usa como restrição o próprio modelo direto. Para acoplar a restrição ao funcional, usa-se o multiplicador de Lagrange. A técnica variacional consiste em deduzir a *equação adjunta* (equação do multiplicador de Lagrange). Exemplo: a formulação de Alifanov, associa ao problema inverso um problema de otimização que é resolvido pelo Método de Gradiente Conjugado (MGC) e o gradiente do funcional é computado pelo equação do multiplicador de Lagrange (equação

adjunta). O MGC é semelhante ao de máxima descida, mas utiliza direções conjugadas a cada iteração – ver Figura 2.2, e que, assumindo aritmética exata, converge em no máximo  $n$  passos, onde  $n$  é o tamanho da matriz do sistema (HOFFMAN, 2001; CHIWIACOWSKY, 2005).

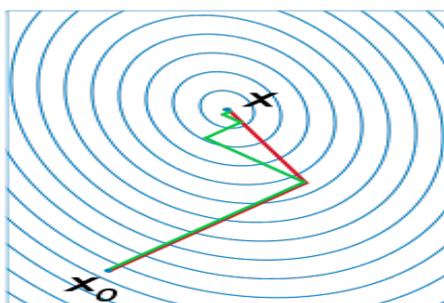


Figura 2.2 - Confronto entre a convergência do método de máxima descida (via gradiente único) com tamanho de passo ótimo (em verde) e o método do gradiente conjugado (em vermelho) para a minimização de uma forma quadrática.

Fonte: Repositório de informações livres – *Wikipedia* (2010), em método de gradiente conjugado: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Método\\_do\\_gradiente-conjugado](http://pt.wikipedia.org/wiki/Método_do_gradiente-conjugado)

- Redes Neurais Artificiais (SHIGUEMORI et al., 2005; RAMU; JOHNSON, 1995; ATALLA; INMAN, 1998): sistemas computacionais estruturados nos quais nós simples, chamados neurônios, são interligados para formar uma rede. Após o processo de treinamento, no qual uma série de padrões de entrada e saída são apresentados para cálculo do valor numérico da conexão entre os neurônios, a rede é capaz associar um padrão de entrada (não necessariamente um das apresentadas no treinamento) a um padrão de saída correspondente. Há exemplos de uso de redes neurais na resolução de problemas inversos nas mais diversas áreas (PAES; CAMPOS-VELHO, 2009; CINTRA et al., 2010; HARTER; CAMPOS-VELHO, 2010; SHIGUEMORI et al., 2002; SHIGUEMORI et al., 2006).

## 2.2 Estimação de dano estrutural: etapas principais, métodos clássicos e método híbrido

O processo de monitoramento da integridade estrutural é composto por diferentes etapas, executadas de forma cíclica, conforme representado na Figura 2.3.

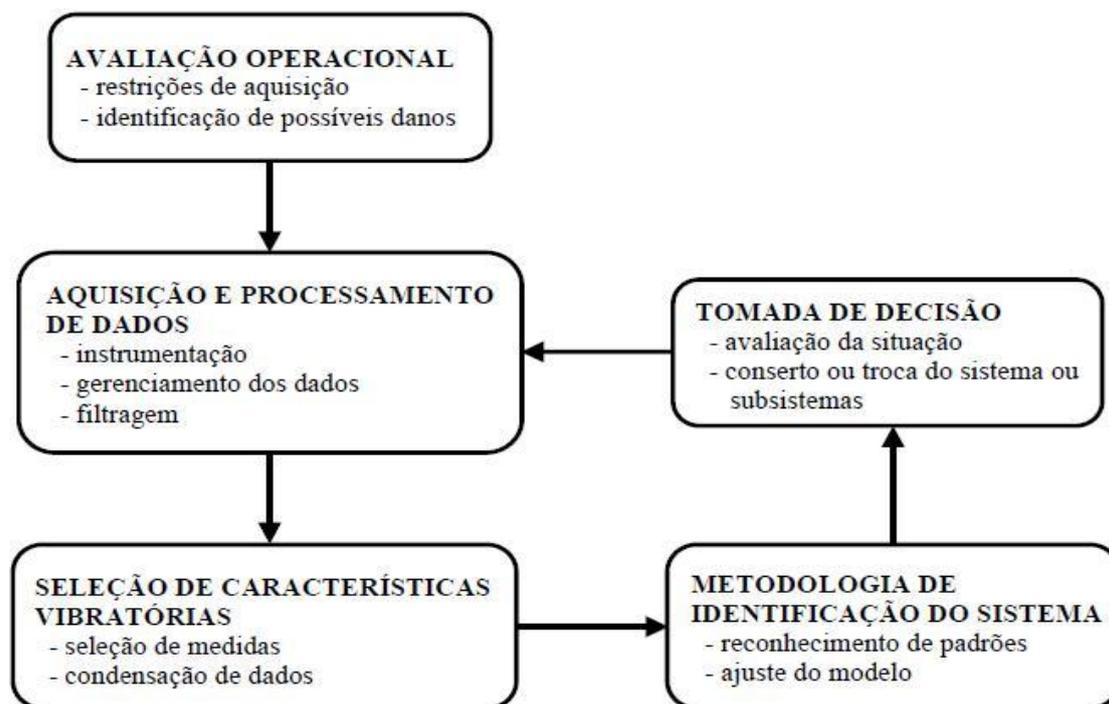


Figura 2.3 - Fluxograma do processo de monitoramento da integridade estrutural.

As técnicas atuais para detecção de dano estrutural podem ser divididas basicamente em duas grandes categorias: as de ensaios destrutivos e de ensaios não-destrutivos. Na primeira categoria, estruturas são avaliadas por amostragem e, como o próprio nome sugere, ela é descartada pós teste (normalmente testes de fadiga ou tração). Na segunda categoria, há métodos não-destrutivos de medidas locais e de medidas globais:

- Métodos não destrutivos de medidas locais: Vistoria completa da estrutura – submetê-la a algum ensaio e verificar em cada ponto se nela ocorre alguma falha – tal verificação pode ser visual (por uma equipe de técnicos)

ou por instrumentos (com posterior averiguação técnica *in situ*). Como exemplos há os ensaios do tipo pulso-eco, no qual um ensaio de impacto gera um pulso longitudinal que propaga-se ao longo da estrutura e que, ao encontrar uma região danificada (região não homogênea), produz uma onda (eco) com informações sobre o dano; e o mergulho da aeronave inteira em um tanque com água para posterior passagem de corrente elétrica. Muitas empresas aeroespaciais usam estes tipos de métodos para a certificação de seus produtos<sup>1</sup>.

- Métodos não destrutivos de medidas globais: Análise de resposta global – submeter a estrutura a algum ensaio (vibracional, por exemplo) e usar técnica mais automatizadas para detectar falhas na estrutura. É, em geral, mais rápida e de menor custo financeiro. A metodologia apresentada nesta dissertação se enquadra nesta categoria.

Na etapa de aquisição de dados e seleção de características vibratórias há diversas questões delicadas, inclusive apresentando diversas discordâncias entre especialistas na literatura, entre elas<sup>2</sup>:

- Aquisição de dados: o tipo, a quantidade, a localização dos sensores e a velocidade de aquisição dos dados têm papel crucial na obtenção dos observáveis experimentais de forma a conseguir por uma técnica de entrada global obter análises referentes a um fenômeno local (o dano). Alguns destes trabalhos tratam apenas do problema de tipagem, quantificação e localização ótimas de sensores (BALMES, 2005; FRISWELL, 2001; KAMMER; TINKERB, 2004; LIN et al., 2004), enquanto outros apresentam, conjuntamente, solução para o problema de detecção de danos (POTHISIRI; HJELMSTAD, 2002).
- Domínio dos dados: os dados adquiridos podem ser no domínio do tempo, da frequência ou domínio modal. A aquisição de dados no domínio do tempo se dá por acelerômetros, com posterior integração no tempo para determinação da série temporal de deslocamentos. Esse conjunto de dados

---

<sup>1</sup>Maiores informações sobre certificação de aeronaves podem ser encontradas no site do órgão responsável: <http://www.anac.gov.br/certificacao>

<sup>2</sup>Na literatura podem ser encontrados alguns trabalhos que tratam exatamente destas e de outras questões de forma detalhada, ex. (EWINS, 1984).

pode passar por procedimentos do tipo transformada de Fourier e gerar dados no domínio da frequência, apresentados em Funções Resposta a Frequências (FRFs). Das FRFs podem ser extraídas as características modais da estrutura, como os modos normais de vibração. Entretanto, alguns autores afirmam que tais transformações levam a perda de dados, embora também conduzam a uma redução do ruído presente nos dados originais (FRISWELL; PENNY, 1997).

Devido a tal pluralidade de opções, o método híbrido foi testado em todos os domínios. Desta forma é possível prepará-lo para qualquer tipo de dados. A escolha do dado de observação dependerá da experiência profissional e instrumentação. O foco desta dissertação é contribuição ao método híbrido: abordagem hierárquica. A dissertação não irá tratar de avaliar os limites do método híbrido em relação a dimensionalidade e/ou diferentes configurações geométricas, nem mesmo trata de projetar um modelo experimental de avaliação da metodologia.

Na literatura, são encontrados alguns trabalhos que apresentam uma ampla revisão dos diferentes métodos utilizados neste tipo de problema, destacando-se os trabalhos de Doebling *et al.* (1996) e Sohn *et al.* (2003), que apresentam o estado da arte para os períodos até 1996 e de 1996 a 2001, respectivamente. Deste período em diante, dentre os trabalhos que merecem destaque estão:

- Huang, C. H. (2001) – primeiro trabalho na área de estimação de dano utilizando a abordagem variacional. Foi apresentado o caso simples de um sistema massa-mola com um grau de liberdade, e em 2002 um segundo trabalho apresentou a formulação e aplicação do método para estruturas massa-mola com múltiplos graus de liberdade, sendo apresentados resultados para um caso com apenas dois graus de liberdade. Chiwiacowsky *et al.*, 2003 verificaram que a metodologia apresentava problemas para estruturas com um número de GDL levemente superior às aquelas examinadas.
- Shiguemori, E. H. *et al.* (2005) – é um trabalho exemplo de inversão via redes neurais no problema de vibração mecânica apresentou resultados de qualidade inferior quando comparados aos do método híbrido. No artigo, as redes neurais perceptron de múltiplas camadas foram utilizados, treinadas através do algoritmo de retropropagação do erro. A rede mostrou-se razoavelmente eficaz na solução do problema, mas apenas em casos com

poucos GDL (SHIGUEMORI et al., 2005a; SHIGUEMORI et al., 2004; SHIGUEMORI et al., 2005b; CHIWIACOWSKY et al., 2008).

Fundamentalmente, a solução do problema de determinação da matriz de rigidez, com base nos observáveis experimentais de resposta, é obtida através da otimização de uma função que represente a diferença entre o comportamento medido e o esperado. As diversas metodologias desta abordagem, tipo atualização de modelos, diferem com relação a alguns fatores: a função objetivo a ser minimizada, as restrições utilizadas e o esquema numérico utilizado na otimização. Métodos de ajuste ou atualização de modelos vêm sendo amplamente utilizados em algoritmos de identificação de danos, empregando basicamente dados experimentais no domínio modal e da frequência, bem como técnicas de otimização determinísticas e estocásticas (STUTZ et al., 2005; DOEBLING et al., 1996; SOHN et al., 2003).

A técnica híbrida, que foi pela primeira vez apresentada em Chiwiacowsky *et al*, 2003 (CHIWIACOWSKY et al., 2003), foi utilizada em problemas de danos estruturais discretos e contínuos (GASBARRI et al., 2007; CHIWIACOWSKY et al., 2006) e em um problema de estruturas espaciais (detecção de danos em Estação Espacial Internacional (CHIWIACOWSKY et al., 2004)). O método foi aplicado também ao problema inverso do tipo projeto ótimo (*optimal design*) de estruturas (GASBARRI et al., 2009).

O método de Alifanov, originalmente aplicado à área térmica, não produz uma solução inversa satisfatória em problemas hiperbólicos, ou problemas proto-hiperbólicos, nos quais imprecisões nas condições iniciais não são amortecidas ao longo do tempo, diferente do que ocorre em problemas parabólicos, como a condução do calor (CAMPOS-VELHO et al., 2005; CHIWIACOWSKY et al., 2004; CHIWIACOWSKY et al., 2004). Para tornar a técnica variacional aplicável a classe de identificação de danos, foi proposto na tese de Chiwiacowsky em 2005 (CHIWIACOWSKY, 2005) o uso de um Algoritmo Genético (HOLLAND, 1992; GOLDBERG, 1989; MITCHELL, 1996), com o operador epidêmico (MEDEIROS, 2002), para inicializar o Método do Gradiente Conjugado. A abordagem foi chamada de *Método Híbrido*.

O objetivo central da pesquisa aqui proposta é desenvolver uma estratégia que possa melhorar de forma significativa o desempenho na identificação de danos, com o emprego do método híbrido. É uma inovação na forma de atacar o problema: aplicação de uma abordagem hierárquica para avaliar os diferentes domínios em que

os prejuízos podem estar presentes, começando com uma discretização grosseira e promovendo aperfeiçoamento gradual somente em áreas com possibilidade de danos ainda não foi descartada.

Pretende-se que a estratégia proposta possa representar um ganho competitivo para o método, tornando-o capaz para a identificação de danos em estruturas muito complexas: com milhares, ou mesmo milhões, de graus da liberdade.

A presente dissertação apresenta três inovações com contribuições à área, a saber:

- Inovação com contribuição à análise: o método híbrido, pela etapa do Algoritmo Genético, pode apresentar resultados diferentes mesmo sob o mesmo problema: devido às diferentes sementes de números pseudo-aleatórios utilizadas. Neste estudo, são analisados os erros médios e erros mínimos de estimação de dano em função do número de elementos danificados e intensidade dos danos. Tais resultados foram publicados no artigo *Análise de robustez do método híbrido de estimação de dano estrutural*, *Proceedings* do congresso Dincon (2010) (SANTOS et al., 2010b), e submetidos à revista TEMA (SANTOS et al., 2010a).
- Inovação com contribuição à aplicação: até o presente momento, segundo nosso conhecimento, nenhum trabalho foi publicado em periódicos especializados com a estimação de condição inicial no problema de propagação do calor no regime hiperbólico. Uma análise comparativa destes resultados e da inversão utilizando um Algoritmo Genético será submetida ao periódico internacional *International Journal of Heat and Mass Transfer*, com o título *Genetic and variational methods for initial temperature profile estimation on the hyperbolic heat conduction* (SANTOS et al., 2010c).
- Inovação com contribuição ao método: a parte principal desta dissertação é a abordagem hierárquica para o método híbrido. Os testes efetuados, que revelaram que a busca hierárquica apresenta não apenas maior eficiência mas também melhor eficácia na identificação de dano estrutural, são originalmente apresentados na presente dissertação. Análises preliminares foram apresentadas no congresso internacional ICNPAA (2010), sob o título *An Hierarchical Approach for the Structural Damage Identification*.

### 3 METODOLOGIA DE DETECÇÃO DE DANOS

A seguir é descrita a metodologia utilizada para estimação de dano estrutural. Primeiramente é discutida a discretização da estrutura (em elementos finitos). Definido o problema direto, O funcional de discrepância é minimizado seguindo o algoritmo genético epidêmico, associado ao método variacional e por fim é formulada a busca hierárquica. Um panorama da metodologia é apresentado a seguir:

- Passo 1: É preciso definir a estrutura de estudo, da qual a saúde estrutural será analisada. Dever-se-á conhecer as configurações físicas e geométricas, como densidade, comprimento, área e módulo de Young de cada parte da estrutura. Então é feita a discretização da estrutura em elementos finitos.
- Passo 2: Uma vez definida a estrutura é preciso efetuar um teste de vibração, para obtenção do espectro vibracional. No caso de experimento numérico, são escolhidos alguns elementos para receberem uma dada intensidade de dano (que pode ser variável) e é então resolvido o problema direto: dada uma matriz de rigidez, determina-se espectro vibracional. A tal espectro é adicionado ruído, de forma a emular um dado real, sujeito a erros experimentais dos sensores, efeitos de filtragem digital e truncamento do espectro modal (CAMPOS-VELHO, 2008; CASTELLO et al., 2002). No experimento numérico, a informação da localização e intensidade dos danos é guardada fora do programa principal.
- Passo 3: É executada então a busca hierárquica pelo dano: há já conhecimento sobre as configurações físicas e geométricas da estrutura, então novas discretizações via elementos finitos podem ser efetuadas, logo, via resolução do problema direto novos espectros podem ser encontrados. A comparação, para cada nível de discretização, entre o espectro experimental e o obtido via resolução do problema direto para a matriz de rigidez determinada pelo método de estimação permite inferir a presença de dano. Em cada sub-estrutura na qual é encontrado dano é promovida uma discretização mais fina e toda a estrutura é submetida a um novo teste de vibração, até que a precisão de identificação de dano na área danificada seja encontrada.
- Passo 3.1: AG - Para iniciar a resolução do problema de otimização associado (minimização da diferença entre os espectros experimentais e estimados) é aplicado um algoritmo genético, meta-heurística estocástica de

busca global. O processo iterativo é interrompido a um dado instante, após um número pré-fixado de iterações.

- Passo 3.2: MGC - A solução parcial encontrada pelo AG é fornecida como condição inicial para o método de gradiente conjugado, método determinístico de busca local, que resolve a formulação de Alifanov do problema. A solução final do MGC é a solução final do problema de estimação.

### 3.1 Discretização de estruturas usando elementos finitos

Para discretizar as estruturas cujo dano estrutural deseja-se estimar usou-se o método dos elementos finitos (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; COOK et al., 2001; SHAMES; DYM, 1985). Como fundamento para a solução de elementos finitos emprega-se o princípio dos trabalhos virtuais. Tal princípio diz que, para assegurar o equilíbrio de um corpo é necessário que, para qualquer pequeno deslocamento virtual imposto ao corpo em seu estado de equilíbrio – e compatível com as condições de vínculo, o trabalho virtual interno total deve ser igual ao trabalho virtual externo total (princípio de conservação): equações de balanço para deslocamentos e torções.

Pode-se afirmar também que o método dos elementos finitos é muito utilizado face à analogia física direta que se estabelece, com o seu emprego, entre o sistema físico real (a estrutura em análise) e o modelo (malha de elementos finitos).

#### 3.1.1 O elemento finito do tipo Barra - matriz estrutural elementar

O elemento finito do tipo barra é destinado a sistemas que apresentam vibrações longitudinais. Usar-se-á como exemplo a estrutura apresentada na Figura 3.1.

O elemento de barra apresenta dois nós, números 1 e 2 na Figura 3.1, cada um representando um grau de liberdade, isto é, deslocamentos longitudinais representados por  $u_1$  e  $u_2$  respectivamente. O deslocamento do elemento de barra deve satisfazer, via princípio do trabalho virtual na representação do deslocamento estático, a equação

$$EA \frac{d^2 \mathbf{u}(x)}{dx^2} = 0, \quad (3.1)$$

para cada valor de  $x$  no intervalo de 0 a  $l$ , onde:  $l$  representa o comprimento do elemento,  $E$  o módulo de Young,  $A$  a área da seção transversal e  $\rho$  a densidade do material. As matrizes de rigidez e de massa do elemento de barra sujeito a vibração

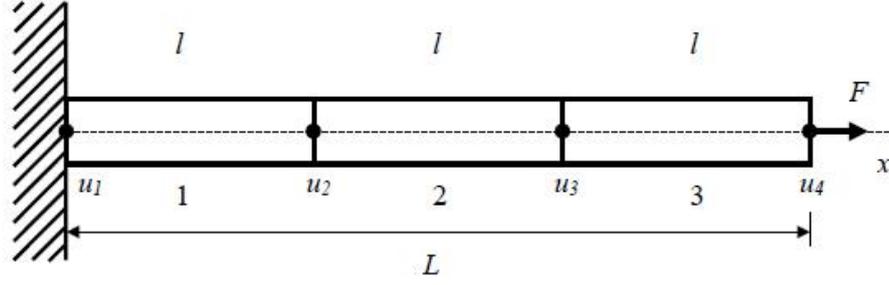


Figura 3.1 - Elemento de barra genérico sujeito à vibração longitudinal.  
Fonte: Chiwiacowsky (2005).

longitudinal são (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; COOK et al., 2001; SHAMES; DYM, 1985):

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

A matriz de amortecimento é difícil de determinar, uma vez que as propriedades de amortecimento são dependentes da frequência. Por esta razão, a matriz  $\mathbf{C}$  (matriz dos coeficientes de amortecimento) é, em geral, parametrizada a partir de combinação linear apropriada entre a matriz de massa e a matriz de rigidez globais, sendo os coeficientes da parametrização tomados de forma empírica.

### 3.1.2 O elemento finito do tipo Barra - matriz estrutural global

A construção das matrizes de rigidez e massa globais de uma estrutura é obtida superpondo-se a contribuição dos  $N_e$  elementos utilizados na discretização. Deve-se observar que, para a estrutura examinada na Figura 3.1, sem considerar a aplicação das condições de contorno, quatro deslocamentos nodais são possíveis ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$ ), tal que  $u_2$  é resultado da contribuição dos elementos 1 e 2, e  $u_3$  é resultado da contribuição dos elementos 2 e 3 - a matriz de rigidez global fica assim definida:

$$\mathbf{K} = \frac{E_1 A_1}{l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{E_2 A_2}{l_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{E_3 A_3}{l_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Uma vez que a área da seção transversal foi assumida uniforme e idêntica para todos os elementos, assim como o tipo de material e os comprimentos elementares, a matriz de rigidez global para uma barra sob tração fica assim definida:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Agora, introduzindo a condição de contorno representada pela condição de engaste, então  $u_1$  deve ser nulo, o que é assegurado através do cancelamento da primeira linha e primeira coluna. Assim, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  para uma barra engastada discretizada com três elementos é definida como:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Analogamente, isto é, sobrepondo as matrizes de massa elementares e eliminando as linhas e colunas correspondentes à condição de contorno de  $u_1 = 0$ , pode-se obter a matriz de massa global dada por:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

### 3.1.3 O elemento finito do tipo Treliça - matriz estrutural elementar

Será brevemente descrito a seguir o processo de construção da matriz elementar de rigidez do elemento finito do tipo treliça, partindo da construção já feita para elementos do tipo barra.

É desejável que as matrizes de rigidez e massa possam ser escritas referenciadas a um sistema de coordenadas global - não necessariamente coincidente ao eixo principal do elemento de barra. Para isso, considere o elemento de barra inclinado de um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $X$ , apresentado na Figura 3.2.

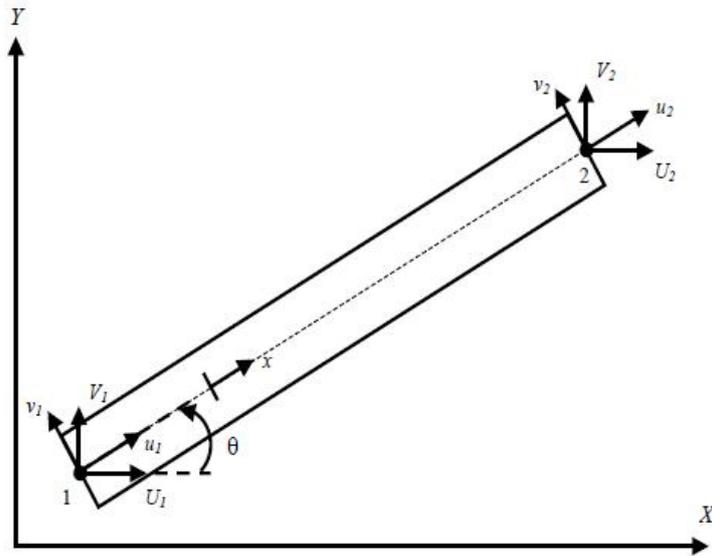


Figura 3.2 - Elemento de barra inclinado em relação ao sistema  $X - Y$ .  
 Fonte: Chiwiacowsky (2005).

Considerando os graus de liberdade dos pontos nodais do elemento alinhados com os graus de liberdade do sistema de referência local, tem-se:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(e)}(x, y, z) = \tilde{\mathbf{N}}^{(e)}(x, y, z) \mathbf{u}, \quad (3.8)$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}^{(e)}$  são os deslocamentos medidos em um sistema de coordenadas local no interior do elemento,  $\tilde{\mathbf{N}}^{(e)}$  é a matriz de interpolação dos deslocamentos, e  $\mathbf{u}$  é um vetor das três componentes do deslocamento em um sistema de referência local. Entre os dois sistemas de coordenadas, o global  $(X, Y, Z)$  e o local  $(x, y, z)$ , pode ser definida a matriz de rotação tal que:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad (3.9)$$

de inversa

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

A relação entre as componentes dos deslocamentos nodais no sistema de referência local e as mesmas no sistema de referência global é:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{U}, \quad (3.11)$$

onde  $\mathbf{T}$  é denominada matriz de rotação e corresponde ao tensor de transformação de primeira ordem. Agora, identificando com uma barra todas as matrizes de elementos finitos correspondentes aos graus de liberdade no sistema de referência local, tem-se:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}; \quad \mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}}^{(e)} \mathbf{T}; \quad \mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{R}}^{(e)}. \quad (3.12)$$

Considerando o elemento de treliça apresentado na Figura 3.2, nota-se que, enquanto no sistema de referência local a única componente não nula do deslocamento é a componente  $u$  ao longo do eixo da barra, já no sistema de referência global estão presentes ambas as componentes genéricas  $u$  e  $v$ , isto é, dois graus de liberdade por ponto nodal. Desta forma, a matriz de rigidez elementar no sistema de referência local  $\bar{\mathbf{K}}^{(e)}$  passa a ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.13)$$

Agora, utilizando a matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , tem-se:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde  $c = \cos \theta$  e  $s = \sin \theta$ . Assim, a matriz de rigidez elementar para o sistema de

referência global será dada por:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Uma vez que a matriz de rigidez elementar é conhecida no sistema de referência global, pode-se efetuar a montagem da matriz de rigidez global através da combinação das contribuições de cada uma das barras que constituem a estrutura de treliça completa.

De forma análoga ao caso da matriz de rigidez, obtém-se a matriz de massa no sistema de referência global. Para tanto, uma nova forma para a matriz de massa elementar  $\bar{\mathbf{M}}^{(e)}$  é definida, passando a ser escrita como:

$$\bar{\mathbf{M}}^{(e)} = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

### 3.1.4 O elemento finito do tipo Treliça - matriz estrutural global

Considere a estrutura de treliça simples apresentada na Figura 3.3. Observe que o sistema de coordenadas de cada elemento ( $u_i, i = 1, \dots, 8$ ) está apontando para diferentes direções. A modelagem do elemento de treliça presume vibração somente ao longo do seu eixo principal, enquanto que a estrutura combinada pode vibrar nas direções  $X$  e  $Y$ .

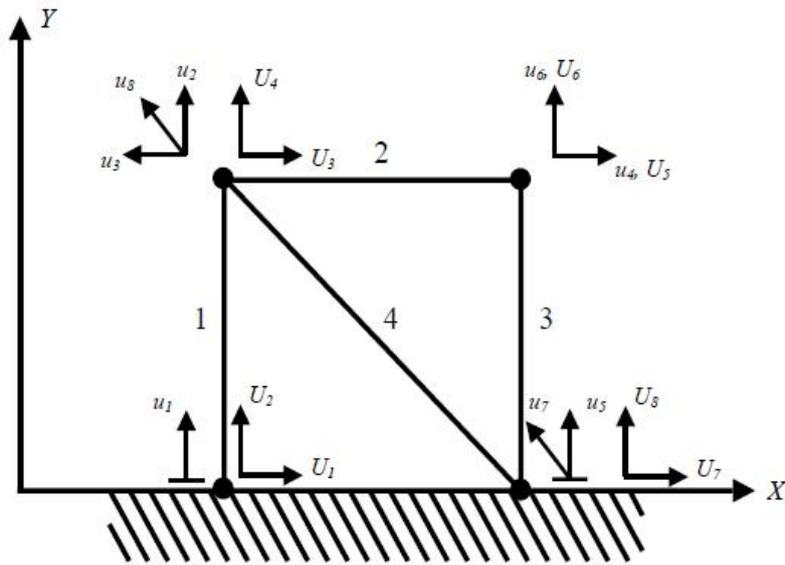


Figura 3.3 - Treliça de quatro elementos engastada.  
Fonte: Chiwiacowsky (2005).

Para o caso da estrutura de treliça em questão, introduzindo a contribuição de cada matriz elementar, a matriz de rigidez global fica assim definida:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} = & \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs & 0 & 0 & 0 & 0 \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & cs & -c^2 & -cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cs & s^2 & -cs & -s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 & -cs & c^2 & cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -cs & -s^2 & cs & s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} + \frac{EA}{l\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & cs & 0 & 0 & -c^2 & -cs \\ 0 & 0 & cs & s^2 & 0 & 0 & -cs & -s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 & -cs & 0 & 0 & c^2 & cs \\ 0 & 0 & -cs & -s^2 & 0 & 0 & cs & s^2 \end{bmatrix}, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

onde foi assumido o comprimento  $l$  idêntico para todas as barras, exceto para a barra diagonal, o mesmo material e o mesmo valor  $A$  para área da seção transversal. Assumindo as condições de contorno que impõe deslocamento nulo na extremidade

engastada ( $U_1 = U_2 = 0$  e  $U_7 = U_8 = 0$ ) então ficam canceladas as duas primeiras e as duas últimas linhas e colunas. A matriz de rigidez global para a estrutura de treliça fica assim definida:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) c^2 & \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) cs & -c^2 & -cs \\ \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) cs & \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & 2c^2 & 2cs \\ -cs & -s^2 & 2cs & 2s^2 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Analogamente, isto é, sobrepondo as matrizes de massa elementares e eliminando as linhas e colunas correspondentes à condição de contorno, a matriz de massa global fica assim definida:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Al}{6} \begin{bmatrix} 4 + 2\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 + 2\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

### 3.2 O método híbrido de estimação de dano estrutural

O método variacional é uma forte opção na solução de problemas inversos, a qual faz uso de uma abordagem da equação adjunta, acoplada ao método do gradiente conjugado. Na sua implementação são desenvolvidos o problema de sensibilidade, o problema adjunto e as equações gradientes.

A seguir é apresentado com maiores detalhes o algoritmo genético epidêmico e o método variacional.

#### 3.2.1 Algoritmo genético epidêmico

O AG aqui utilizado, segundo (CHIWIACOWSKY, 2005), consiste dos seguintes passos:

- *Seleção*: o primeiro passo consiste em selecionar indivíduos para a reprodução. Em geral esta seleção é feita aleatoriamente através do uso de uma probabilidade que depende da aptidão relativa dos indivíduos, tal que os melhores tenham uma probabilidade maior de serem escolhidos para a reprodução, quando comparados com os piores indivíduos.

- *Cruzamento e Mutação*: no segundo passo, os descendentes são criados a partir dos indivíduos selecionados. Para a geração de novos indivíduos, o algoritmo pode usar tanto a recombinação (cruzamento) quanto a mutação, separadamente ou em conjunto.
- *Avaliação*: a aptidão dos novos indivíduos é avaliada através da função objetivo definida para o problema.
- *Substituição*: durante o último passo, indivíduos da população são eliminados e substituídos por novos indivíduos.

O processo iterativo é encerrado quando a população converge para uma solução ótima ou quando algum outro critério de parada, previamente especificado, seja satisfeito.

O operador epidêmico (MEDEIROS, 2002) realiza a eliminação de uma parcela da população caso não haja melhora na melhor solução em várias iterações: são então gerados, aleatoriamente, novos indivíduos (soluções). Tal operador tem efeito na fuga de mínimos locais e do problema da convergência prematura. O operador epidêmico possui dois parâmetros a serem determinados. Um deles indica o instante em que o operador será ativado, isto é, o número máximo de gerações permitido sem mudança do valor de aptidão do melhor indivíduo. Neste trabalho, adotou-se o mesmo critério para todas as simulações numéricas efetuadas, sendo que o operador epidêmico é ativado sempre que o processo de solução atinja 500 gerações sem que haja melhoria do valor de aptidão do melhor indivíduo. O outro parâmetro a ser definido refere-se à quantidade de indivíduos da população original que serão mantidos, ou seja, aqueles indivíduos mais aptos que sobreviverão à epidemia. Neste trabalho, adotou-se uma quantidade de indivíduos a serem preservados de aproximadamente 10% do total da população, sendo os 90% restantes gerados aleatoriamente.

### 3.2.1.1 Pseudocódigo do Algoritmo Genético

Todas as etapas mencionadas anteriormente para os AG's, desde a criação de uma população inicial de possíveis soluções até a aplicação do novo operador epidêmico, podem ser sintetizadas pelo pseudocódigo apresentado na Figura 3.4.

```

Enquanto ( $t < \text{maxgera}$ ) faça
  Enquanto ( $\text{nfilhos} < \text{maxfilhos}$ ) faça
    Selecionar um par de indivíduos de  $P(t)$ ;
    Efetuar o cruzamento destes;
    Efetuar a mutação com probabilidade  $p_m$ ;
    Inserir o indivíduo  $\mathbf{K}$  em  $P(t)$ , substituindo o pior indivíduo;
    Se ( $\mathbf{K}^*(t) = \mathbf{K}^*(t - 1)$ ) então
       $\text{cont\_epidemia} \leftarrow \text{cont\_epidemia} + 1$ ;
      Se ( $\text{cont\_epidemia} > \text{limite}$ ) então
        Aplicar o operador Epidemia sobre  $P(t)$ ;
      fim se
    fim se
   $t \leftarrow t + 1$ ;
fim enquanto
fim enquanto

```

Figura 3.4 - Pseudocódigo do Algoritmo Genético empregado.

### 3.2.2 O Método Variacional

Visando a aplicação do método variacional e assumindo disponíveis dados experimentais de frequência, define-se a seguinte forma funcional a ser minimizada

$$J(\mathbf{K}) = \left\| \lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}} \right\|_2^2, \quad (3.20)$$

onde  $\lambda^{\text{Mod}}$  e  $\lambda^{\text{Exp}}$  são vetores contendo o quadrado das frequências naturais de vibração calculadas e medidas de um sistema com  $N$  graus de liberdade, respectivamente. O MGC, que será a seguir detalhado, resolverá tal problema de otimização, usando o modelo direto como equação de restrição.

#### 3.2.2.1 A Equação de Restrição - Problema Direto

O problema de otimização aqui exposto tem como equação de restrição o próprio modelo direto do fenômeno de vibrações mecânicas. Para determinação da equação de restrição será empregada a definição do problema de autovalores para um sistema

não amortecido com  $N$  graus de liberdade, dado por

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}, \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (3.21)$$

a qual representa o problema direto, onde  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  são as matrizes de rigidez e massa da estrutura avaliada,  $\lambda = \omega^2$  representa os autovalores (frequências naturais ao quadrado) e  $\boldsymbol{\phi}$  os autovetores (modos de vibração). No problema direto, os parâmetros estruturais, representados pelas matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ , são conhecidos e busca-se a determinação dos autovalores e autovetores do sistema. Observa-se que para o caso em que são utilizados dados experimentais de frequência, a equação de restrição, a ser utilizada no método adjunto, é representada por um conjunto de equações algébricas, isto é, os problemas de autovalores.

### 3.2.2.2 O Problema Adjunto e a Equação Gradiente

A aplicação da técnica dos multiplicadores de Lagrange as restrições são incorporadas ao funcional a ser minimizado por um parâmetro de ponderação e o problema transforma-se num problema de otimização sem restrições. Sendo assim, introduzindo o problema de autovalores com vínculo, obtém-se a forma Lagrangeana dada por:

$$\mathcal{L}(\lambda, \mathbf{K}, \boldsymbol{\psi}) = \left\| \lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}} \right\|^2 + \boldsymbol{\psi}^T \sum_{i=1}^{N_s} (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i . \quad (3.22)$$

A formulação adjunta usa os multiplicadores de lagrange para incluir na função custo uma penalidade finita às frequências que não são estritamente solução do problema direto. No caso original, a penalização tem magnitude infinita: a solução é eliminada via restrição, sequer sendo avaliada pela função custo. O multiplicador de Lagrange balanceia as contribuições de cada frequência à função objetivo do problema adjunto.

Assumindo uma pequena variação nos coeficientes de rigidez na direção da variação  $\Delta \mathbf{K}$  e por conseguinte na matriz de rigidez  $(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}_j)$ , tal que  $j = 1, \dots, N_e$ , onde  $N_e$ , conforme já comentado, representa o número de elementos utilizados na modelagem da estrutura; esta produzirá uma pequena variação nos autovalores ( $\lambda_i +$

$\Delta\lambda_{ij}$ ) e autovetores  $(\phi_i + \Delta\phi_{ij})$  e, conseqüentemente, no Lagrangeano, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}_j &= [(\lambda + \Delta\lambda_j) - \lambda^{\text{Exp}}]^T [(\lambda + \Delta\lambda_j) - \lambda^{\text{Exp}}] + \\ &+ \psi^T \sum_{i=1}^{N_s} [(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}_j) - (\lambda_i + \Delta\lambda_{ij}) \mathbf{M}] (\phi_i + \Delta\phi_{ij}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde  $\Delta\lambda_{ij} = \partial\lambda_i/\partial K_j$  e  $\Delta\phi_{ij} = \partial\phi_i/\partial K_j$  representam a variação da  $i$ -ésima característica modal quando da variação de rigidez do  $j$ -ésimo elemento.

Desenvolvendo a Expressão (3.23), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}_j &= [\lambda^T \lambda + 2\lambda^T \Delta\lambda_j + (\Delta\lambda_j)^T (\Delta\lambda_j) - 2\lambda^T \lambda^{\text{Exp}} - 2(\lambda^{\text{Exp}})^T \Delta\lambda_j + (\lambda^{\text{Exp}})^T (\lambda^{\text{Exp}})] + \\ &+ \psi^T \sum_{i=1}^{N_s} [(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \phi_i + (\Delta\mathbf{K}_j - \Delta\lambda_{ij} \mathbf{M}) \phi_i + (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \Delta\phi_{ij} + (\Delta\mathbf{K}_j - \Delta\lambda_{ij} \mathbf{M}) \Delta\phi_{ij}] . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Subtraindo da expressão acima a forma original do Lagrangeano, tem-se

$$\Delta\mathcal{L}_j = 2 [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}]^T \Delta\lambda_j + \psi^T \sum_{i=1}^{N_s} [(\Delta\mathbf{K}_j - \Delta\lambda_{ij} \mathbf{M}) \phi_i + (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \Delta\phi_{ij}] , \quad (3.25)$$

que é equivalente a:

$$\Delta\mathcal{L}_j = 2 [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}]^T \Delta\lambda_j + \psi^T \sum_{i=1}^{N_s} [(\Delta\mathbf{K}_j - \Delta\lambda_{ij} \mathbf{M}) \phi_i + (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) [\phi_i \phi_i^T] [\phi_i \phi_i^T]^{-1} \Delta\phi_{ij}] . \quad (3.26)$$

Substituindo o resultado dado pela Equação (3.21) na expressão acima, obtém-se:

$$\Delta\mathcal{L}_j = 2 [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}]^T \Delta\lambda_j - \psi^T \mathbf{M} \sum_{i=1}^{N_s} \phi_i \Delta\lambda_{ij} + \psi^T \Delta\mathbf{K}_j \sum_{i=1}^{N_s} \phi_i . \quad (3.27)$$

Definindo-se a matriz  $\Phi$  como:

$$\Phi \equiv [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{N_s}] \quad (3.28)$$

é possível mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{N_s} \phi_i \Delta\lambda_{ij} = \Phi \Delta\lambda_j , \quad \text{para } j = 1, \dots, N_e . \quad (3.29)$$

Desta forma, a nova expressão que define a variação do Lagrangeano será dada por:

$$\Delta \mathcal{L}_j = \left\{ 2 [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}]^T - \psi^T \mathbf{M} \Phi \right\} \Delta \lambda_j + \psi^T \Delta \mathbf{K}_j \sum_{i=1}^{N_s} \phi_i . \quad (3.30)$$

Agora, uma vez que  $\Delta \lambda_j$  é um termo escolhido arbitrariamente então, pela teoria do multiplicador de Lagrange, para que se tenha um valor estacionário,  $\psi$  é definido de tal forma que:

$$\psi^T \mathbf{M} \Phi = 2 [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}]^T , \quad (3.31)$$

o qual representa o problema adjunto empregado na determinação do multiplicador de Lagrange. Entretanto, tal expressão pode ser colocada em uma forma mais adequada. Aplicando a operação de transposição em ambos os lados e utilizando a simetria da matriz de massa, obtém-se:

$$\Phi^T \mathbf{M} \psi = 2 [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}] , \quad (3.32)$$

Introduzindo uma nova variável  $\psi^*$  tal que  $\psi = \Phi \psi^*$ , tem-se:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \psi^* = 2 [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}] . \quad (3.33)$$

Se os modos de vibração ou autovetores  $\Phi$  forem calculados de tal forma que sejam ortogonais em relação à matriz de massa, então  $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$  e pode-se escrever

$$\psi^* = 2 [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}] , \quad (3.34)$$

ou seja,

$$\psi = 2 \Phi [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}] , \quad (3.35)$$

que representa o problema adjunto a ser implementado computacionalmente.

Uma vez definido o problema adjunto, a variação do Lagrangeano fica reduzida à seguinte expressão:

$$\Delta \mathcal{L}_j = \psi^T \Delta \mathbf{K}_j \sum_{i=1}^{N_s} \phi_i , \quad \text{para } j = 1, \dots, N_e , \quad (3.36)$$

que pode ser escrita de forma simplificada, assumindo  $\sum_{i=1}^{N_s} \phi_i = \tilde{\phi}$ :

$$\Delta \mathcal{L}_j = \psi^T \Delta \mathbf{K}_j \tilde{\phi} \quad \text{para } j = 1, \dots, N_e . \quad (3.37)$$

Quando as condições de vínculo são satisfeitas, o Lagrangeano é representado pelo próprio critério de mínimos quadrados e sua variação na direção da variação  $\Delta \mathbf{K}$  é dada por  $\Delta \mathcal{L} = \nabla J(\mathbf{K})^T \Delta \mathbf{K}$ . Através da comparação desta expressão com a Equação (3.37), obtém-se a seguinte relação:

$$J_j(\mathbf{K}) = \tilde{\phi}^T \Delta \tilde{\mathbf{K}}_j \psi , \quad \text{para } j = 1, \dots, N_e , \quad (3.38)$$

denominada equação gradiente, onde  $N_e$  representa o total de elementos usados na modelagem da estrutura avaliada e  $\Delta \tilde{\mathbf{K}}_j = \partial[\Delta \mathbf{K}]/\partial K_j$ . Aqui a matriz  $\Delta \tilde{\mathbf{K}}_j$  representa a localização da contribuição da variação de cada elemento  $K_j$ , separadamente, na matriz de rigidez completa.

### 3.2.2.3 O Problema de Sensibilidade

Para o cálculo do comprimento descendente  $\beta$  é necessária a determinação da matriz de sensibilidade do sistema, a qual é solução do problema de sensibilidade. Para o caso específico em que dados experimentais dos autovalores sejam conhecidos, a matriz de sensibilidade  $\Delta \mathbf{\Lambda}$  representará a variação das frequências naturais de vibração quando da variação do valor de rigidez de cada um dos elementos que modelam a estrutura analisada (CHIWIACOWSKY, 2005).

Desta forma, para definição do problema de sensibilidade, cada parâmetro de rigidez  $K_i$  deverá ser perturbado por vez. Assumindo que  $K_i$  seja perturbado por uma pequena variação  $\Delta K_i \delta(i-j)$ , onde  $\delta(\cdot)$  é a função delta de *Kronecker* e  $j = 1, \dots, N_e$ , esta variação implicará também em uma pequena variação nos autovalores e autovetores pelas quantidades  $\Delta \lambda_{ij}$  e  $\Delta \phi_{ij}$ , respectivamente. O problema de sensibilidade é então obtido através da substituição, no problema direto, Equação (3.21), de  $K_i$  por  $K_i + \Delta K_i \delta(i-j)$ ,  $\lambda_i$  por  $\lambda_i + \Delta \lambda_{ij}$  e  $\phi_i$  por  $\phi_i + \Delta \phi_{ij}$ , resultando:

$$\left[ (\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}_j) - (\lambda_i + \Delta \lambda_{ij}) \mathbf{M} \right] (\phi_i + \Delta \phi_{ij}) = \mathbf{0} , \quad i = 1, \dots, N_s ; \quad j = 1, \dots, N_e . \quad (3.39)$$

Desenvolvendo a expressão acima e desprezando os termos de segunda ordem, obtém-se:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \phi_i + (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \Delta \phi_{ij} + (\Delta \mathbf{K}_j - \Delta \lambda_{ij} \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0} . \quad (3.40)$$

Subtraindo da expressão acima a forma original do problema direto, tem-se:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \Delta \phi_{ij} + (\Delta \mathbf{K}_j - \Delta \lambda_{ij} \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0} . \quad (3.41)$$

Pré-multiplicando a Equação (3.41) por  $\phi_i^T$ , vem:

$$\phi_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \Delta \phi_{ij} + \phi_i^T (\Delta \mathbf{K}_j - \Delta \lambda_{ij} \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0} . \quad (3.42)$$

Efetuando-se a transposta do problema direto e devido à simetria das matrizes de massa e rigidez, obtém-se:

$$\phi_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) = \mathbf{0} . \quad (3.43)$$

Substituindo este resultado na Equação (3.42), tem-se:

$$\phi_i^T (\Delta \mathbf{K}_j - \Delta \lambda_{ij} \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0} . \quad (3.44)$$

Isolando o termo  $\Delta \lambda_{ij}$ , o problema de sensibilidade fica definido por:

$$\Delta \lambda_{ij} = \frac{\phi_i^T \Delta \mathbf{K}_j \phi_i}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i}, \quad i = 1, \dots, N_s; \quad j = 1, \dots, N_e, \quad (3.45)$$

o qual permite o cálculo da variação resultante sobre o  $i$ -ésimo autovalor quando da modificação estrutural no  $j$ -ésimo elemento da estrutura, sem a necessidade de solucionar o problema de autovalores completo. Observa-se que, caso os autovetores tenham sido determinados de tal forma que sejam ortogonais em relação à matriz de massa, isto é,  $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$ , então o problema de sensibilidade fica simplificado sendo definido como:

$$\Delta \lambda_{ij} = \phi_i^T \Delta \mathbf{K}_j \phi_i, \quad i = 1, \dots, N_s; \quad j = 1, \dots, N_e . \quad (3.46)$$

No caso do problema de sensibilidade a matriz  $\Delta \mathbf{K}_j$  representa a contribuição da variação de cada elemento  $K_j$ , separadamente, na matriz de rigidez completa.

#### 3.2.2.4 Determinação do Comprimento Descendente

Para o caso em que medidas de frequência são utilizadas, a variação da resposta do sistema é caracterizada pela variação dos autovalores frente a uma variação da

rigidez dos elementos que modelam a estrutura analisada, isto é  $\Delta\lambda_{ij}$ . Tem-se:

$$\beta_j = \frac{\Delta\lambda_j^T (\lambda^{\text{Exp}} - \lambda^{\text{Mod}})}{\Delta\lambda_j^T \Delta\lambda_j}, \quad \text{para } j = 1, \dots, N_e, \quad (3.47)$$

de forma compacta:

$$\boldsymbol{\beta} = (\Delta\boldsymbol{\Lambda}^T \Delta\boldsymbol{\Lambda})^{-1} \Delta\boldsymbol{\Lambda}^T (\lambda^{\text{Exp}} - \lambda^{\text{Mod}}), \quad (3.48)$$

onde  $\boldsymbol{\beta}$  representa agora o vetor de comprimentos descendentes de dimensão  $N_e$ , e  $\Delta\boldsymbol{\Lambda}$  representa a matriz de sensibilidade, de dimensão  $N_s \times N_e$ , que contém informação referente à variação dos autovalores decorrente de uma variação  $\Delta\mathbf{K}$  da rigidez dos elementos.

### 3.2.2.5 O Algoritmo de Solução

O procedimento computacional é resumido no seguinte algoritmo:

Passo 1: Escolha uma aproximação inicial para  $\mathbf{K}$  (no caso, via AG).

Passo 2: Resolva o problema direto dado pela Equação (3.21)

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}, \quad \text{para } i = 1, \dots, N,$$

e obtenha  $\lambda$  e  $\boldsymbol{\Phi}$ .

Passo 3: Conhecendo os autovalores calculados  $\lambda^{\text{Mod}}$ , e os autovalores medidos  $\lambda^{\text{Exp}}$ , resolva o problema adjunto através da Equação (3.35)

$$\boldsymbol{\psi} = 2 \boldsymbol{\Phi} [\lambda^{\text{Mod}} - \lambda^{\text{Exp}}],$$

e obtenha  $\boldsymbol{\psi}$ .

Passo 4: Conhecendo  $\boldsymbol{\psi}$ , calcule a função gradiente através da Equação (3.38)

$$\nabla J_j(\mathbf{K}) = \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \Delta\tilde{\mathbf{K}}_j \boldsymbol{\psi}, \quad \text{para } j = 1, \dots, N_e, \quad (3.49)$$

e obtenha  $\nabla J$ .

Passo 5: Calcule o coeficiente conjugado  $\gamma$

$$\gamma = \frac{\left\| \nabla J^{k+1} \right\|_2^2}{\left\| \nabla J^k \right\|_2^2}.$$

Passo 6: Calcule a direção descendente  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p}^{k+1} = -\nabla J(\mathbf{K}^{k+1}) + \gamma \mathbf{p}^k.$$

Passo 7: Fazendo  $[\Delta K_1, \dots, \Delta K_N] = \mathbf{p}$ , resolva o problema de sensibilidade (3.45)

$$\Delta \lambda_{ij} = \frac{\phi_i^T \Delta \mathbf{K}_j \phi_i}{\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i}, \quad i = 1, \dots, N_s; \quad j = 1, \dots, N_e,$$

e obtenha  $\Delta \Lambda$ .

Passo 8: Calcule o comprimento descendente  $\beta$

$$\beta = \Delta \Lambda (\lambda^{\text{Exp}} - \lambda^{\text{Mod}}).$$

Passo 9: Calcule a correção<sup>1</sup> para  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}^{k+1} = \mathbf{K}^k + \beta^k \mathbf{p}^k, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots$$

Passo 10: Encerre o ciclo iterativo quando o critério de parada (MOROZOV; STESSIN, 1993),

$$J(\mathbf{K}) < \epsilon^2,$$

for satisfeito. Caso contrário, volte ao Passo 2.

### 3.3 Busca hierárquica

Trabalhos anteriores concluíram que a hibridização da metodologia, uso de um AG para inicializar o MGC, permitiu identificar danos com o uso da técnica variacional (CHIWIACOWSKY, 2005). Todavia, em casos de sistemas de muitos graus de liberdade

---

<sup>1</sup>No laço iterativo do método de gradiente conjugado a matriz de rigidez corrigida a uma dada iteração pode não ser positiva definida, desta forma o método aborta e uma nova condição inicial é proposta (seja via AG seja aleatoriamente)

a metodologia até agora apresentada deve ser tornada mais eficiente. Uma possível solução para tal questão é: não usar uma discretização que provê muitos graus de liberdade, mas uma iterada (sequência) de discretizações mais grosseiras (menos elementos finitos = menos graus de liberdade), cuja ordem sequencial de aplicação é dependente do encontro/descarte de dano em cada região.

A abordagem segue a idéia do “dividir para conquistar”. No início, antes de encontrar uma região homogênea, a idéia é fazer a divisão da estrutura. É possível expor o argumento tomando-se o exemplo de um avião, respeitando as divisões de origem (ver Figura 3.5).

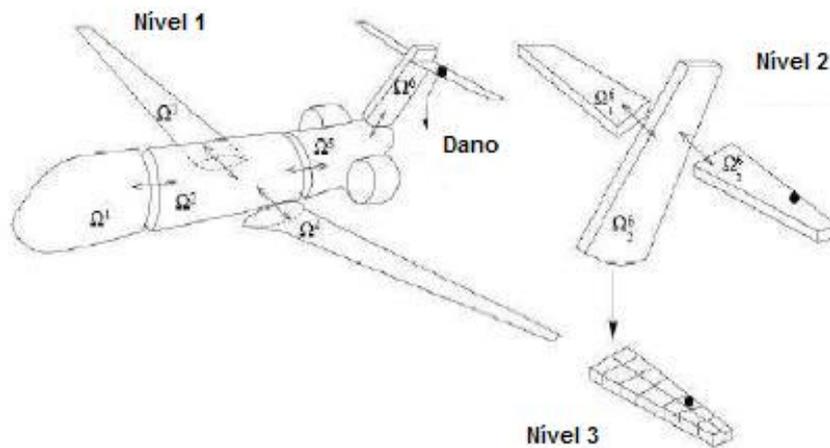


Figura 3.5 - Primeiras etapas de discretização de um avião sob a abordagem hierárquica.

Primeiro nível de discretização, a estrutura do aparelho aeronáutico ( $\Omega$ ) é subdividida em 6 partes ( $\Omega = \bigcup_{m=1}^6 \Omega_m$ ):

- asa esquerda ( $\Omega^3$ ),
- asa direita ( $\Omega^4$ ),
- corpo do avião (o cilindro maior) dividido em 3 partes (frontal =  $\Omega^1$ , médio (região do engaste das asas) =  $\Omega^2$ , traseira =  $\Omega^5$ )
- leme principal e asas menores (todo o conjunto) =  $\Omega^6$ .

No exemplo, o dano está localizado na asa direita do leme traseiro da aeronave. A estrutura é então re-dividida em:

- asa esquerda ( $\Omega^3$ ),
- asa direita ( $\Omega^4$ ),
- corpo do avião (o cilindro maior) dividido em 3 partes (frontal =  $\Omega^1$ , médio (engaste das asas) =  $\Omega^2$ , traseira =  $\Omega^5$ )
- – leme principal ( $\Omega_2^6$ )
  - asa menor esquerda ( $\Omega_1^6$ )
  - asa menor direita ( $\Omega_3^6$ )

A discretização mais fina na estrutura se dá na região que apresentou dano no nível anterior.

O dano está localizado (neste exemplo) na asa-direita menor. A estrutura é re-dividida em:

- asa esquerda ( $\Omega^3$ ),
- asa direita ( $\Omega^4$ ),
- corpo do avião (o cilindro maior) dividido em 3 partes (frontal =  $\Omega^1$ , médio (engaste das asas) =  $\Omega^2$ , traseira =  $\Omega^5$ )
- – leme principal ( $\Omega_2^6$ )
  - asa menor esquerda ( $\Omega_1^6$ )
  - asa menor direita ( $\Omega_3^6$ ): com discretização fina ( $r$  elementos, com  $r$  pequeno: tal que a área de um elemento seja superior à área de cobertura do sensor utilizado para captar o dado experimental).

Agora, em que uma região do dano foi encontrada, é efetuada uma sequência de discretizações, seguindo as mesmas regras anteriores, em  $r$  elementos: número de ramificação.

Uma analogia pode ser feita com o crescimento dinâmico de uma árvore: começa-se no tronco central (avião como um todo). Então a árvore vai crescendo, ramificando (criação de galhos – troncos secundários). Não se trata nem de uma busca em largura nem de uma busca em profundidade; mas sim de uma espécie de busca em nível, na qual todos os elementos em um mesmo nível são analisados conjuntamente. Tal fato, e a impossibilidade de analisar um nível mais fino enquanto o mais grosseiro não foi analisado, não há como paralelizar a busca hierárquica sob estas condições.

Na busca hierárquica, a função objetivo varia de nível a nível, no sentido de que a cada nível hierárquico o número de pares de frequências comparadas é diferente: mais frequências serão comparadas quanto maior o grau de refinamento (nível).

Compreendido que dano é uma alteração da rigidez desta forma, para um determinado nível hierárquico, uma diminuição do valor da rigidez do material significa uma diminuição no módulo de Young. Dentre as diversas opções para a construção dos níveis hierárquicos iniciais, optou-se por uma que é condição suficiente para não prejudicar a detecção de dano e que é a mais simples possível:

- Nos níveis hierárquicos menos refinados, a presença de um dano é computada via uma média aritmética de rigidez (ou média dos módulos de Young) dos elementos do nível mais refinado.
- Sendo assim, a cada nível hierárquico o valor de rigidez é atualizado da seguinte forma: a área é mantida constante, o comprimento é ajustado linearmente, e o módulo de Young por média aritmética. Dessa forma a discretização hierárquica, apesar de simplificar a estrutura e possivelmente não representar algumas de suas características (como supressão de alguns modos), em nada prejudica o objetivo central: detectar danos estruturais.

Dada uma discretização em  $N$  elementos finitos, o modelo prevê  $N$  frequências. Por convenção, ordenemos tais frequências em ordem crescente: quanto menor a frequência mais significativa ela é. Na prática, os sensores captam as  $M$  frequências mais significativas.

Para modelar uma estrutura real via elementos finitos, usa-se uma discretização de  $N$  frequências modeladas que tenha uma resposta dinâmica a mais próxima possível das  $M$  frequências experimentais medidas nos determinados pontos. Nem todas as frequências precisam entrar na contabilização da função custo, pode-se considerar apenas  $Q$  frequências (com a restrição de  $Q \leq N$ ). Na busca hierárquica, supõe-se que: ou é possível fazer mais de um experimento, ou é possível fazer um experimento com atualização em tempo real do número de frequências medidas ( $M$ ). Ou ainda, que seja possível usar uma metodologia tipo sub-estruturação de modelos (FIORANI, 2009) para permitir o confronto entre os espectros (medido e modelado). Na alteração do nível hierárquico, tem-se diferentes valores de  $N$  e possivelmente de  $Q$ , e pode alterar a quantidade  $M$  de medidas experimentais utilizadas na inversão. O confronto entre espectro medido e modelado é feito não de nível a nível mas sim dentro de cada nível.

A vantagem do modelo hierárquico contra a abordagem de discretização exaustiva é devido aos galhos que não ramificam: regiões sem dano que permanecem com discretizadas grosseiras. Como a ramificação é feita de forma local (regiões espacialmente vizinhanças são separadas na ramificação mais tardiamente), pode-se dizer que a abordagem hierárquica toma proveito da correlação espacial entre regiões danificadas: sua vantagem frente à busca com discretização exaustiva é, portanto, usar um menor número de elementos finitos do que se tem na discretização mais fina completa da estrutura, que só opera neste nível de discretização nas regiões onde há correlação espacial com a presença de dano estrutural. Há casos, entretanto, que a abordagem hierárquica pode ser mais custosa que a exaustiva: isso ocorrerá quando na presença de muitas regiões danificadas e uso de um  $r$  baixo, uma vez que desta forma a cada nível poucos galhos não serão re-divididos em sub-galhos.

Em situações reais, entretanto, o número de elementos danificados, em relação ao número total de elementos (medida da densidade de dano) é pequeno. Desta forma, os casos reais, muitos elementos, baixa densidade de dano, alta correlação espacial entre regiões danificadas, a busca hierárquica aponta como uma abordagem promissora para tornar a metodologia híbrida de estimação de dano estrutural competitiva

no sentido de apresentar bons resultados com menor tempo computacional.



## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seção de resultados está organizada em 3 sub-seções, cada uma referente a uma das contribuições (inovações) desta dissertação à área: inovação com contribuição à análise (Análise de robustez), inovação com contribuição à aplicação (Propagação Hiperbólica do Calor) e inovação com contribuição à aplicabilidade (Busca Hierárquica). A seguir são apresentados os resultados e proferidas discussões.

### 4.1 Contribuição à análise: Análise de robustez

A análise de robustez consiste na análise do erro de estimação do dano em função do número de elementos danificados e intensidade do dano. O erro de estimação é definido como a média (para todos elementos finitos) do módulo da diferença entre a porcentagem de dano real e estimado. O resultado é apresentado na forma de uma matriz, na qual as linhas representam a intensidade do dano (porcentagem, iniciando em 5% e indo até 95% com passo de 5%), as colunas o número de elementos danificados (de 1 a 9, sendo no total 10 elementos finitos) e os elementos da matriz correspondendo ao erro de estimação. Uma vez que o AG<sup>1</sup> é um método probabilístico, as simulações são efetuadas para um número pré-fixado de amostras (a saber: 20) e são apresentados os resultados de erro médio e mínimo. A execução não única do método provê diferentes cenários para a avaliação do dano, todos com possibilidade de avaliação experimental (inspeção).

Uma sequência de resultados pertinentes à análise de robustez é apresentada a seguir: Figura 4.1. A cor de cada retângulo nas figuras corresponde ao valor do erro de estimação do dano - valor  $(i, j)$  - no sistema de  $i$  elementos danificados, com dano de intensidade  $j$ . De azul a vermelho são apresentadas 20 cores, cada cor correspondendo a um intervalo de 5% de erro de estimação. Em branco os resultados que apresentaram erro de estimação superior a 100% (ex: o dano real é 20% e o método estimou mais de 120%, um erro grosseiro).

O resultado referente às médias (Figuras 4.1) permite dizer que a hibridização confere à metodologia de estimação de dano estrutural melhores resultados, em média, em casos de poucos elementos danificados, mesmo com alta intensidade do dano.

---

<sup>1</sup>Em todos os casos executados o Algoritmo Genético aplicado teve os parâmetros ajustáveis fixados com os seguintes valores: 5000 iterações, população de 75 indivíduos, probabilidade de mutação 5%, operador epidêmico a cada 500 iterações sem melhora na melhor solução com manutenção de 10% da população.

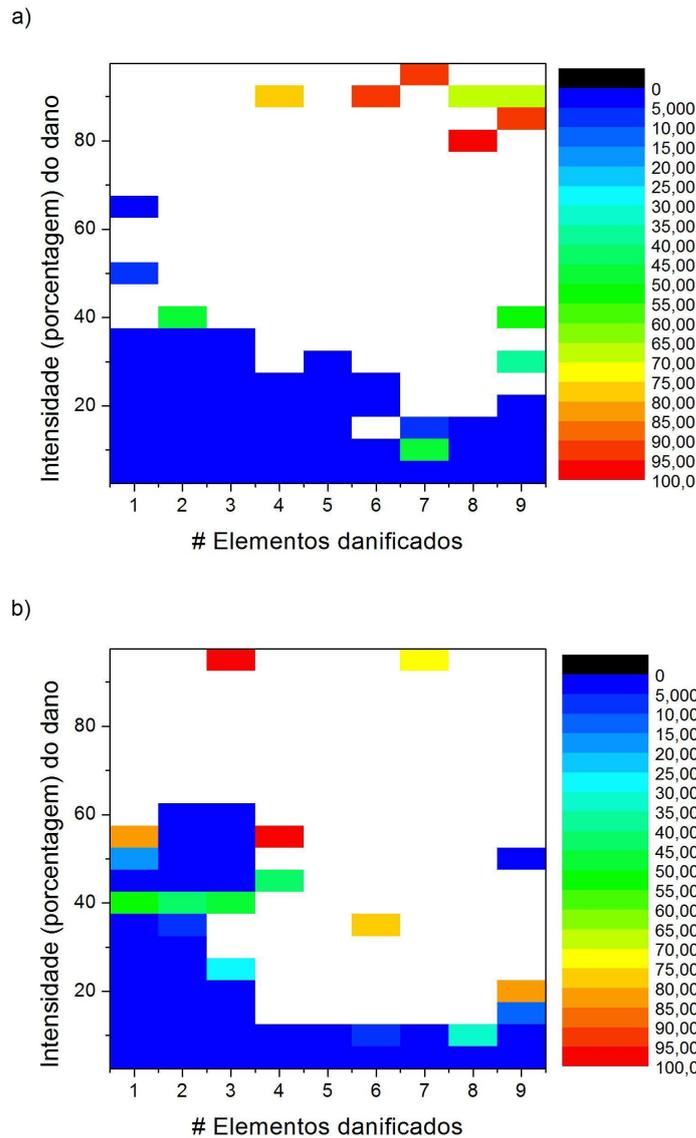


Figura 4.1 - Erro médio de estimação para o MGC (a) e para o método híbrido (b). A cor de cada retângulo corresponde ao valor do erro médio de estimação do dano - valor  $(i, j)$  - no sistema de  $i$  elementos danificados, com dano de intensidade  $j$ . De azul a vermelho são apresentadas 20 cores, cada cor correspondendo a um intervalo de 5% de erro de estimação.

Todavia, para muitos elementos com dano (de baixa intensidade) o MGC acaba apresentando, em média, melhores resultados.

Em aplicações práticas, entretanto, não há como saber o erro médio de estimação (essa é uma grandeza de teste do método), logo o que será usado pela equipe de

teste (inspeção direta) de dano é o resultado referente a erro mínimo: uma vez que os diferentes cenários de possíveis danos serão todos avaliados, e então o cenário de erro mínimo será realmente determinado. O confronto entre os diferentes métodos aqui apresentados deve, portanto, ser efetuado com base nos resultados de erro mínimo (Figuras 4.2).

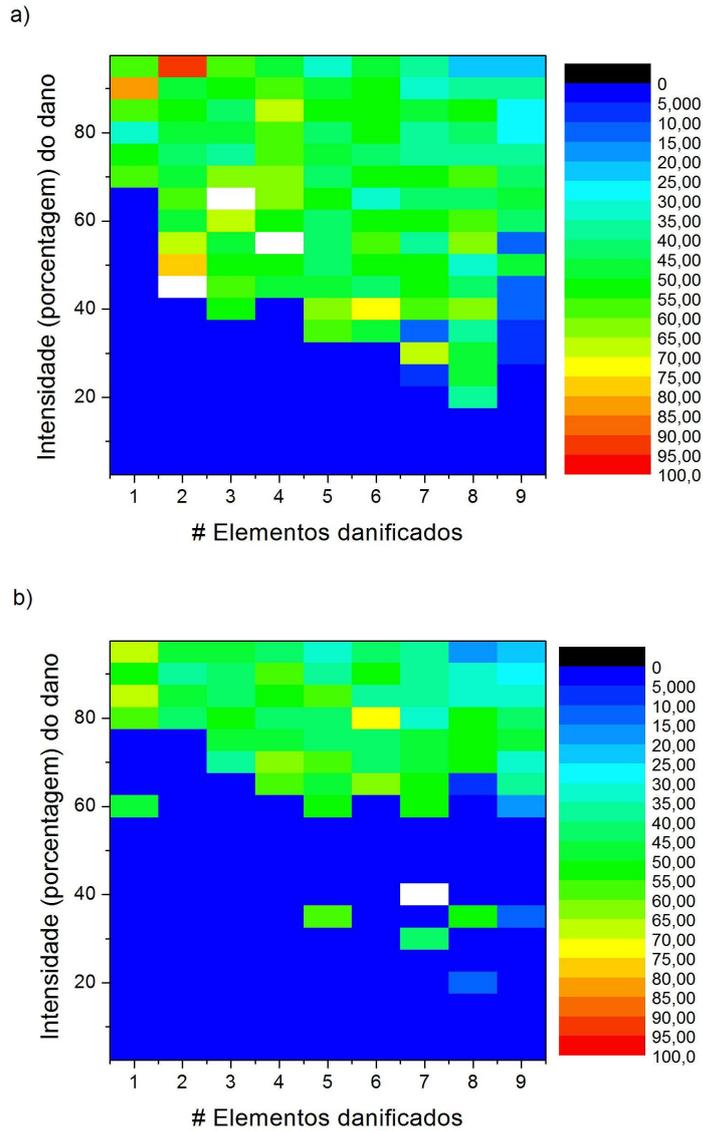


Figura 4.2 - Erro mínimo de estimação para o MGC (a) e para o método híbrido (b). A cor de cada retângulo corresponde ao valor do erro mínimo de estimação do dano – valor  $(i, j)$  – no sistema de  $i$  elementos danificados, com dano de intensidade  $j$ . De azul a vermelho são apresentadas 20 cores, cada cor correspondendo a um intervalo de 5% de erro de estimação.

No MGC, percebe-se que para intensidades de dano até 20%, não importando o número de elementos danificados, os resultados são bons. Para intensidades de dano superiores a 40%, mesmo com poucos elementos danificados, o método não apresenta resultados razoáveis: os erros mínimos de estimação são altos. Na região entre 20% e 40% de intensidade de dano os resultados são bons apenas para um pequeno número de elementos danificados.

Para o método híbrido, nota-se que até uma intensidade de dano da ordem de 50%, na grande maioria dos casos, acarreta bons resultados. Para danos mais intensos que 70% do valor original de rigidez, os resultados não são razoáveis mesmo para poucos elementos danificados.

Para cada figura há, portanto, a possibilidade de se traçar 3 regiões, tendo como separatrizes valores de intensidade limite de dano: na 1ª os resultados são bons, em média, independentemente do número de elementos danificados; na 2ª a qualidade dos resultados é função decrescente do número de elementos com dano; e na 3ª região os resultados não são razoáveis, mesmo para poucos elementos danificados. Para o MGC as separatrizes são 20% e 40% e para o AG + MGC são 50% e 70%.

A hibridização não apenas melhorou a média global de estimação do erro – varrendo todas as linhas e colunas das matrizes de robustez – (32% para o MGC e 17% para o método híbrido), mas também reduziu o limitante inferior do erro – tudo isso sem comprometer efetivamente a eficiência, o tempo computacional de obtenção do resultado – tempo de computação da solução (53 milissegundos para o MGC e 55 milissegundos para o método híbrido<sup>2</sup>). O método híbrido já começa com uma solução (solução iterativa inicial), em média, melhor que uma condição aleatória (como no caso do MGC), este início mais próximo à bacia do mínimo global provê uma maior probabilidade para o método híbrido de apresentar uma solução final mais próxima à solução desejada.

## 4.2 Contribuição à aplicação: Propagação hiperbólica do calor

Modelos matemáticos para fenômenos naturais frequentemente são construídos tendo como base Equações Diferenciais Parciais (EDP). Uma EDP de segunda ordem

---

<sup>2</sup>Executado no cluster Prometeu (pertencente ao Instituto de Física da Universidade Federal da Bahia), que consiste em um sistema HP Blade C7000, com 10 lâminas BL260c, cada uma com a seguinte configuração: 2 processadores Xeon E5405 (2,0 GHz, 1333 FSB) com 17 GB de memória RAM e dois discos SATA de 120 GB.

na variável dependente  $u$ , com variáveis independentes  $x$  e  $y$ , é uma equação que pode ser posta na forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

onde  $F$  é uma função das variáveis indicadas e pelo menos uma derivada parcial aparece na expressão.

Seja a EDP linear

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

onde os coeficientes são as funções  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , tal que  $A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$  e  $G = G(x, y)$  uma função real definida sobre um aberto do  $\mathbb{R}^2$ . O discriminante da EDP linear acima é definido como:  $\Delta \equiv B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y)$ , responsável por sua classificação. Uma EDP é dita parabólica se  $\Delta < 0$ , elíptica se  $\Delta = 0$ , e hiperbólica se  $\Delta > 0$  (IÓRIO, 2001).

Fisicamente, parabolicidade reflete a infinitude da velocidade de propagação de um sinal e converge assintoticamente no tempo para um regime de equilíbrio; elipsidade está ligada a problemas de equilíbrio; e hiperbolicidade está ligada a problemas de propagação com velocidade finita do sinal.

O problema de condução do calor é, normalmente, governado por uma equação parabólica – deduzida via princípios de conservação e pela lei de Fourier (lei constitutiva). Uma modificação na lei de Fourier para modelar a finitude do sinal térmico origina uma equação hiperbólica para propagação do calor (CHIWIACOWSKY, 2002): uma onda amortecida, de comportamento semelhante à ondas mecânicas e eletromagnéticas em meios atenuantes.

Alguns trabalhos já foram propostos no domínio da condução hiperbólica do calor, desde Pascal, 1992 (PASCAL, 1992). Todavia nenhum trabalho é apresentado na literatura de ciências térmicas para estimar condição inicial, usando a abordagem variacional de Alifanov. Alguns trabalhos já publicados nesta área:

- Polesek-Karczewska, 2003 (KARCZEWSKA, 2003). Apresenta distribuição de temperatura (problema direto) em empacotamento de esferas de diferentes materias, tanto por considerações a primeiros princípios, quanto

numéricas e experimentais.

- Shen e Han, 2003 (SHEN; HAN, 2003). Aplicação da técnica TVD (total variation diminishing) para resolver o problema direto. No limite da aproximação convectiva a solução é calculada explicitamente, já no limite radiativo é usado um método numérico tipo Newton.
- Masood, 2006 (MASOOD, 2006). Estimou condição inicial no problema em coordenadas cilíndricas via método de Picard.
- Huang e Hsin-HsienWu, 2006 (HUANG; HSIN-HSIENWU., 2006). Usaram a formulação de Alifanov para estimar condição de contorno. Conseguiram bons resultados independentemente da suposição inicial, e mais robusto frente a ruído nos dados de entrada do que os Algoritmos anteriores.
- Huang e Lin, 2008 (HUANG; LIN, 2008a). Usaram a formulação de Alifanov para estimar simultaneamente duas condições de contorno. Os resultados são bons independentemente da sugestão inicial, e mesmo com presença de ruído nos dados de entrada.
- Huang e Lin, 2008 (HUANG; LIN, 2008b). Usaram a formulação de Alifanov para estimar termo fonte. Os resultados são bons para sugestão inicial nula.
- Saleh e Al-Nimr, 2008 (SALEH; AL-NIMR, 2008). Resolveram o problema direto usando uma formulação variacional via transformada de Laplace.
- Yang, 2009 (YANG, 2009). Estimaram condição de contorno no problema bidimensional, por um método baseado em diferenças finitas e no algoritmo de Newton-Raphson.

Em problemas parabólicos, o problema inverso de reconstrução de perfil inicial é, em geral, mais difícil do que a de condição de contorno, propriedades do material ou termo fonte, uma vez que com o processo de integração no tempo a influência do perfil inicial vai decaindo. Em problemas hiperbólicos a inserção de ruído pode ter efeito mais significativo na solução inversa do que em problemas parabólicos, uma vez que a hiperbolicidade pura preserva a condição inicial, assim, se alguma imprecisão está contida nas condições iniciais, estas permanecerão presentes em toda a integração temporal, mesmo para períodos muito longos. A combinação destes fatores, no fenômeno da onda amortecida, coloca o problema da estimação do perfil

inicial no problema de condução hiperbólica do calor como um problema inverso desafiador para avaliação da robustez de métodos de inversão.

O objetivo deste capítulo é apresentar a construção física, formulação matemática e solução numérica dos problemas diretos tratados (condução e onda de calor), exibir os resultados de técnicas de inversão (genética e variacional) para estimação de condição inicial nos problemas (resultados inéditos na literatura para tais fenômenos, com tais objetos de estimação e tais técnicas) e comparar estes fenômenos e técnicas com base nos resultados.

#### 4.2.1 Formulação para Propagação do Calor: Caso Parabólico

O princípio de conservação (equação da continuidade) para o transporte de calor, na ausência de gradientes de pressão e densidade, nos dá que a temperatura ( $T$ ) varia temporalmente tendo como fonte (divergente) o fluxo de calor na substância, ponderado pela densidade ( $\rho$ ) e pelo calor específico ( $c$ ) desta (equação 4.1). A lei (fenomenológica) de Fourier apresenta o fluxo de calor como consequência do gradiente de temperatura entre diferentes pontos do meio, amplificado pelo coeficiente de condutividade térmica -  $\kappa$  (equação 4.2). A combinação destes dos alicerces estabelece a equação parabólica para a condução do calor (equação 4.3) (WYLEN, 2003).

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q}(x, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$\vec{q}(x, t) = -\kappa \nabla T(x, t) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T(x, t) = 0 \quad (4.3)$$

O problema direto da condução do calor pode ser assim definido como descrito a seguir.

Seja  $T(x, t) \in C^2$  função real de variáveis reais definida no produto cartesiano entre os intervalos  $\Omega_x = (0, L)$  e  $\Omega_t = [0, t_f)$ , tal que

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T(x, t) = 0; \quad x \in \Omega_x, \quad t \in \Omega_t;$$

$$T(x, 0) = f(x); \quad x \in \Omega_x;$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad x \in \Omega_x;$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0; \quad x = 0, x = L, t \in \Omega_t$$

A solução numérica deste problema, baseado em diferenças finitas (aproximação discreta via série de Taylor), centrada no espaço e avançada no tempo (HOFFMAN, 2001), é esquematizada a seguir:

- Seja  $N$  o número de pontos na discretização espacial, e  $M$  na temporal. Tome  $h = L/N$ ,  $k = tf/M$ ,  $\lambda = [\kappa/(\rho c)] \times (k/(h^2))$ ;
- Para a variável discreta  $i$ , tomando valores de 0 a  $N$  faça  
 $T[i][0] = f[ih]$ ;  
 fim.
- Para a variável discreta  $j$ , tomando valores de 0 a  $M - 1$  faça  
 $u[0][j + 1] = 0$ ;  
 Para  $i$  de 1 a  $N - 1$  faça  
 $u[i][j + 1] = u[i][j] + \lambda(u[i + 1][j] - 2u[i][j] + u[i - 1][j])$ ;  
 fim.  
 $u[N][j + 1] = 0$ ;  
 fim.

#### 4.2.2 Formulação para Propagação do Calor: Caso Hiperbólico

A abordagem para a condução do calor em regime parabólico considera que um pulso de calor aplicado à superfície de um corpo é imediatamente sentido em todas as partes deste, não importando a distância: velocidade infinita de propagação

(CHIWIACOWSKY, 2002). O trabalho apontado como o primeiro a abordar o caráter ondulatório da propagação do calor foi o de Maxwell, 1867, o qual apresentou uma relação para o fluxo de calor que inclui pressão e variações da densidade espacial e que pode ser derivada da teoria cinética no caso de um gás ideal. Após este trabalho alguns pesquisadores (ONSAGER, 1931; TISZA, 1947) apontaram o caráter aproximado da lei de Fourier para descrição do processo de condução, sendo derivada uma equação da onda para o calor e denominada de segundo som.

Diferentes abordagens foram aplicadas na busca de uma teoria que melhor modelasse certos fenômenos com características ondulatórias do calor, sendo Chester em 1963 (CHESTER, 1963) o primeiro a relacionar a equação hiperbólica de Cattaneo (gases) e Vernotte (sólidos) com a idéia sobre o deslocamento do som (em fluídos), quando então declara-se que o som irá se deslocar em qualquer material. O som propaga-se seguindo uma equação da onda (hiperbólica). Além da teoria ondulatória, a propagação do som pode ser modelada com o deslocamento de um feixe de partículas. Partículas de som são chamadas de *phonons*. Deste modo, uma onda térmica pode ser descrita como a propagação de uma perturbação em uma densidade de phonons. Assim, tal onda deve sempre propagar-se com uma velocidade relacionada à velocidade do som (phonon)  $v_s$ . A abordagem hiperbólica é relevante em situações envolvendo altas taxas de transferência de calor em curtos espaços de tempo, dimensões espaciais pequenas (ex. nanotecnologia) temperaturas muito baixas (ex. supercondutividade) e irradiação eletromagnética de alta intensidade (HERWIG; BECKERT, 2000; MARCIAK-KOZŁOWSKA et al., 2001; JIANG; LIU, 2001).

A construção da equação hiperbólica do calor segue da equação de Fourier modificada:

$$\tau \frac{\partial \vec{q}(x, t)}{\partial t} + \vec{q}(x, t) = -\kappa \nabla T(x, t) \quad (4.4)$$

onde  $\tau$  é o tempo de relaxação (existência de um tempo finito não nulo de acumulação de calor para se alterar a corrente térmica).

Combinando esta equação com a equação 4.1 temos a equação hiperbólica para a condução do calor (equação 4.5) (CHIWIACOWSKY, 2002)

$$\tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\rho c}{\kappa} \nabla^2 T(x, t) = 0 . \quad (4.5)$$

Tal formulação prevê um limite superior para a velocidade finita não nula ( $a$ ) de propagação

$$a = \sqrt{\frac{\rho c}{\kappa \tau}} . \quad (4.6)$$

No limite em que  $\tau = 0$ , a equação hiperbólica retorna a equação parabólica – a velocidade infinita de propagação do sinal. Dependendo do tipo e característica do material o valor de  $\tau$  é diferente, assumindo, para substâncias homogêneas, valores de 10E-10 a 10E-8 s para gases, e de 10<sup>-12</sup> a 10<sup>-10</sup> s para líquidos e sólidos dielétricos (KAMINSK, 1990).

O problema direto da equação da onda para a condução do calor pode ser definido da maneira que segue:

Seja  $T(x, t) \in C^2$  função real de variáveis reais definida no produto cartesiano entre o intervalo  $\Omega_x = (0, L)$  e o aberto  $\Omega_t = [0, t_f)$ , tal que

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T(x, t) &= 0 ; \quad x \in \Omega_x , \quad t \in \Omega_t ; \\ T(x, 0) &= f(x); \quad x \in \Omega_x ; \\ \frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} &= 0 ; \quad x \in \Omega_x ; \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &= 0 ; \quad x = 0, \quad x = 1, \quad t \in \Omega_t . \end{aligned}$$

Novamente empregando diferenças finitas centrada no espaço e avançada no tempo, a solução numérica é esquematizada abaixo.

- Seja  $N$  o número de pontos na discretização espacial, e  $M$  na temporal. Tome  $h = L/N$ ,  $k = t_f/M$ ,  $\lambda = [\kappa/(\rho c_p)] \times (k/(h^2))$ ;
- Para a variável discreta  $i$ , tomando valores de 0 a  $N$  faça  
 $T[i][0] = f[ih]$ ;  
 fim.
- Para  $i$  de 1 a  $N - 1$  faça  
 $T[i][1] = \frac{1}{2} * \lambda^2 (T[i + 1][0] + T[i - 1][0]) + (1 - \lambda^2) u[i][0]$ ;  
 fim.

- Para a variável discreta  $j$ , tomando valores de 1 a  $M - 1$  faça  
 $T[0][j + 1] = 0$ ;  
 Para  $i$  de 1 a  $N - 1$  faça  
 $T[i][j + 1] = (2\tau/(2\tau + k)) * [2(1 - \lambda^2)T[i][j] + \lambda^2(u[i + 1][j] + u[i - 1][j]) - u[i][j - 1] + (\frac{1}{2}k/\tau)u[i][j - 1]]$ ;  
 fim.  
 $T[N][j + 1] = 0$ ;  
 fim.

### 4.2.3 Codificação genética e formulação de Alifanov

A seguir é brevemente apresentada a codificação genética dos problemas e a formulação variacional.

Na abordagem de algoritmos genéticos, seja para os problemas de difusão ou para os de onda de calor cada indivíduo da população corresponde a uma possível condição inicial para o problema: cada gene representa, portanto, o elemento no espaço de funções da temperatura inicial.

O método variacional é uma metodologia sofisticada e eficiente na solução de problemas inversos. Na sua implementação, são desenvolvidos o problema de sensibilidade, o problema adjunto e as equações gradientes.

Visando a aplicação do método adjunto, assumindo disponíveis observáveis experimentais  $Y(x, t)$  para instantes contínuos de tempo e  $m$  pontos espaciais (igualmente espaçados), define-se a seguinte forma funcional a ser minimizada:

$$J[f(x)] = \sum_{m=1}^{m=M} \int_{t=0}^{t=tf} [Y(x_m, t)_{f(x)} - Y^{\text{Exp}}(x_m, t)]^2 dt; \quad (4.7)$$

onde  $Y(x, t)_{f(x)}$  e  $Y^{\text{Exp}}(x, t)$  são vetores contendo, respectivamente, os valores do observável calculado pelo modelo matemático (a partir da distribuição inicial  $f(x)$ ) e o valor medido (que contém a informação da distribuição inicial  $f^*(x)$  verdadeira e desconhecida).

Para definição do problema de sensibilidade, a condição inicial  $f(x)$  deve ser perturbada por uma pequena variação, resultando em  $f(x) + \Delta f(x)$ , esta variação implicará também em uma alteração nos valores do observável:  $Y(x, t) + \Delta Y(x, t)$ . O problema

de sensibilidade é então obtido através da substituição, no problema direto, de  $f(x)$  por  $f(x) + \Delta f(x)$ , e  $Y(x, t)$  por  $Y(x, t) + \Delta Y(x, t)$ .

O problema de sensibilidade é dado pelo problema perturbado subtraído pelo não perturbado, como os problemas em questão são lineares, o resultado pode ser alcançado apenas substituindo o termo  $Y(x, t)$  por  $\Delta Y(x, t)$  no problema direto.

Para definição do problema adjunto a equação de restrição deve ser incorporada à forma funcional através do uso da técnica dos multiplicadores de *Lagrange*. Sendo assim, introduzindo o problema com restrição, obtém-se a forma Lagrangeana dada por:

$$J[T_f(x, t), \lambda(x, t)] = \sum_{m=1}^{m=M} \int_{t=0}^{t=t_f} [T_f(x_m, t) - T^{\text{Exp}}(x_m, t)]^2 dt - \int_{x=0}^{x=1} \int_{t=0}^{t=t_f} \lambda(x, t) \left[ \tau \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 T(x, t) \right] .$$

Manipulando matematicamente esta expressão, de forma a ter incremento estacionário em  $J[T_f(x, t), \lambda(x, t)]$ , e escrevendo as equações no domínio dos multiplicadores de Lagrange, chegamos, para cada um dos problemas de propagação do calor<sup>3</sup>:

- Condução difusiva de calor:

$$\dot{\lambda} + \frac{\rho c}{\kappa} \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} - 2 \sum_{m=1}^{m=M} \left\{ \int_{t=0}^{t=t_f} [T_f(x_m, t) - T^{\text{Exp}}(x_m, t)]^2 dt \right\} \delta(x - x_m) = 0 ;$$

$$J'(x, t) = \frac{1}{t_f} \lambda(x, 0) ;$$

- Onda de calor:

$$\tau \ddot{\lambda} + \dot{\lambda} + \frac{\rho c}{\kappa} \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} - 2 \sum_{m=1}^{m=M} \left\{ \int_{t=0}^{t=t_f} [T_f(x_m, t) - T^{\text{Exp}}(x_m, t)]^2 dt \right\} \delta(x - x_m) = 0 ;$$

$$J'(x, t) = \frac{1}{t_f} [\lambda(x, 0) - \tau \dot{\lambda}(x, 0)] .$$

---

<sup>3</sup>Vale a pena ressaltar que tanto o problema direto quanto o problema adjunto para o caso hiperbólico recupera o caso parabólico quando  $\tau = 0$ .

#### 4.2.4 Resultados e discussões das inversões

Na presente seção, são apresentados os resultados de estimação de condição inicial (função triangular) para os dois problemas (condução e onda de calor), usando os dois métodos (Algoritmo Genético e Método Variacional). Ao resultado final do experimento *in silico*, efetuado para obtenção do observável experimental, foi adicionado um ruído branco gaussiano multiplicativo. O AG<sup>4</sup> foi executado por 2000 iterações, e o MV por no máximo 200: o critério de parada de *Morozov* possivelmente interrompe o laço antes disso. Cada iteração de AG levou, em média,  $3,12 \times 10^{-3}$  minutos, e cada do MV  $1,67 \times 10^{-3}$  minutos no hardware utilizado: processador *Intel Celeron*, 2133 Mhz, 1GB de memória DDR2.

Na Figura 4.3a, são recuperados os resultados bem conhecidos da inversão para o problema da condução do calor via Algoritmo Genético (SAMBATTI, 2004), sem e com regularização, em ambos os casos com ruído de intensidade de 0.5%. A inclusão de um termo regularizador na função custo melhorou o resultado da estimação da condição inicial do problema.

Na Figura 4.3b, exibe-se os resultados também já clássicos da literatura do Método Variacional, com ruído de intensidade de 0.5%, com e sem uso do critério de parada de *Morozov*. Quando no segundo caso o método passa a tentar “modelar ruído” e a qualidade da estimação se perde, com o critério de *Morozov* a convergência é alcançada em 3 iterações.

Na Figura 4.4a, são apresentados resultados da inversão para o problema da onda (eq. hiperbólica) do calor, via Algoritmo Genético, sem e com regularização. Assim como no caso parabólico. A inclusão de um termo regularizador na função custo melhorou o resultado da estimação. Percebe-se que o efeito do mesmo nível de ruído é mais drástico no problema hiperbólico que no parabólico: o nível de ruído no caso hiperbólico foi 5 vezes menor que no caso parabólico.

Na Figura 4.4b, exibe-se os resultados da inversão para o problema da onda (eq. hiperbólica) do calor, agora para o Método Variacional, sem e com o critério de parada de *Morozov*. A intensidade do ruído também neste caso hiperbólico foi de

---

<sup>4</sup>Em todos os casos executados o Algoritmo Genético aplicado teve os parâmetros ajustáveis fixados com os seguintes valores: 5000 iterações, população de 75 indivíduos, probabilidade de mutação 5%, operador epidêmico a cada 500 iterações sem melhora na melhor solução com manutenção de 10% da população.

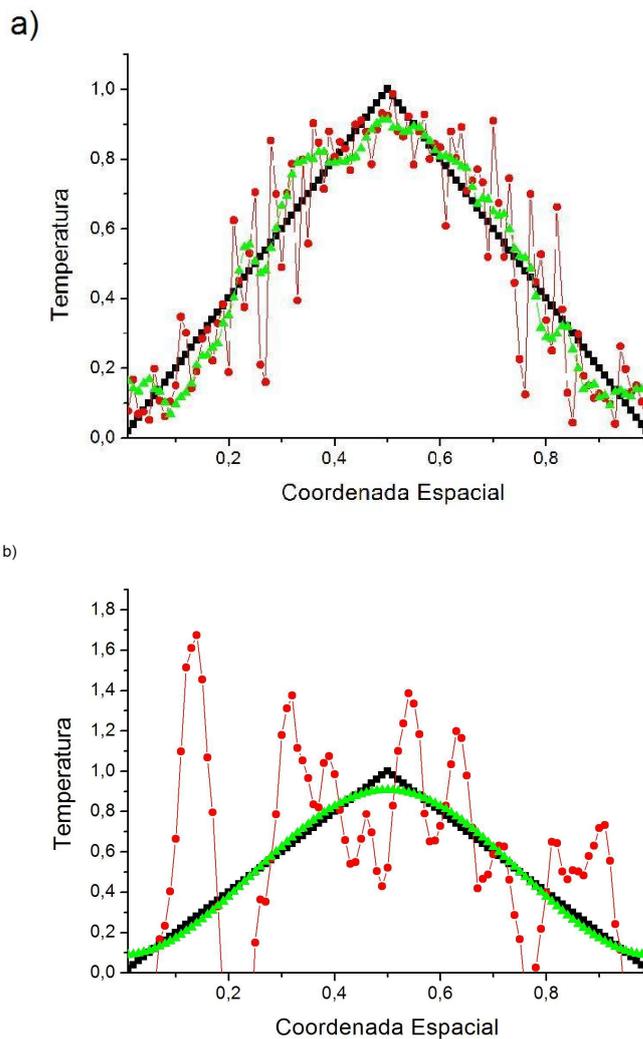


Figura 4.3 - Resultados da inversão para o problema parabólico via AG (a) e MV (b). Em quadrados pretos a condição inicial verdadeira, em círculos vermelhos e em triângulos verdes, respectivamente, a condição inicial estimada via (a) AG sem e com regularização e (b) MV sem e com o critério de parada de Morozov.

apenas 0.1%. O problema hiperbólico, novamente, apresentou maior sensibilidade frente à presença de ruído.

Na Figura 4.5 é testado o quão robusto frente a ruído é o MV. Na Figura 4.5a é apresentada a inversão para o problema parabólico e na Figura 4.5b para o problema hiperbólico, sem ruído e com ruído de intensidade de 15%. O problema parabólico mostra-se, portanto, mais robusto frente a ruído que o problema hiperbólico.

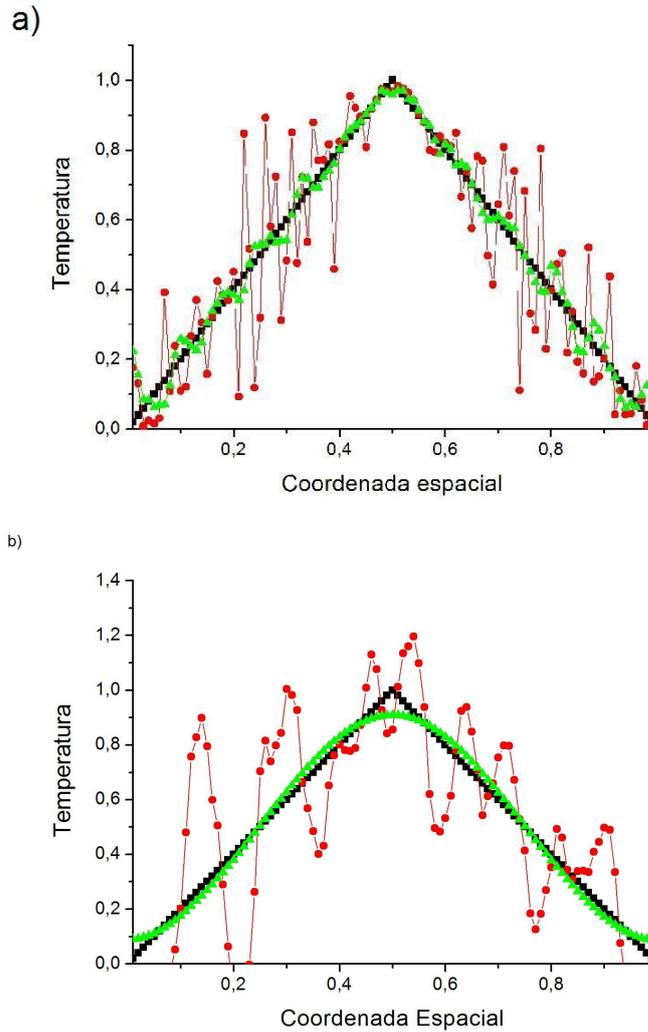


Figura 4.4 - Resultados da inversão para o problema hiperbólico via AG (a) e MV (b). Em quadrados pretos a condição inicial verdadeira, em círculos vermelhos e em triângulos verdes, respectivamente, a condição inicial estimada via (a) AG sem e com regularização e (b) MV sem e com do critério de parada de *Morozov* e em triângulos verdes com uso de tal critério.

### 4.3 Contribuição à aplicabilidade: Busca Hierárquica

A vantagem da busca hierárquica frente à abordagem tradicional será aqui discutida com base nos seguintes estudos de caso, com diferentes tipos de elementos finitos e distribuições de dano:

- Uma barra simples, com tais propriedades físicas: densidade  $d = 1.5E2 \frac{kg}{m^3}$ ,

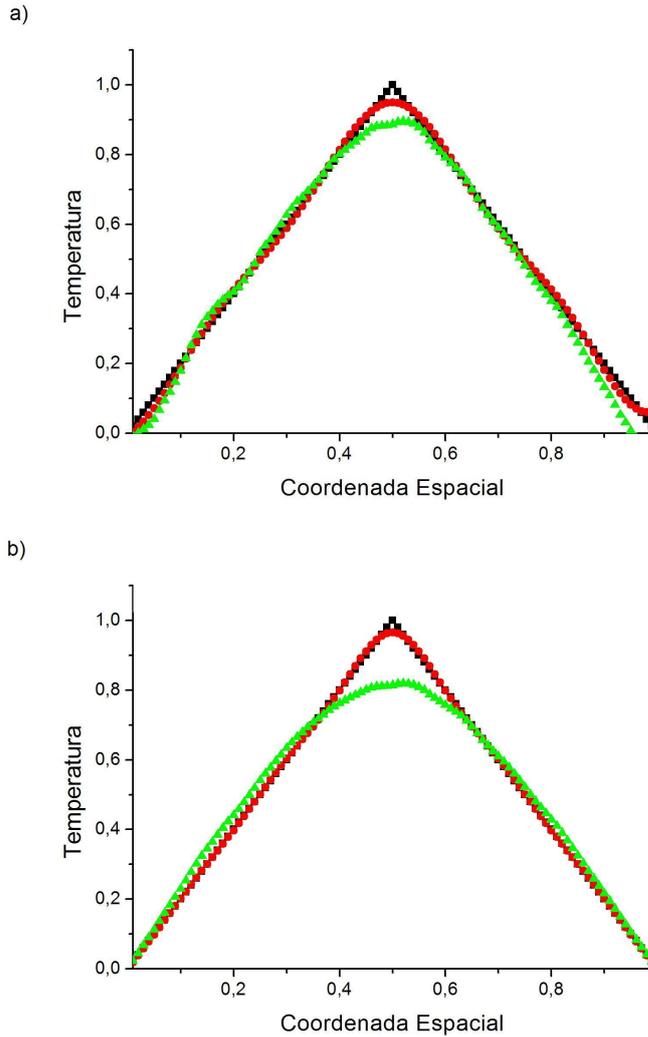


Figura 4.5 - Resultados da estimação de condição inicial (quadrados pretos) para o problema parabólico (a) e hiperbólico (b) via MV, em ambos os casos sem ruído (círculos vermelhos) e com ruído de intensidade de 15% (triângulos verdes).

módulo de *Young*  $E = 1.0E6 \frac{1}{ms^2}$ , comprimento  $l = 1.0m$ , área da seção transversal  $a = 2.0E - 1m^2$  e coeficiente de amortecimento  $\zeta = 5.0E - 3 \frac{kg}{s}$ .

- A Estação Espacial Internacional, discretizada em elementos finitos, sendo as seguintes propriedades físicas: comprimentos totais vertical e horizontal da estrutura  $L_x = L_y = 42 m$ , e para cada elemento finito: área da seção transversal  $A = 80 cm^2$ , densidade  $\rho = 2700 Kg \cdot m^{-3}$  e módulo de *Young*  $E = 70 GPa$ .

Todos os testes foram realizados em um notebook de processador *Intel Celeron*, 2133 MHz, com 1GB de memória DDR2; os valores de tempo de processamento foram salvos e utilizados para confronto entre as diversas abordagens<sup>5</sup>.

### 4.3.1 Estudo de caso em uma barra simples

Na abordagem tradicional, o método híbrido é aplicado à barra teste discretizada em  $N$  elementos finitos. Para se avaliar o dano de 3.125 centímetros como uma certa precisão, deve-se usar  $N=32$  elementos finitos.

Para simular uma estrutura danificada, os danos foram inseridos nos seguintes elementos: 4, 7, 13 e 16, com as seguintes intensidades: 10%, 5%, 20% e 10%, respectivamente (ver Figura 4.6). Foi aplicado a todos os espectros experimentais um ruído branco gaussiano de intensidade 5%.

O tempo de computação exigido pela abordagem hierárquica para efetuar a avaliação de dano estrutural na barra teste sujeita a tais condições foi de 19 minutos e 12 segundos.

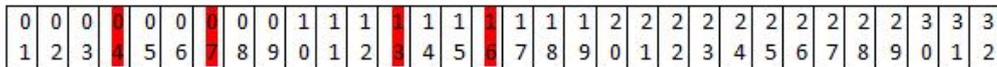


Figura 4.6 - Discretização da barra teste sob a abordagem tradicional. Os elementos com faixa vermelha são os danificados.

Para identificar os danos na viga mostrada na Figura 4.6, é utilizado o método híbrido, mas é utilizada a abordagem hierárquica. O processo é descrito pelo seguinte procedimento:

- Dividir a estrutura em  $k$  partes, com  $k \ll N$ ;
- Aplicar o método de avaliação de dano estrutural na barra discretizada em  $k$  elementos finitos;

<sup>5</sup>Em todos os casos executados o Algoritmo Genético aplicado teve os parâmetros ajustáveis fixados com os seguintes valores: 50000 iterações, população de 75 indivíduos, probabilidade de mutação 25%, operador epidêmico a cada 500 iterações sem melhora na melhor solução com manutenção de 10% da população.

- c) Para cada elemento  $i(1 \leq i \leq k)$ , avaliar se o elemento apresenta dano, se sim, então no próximo passo o elemento  $i$  será subdividido em  $k$  novos sub-domínios (elementos);
- d) O procedimento continua até o tamanho do menor elemento no passo presente ser igual à precisão estipulada para localização do dano.

Na Figura 4.7, é apresentada a sequencia de avaliações para a barra teste usando a abordagem hierárquica, com  $k = 2$ .

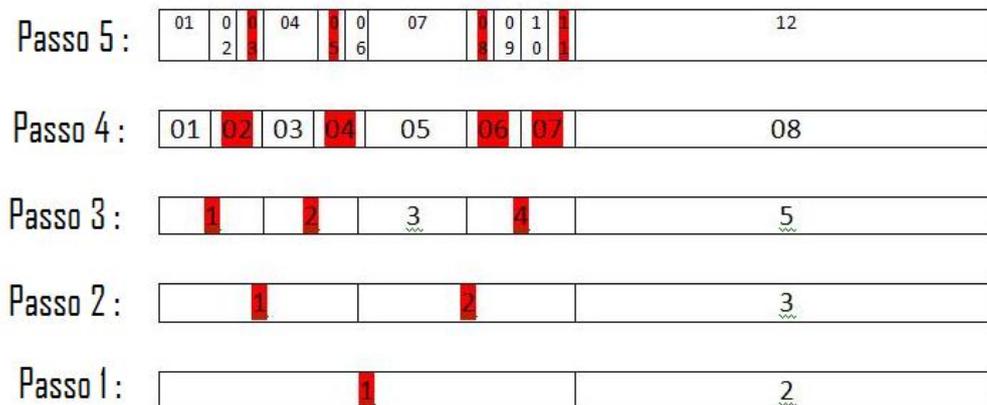


Figura 4.7 - Etapas de discretização da barra teste sob a abordagem hierárquica. Os elementos com faixa vermelha são os danificados.

- Passo 1: A estrutura foi dividida em 2 elementos finitos. O método de estimação de dano estrutural foi aplicado e o resultado obtido foi: localizado dano no elemento-1:  $\text{Dano}(1)=1.375\%$ , e dano no elemento-2:  $\text{Dano}(2)=0\%$ . Como no primeiro elemento foi encontrado dano então no próximo passo este elemento será subdividido em outros 2 elementos; e como no segundo elemento não foi encontrado dano este não será mais sub-dividido.
- Passo 2: A estrutura neste passo tem 3 elementos, o primeiro e o segundo de mesmo tamanho e o terceiro com o dobro do tamanho dos outros. O resultado do método de estimação nela aplicado foi:  $\text{Dano}(1)=1.875\%$ ,  $\text{Dano}(2)=0.875\%$ ,  $\text{Dano}(3)=0\%$ . Vale ressaltar que neste passo o elemento-3 é igual ao elemento-2 do passo anterior; logo  $\text{Dano}(3)$  deveria realmente

ser nulo. Os elementos 1 e 2 (que foram oriundos do elemento 1 do passo anterior) apresentaram dano, logo devem ser subdivididos.

- Passo 3: A estrutura tem 5 elementos. Os resultados da avaliação de dano foram: Dano(1)=2.5%, Dano(2)=1.25%, Dano(3)=0%, Dano(4)=1.75%, Dano(5)=0%.
- Passo 4: Os elementos 1, 2 e 4 do passo anterior foram subdivididos cada um em dois elementos, ficando a estrutura com 8 elementos finitos. O método de identificação de danos forneceu os seguintes resultados: Dano(1)=0%, Dano(2)=5%, Dano(3)=0%, Dano(4)=2.5%, Dano(5)=0%, Dano(6)=1%, Dano(7)=2.5%, Dano(8)=0%.
- Passo 5: Neste passo há 12 elementos finitos, sendo que os elementos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10 e 11 têm comprimento igual à precisão desejada para localização do dano, logo este deve ser o último passo da busca hierárquica, a copa da árvores de busca (busca semelhante à busca em largura). A avaliação de dano propiciou o seguinte resultado: Dano(1)=0%, Dano(2)=0%, Dano(3)=10%, Dano(4)=0%, Dano(5)=0%, Dano(6)=0%, Dano(7)=0%, Dano(8)= 2%, Dano(9)=0%, Dano(10)=0%, Dano(11)=5%, Dano(12)=0%.

No último passo o elemento 3 na abordagem hierárquica corresponde ao elemento 4 na abordagem tradicional, o elemento-5 ao elemento-7, o elemento-8 ao elemento-13 e o elemento-11 ao elemento-16, portanto o resultado final: localização dos elementos danificados e intensidade do dano foram os mesmos obtidos via abordagem tradicional. O erro de estimação relativo médio via abordagem tradicional foi de 1.34% - 98.66% de eficácia na estimação, e na abordagem hierárquica o menor erro de estimação relativo médio foi de  $7 \times 10^{-2} \sim 99.93\%$  de eficácia na estimação; entretanto, enquanto esta demanda um tempo de processamento de 1152 s (tempo de computação - T<sub>CPU</sub> - para o método ser executado em uma estrutura de 32 elementos finitos nestas configurações), a busca hierárquica leva apenas 290s (T<sub>CPU</sub>(2) + T<sub>CPU</sub>(3)+T<sub>CPU</sub>(5)+ T<sub>CPU</sub>(8)+ T<sub>CPU</sub>(12)).

O T<sub>CPU</sub> do método híbrido não depende diretamente nem do número de elementos danificados nem da intensidade do dano, contudo a precisão da estimação é tão maior quanto menor o valor do dano, por isso a abordagem hierárquica não é apenas mais eficiente do que a abordagem tradicional, mas também mais eficaz. Além disso ela

é mais promissora para operar com dados reais, uma vez que para uma pequena densidade de danos (razão entre número de elementos danificados e número total de elementos) a árvore gerada será estreita, no sentido de poucos vértices por passo.

Uma análise empírica de complexidade, comportamento do tempo de computação em função do número de elementos, para a abordagem tradicional aponta para uma complexidade quadrática. Na abordagem hierárquica, após um transiente relativamente curto, o número de elementos em cada passo cresce não mais rapidamente do que uma progressão aritmética, cuja razão é dada por  $(k - 1) \times p \times n$ , sendo  $p$  a densidade de dano e  $n$  o número de elementos na discretização referente à abordagem tradicional, ou seja,  $p \times n$  é o número de elementos danificados.

Para o caso teste, com  $N = 32$ , se for necessário aumentar a precisão, o que implica em aumentar o número  $N$  de elementos, por exemplo  $N = 64$ , o TCPU na abordagem tradicional é 6125 s, já na abordagem hierárquica o acréscimo ao TCPU será referente ao TCPU(12+4), que é de 247s, sendo o TCPU total, então, de 537 s. A abordagem hierárquica é, portanto, mais robusta frente ao aumento da precisão necessária do que a abordagem tradicional.

Na busca hierárquica, no caso de apenas um elemento com dano, apenas o sub-elemento que contém o dano será sequencialmente sub-dividido. É, portanto, interessante usar um número de ramificação baixo, pois assim em cada iteração ter-se-á um baixo número de sub-elementos, logo sub-elementos de maior tamanho: como apenas um dos sub-elementos apresentará dano, todos os outros serão mantidos na discretização inicial (mais econômica). Quando é sabido que são poucos elementos com dano, o raciocínio anterior é mantido, já para situações na qual se espera encontrar danos em um grande número de elementos (grande porção da estrutura) é mais indicado o uso de um número de ramificação alto, para tentar isolar o dano e assim preservar da discretizações mais refinadas os sub-elementos que não contém as regiões danificadas.

Vale lembrar que em todos estes casos a busca tradicional precisaria de TCPU( $N$ ) para prover os resultados, sendo  $N$  o número de elementos finitos usados na discretização. A busca hierárquica tem custo flexível frente à quantidade de elementos danificados, tal flexibilidade representa mais uma vantagem da busca hierárquica frente à tradicional.

### 4.3.2 Estudo de caso na identificação de danos na Estação Espacial Internacional

Para o caso da Seção anterior, o elemento finito utilizado foi do tipo barra, e o domínio dos dados estava nas frequências. Para o caso da Estação Espacial Internacional (ISS), foi aplicado o elemento finito do tipo treliça, por permitir movimento não só longitudinal mas também transversal, abordagem mais realista, e uma vez que o número de auto-frequências a ser considerado em uma estrutura espacial de grande porte pode ser muito elevado (CHIWIACOWSKY *et al.*, 2004), a detecção de danos na Estação Espacial Internacional será feita no domínio do deslocamento e não no domínio da frequência. Ao dado experimental foi adicionado 1% de ruído branco gaussiano.

Aplicando uma discretização via elementos finitos para a estrutura inteira (Figura 4.8), o comportamento mecânico (resposta dinâmica) do sistema pode ser representado por um modelo linear definido por um conjunto de equações diferenciais sob os graus de liberdade:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (4.8)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez,  $\mathbf{x}(t)$  é o vetor dependente do tempo referente aos deslocamentos dos nós da estrutura e o vetor  $\mathbf{f}(t)$  representa a força externa aplicada à estrutura.

Foram avaliadas duas situações de dano: a primeira com um maior número de elementos danificados e maior intensidade do dano, isto poderia representar a estrutura com mais tempo de uso, e a segunda referente à estrutura com danos em fase inicial.

Para simular a situação com maior quantidade de elementos danificados, segundo numeração apresentada na Figura 4.8, foram marcados como elementos danificados os seguintes: de 32 a 38 e de 66 a 68, totalizando 10 elementos, com as seguintes respectivas intensidades de dano: 15%, 5%, 10%, 15%, 5%, 5%, 10%, 15%, 5% e 10%. A abordagem tradicional executaria a análise dos 68 elementos finitos da discretização apresentada e retornaria os danos corretamente em uma operação que levaria mais de 14 horas e 48 minutos. Usando a abordagem hierárquica o procedimento foi

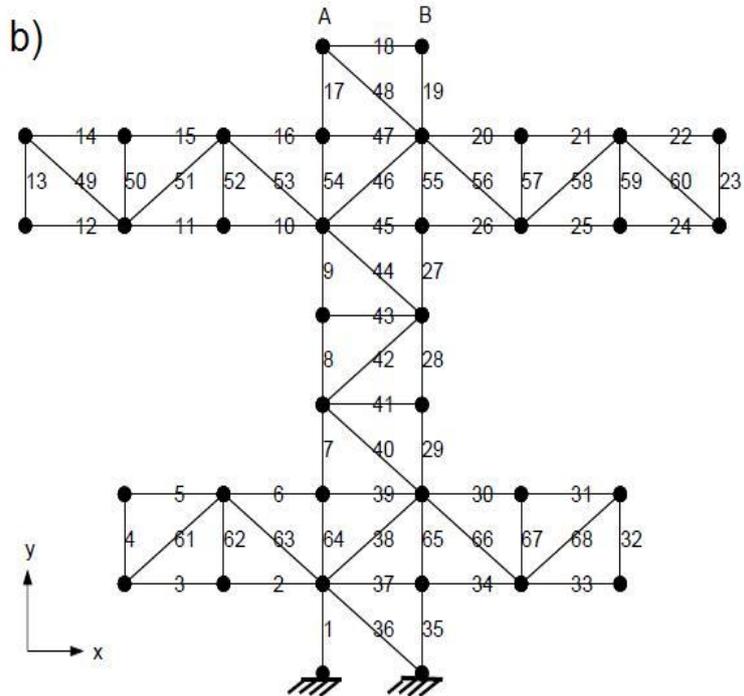
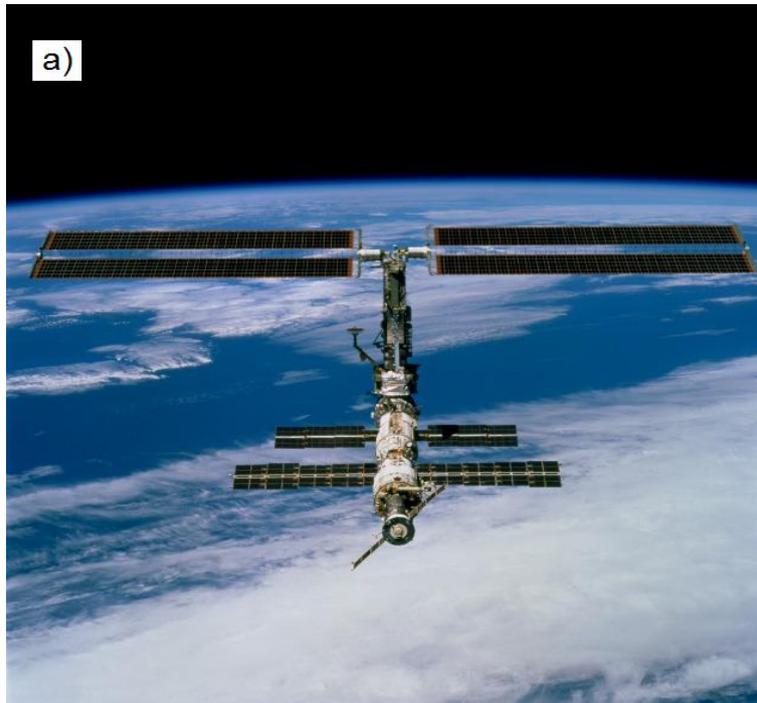


Figura 4.8 - (a) Estação Espacial Internacional, (b) Discretização simplificada da Estação Espacial Internacional em 68 elementos finitos.  
 Fonte: a) Galeria de Imagens da NASA (2010)

o seguinte:

- Primeiro nível: A estrutura da estação é simplificada ainda mais, sendo dividida em 3 grandes blocos: baías de 3 treliças, onde cada treliça contém 4 elementos. Desta forma a estrutura é discretizada em apenas 12 elementos finitos. Na figura 4.9a, é mostrado a correspondência entre a discretização mais refinada com 68 elementos (direita) e a discretização ainda mais simplificada (esquerda): a baía de treliça mais acima (marcada em azul) corresponde a uma parte do corpo da ISS e de um de um conjunto dos painéis solares, a baía de treliça no meio (marcada na região em amarelo) corresponde a parte central do corpo da ISS, finalmente, o restante da ISS (onde também contem um conjunto de painéis solares) é representada pela baía de treliça que está engastada (região marcada em vermelho). O método identificou dano no elemento 8 (Figura 4.9a). Como esta representação da estrutura é muito grosseira, é necessário uma melhor discretização. Este será o segundo nível da estratégia hierárquica e o refinamento irá ocorrer somente na baía de treliça onde foi detectado o dano.
- Segundo nível: apenas a parte inferior da estrutura foi refinada. A treliça composta pelos elementos 1, 7, 8 e 9 do primeiro nível deu origem a quatro treliças neste segundo nível: todas na parte inferior da estrutura. O método de identificação de danos nessa nova representação da estrutura (com 24 elementos finitos) identificou dano nos elementos 13, 14, 15, 16 e 24 (Figura 4.9b). Para que se mantenha a percepção do mapeamento entre a discretização mais refinada e a discretização usada nos diferentes níveis de estratégia hierárquica, a representação da ISS com 68 elementos é mostrada no lado direito da Figura 4.9b.
- Terceiro nível: os elementos 13, 14, 15 e 16 do segundo nível já apresentam a precisão espacial desejada para localização dos elementos danificados; mas o elemento 24 ainda não está com esta característica, portanto neste nível a porção mais à esquerda da Estação foi subdividida, ficando agora cada elemento nesta região com o tamanho desejado para localização do dano. Os elementos 13, 14, 15 e 16 do segundo nível correspondem no terceiro nível aos elementos 15, 16, 17 e 18, respectivamente. A aplicação do método de estimação de dano neste nível mostrou que o elemento 24, identificado como danificado no segundo nível, matém a presença do dano,

agora o dano aparece nos seguintes elementos do terceiro nível: 12, 13, 14, 25, 26, 27 e 28 (Figura 4.9c). Neste nível todos os elementos com dano apresentam a precisão espacial desejada para tal, logo a busca hierárquica converge no terceiro nível.

Para o primeiro nível, a busca hierárquica precisou de pouco mais de 8 segundos para apresentar seu resultado. Para o segundo nível, já foi necessária pouco mais de uma hora e meia, e para o terceiro nível pouco mais de duas horas. A soma dos tempos para a busca hierárquica completa, até a convergência, foi de menos de 3h e 44 minutos (com mais de 95% de eficácia, erro relativo de estimação menor que 5%). Tal valor representa uma economia de quase 75% do tempo de processamento, sem nenhum prejuízo à qualidade dos resultados.

Todavia, em situações mais realistas, o monitoramento da saúde estrutural é realizada de forma sistemática, o que implicará que a análise de dano será efetuada antes da estrutura apresentar tantos danos e de tanta intensidade. Tal situação motivou o segundo caso de análise. Para o novo caso, os elementos danificados, segundo numeração apresentada na Figura 4.8 foram os elementos 17, 18, 19 e 48, totalizando 4 elementos, com as seguintes intensidades: 10%, 20%, 7.5%, 10% (respectivamente). A abordagem tradicional executaria a mesma análise do caso anterior e uma vez que seu custo independe do número de elemento danificados e intensidade dos danos, o resultado seria determinado também em mais de 14 horas e 48 minutos. Usando a abordagem hierárquica o procedimento foi o seguinte (para auxiliar o entendimento, tal como no caso anterior, é mostrada a correspondência entre a discretização mais refinada com 68 elementos, ‘a direita) e a discretização ainda mais simplificada, á esquerda):

- Primeiro nível: a estrutura foi discretizada em apenas 12 elementos finitos. Exatamente como descrito no caso anterior. O método identificou dano no elemento 12 (Figura 4.9a).
- Segundo nível: apenas a parte superior da estrutura foi sub-dividida. A treliça composta pelos elementos 3, 4, 5 e 12 do primeiro nível deu origem a duas treliças neste segundo nível: todas na parte superior da estrutura. O método de identificação de danos nessa nova estrutura (com 16 elementos finitos) encontrou dano apenas nos elementos 4, 5, 6 e 16 (Figura 4.9b).

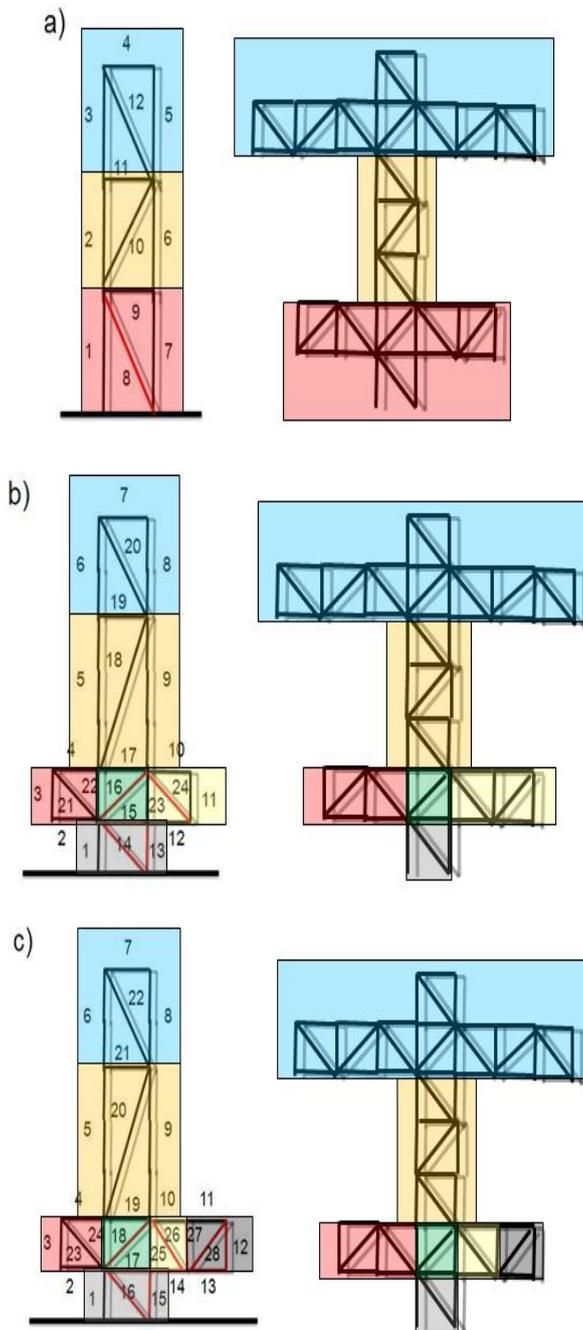


Figura 4.9 - Níveis hierárquicos de discretização no primeiro caso: a) primeiro nível, 12 elementos finitos, b) segundo nível, 24 elementos finitos, c) terceiro nível, 28 elementos finitos (mesma precisão espacial das áreas danificadas que na discretização com 68 elementos finitos). Ao lado de cada figura a correspondência, via cores de fundo, com a estrutura discretizada em 68 elementos finitos

Neste nível todos os elementos com dano apresentam a precisão espacial desejada para tal, logo a busca hierárquica converge já no segundo nível.

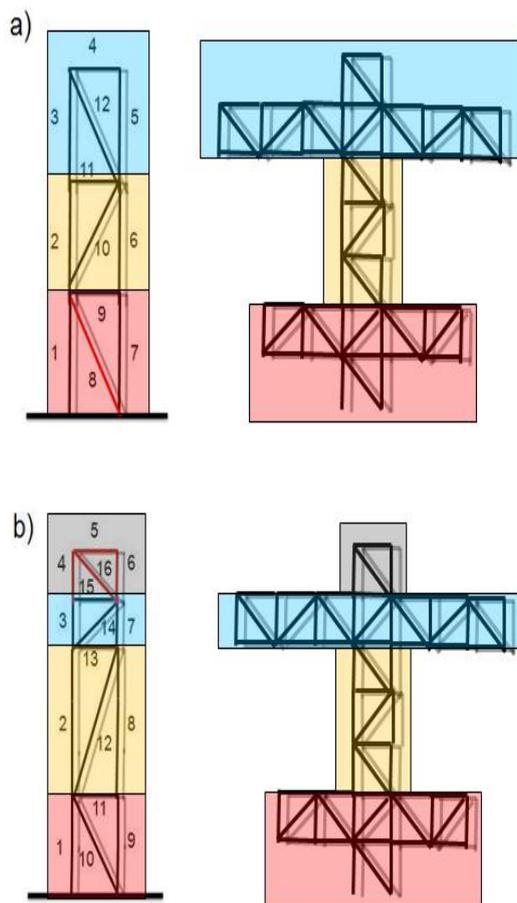


Figura 4.10 - Níveis hierárquicos de discretização no segundo caso: a) primeiro nível, 12 elementos finitos, b) segundo nível, 16 elementos finitos (mesma precisão espacial das áreas danificadas que na discretização com 68 elementos finitos). Ao lado de cada figura a correspondência, via cores de fundo, com a estrutura discretizada em 68 elementos finitos.

O tempo de processamento da estratégia hierárquica para o caso-2 foi calculado somando-se os tempos envolvidos em todos os níveis hierárquicos. A soma do tempo de processamento para o primeiro e para o segundo níveis na busca hierárquica foi de menos de 18 segundos (com mais de 99% de eficácia – erro relativo de estimação menor que 1%). O tempo de processamento via busca hierárquica foi, portanto,

mais de 2960 vezes menor que o referente à busca tradicional: menos de 18 segundos contra mais de 14 horas e meia. Para que tenhamos uma idéia da economia do tempo de computação em outra escala, tal diferença é, relativamente, similar a realizar a computação do resultado em **8 anos** (estratégia tradicional) pela obtenção do resultado em apenas **um dia**, absolutamente sem nenhum prejuízo à qualidade do mesmo.



## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Na presente dissertação, foram efetuadas algumas inovações com contribuições ao método híbrido de estimação de dano estrutural.

Em relação à análise de robustez (SANTOS et al., 2010b; SANTOS et al., 2010a), constatou-se que o Método de Gradiente Conjugado como originalmente formulado não produz normalmente soluções inversas satisfatórias em problemas hiperbólicos, devido à não eliminação de incertezas (flutuações, ruído) nas condições iniciais. A hibridização resolve tal problema, e o método híbrido por prover uma primeira estimativa mais ajustada para o método do gradiente conjugado, faz com que a abordagem variacional determine, em média, uma melhor solução inversa, do que uma condição aleatória como estimativa inicial do MGC, como no caso do MGC convencional. Convergindo uma solução final mais próxima à solução desejada (ótimo global). A análise do erro mínimo de estimação mostra que a hibridização não apenas melhora a média global de estimação do erro, mas também reduziu o limitante inferior do erro. Os resultados da análise são obtidos sem comprometer a eficiência, o tempo de obtenção do resultado (tempo de computação da solução).

No tocante à reconstrução de condição inicial no problema de condução hiperbólica do calor (SANTOS et al., 2010c), verificou-se a relevância do uso de regularização na resolução via AG e do critério de parada de Morozov na via MV. Ficou evidente a maior sensibilidade do problema hiperbólico frente ao ruído, quando comparado com o problema parabólico.

Em referência à busca hierárquica, objetivo central da dissertação, foi apresentada sua estrutura e confirmada suas vantagens frente à abordagem tradicional de busca: maior velocidade de identificação de danos e maior robustez frente ao aumento da precisão espacial necessária a tal identificação.

Vale ressaltar que as três contribuições supracitadas se entrelaçam em alguns aspectos que não poderiam ser observados sem a execução das três investigações no mesmo documento. Explicitamente:

- Análise de robustez + Calor Hiperbólico: O uso do AG para inicializar o MGC (que define o *método híbrido*, MH) na análise de robustez não afetou significativamente o tempo de computação da solução, pois o AG foi executado por poucas iterações (50 iterações). Já no problema de estimação

da condição inicial na propagação do calor no regime hiperbólico, o AG foi executado um número bastante superior (200 iterações). No MH, a determinação do número de iterações via AG, anterior à execução do MGC, é de suma importância.

- Calor Hiperbólico + Busca hierárquica: A sensibilidade do tempo de computação da solução frente ao número de pontos de grade em problemas de estimação de condição inicial é bastante inferior em relação ao número de graus de liberdade em problemas de vibração mecânica. Não há, portanto, indicações para uma abordagem hierárquica ao problema de recuperação de perfil inicial. Todavia, a abordagem hierárquica, como proposta, não é específica ao problema de identificação de danos, sendo uma estratégia de busca genérica e poderosa o bastante para aplicações em diversos outros problemas que exijam tal desenvolvimento, e que apresentem um domínio de particionamento não rígido, além disso pode-se imaginar diferentes estratégias divisão de domínio.
- Análise de robustez + Busca hierárquica: a eficiência do MH não depende da localização e intensidade dos danos, ou seja, o tempo de computação da solução depende apenas do número de elementos finitos na discretização utilizada. Já a eficácia apresenta uma dependência frente ao número e intensidade dos danos, conforme visto na análise de robustez. Uma vez que na busca hierárquica as discretizações apresentam menos elementos danificados, com uma certa *diluição* da intensidade do dano, o resultado de estimação de dano é, realmente, melhor, ou seja, a busca hierárquica não é apenas mais eficiente que a estratégia padrão (discretização com grande número de elementos e homogênea), mas também mais eficaz.

Dois estudos de caso foram efetuados usando a busca hierárquica. Um problema de estimação de dano estrutural numa viga e para um sistema espacial de grande porte: a Estação Espacial Internacional. No primeiro caso, um resultado com 95% de eficácia foi alcançado com um esforço computacional da ordem de um quarto do correspondente à abordagem tradicional. No segundo caso, que apresenta um menor número de elemento danificados, com intensidade do dano mais distribuída ou diluída, a busca hierárquica chegou ao ponto de ser 2960 vezes mais rápida que a busca tradicional, apresentando um resultado com 99% de eficácia: imensa melhoria na eficiência sem nenhum prejuízo à identificação do dano.

Dentre as perspectivas para trabalhos futuros, estão a aplicação do AG na versão paralelo (SAMBATTI, 2004), analisando eficiência e *speed-up*, com a identificação de danos no caso de estudo na Estação Espacial Internacional, avaliando o ganho de desempenho, não só confrontando a implementação sequencial e paralela, mas também com comparações entre as abordagens exaustiva (tradicional) e hierárquica.

Um outro conjunto de perspectivas diz respeito análises de propriedades do algoritmo de busca hierárquica proposto.

A metodologia de estimação de danos em estruturas desenvolvida inicialmente por (CHIWIACOWSKY, 2005) e que hoje conta com as contribuições geradas por esta dissertação ainda precisa de mais investigações para aplicações em estruturas reais de grande porte. O acoplamento da busca hierárquica com o método híbrido já teve desenvolvimento prévio, e teve comprovada o bom desempenho. Agora é preciso automatizar o processo de discretização das estruturas e montagem da matriz de rigidez, sendo capaz de operar com outros tipos de elementos finitos e vínculos, utilizando-se pacotes de software já consagrados, como o pacote NASTRAN<sup>1</sup>, desenvolvido pela NASA especialmente para modelagem de estruturas aeroespaciais via elementos finitos. Uma cooperação produtiva com a indústria aeroespacial é promissora e viável e desejável.

---

<sup>1</sup><http://www.mscsoftware.com/Contents/Products/CAE-Tools/MS-CNastran.aspx> .



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADAMS, R.; CAWLEY, P.; PYE, C.; STONE, B. A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 20, n. 2, p. 93–100, 1978. 5
- ATALLA, M.; INMAN, D. On modal updating using neural networks. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 12, n. 1, p. 135–161, 1998. 11
- AUWERAER, H.; PEETERS, B. International research projects on structural health monitoring: an overview. **Structural Health Monitoring**, v. 2, n. 4, p. 341–358, 2001. 5
- BALMES, E. Orthogonal maximum sequence sensor placements algorithms for modal tests, expansion and visibility. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 23., 2005, Orlando, USA. **Proceedings...** Orlando, 2005. 13
- BATHE, K. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. 1033 p. 18, 19
- BAZARRA, M. e. a. **Linear programming and network flows**. New York: John Wiley & Sons, 1990. 625 p. 10
- BENNETT, A. F. **Inverse modeling of the ocean and atmosphere**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 260 p. 3
- CAMPOS-VELHO, H.; CHIWIACOWSKY, L.; GASBARRI, P. Some results on damage detection using variational approach. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 4., 2005, Bauru, Brazil. **Proceedings...** Bauru: SBMAC, 2005. p. 1456–1464. 1 CD-ROM. 15
- CAMPOS-VELHO, H. F. **Problemas inversos em pesquisa espacial**. Belém (PA), Brasil: Mini-curso Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), 2008. 120 p. 2, 4, 9, 17
- CAMPOS-VELHO, H. F. e. a. Inverse problems in space science and technology. **Inverse Problems in Science Engineering**, v. 15, p. 359–372, 2007. 4
- CASTELLO, D.; STUTZ, L. T.; ROCHINHA, F. A. A structural defect identification approach based on a continuum damage model. **Computers Structures**, v. 80, p. 417–436, 2002. 17

CAWLEY, P.; ADAMS, R. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. **Journal of Strain Analysis**, v. 14, n. 2, p. 49–57, 1979. 5

CHEN, H.; SPYRAKOS, C.; VENKATESH, G. Evaluating structural deterioration by dynamic response. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 8, p. 1197–1204, 1995. 5

CHESTER, M. second sound in solids. **Physical Review**, v. 131, p. 2013–2015, 1963. 49

CHINCHALKAR, S. Determination of crack location in beams using natural frequencies. **Journal of Sound and Vibration**, v. 247, n. 3, p. 417–429, 2001. 5

CHIWIACOWSKY, L. **Uso da Função de Transferência em problemas de condução do calor com a Lei de Fourier modificada**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2002. 45, 49

CHIWIACOWSKY, L.; CAMPOS-VELHO, H.; GASBARRI, P. The damage identification problem: A hybrid approach. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2., 2003, São José dos Campos, Brazil. **Proceedings...** São José dos Campos: SBMAC, 2003. p. 1393–1402. 1 CD-ROM. 15

\_\_\_\_\_. A variational approach for solving an inverse vibration problem. In: INVERSE PROBLEMS, DESIGN AND OPTIMIZATION SYMPOSIUM, 2004, Rio de Janeiro, Brazil. **Proceedings...** Rio de Janeiro, 2004. p. 290–297. 1 CD-ROM. 15

CHIWIACOWSKY, L.; CAMPOS-VELHO, H.; GASBARRI, P. A variational approach for solving an inverse vibration problem. **Inverse Problems in Science and Engineering**, v. 14, n. 5, p. 557–577, 2006. 15

CHIWIACOWSKY, L.; GASBARRI, P.; CAMPOS-VELHO, H. Damage assessment of large space structures through the variational approach. In: INTERNATIONAL ASTRONAUTICAL CONGRESS, 55., 2004, Vancouver, Canada. **Proceedings...** Vancouver, 2004. p. I.2.08. 1 CD-ROM. 15, 61

CHIWIACOWSKY, L. D. **Método variacional e algoritmo genético em identificação de danos estruturais**. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2005. 6, 11, 15, 25, 31, 34, 71

CHIWIACOWSKY, L. D.; CAMPOS-VELHO, H. F.; GASBARRI, P. A solution for the damage assessment problem by the adjoint equation method. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 27., 2004, Porto Alegre, Brazil. **Proceedings...** Porto Alegre, 2004. 1 CD-ROM. 15

CHIWIACOWSKY, L. D.; SHIGUEMORI, E. H.; CAMPOS-VELHO, H. F.; GASBARRI, P.; SILVA, J. D. S. A comparison of two different approaches for the damage identification problem. **Journal of Physics: Conference Series (on-line)**, n. 124, 2008. 15

CINTRA, R.; CAMPOS-VELHO, H. F.; TODLING, R. Redes neurais artificiais na melhoria de desempenho de métodos de assimilação de dados: filtro de kalman. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 11, p. 29–39, 2010. 11

COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M.; WITT, R. **Concepts and applications of finite element analysis**. London: John Wiley & Sons, 2001. 724 p. 18, 19

DA FONSECA, I.; BAINUM, P. M.; DA SILVA, A. R. Structural control interaction for a lss attitude control system using thrusters and reactions wheels. **Acta Astronautica**, v. 60, p. 865–887, 2007. ISSN 0094-578. 5

DOEBLING, S.; FARRAR, C.; PRIME, M.; SHEVITZ, D. **Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review**. Los Alamos, USA: [s.n.], 1996. 134 p. 14, 15

EWINS, D. **Modal testing: theory and practice**. New York: John Wiley & Sons, 1984. 269 p. 13

FIORANI, L. A. **Sobre o uso de subestruturas na modelagem de estruturas complexas**. Dissertação de Mestrado — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009. 38

FRANÇA, L. F. A.; CARVALHO, S. V.; RODRIGUES, R. C. M. Modelagem markoviana de decisão para o roteamento adaptativo em um nó de uma rede wdm totalmente Óptica. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, Bento Gonçalves, Brasil. **Proceedings...** Bento Gonçalves, 2010. 4

FRISWELL, M. On the design of modal actuators and sensors. **Journal of Sound and Vibration**, v. 241, n. 3, p. 361–372, 2001. 13

FRISWELL, M.; PENNY, J. The practical limits of damage detection and location using vibration data. In: SYMPOSIUM ON STRUCTURAL DYNAMICS AND CONTROL, 11., 1997, Blacksburg, USA. **Proceedings...** Blacksburg, 1997. p. 31–40. 14

GALVAO, V.; MIRANDA, J. G. V.; RIBEIRO DOS SANTOS, R. Development of a two-dimensional agent-based model for chronic chagasic cardiomyopathy after stem cell transplantation. **Bioinformatics**, v. 24, p. 2051–2056, 2008. 4

GASBARRI, P.; CHIWIACOSKY, L. D.; CAMPOS-VELHO, H. F. A hybrid multilevel approach for aeroelastic optimization of composite wing-box. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL DE OTIMIZAÇÃO EM ENGENHARIA ENGOPT, Rio de Janeiro, Brasil. **Proceedings...** Rio de Janeiro, 2009. 15

GASBARRI, P.; CHIWIACOWSKY, L.; Campos-Velho, H. A comparison between frequency and time domain approaches for determining a structural damage using the adjoint method. In: CONGRESSO NAZIONALE DELLA ASSOCIAZIONE ITALIANA DI AERONAUTICA E ASTRONAUTICA, 86., 2007, Volterra, Italy. **Proceedings...** Volterra, 2007. p. 53–69. 1 CD-ROM. 15

GILL, P.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. **Practical optimization**. London: Academic Press, 1981. 402 p. 10

GOLDBERG, D. **Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning**. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1989. 412 p. 6, 15

HADAMARD, J. **Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations**. New Haven: Yale University Press, 1923. 316 p. 9

HERWIG, H.; BECKERT, K. Fourier versus non-fourier heat conduction in materials with nonhomogeneous inner structure. **Journal of Heat Transfer**, v. 122, p. 363–365, 2000. 49

HEY, T.; TANSLEY, S.; TOLLE, K. in. **The fourth paradigm**: data-intensive scientific discovery. Florianópolis: Microsoft Corporation, 2009. 4

HOFFMAN, J. D. **Numerical methods for engineers and scientists**. USA: CRC Press, 2001. ISBN: 978-0824704438. 3, 6, 11, 48

HOLLAND, J. **Adaptation in natural and artificial systems**: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1992. 211 p. 6, 15

HORTA, L. G.; KVATERNIK, R. G. **A historical perspective on dynamics testing at the langley research center**. Cabo Canaveral, USA: [s.n.], 2000. 5

HÄRTER, F. P.; CAMPOS-VELHO, H. F. Multilayer perceptron neural network in a data assimilation scenario. **Engineering applications of computational fluid mechanics**, v. 4, p. 237–245, 2010. 11

HUANG, C.; HSIN-HSIENWU. An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux by the conjugate gradient method. **J. Phys. D: Appl. Phys.**, v. 39, p. 4087–4096, 2006. 46

HUANG, C. H.; LIN, C. Y. Inverse hyperbolic conduction problem in estimating two unknown surface heat fluxes simultaneously. **Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, v. 22, p. 766–774, 2008. 46

\_\_\_\_\_. An iterative regularization method in estimating the unknown energy source by laser pulses with a dual-phase-lag mode. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 76, p. 108–126, 2008. 46

INMAN, D. **Engineering vibration**. New Jersey: Prentice Hall, 1994. 560 p. 1, 5

IÓRIO, V. **EDP**: um curso de graduação. Rio de Janeiro: Publicação IMPA, 2001. ISBN 85-244-0065-X. 45

JIANG, F.; LIU, D. Hyperbolic heat conduction restricted by continuous boundary interface. **Progress in Natural Science**, v. 11, p. 294–300, 2001. 49

- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problem. **ASME Journal of Basic Engineering**, n. 82d, 1960. 10
- KAMINSKI, W. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure. **Journal of Heat Transfer**, v. 112, p. 555–560, 1990. 50
- KAMMER, D.; TINKER, M. Optimal placement of triaxial accelerometers for modal vibration tests. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 18, n. 1, p. 29–41, 2004. 13
- KARCZEWSKA, S. olesek. Effective thermal conductivity of packed beds of spheres in transient heat transfer. **Heat and Mass Transfer**, v. 39, p. 375–380, 2003. 45
- LAX, P. D.; RICHTMYER, R. D. Survey of the stability of linear finite difference equations. **Comm. Pure Appl. Math**, v. 9, 1956. 3
- LIN, H.; CUNWEI, Z.; JINPING, O. Sensor placement selection of SHM using tolerance domain and second order eigenvalue sensitivity. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON EARTHQUAKE ENGINEERING, 3., 2004, Nanjing, China. **Proceedings...** Nanjing, 2004. 13
- LIU, G.; HAN, X. **Computational inverse techniques in nondestructive evaluation**. Boca Raton: CRC Press, 2003. 567 p. 5
- MA, C. K.; LIN, D. C. Input forces estimation of a cantilever beam. **Inverse Problems in Engineering**, n. 8, p. 511–528, 2000. 10
- MARCIAK-KOZŁOWSKA, J.; KOZŁOWSKI, M.; MUCHA, Z. Thermal waves in two-dimensional heterogeneous materials. **Lasers Engineering**, v. 11, p. 189–194, 2001. 49
- MASOOD, K. Recovery and regularization of initial temperature distribution in a two-layer cylinder with perfect thermal contact at the interface. **Proc. Jpn. Acad., Ser. B**, v. 82, 2006. 46
- MCCONNELL, K. **Vibration testing: theory and practice**. New York: John Wiley & Sons, 1995. 624 p. 1, 5

- MEDEIROS, F. **Algoritmo genético híbrido como um método de busca de estados estacionários de sistemas dinâmicos**. Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2002. 15, 26
- MEDEIROS, L. C. C.; CASTILHO, C. A. R.; BRAGA, M. C.; SOUZA, W. V.; REGIS, L.; MONTEIRO, A. M. V. Modeling the dynamic transmission of dengue fever: Investigating disease persistence. **submitted to Plos Neglected Tropical Diseases**, 2010. 4
- MITCHELL, M. **An introduction to genetic algorithms**. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1996. 224 p. 6, 15
- MOROZOV, V.; STESSIN, M. **Regularization methods for ill-posed problems**. New York: CRC Press, 1993. 257 p. 34
- NETO A; SANTOS, L. B. L. e. a. G. Comparative protein analysis of the chitin metabolic pathway in extant organisms: A complex network approach. **BioSystems**, v. 101, p. 5966, 2010. 4
- ONSAGER, L. Reciprocal relations in irreversible processes. ii. **Phys. Rev.**, v. 38, p. 2265-2279, 1931. 49
- PAES, F. F.; CAMPOS-VELHO, H. F. Neuro-estimador do ciclo diurno de co<sub>2</sub>. **Ciência e Natura**, v. 31, p. 293–296, 2009. 11
- PASCAL, H. A nonlinear model of heat conduction. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 25, p. 939, 1992. 45
- POTHISIRI, T.; HJELMSTAD, K. Strategy for finding a near-optimal measurement set for parameter estimation from modal response. **Journal of Sound and Vibration**, v. 257, n. 1, p. 89–106, 2002. 13
- RAMOS, F. M.; CAMPOS-VELHO, H. F.; CARVALHO, J. C.; FERREIRA, N. J. Novel approaches on entropic regularization. **Inverse Problems**, n. 15, p. 1139–1148, 1999. 9
- RAMOS, F. M.; ROSA, R. R.; NETO, C. R.; ZANANDREA, A. Generalized complex entropic form for gradient pattern analysis of spatio-temporal dynamics. **Physica A**, v. 283, p. 171–174, 2000. 4

RAMU, S.; JOHNSON, V. Damage assessment of composite structures - a fuzzy logic integrated neural network approach. **Computers and Structures**, v. 57, n. 3, p. 491–502, 1995. 11

RANCK JUNIOR, R.; SANTOS, L. B. L. Análise iterativa dos problemas de p-centros e p-medianas para um crescente número de facilidades: Estudo de caso na epidemia de dengue, salvador, 1995. In: 9TH BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, Serra Negra, Brasil. **Proceedings...** Serra Negra, 2010. 4

REIS, E. A.; SANTOS, L. B. L.; PINHO, S. T. R. A cellular automata model for avascular solid tumor growth under the effect of therapy. **Physica A**, v. 388, n. 7, p. 1303–1314, 2009. 4

ROSA, R.; PONTES, J.; CHRISTOV, C.; RAMOS, F.; NETO, C. R.; REMPEL, E.; WALGRAEF, D. Gradient pattern analysis of swift-hohenberg dynamics: Phase disorder characterization. **Physica A**, v. 283, 2000. 4

SALAWU, O. Detection of structural damage through changes in frequency: a review. **Engineering Structures**, v. 19, n. 9, p. 718–723, 1997. 5

SALEH, A. A.; AL-NIMR, M. Variational formulation of hyperbolic heat conduction problems applying laplace transform technique. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 35, p. 204–214, 2008. 46

SAMBATTI, B. **Diferentes estratégias de paralelização de um algoritmo genético epidêmico aplicadas na solução de problemas inversos em transferência de calor**. 17 dez. 2004. 120 p. Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2004. 53, 71

SANTANA, C. de; FONTES, A.; CIDREIRA, M. d. S.; ALMEIDA, R.; GONZÁLEZ, A.; ANDRADE, R.; MIRANDA, J. Graph theory defining non-local dependency of rainfall in northeast brazil. **Ecological Complexity**, v. 6, p. 272–277, 2009. 4

SANTOS, L. B. L.; CHIWIACOWSKY, L. D.; CAMPOS-VELHO, H. F. Análise de robustez do método híbrido de estimação de dano em estruturas. **submetido à Tendências em Matemática Aplicada**, 2010. 16, 69

\_\_\_\_\_. Análise de robustez do método híbrido de estimação de dano estrutural. In: 9TH BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, Serra Negra, Brasil. **Proceedings...** Serra Negra, 2010. 16, 69

\_\_\_\_\_. Genetic and variational methods for initial temperature profile estimation on the hyperbolic heat conduction. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 2010. A ser submetido. 16, 69

SANTOS, L. B. L. e. a. Periodic forcing in a three-level cellular automata model for a vector-transmitted disease. **Physical Review E**, v. 80, 2009. 4

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. **Selected to the Virtual Journal of Biological Physics Research**, v. 18, p. 16102 – 16110, 2009. 4

SHAMES, I.; DYM, C. **Energy and finite element methods in structural mechanics**. New York: Taylor & Francis Group, 1985. 757 p. 18, 19

SHEN, W.; HAN, S. A numerical solution of two-dimensional hyperbolic heat conduction with non-linear boundary conditions. **Heat and Mass Transfer**, v. 39, p. 499–507, 2003. 46

SHIGUEMORI, E.; CHIWIACOWSKY, L.; CAMPOS-VELHO, H.; SILVA, J. An inverse vibration problem solved by a multilayer perceptron neural network. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 27., 2004, Porto Alegre, Brazil. **Proceedings...** Porto Alegre, 2004. 1 CD-ROM. 15

\_\_\_\_\_. An inverse vibration problem solved by an artificial neural network. **Tendências Em Matemática Aplicada e Computacional**, 2005. 11

SHIGUEMORI, E. H.; CAMPOS-VELHO, H. F.; RAMOS, F. M.; SILVA, J. D. S. A parametric study of a new regularization operator: non-extensive entropy. In: 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON INVERSE PROBLEMS IN ENGINEERING, Angra dos Reis, Brasil. **Proceedings...** [S.l.], 2002. 9

SHIGUEMORI, E. H.; CAMPOS-VELHO, H. F.; SILVA, J. D. S.; CARVALHO, J. C. Neural network based models in the inversion of temperature vertical profiles from satellite data. v. 14, p. 543–556, 2006. 11

SHIGUEMORI, E. H.; CHIWIACOWSKY, L. D.; CAMPOS-VELHO, H. F.; SILVA, J. D. S. da. An inverse vibration problem solved by an artificial neural

networks. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, n. 6(1), p. 163–175, 2005. 15

SHIGUEMORI, E. H.; CHIWIACOWSKY, L. D.; SILVA, J. D. S. C. H. F. G. P. A comparison of two different approaches for damage identification problem. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INVERSE PROBLEMS IN ENGINEERING: THEORY AND PRACTICE, 5., 2005, Cambridge, UK. **Proceedings...** Cambridge, 2005. p. 504. 15

SHIGUEMORI, E. H.; HÄRTER, F. P.; CAMPOS-VELHO, H. F.; SILVA, J. D. S. Estimation of boundary conditions in heat transfer by neural networks. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 3, p. 189–195, 2002. 11

SILVA, M.; SENNE, E. L. F.; VIJAYKUMAR, N. L. Planejamento de redes mesh com aplicação do modelo hipercubo para verificação de parâmetros de qos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL - SBPO, Bento Gonçalves, Brasil. **Proceedings...** Bento Gonçalves, 2010. 4

SOHN, H.; FARRAR, C.; HEMEZ, F.; SHUNK, D.; STINEMATES, D.; NADLER, B. **A review of structural health monitoring literature: 1996-2001**. Los Alamos, USA: [s.n.], 2003. 307 p. 14, 15

STUTZ, L. T.; CASTELLO, D.; ROCHINHA, F. A. A flexibility-based continuum damage identification approach. **Journal of Sound and Vibration**, v. 279, p. 641–667, 2005. 15

TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. **Solutions of Ill-Posed Problems**. Washington, D.C: Winston & Sons, 1977. 9

TISZA, L. The theory of liquid helium. **Phys. Rev.**, v. 72, p. 838854, 1947. 49

TRUJILLO, D. M.; BUSBY, H. R. **Practical inverse analysis in engineering**. Boca Raton, USA: CRC Press, 1997. 9

WEAVER, W. Science and complexity. **American Scientist**, v. 36, 1948. 4

WYLEN, V. *et al.* **Fundamentos da termodinâmica clássica**. São Paulo: Edgard Blücher Ltd, 2003. ISBN: 8521204906. 47

YANG, C. Direct and inverse solutions of the two-dimensional hyperbolic heat conduction problems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 33, p. 2907–2918, 2009. 46

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. **Finite element method**: the basis. volume 1. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 712 p. 18, 19

