Análise do desempenho de variações de uma formulação linear para o problema de minimização do número máximo de pilhas abertas

Claudia Fink
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP,
13560-970, São Carlos, SP
claudiaf@icmc.usp.br

Horacio Hideki Yanasse
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE,
12227-010, São José dos Campos, SP
horacio@lac.inpe.br

Alysson Machado Costa
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP,
13560-970, São Carlos, SP
alysson@icmc.usp.br

RESUMO

O problema de minimização do número máximo de pilhas abertas é um problema NP-difícil e a resolução exata do problema pelos métodos sugeridos na literatura torna-se proibitiva à medida que o tamanho do problema aumenta pois o tempo de execução aumenta rapidamente. Neste trabalho, são analisadas variações de um modelo exato proposto na literatura, com o objetivo de tentar diminuir o tempo de execução necessário para se obter uma solução exata do modelo.

PALAVRAS CHAVE. Problemas de minimização do número máximo de pilhas abertas. Formulação matemática. Problema de sequenciamento. Programação matemática.

ABSTRACT

The minimization of the maximum number of open stacks problem is NP-hard and the exact solution of this problem using the methods suggested in the literature is prohibitive when the size of the problem increases since the execution time increases rapidly. In this paper, we analyze variations of an exact model of literature, with the objective of attempting to reduce the execution time required to obtain an exact solution of the model.

KEYWORDS. Minimization of open stack problem. Mathematical formulation. Sequencing problem. Mathematical programming.

1. Introdução

O problema de minimização do número máximo de pilhas abertas, MOSP (do inglês, *Minimization of Open Stack Problem*) surge em diversos contextos de produção, em particular associado a ambientes de corte industriais, em que uma etapa do planejamento de produção consiste em cortar placas de matéria-prima em peças menores.

As placas são cortadas uma a uma e as peças resultantes do corte são empilhadas ao redor da máquina de corte. Uma nova pilha é aberta toda vez que um novo tipo de peça é cortado, assim, cada pilha é formada por um único tipo de peça e permanece aberta até que a última placa que contém o tipo de peça correspondente a esta pilha é cortada. Depois disso, a pilha é considerada fechada e pode ser removida. O número máximo de pilhas abertas ocorre exatamente após o corte de uma placa e antes que qualquer pilha fechada seja removida. O MOSP tem como principal objetivo encontrar uma sequência de corte das placas que minimize o número máximo de pilhas simultaneamente abertas durante todo o processo de corte. A resolução deste problema favorece a utilização eficiente do espaço em torno da máquina de corte, por exemplo, quando há limitação do espaço físico, evita-se ao máximo a remoção temporaria de pilhas ainda não fechadas.

Neste contexto, o MOSP está associado a um problema de corte de estoque, que calcula os padrões (placas) de corte necessários para atender uma certa demanda de peças. Após calculados estes padrões, é resolvido o MOSP para obter uma sequência de corte destes padrões. Estes dois problemas podem ser tratados de maneira integrada, conforme estudado por Pileggi *et al.* (2005), Pinto (2004) e Yanasse e Lamosa (2007), o que gera um problema mais difícil de ser resolvido. Porém, na maioria dos trabalhos da literatura e também na prática industrial, os dois problemas tem sido tratados de maneira independente.

Em alguns contextos, o MOSP é equivalente a outros problemas apresentados na literatura. Por exemplo, no trabalho de Linhares e Yanasse(2002) o MOSP é relacionado com o GMLP (do inglês, *gate matrix layout problem*), que surge em projetos VLSI. Neste trabalho também são citados outros problemas relacionados ao MOSP.

O MOSP é um problema NP-difícil (conforme visto em Linhares, 2001) e a resolução exata do problema pelos métodos exatos sugeridos na literatura pode rapidamente tornar-se ineficiente. Neste sentido, análises e variações dos modelos existentes podem contribuir para aumentar o escopo de aplicações destes métodos. Este é o objetivo deste trabalho, onde uma formulação para o problema MOSP apresentada em Yanasse e Pinto (2003) é considerada e algumas variações são computacionalmente analisadas com o intuito de tentar diminuir o tempo computacional necessário para se obter uma solução exata do modelo.

Uma breve revisão do MOSP na literatura é apresentada na Seção 2. Na Seção 3 é definido o grafo MOSP, no qual, é baseado o modelo matemático de Yanasse e Pinto (2003) definido na Seção 4. Algumas variações deste modelo são analisadas na Seção 5. Os resultados obtidos são apresentados na Seção 6 e, por fim, na Seção 7 são feitas as considerações finais.

2. O MOSP na literatura

Os trabalhos na literatura que tratam da resolução do MOSP têm aumentado nos últimos anos. De fato, recentemente o MOSP foi alvo de estudo do *Constraint Modelling Challenge* (ver Smith e Gent, 2005), o que resultou na proposta e divulgação de diversas metodologias para o problema.

No contexto de análises exatas, uma formulação matemática para este problema foi proposta por Yanasse (1997) e é baseada em um modelo para o problema de minimização de trocas de ferramentas (MTSP) proposto por Tang e Denardo (1988). Existe pois uma estreita ligação do MOSP com o MTSP. Outros modelos para o problema MTSP e MOSP

foram propostos em Laporte *et al.* (2003) e Yanasse e Pinto (2003). Utilizando um código comercial, estes modelos conseguem resolver de forma exata em tempo computacional não proibitivo apenas exemplares pequenos do problema MOSP.

Outras abordagens exatas para a resolução do MOSP são os métodos de enumeração implícita de Yuen e Richardson (1995), Yanasse (1997), Faggioli e Bentivoglio (1998), Becceneri *et al.* (2004), e a estratégia baseada em programação dinâmica de Garcia de la Banda e Stuckey (2005).

Dado o aumento do esforço computacional necessário para resolver exatamente o MOSP à medida que o tamanho do problema cresce, é interessante verificar se é possível reduzir o tamanho do problema MOSP e facilitar a sua resolução pelos métodos exatos. Algumas propostas de redução são observadas em Yuen e Richardson (1995), Becceneri *et al.* (2004) e Yanasse (2008).

3. Construção do grafo MOSP

O MOSP pode ser representado como um grafo $G(V, E)$, em que, cada vértice indica um tipo de peça do problema MOSP e existe uma aresta ligando dois vértices se as peças correspondentes pertencem a um mesmo padrão. Se houver no grafo arestas paralelas, estas são indicadas por uma única aresta.

Considerando a matriz **A** seguinte, em que as linhas indicam os padrões e as colunas as peças. O padrão 1 contém peças do tipo 2, 4 e 5, o padrão 2 contém peças do tipo 1, 2 e 4, e assim por diante. A Figura 1 mostra o grafo MOSP para os padrões representados na matriz **A**. Note que, cada padrão do problema corresponde a um clique no grafo, isto é, um sub-grafo completo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No grafo MOSP o objetivo é minimizar a quantidade de vértices simultaneamente abertos durante o processo de percorrimento das arestas. No caso, a pilha correspondente a uma determinada peça (vértice) é considerada fechada quando todas as arestas incidentes a este vértice forem percorridas. A solução do grafo MOSP corresponde a uma sequência de fechamento dos vértices, em outras palavras, uma sequência de processamento das peças. A sequência de corte dos padrões é calculada percorrendo a sequência de peças fechadas, colocando todos os padrões ainda não processados que contém a peça sendo fechada na sequência.

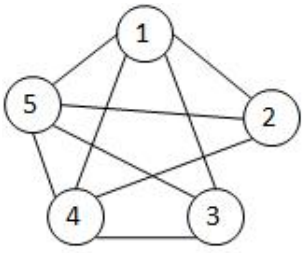

Figura 1: Grafo MOSP do problema indicado na matriz **A**.

A formulação matemática de Yanasse e Pinto (2003) é baseada nesta idéia de percorrimento de arestas do grafo MOSP.

4. Formulação do MOSP

O modelo MOSP apresentado por Yanasse e Pinto (2003) determina a ordem em que

as pilhas das peças são fechadas. Este enfoque difere de alguns trabalhos da literatura que procuram encontrar diretamente a ordem em que os padrões devem ser processados.

Para explicar este modelo é seguida a descrição feita em Pinto (2004).

Considere que a cada estágio um tipo de peça é completado, ou seja, todos os padrões que contém esta peça serão processados. Desta forma, o número de pilhas completadas cresce em uma unidade a cada estágio.

O modelo considera que a partir do estágio em que a pilha é aberta, ela permanece como pilha (aberta ou fechada) até o processamento final de todos os padrões. O modelo faz então a contabilidade das pilhas existentes, abertas e fechadas, a cada estágio.

Um parâmetro utilizado no modelo é a matriz binária $\mathbf{S}$ que indica quais pilhas são formadas ao completar cada peça, ou seja, $\mathbf{S}_{ij} = 1$ se ao completar a peça i são processados padrões que contém também a peça j.

Dados do problema:

M: número de tipos de peças do problema.
K: constante maior ou igual a M.
$\mathbf{S}_{ij}$: vale 1 se ao completar a pilha da peça i a pilha da peça j é aberta, e vale 0 caso contrário.

Variáveis do problema:

$\mathbf{X}_{ij}$: vale 1 se a peça i é completada no estágio j, e vale 0 caso contrário.
$\mathbf{W}_{ij}$: vale 1 se a pilha referente a peça i foi aberta antes ou no estágio j, e vale 0 caso contrário.
C: máximo de pilhas abertas nos estágios j, $j = 1, ..., M$.

Formulação MOSP:

$$\textit{Minimizar } C \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{W}_{ij} \leq C + j - 1 \qquad j = 1, ..., M \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{t} \mathbf{X}_{ij}\mathbf{S}_{ip} \leq K\mathbf{W}_{pt} \quad t = 1, ..., M \text{ e } p = 1, ..., M \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \mathbf{X}_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., M \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{X}_{ij} = 1 \qquad j = 1, ..., M \tag{5}$$

$$\mathbf{X}_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..., M \text{ e } j = 1, ..., M \tag{6}$$

$$\mathbf{W}_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..., M \text{ e } j = 1, ..., M. \tag{7}$$

O objetivo do modelo é minimizar o número máximo de pilhas abertas C. As restrições (2) garantem que o número total de pilhas (abertas ou fechadas) contabilizadas no estágio j é menor ou igual a soma do número máximo de pilhas abertas C e do número de pilhas já completadas $(j-1)$. As restrições (3) indicam quais pilhas p são abertas para completar a peça i de cada estágio t. As restrições (4) e (5) garantem que todas as peças são completadas, uma em cada estágio. Por fim, as restrições (6) e (7) definem que as variáveis de decisão são binárias. O número de restrições e de variáveis neste modelo é $(3M + M^2)$ e $(2M^2 + 1)$, respectivamente.

Aplicando o modelo (1)-(7) no problema dado anteriormente pela matriz $\mathbf{A}$. Primeiro, é calculada a matriz $\mathbf{S}$ seguinte, em que as linhas representam as peças que precisam ser completadas e as colunas as pilhas que precisam ser abertas para completar cada uma destas peças. Conforme a matriz, para completar a pilha da peça 1 são abertas as pilhas de todas

as demais peças e para completar a pilha da peça 2 são abertas as pilhas referentes as peças 1, 2, 4 e 5, e assim por diante.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ao resolver o problema da matriz **A** aplicando o modelo MOSP é obtida uma solução ótima dada pelas matrizes **X** e **W** seguintes. A matriz **X** indica o estágio (coluna) em que a pilha de cada peça (linhas) é completada, por exemplo, no estágio 1 é completada a pilha referente a peça 2, no estágio 2 a pilha da peça 4, no estágio 3 a pilha da peça 5 e assim por diante.

A matriz **W** indica a partir de qual estágio (colunas) a pilha de cada peça (linhas) é aberta. Como no estágio 1 é completada a pilha referente a peça 2, sabe-se pela matriz **S** que as pilhas referentes as peças 1, 2, 4 e 5 são então abertas. Portanto $\mathbf{W}_{1,1} = \mathbf{W}_{2,1} = \mathbf{W}_{4,1} = \mathbf{W}_{5,1} = 1$ e, além disso, permanecerão como pilhas (abertas ou fechadas) até o último período (pelas restrições (3)).

A solução ótima do modelo é a sequência de itens $\{2, 4, 5, 1, 3\}$ da matriz **X** e a partir desta, é obtida a sequência de padrões $\{1, 2, 3, 4\}$ que gera no máximo 4 pilhas abertas em cada estágio.

5. Variações do modelo MOSP

Nesta seção introduzimos uma série de variações no modelo MOSP original. Estas variações são descritas e, na seção seguinte testadas computacionalmente.

5.1. Variação 1

Esta primeira variação do modelo (1)-(7) consiste em acrescentar uma restrição na qual, se $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}_{p,j}$ para todo $j = 1, ..., M$ e $i,p = 1, ...M$ $(i \neq p)$, então a peça i é sequenciada imediatamente antes da peça p, ou seja, para completar a pilha da peça i ou da peça p são abertas as mesmas pilhas, incluindo elas próprias. Assim,

$$\text{se } \mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}_{p,j} \text{ então } \mathbf{X}_{i,j} = \mathbf{X}_{p,j+1}, \quad (i \neq p) \text{ e } j = 1, ...M - 1. \tag{8}$$

Considere que $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}_{p,j} = \mathbf{S}_{k,j}$ para $j = 1, ...M$ e $i \neq p \neq k$. Neste caso, é impossível completar a pilha do item i imediatamente antes da pilha do item p e, também, completar a pilha do item i imediatamente antes da pilha do item k. Uma possível sequência correta seria completar a pilha do item i imediatamente antes de completar a pilha do item de p e completar a pilha do item p imediatamente antes de completar a pilha do item k.

Pela matriz **S** do exemplo apresentada anteriormente é possível identificar por exemplo que $\mathbf{S}_{1,j} = \mathbf{S}_{4,j} = \mathbf{S}_{5,j}$, $j = 1, ...M$. Assim, as peças 1, 4 e 5 podem ser sequenciadas uma imediatamente depois da outra mantendo o mesmo número de pilhas abertas.

Para cada par (i,p) satisfazendo $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}_{p,j}$, acrescentam-se $(M-1)$ restrições no modelo (1)-(7).

A restrição (8) foi inicialmente analisada em Pinto (2004) em que foram resolvidos problemas com no máximo 10 padrões e 10 peças. Ao comparar o tempo computacional dos modelos original e original com a nova restrição, Pinto (2004) verificou que não houve diferença significativa nos tempos, exceto para duas das vinte classes testadas.

O modelo com estas restrições (8) é referenciado no texto como MOSP-1.

5.2. Variação 2

Esta variação consiste em acrescentar a restrição (9) ao modelo MOSP-1, o modelo resultante será chamado por MOSP-2. A restrição

$$\mathbf{W}_{i,j-1} \leq \mathbf{W}_{i,j} \quad j = 2, ..., M \text{ e } i = 1, ..., M \tag{9}$$

indica que a partir do momento que uma pilha i é aberta esta pilha permanece até que a última pilha seja completada. Está restrição já é implicitamente imposta nos modelos MOSP e MOSP-1, mas com a inclusão de (9) espera-se melhorar a relaxação linear do modelo e consequentemente, a convergência do *branch and cut* utilizado. São acrescentadas $M(M-1)$ restrições ao modelo MOSP-1.

A restrição (9) também foi inicialmente analisada em Pinto (2004). Conforme seus testes computacionais em problemas com no máximo 10 padrões e 10 peças, o acréscimo das restrições (9) no modelo MOSP-1 não alterou significativamente o tempo computacional. Porém, em classes com 10 peças e 20 padrões, o tempo computacional reduziu na maioria das classes.

5.3. Variação 3

Este modelo MOSP-3 difere do modelo MOSP-2 apenas por considerar $K = t$ ao invés de $K = M$, na restrição (3), em que, t é o período de processamento e varia de $t = 1, ..., M$.

5.4. Variação 4

A quarta variação analisada consiste em modificar a restrição (2) do modelo MOSP-3:

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{W}_{ij} \leq C + j - 1 \quad j = 1, ..., M$$

para:

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{W}_{ij} \leq C + j - 1 \quad j = 1, ..., M - LI \tag{10}$$

em que, LI é um limitante inferior do problema MOSP.

Esta modificação é motivada por um fato que ocorre quando o problema MOSP é resolvido com um método de enumeração dos itens. Chega-se em um estágio na árvore de enumeração em que, qualquer caminho subsequente não modifica mais o valor já obtido de número máximo de pilhas abertas, ou seja, a solução do problema MOSP é encontrada antes de obter uma sequência completa dos itens.

Neste sentido, a idéia é retirar do modelo estas restrições que impõem condições que não influenciam na solução ótima do problema.

Neste modelo MOSP-4 estão incluídas todas as variações propostas.

5.5. Variação 5 - MOSP NOVO

Esta Seção apresenta uma nova formulação para o problema MOSP, baseada nas variações apresentadas nas Seções anteriores. Este modelo é referenciado no texto como MOSP NOVO.

As variáveis e parâmetros utilizados na formulação já foram definidos anteriormente.

Formulação MOSP NOVO:

$$\textit{Minimizar} \quad C \tag{11}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{W}_{ij} \leq C + j - 1 \quad j = 1, ..., M\text{-}LI \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \mathbf{X}_{jt}\mathbf{S}_{jp} \leq \mathbf{W}_{pt} \quad t = 1, ..., M\text{-}LI \text{ e } p = 1, ..., M \tag{13}$$

$$\mathbf{W}_{i,j-1} \leq \mathbf{W}_{i,j} \quad j = 2, ..., M\text{-}LI \text{ e } i = 1, ..., M \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{M} \mathbf{X}_{ij} = 1 \quad i = 1, ..., M \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{M} \mathbf{X}_{ij} = 1 \quad j = 1, ..., M \tag{16}$$

$$\mathbf{X}_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, ..., M \text{ e } j = 1, ..., M \tag{17}$$

$$\mathbf{W}_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, ..., M \text{ e } j = 1, ..., M. \tag{18}$$

O objetivo do modelo é minimizar o número máximo de pilhas abertas C. Neste modelo são consideradas as restrições (13) e (14) ao invés de (2) do modelo MOSP. O limitante inferior LI foi utilizado para limitar o número das restrições (12), (13) e (14).

6. Experimentos computacionais

A implementação foi desenvolvida em linguagem C e compilada no DEV C++ utilizando a biblioteca *Callable* do CPLEX 10.0. Os experimentos foram realizados em um computador Pentium 4 com 2G de memória RAM.

Uma grande quantidade de problemas teste para o MOSP pode ser encontrada em Smith e Gent (2005), dentre elas, as classes de Harvey, utilizadas neste trabalho. Todas as classes são compostas de 10 problemas. As classes utilizadas, denominadas como classes "wboM_N_Q", são listadas na Tabela 1, em que, M é o número de tipos de peças, N é a quantidade de padrões e Q o número máximo de peças em cada padrão. Os problemas foram resolvidos aplicando os modelos MOSP, MOSP-1, MOSP-2, MOSP-3, MOSP-4 e MOSP NOVO. Estes modelos são resolvidos pelo CPLEX com tempo máximo de solução para cada problema limitado em 30 minutos.

Tabela 1: Classes wboM_N_Q utilizadas nos experimentos.

1	wbo10_10_2	20	wbo15_30_3	39	wbo20_20_9	58	wbo30_15_11
2	wbo10_10_3	21	wbo15_30_4	40	wbo20_20_10	59	wbo30_15_12
3	wbo10_10_4	22	wbo15_30_5	41	wbo30_10_6	60	wbo30_15_13
4	wbo10_10_5	23	wbo15_30_6	42	wbo30_10_7	61	wbo30_15_14
5	wbo10_20_2	24	wbo15_30_7	43	wbo30_10_8	62	wbo30_15_15
6	wbo10_20_3	25	wbo20_10_4	44	wbo30_10_9	63	wbo30_30_2
7	wbo10_20_4	26	wbo20_10_5	45	wbo30_10_10	64	wbo30_30_3
8	wbo10_20_5	27	wbo20_10_6	46	wbo30_10_11	65	wbo30_30_4
9	wbo10_30_2	28	wbo20_10_7	47	wbo30_10_12	66	wbo30_30_5
10	wbo10_30_3	29	wbo20_10_8	48	wbo30_10_13	67	wbo30_30_6
11	wbo10_30_4	30	wbo20_10_9	49	wbo30_10_14	68	wbo30_30_7
12	wbo10_30_5	31	wbo20_10_10	50	wbo30_10_15	69	wbo30_30_8
13	wbo15_15_2	32	wbo20_20_2	51	wbo30_15_4	70	wbo30_30_9
14	wbo15_15_3	33	wbo20_20_3	52	wbo30_15_5	71	wbo30_30_10
15	wbo15_15_4	34	wbo20_20_4	53	wbo30_15_6	72	wbo30_30_11
16	wbo15_15_5	35	wbo20_20_5	54	wbo30_15_7	73	wbo30_30_12
17	wbo15_15_6	36	wbo20_20_6	55	wbo30_15_8	74	wbo30_30_13
18	wbo15_15_7	37	wbo20_20_7	56	wbo30_15_9	75	wbo30_30_14
19	wbo15_30_2	38	wbo20_20_8	57	wbo30_15_10	76	wbo30_30_15

Para comparação do desempenho dos modelos analisados, é utilizado o gráfico de perfis

de desempenho conforme proposto por Dolan e Moré (2002). Os modelos são comparados em relação ao tempo computacional e considerado "tempo falho"aquele em que não foi obtida uma solução ótima para o problema. Considerando S o conjunto dos métodos que precisam ser comparados, P o conjunto dos problemas testados e t_{ps} o tempo de resolução do problema $p \in P$ pelo método $s \in S$. Dolan e Moré definem a razão de desempenho como:

$$r_{ps} = \frac{t_{ps}}{min\{t_{pi}, \forall i \in S\}}.$$

Se o método s falha no problema r, então $r_{ps} = r_{max} = 1 + max\{r_{ji}, \forall j \in P \text{ e } \forall i \in S\}$. O perfil de desempenho do método s é dado por:

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{|P|} \texttt{x} \text{ número de problemas } p \in P \text{ tais que } r_{ps} \leq \tau.$$

Com isso, $\rho_s(\tau)$ indica a porcentagem de problemas em que o método s é no máximo τ vezes menos eficiente que o método mais rápido. Nos gráficos gerados, é utilizada escala logarítmica no eixo τ e assim, o fator τ passa a variar no intervalo $[0, r_{max})$ com $r_{max} = 1 + max\{\log_2(r_{ji}), \forall j \in P \text{ e } \forall i \in S\}$.

Para o cálculo dos perfis de desempenho e a criação dos gráficos, foi utilizada a planilha perfis.xls, versão 1.2, descrita por Munari (2009) e foi obtido o gráfico da Figura 2. Neste gráfico é comparado o tempo computacional, em segundos, utilizado pelo CPLEX para resolver cada um dos 5 modelos para os problemas do experimento.

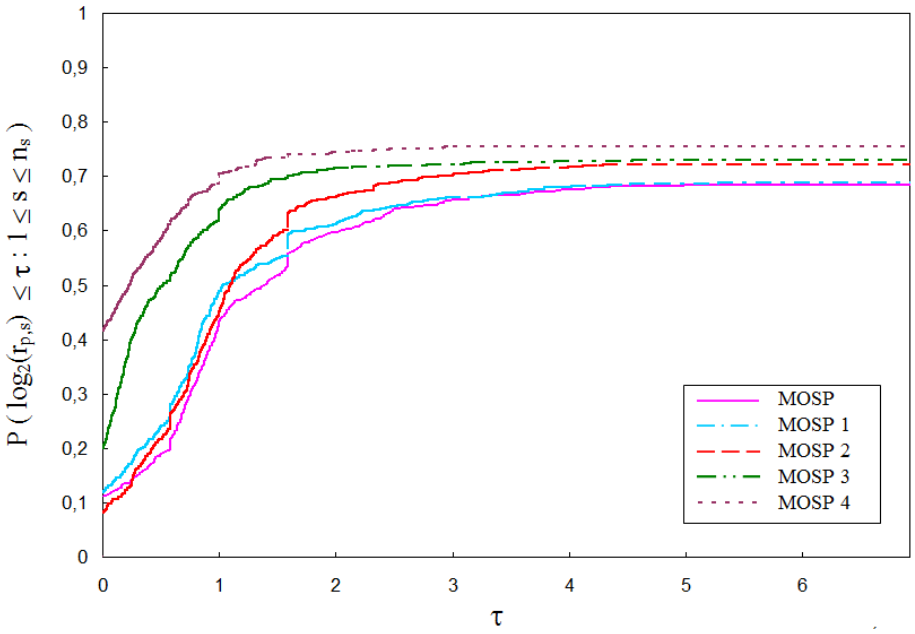

Figura 2: Gráfico de perfis de desempenho comparando os modelos MOSP, MOSP-1, MOSP-2, MOSP-3 e MOSP-4 em relação ao tempo computacional.

Os valores a esquerda do gráfico mostram que o modelo MOSP-4 alcança a solução ótima em mais de 40% dos problemas utilizando o menor tempo computacional se comparado com os demais modelos, seguido do modelo MOSP-3 com quase 20%.

Nenhum dos modelos alcança a margem superior do gráfico, isso indica que nenhum dos modelos resolve todos os problemas na otimalidade. Analisando a margem direita, é verificado que, em relação a quantidade de soluções ótimas obtidas por cada um dos

modelos, o modelo MOSP-4 alcança a otimalidade em quase 80% dos problemas seguido, respectivamente, pelo MOSP-3, MOSP-2, MOSP-1 e MOSP.

Esta abordagem mostra que o pefil do modelo MOSP-4 domina os demais e portanto, o desempenho geral deste modelo é melhor.

No sentido de complementar a análise do tempo computacional feita no gráfico da Figura 2, são apresentadas as Tabelas 2 e 3. As classes foram agrupadas conforme o número de padrões e o número de peças e, em seguida, calculada a média dos resultados. Na Tabela 2 é mostrada a porcentagem de problemas que foram resolvidos na otimalidade por cada um dos modelos analisados, respeitando o tempo limite de 30 minutos para a resolução de cada problema. Todos os problemas com o par (M_N) igual a (10_10), (10_20) e (10_30) foram resolvidos na otimalidade. Esta porcentagem diminui conforme aumentam os valores de M e N. A dificuldade na resolução destes problemas também é verificada na Tabela 3, que mostra o aumento de tempo computacional médio em relação ao tamanho do problema.

Tabela 2: Porcentagem de problemas resolvidos na otimalidade para cada grupo (M_N).

Classe(M_N)	**MOSP**	**MOSP-1**	**MOSP-2**	**MOSP-3**	**MOSP-4**
Média_10_10	100%	100%	100%	100%	100%
Média_10_20	100%	100%	100%	100%	100%
Média_10_30	100%	100%	100%	100%	100%
Média_15_15	90%	97%	93%	98%	98%
Média_15_30	90%	92%	98%	98%	100%
Média_20_10	69%	69%	89%	89%	90%
Média_20_20	74%	74%	78%	79%	79%
Média_30_10	38%	40%	37%	38%	42%
Média_30_15	48%	48%	54%	52%	81%
Média_30_30	59%	56%	59%	61%	66%

Tabela 3: Tempo computacional médio, em segundos, utilizado pelo CPLEX para resolver os problemas de cada grupo (M_N).

Classe(M_N)	**MOSP**	**MOSP-1**	**MOSP-2**	**MOSP-3**	**MOSP-4**
Média_10_10	0,26	0,30	0,26	0,19	0,20
Média_10_20	0,15	0,15	0,17	0,13	0,14
Média_10_30	0,11	0,12	0,12	0,09	0,09
Média_15_15	327,28	193,34	199,53	95,30	92,08
Média_15_30	241,38	237,32	148,42	109,27	107,94
Média_20_10	676,83	680,56	439,94	384,19	318,85
Média_20_20	576,28	564,60	491,46	462,78	452,45
Média_30_10	1368,15	1309,03	1353,20	1316,08	1223,62
Média_30_15	1121,83	1103,26	1074,92	1057,43	1007,22

A classe wbo30_30_7 é a única que apresentou problemas para os quais não foi obtida solução factível no tempo limite de 30 minutos. O modelo MOSP não encontrou solução factível para 1 destes problemas, enquanto que, o modelo MOSP-1 não encontrou solução factível para 2 destes problemas. Os modelos MOSP-2, MOSP-3 e MOSP-4 encontraram ao menos uma solução factível para todos os problemas.

Ao analisar todas as classes de problemas, é constatada a influência do parâmetro Q no tempo computacional necessário para resolver os modelos. As Tabelas 4 e 5 exemplificam

este comportamento para as classes com $M = 20$ e $N = 10$. A Tabela 4 mostra o aumento de problemas resolvidos na otimalidade conforme aumenta o valor de Q, ou seja, o número de peças em cada padrão. A Tabela 5 mostra como diminui o tempo computacional de resolução dos problemas conforme aumenta o número de peças por padrão. Este comportamento vem do fato de que, quando Q tem valor alto, a solução MOSP (número de pilhas) do problema tende ser maior e o espaço de busca consiste de sequências de peças com número de pilhas semelhante, assim, utilizando limitantes no procedimento de resolução, é eliminado um grande número de sequências do espaço de busca e, portanto, acelera a resolução do problema.

Tabela 4: Influência do parâmetro Q na resolução dos problemas com $M = 20$ e $N = 10$, em relação a quantidade de problemas resolvidos na otimalidade.

Classe(M_N_Q)	**MOSP**	**MOSP-1**	**MOSP-2**	**MOSP-3**	**MOSP-4**
wbo20_10_4	0%	0%	40%	40%	40%
wbo20_10_5	10%	10%	80%	80%	90%
wbo20_10_6	70%	70%	100%	100%	100%
wbo20_10_7	100%	100%	100%	100%	100%
wbo20_10_8	100%	100%	100%	100%	100%
wbo20_10_9	100%	100%	100%	100%	100%
wbo20_10_10	100%	100%	100%	100%	100%

Tabela 5: Influência do parâmetro Q na resolução dos problemas com $M = 20$ e $N = 10$, em relação ao tempo computacional, em segundos.

Classe(M_N_Q)	**MOSP**	**MOSP-1**	**MOSP-2**	**MOSP-3**	**MOSP-4**
wbo20_10_4	1800,06	1800,03	1626,99	1459,72	1422,755
wbo20_10_5	1778,65	1763,53	927,70	858,73	537,494
wbo20_10_6	904,46	908,15	399,51	284,69	202,221
wbo20_10_7	131,20	111,04	49,17	43,15	41,044
wbo20_10_8	108,76	170,80	66,30	35,03	19,731
wbo20_10_9	11,74	8,24	7,71	6,29	6,578
wbo20_10_10	2,92	2,10	2,19	1,73	2,13

Para analisar os resultados obtidos com o MOSP NOVO, é utilizado novamennte o gráfico de perfis de desempenho definido no início desta Seção. Neste gráfico são comparados os modelos, MOSP, MOSP NOVO e MOSP-4, este último devido ao melhor desempenho dentre as variações já analisadas. A Figura 3 mostra o gráfico com as curvas de desempenho dos modelos comparados. Os valores da margem esquerda do gráfico mostram que o MODELO NOVO encontra a solução ótima de 60% dos problemas testados utilizando o menor tempo computacional. Este valor é significativamente grande se comparado com o modelo MOSP-4 com menos de 20% dos problemas e o MOSP com menos de 10%. Porém, em relação ao número de problemas em que foi encontrada uma solução ótima (ver margem direita do gráfico), o modelo MOSP NOVO teve desempenho inferior aos modelos MOSP-4 e MOSP.

Este perfil de desempenho do modelo MOSP NOVO pode ser explicado com base na comparação mais específica dos resultados obtidos. Em relação aos outros modelos, o MOSP NOVO apresenta maior dificuldade em resolver os problemas "mais difíceis", isto é, aqueles com matriz de padrões mais esparsa. Porém nos demais problemas, que representam a maioria dos problemas, o tempo de resolução é melhor em relação aos demais modelos.

Em outras palavras, com relação a quantidade de problemas resolvidos na otimalidade e ao tempo computacional, o MOSP NOVO teve desempenho muito bom para os problemas menores e desempenho péssimo para os problemas maiores.

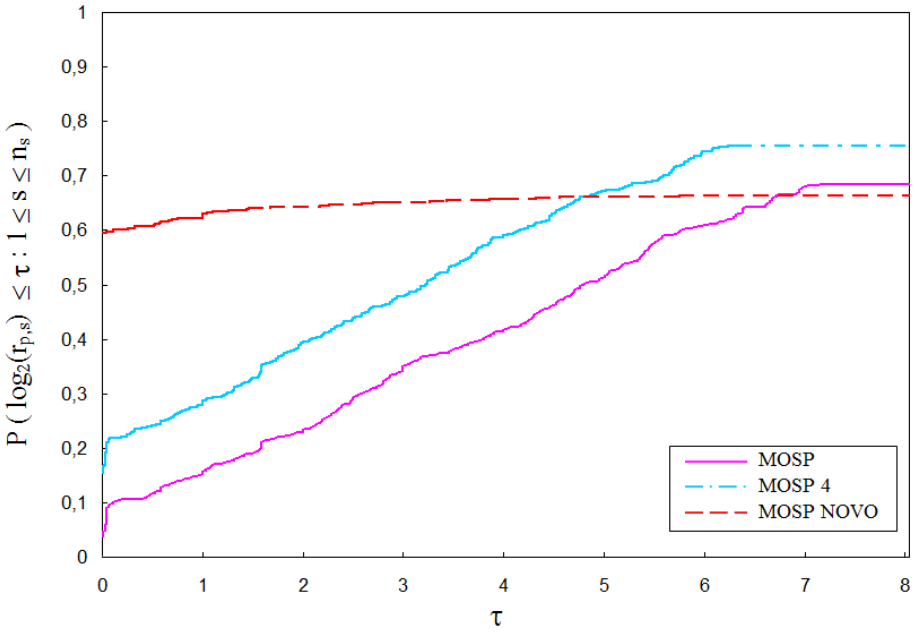

Figura 3: Gráfico de perfis de desempenho comparando os modelos MOSP, MOSP-1, MOSP-2, MOSP-3 e MOSP-4 em relação ao tempo computacional.

7. Considerações finais

Conforme os resultados apresentados na Seção anterior, nota-se que a quantidade de problemas resolvidos na otimalidade diminui bastante conforme aumenta o tamanho do problema. Além disso, quanto mais esparsa a matriz (peças X padrões) do problema MOSP, maior a dificuldade em resolver o problema através destes modelos.

Os resultados obtidos pelo modelo MOSP foram sempre melhorados por algum dos modelos MOSP-1, MOSP-2, MOSP-3 e MOSP-4, atingindo o objetivo inicial do trabalho. O modelo MOSP-4, que consiste na união de todas as variações propostas, obteve os melhores resultados, tanto em relação a otimalidade como em relação ao tempo computacional utilizado. Exceto nos problemas menores, onde o MOSP NOVO se destacou.

Em geral, foi constatado que estes modelos, quando resolvidos pelo CPLEX, fornecem um limitante inferior muito ruim. Com isso, o método encontra dificuldades em provar a otimalidade da solução, ainda que esta tenha sido já encontrada. Neste sentido, uma análise da relaxação lagrangiana do modelo poderá direcionar a pesquisa em busca de resultados melhores.

Este trabalho também mostra que modificações no modelo podem, de fato, trazer melhorias nos tempos de convergência. Esta é outra linha de pesquisa a ser investigada em trabalhos futuros.

8. Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP por finaciar a realização deste trabalho.

9. Referências bibliográficas

Becceneri, J.C., Yanasse, H.H., Soma, N.Y. (2004), A method for solving the minimization of the maximum number of open stacks problem within a cutting process. *Computers &*

Operations Research v.31, p.2315-2332.

Dolan, E. D., Moré, J. J. (2004), Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming* v.91, p. 201-213.

Faggioli, E., Bentivoglio, C.A. (1998), Heuristic and exact methods for the cutting sequencing problem. *European Journal of Operational Research* v.110, p.564-575.

Garcia de la Banda, M., Stuckey, P.J. (2005), Dymamic programming to minimize the maximum number of open stacks. *In IJCAI05.* Constraint Modelling Challenge p.24-31.

Laporte, G.,González, J.J.S., Semet, F. (2003), Exact algorithms for the job sequencing and tool switching problem. *IIE Transaction* v.35, p.1-9.

Linhares, A. (2001), Industrial pattern sequencing problems: some complexity results and new local search models. Tese (Doutorado em Computação Aplicada)-INPE, São José dos Campos.

Linhares, A., Yanasse, H.H. (2002), Connections between cutting-pattern sequencing, VLSI design, and flexible machines. *Computers and Opertions Research* v.29(12), p.1759-1772.

Munari, P. A. (2009), Comparação de softwares científicos utilizando perfis de desempenho: automatização dos cálculos pela planilha perfis.xls. *Relatório técnico 344, ICMC/USP*, disponível em: http://www.icmc.usp.br/˜biblio/relatorios_tecnicos.php.

Pileggi G. C. F., Morabito R., Arenales M. N. (2005), Abordagens para otimização integrada dos problemas de geração e sequenciamento de padrões de corte: caso unidimensional. *Pesquisa Operacional* v.25, p.417-447.

Pinto, M.J. (2004), Algumas contibuições à resolução do problema de corte integrado ao problema de sequenciamento dos padrões. Tese (Doutorado em Computação Aplicada)-INPE, São José dos Campos.

Smith, B.M., Gent, I.P. (2005), Constraint modelling challenge. *In The Fifth Workshop on Modelling and Solving Problems with Constraints, IJCAI 2005, Edinburg.* Acesso http://www.cs.st-andrews.ac.uk/ ipg/challenge/ModelChallenge05.pdf.

Tang, C.S., Denardo, E.V. (1988), Models arising from a flexible manufacturing machine, Part I: minimization of the number of tool switches. *Operations Research* v.36, p.767-777.

Yanasse, H.H.(1997), On a pattern sequencing problem to minimize the maximum number of open stacks. *European Journal of Operational Research* v.100, p. 454-463.

Yanasse, H.H. (2008), Pre-processing operations for the minimization of open stacks problem. *XL-SBPO Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, João Pessoa PB.*

Yanasse, H.H., Lamosa, M.J.P. (2007), An integrated cutting stock and sequencing problem. *European Journal of Operational Research*, 183(3): 1353-1370. ISSN: 0377-2217.

Yanasse, H.H., Pinto, M.J. (2003), Uma nova formulação para o problema de seqüenciamento de padrões em ambientes de corte. *XXXV SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Natal, RN*, p.1516-1524, ISSN 1518-731, publicado em CD.

Yuen, B.J., Richardson, K.V. (1995), Establishing the optimality of sequencing heuristics for cutting stock problems. *European Journal of Operational Research* v.84, p.590-598.