

UM ESTUDO SOBRE DESIGUALDADES VÁLIDAS PARA O PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DE RÓTULOS LIVRES

Glaydston Mattos Ribeiro

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
Centro Universitário Norte do Espírito Santo, São Mateus/Brasil
glaydstonribeiro@ceunes.ufes.br

Miguel Frago Constantino

Universidade de Lisboa - UL
Centro de Investigação Operacional, Lisboa/Portugal
mfconstantino@fc.ul.pt

Luiz Antonio Nogueira Lorena

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, São José dos Campos/Brasil
lorena@lac.inpe.br

RESUMO

O presente trabalho considera uma variante do problema da rotulação cartográfica de pontos no qual todos os rótulos devem ser posicionados e o número de rótulos em conflito (sobrepostos) deve ser minimizado. Nesse sentido, considera-se aqui uma Formulação de Programação Inteira recentemente proposta que se constitui como uma extensão da formulação padrão de *Node Packing*. Desigualdades válidas para o conjunto de soluções factíveis são obtidas e utilizadas para fortalecer a formulação. Resultados computacionais com um conjunto de instâncias testes da literatura são apresentados.

PALAVRAS CHAVE. Rotulação. Programação Inteira. Desigualdades Válidas. Otimização Combinatória.

ABSTRACT

We address a variant of the point-feature cartographic label placement problem, in which all labels must be placed and the number of labels in conflict (overlapped) should be minimized. We consider an Integer Programming Formulation recently proposed which is an extension of the standard IP node packing formulation to this problem. Valid inequalities for the set of feasible solutions are obtained and used to strengthen the model. We present computational results with a set of benchmark instances from the literature.

KEYWORDS. Label Placement, Integer Programming, Valid Inequalities. Combinatorial Optimization.

1. Introdução

Recentemente, problemas de rotulação têm atraído a atenção de vários pesquisadores devido à sua vasta aplicação em cartografia, sistemas de informações geográficas e análise de imagens médicas. Wolff e Strijk (1996) mantêm uma biblioteca *web* denominada “*Map Labeling Bibliography Web Site*” na qual pode-se obter várias informações sobre o tema como artigos e aplicações.

Um problema de rotulação pode ser assim definido: dado um conjunto de objetos gráficos, deve-se definir posições para seus rótulos tal que cada objeto seja identificado uma única vez. Entretanto, para rotular cada objeto, pode-se ter uma lista explícita de posições candidatas predefinidas (problema discreto) ou ainda pode-se tangenciar o rótulo ao redor do objeto até encontrar a melhor posição possível (problema contínuo). Em ambos os casos, os rótulos devem ser posicionados próximos dos objetos evitando sobreposições.

Basicamente, os objetos gráficos podem ser pontos, linhas ou polígonos. Por exemplo, em um mapa, as cidades são representadas por pontos, as rodovias por linhas e os estados por polígonos. Entretanto, o problema mais estudado na área de rotulação é aquele que envolve pontos conhecido na literatura como o Problema da Rotulação Cartográfica de Pontos (PRCP) (Klau e Mutzel, 2003).

A Figura 1 mostra um mapa de São Paulo com os municípios e as rodovias. Os rótulos indicam os nomes dos municípios e aqueles em cinza indicam que os seus rótulos apresentam sobreposições.

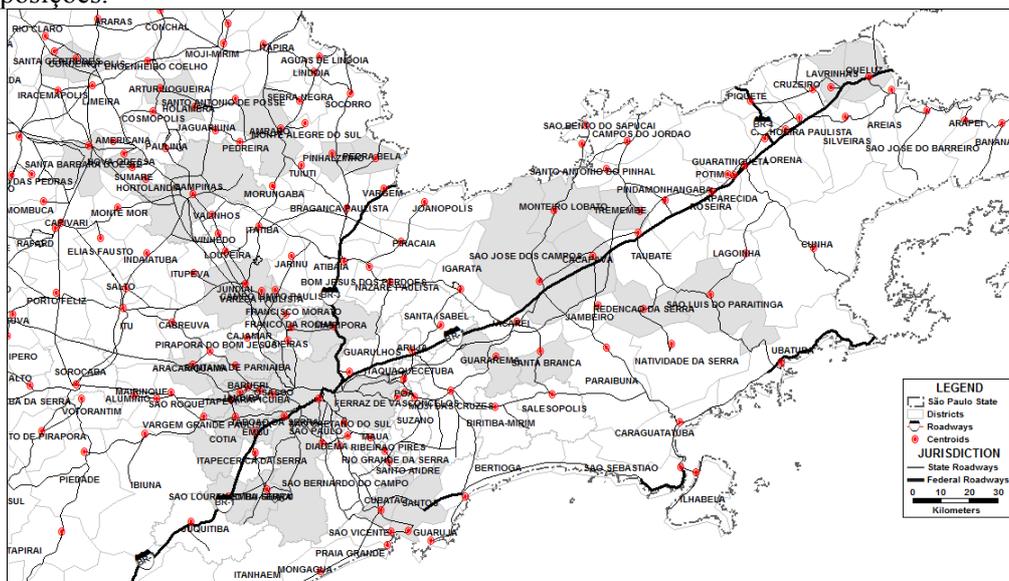


Figura 1. Mapa dos municípios de São Paulo: sobreposições de rótulos são indicadas pelos municípios em cinza.

No PRCP sobreposições de rótulos podem ser aceitas ou não. Quando não se aceita a sobreposição, pode-se reduzir o tamanho da fonte dos rótulos para que todos sejam posicionados sem sobreposição, ou pode-se manter fixo o tamanho dos rótulos e procurar rotular o maior número possível de pontos sem que ocorra sobreposição. O primeiro tipo é conhecido na literatura como o Problema da Maximização do Tamanho do Rótulo (PMTR), já o segundo como o Problema da Maximização do Número de Rótulos (PMNR). Considerando o PMTR, o seu objetivo parece óbvio, ou seja, deve-se encontrar o maior fator de escala para o tamanho do rótulo tal que uma rotulação sem conflitos (sobreposições) seja obtida (Strijk et al. 2000; Klau e Mutzel 2003). Por outro lado, no PMNR, alguns pontos podem não receber seus rótulos. Esse problema é normalmente representado por um grafo de conflitos onde cada vértice representa uma posição candidata e cada aresta um potencial conflito entre duas posições candidatas. Agora considerando o seu objetivo, esse problema pode ser visto como o tradicional Máximo Conjunto Independente de Vértices (MCIV) (Strijk et al. 2000; Zoraster 1990).

Usando a terminologia da teoria de grafos, seja $G=(V,E)$ um grafo simples. Para qualquer conjunto $S \subseteq V$, seja $N(S)$ a vizinhança de S definida como $\{w \in V \mid \text{para algum } u \in S, (u, w) \in E\}$. Então S é independente se $S \cap N(S) = \emptyset$, isto é, nenhum par de vértices em S é adjacente. Um conjunto independente S é denominado conjunto independente maximal se S não é contida em nenhum outro conjunto independente. Equivalentemente, $S \subseteq V$ é um conjunto independente maximal se $S \cap N(S) = \emptyset$ e $S \cup N(S) = V$ (Čenek e Stewart 2003; Karp e Wigderson 1985).

Quando as sobreposições são aceitas, todos os pontos devem ser rotulados e o fator de escala não é permitido. Nesse contexto, dois problemas são identificados, o Problema do Número Máximo de Rótulos Livres de Conflitos (PNMRLC) e o Problema da Minimização do Número de Conflitos (PMNC). O PNMRLC (Ribeiro e Lorena, 2008b) é conhecido também como o Problema da Minimização de Rótulos Sobrepostos (Klau, 2002) e como o Problema do Número de Rótulos Obstruídos por pelo Menos um Outro Rótulo (Christensen et al., 1995). O PMNC foi recentemente apresentado por Ribeiro e Lorena (2008ab) e consiste em “espalhar” as sobreposições, minimizando conflitos (arestas) no grafo remanescente.

Esse artigo considera o PRCP como um PNMRLC com posições candidatas discretas. Recentemente Mauri (2008) apresentou uma formulação matemática para o PNMRLC bem como uma decomposição Lagrangiana. Os resultados obtidos pela decomposição foram melhores do que os do CPLEX 10 (Ilog, 2006) com a formulação matemática apresentada pelo autor. A formulação de Mauri (2008) é na verdade uma extensão da formulação padrão de *Node Packing*. Então, considerando a literatura disponível sobre *Node Packing*, este trabalho apresenta algumas desigualdades válidas (cortes) para o conjunto de soluções factíveis que são utilizadas para fortalecer a formulação original de Mauri (2008). Resultados computacionais com instâncias testes presentes na literatura mostram a eficiência de tais cortes.

O restante do artigo está assim organizado. A Seção 2 apresenta uma breve revisão do PRCP e na Seção 3 é apresentada a formulação matemática proposta por Mauri (2008). Na Seção 4 são apresentadas as restrições de corte encontradas e na Seção 5 os testes computacionais executados. Por último, a Seção 6 apresenta as conclusões e indicações de possíveis trabalhos futuros.

2. Breve Revisão Bibliográfica

Devido à grande dificuldade embutida nos PRCP, métodos exatos normalmente estão limitados a resolver problemas de pequeno porte (Strijk et al. 2000; Zoraster 1990). Portanto, heurísticas e metaheurísticas vem sendo frequentemente utilizadas para resolver instâncias do PRCP. Muitos desses métodos aproximativos têm suas estratégias de solução baseadas em grafos de conflito.

Seja m o número total de pontos a serem rotulados e seja P_i um conjunto de posições discretas para o rótulo do ponto i (posições candidatas). Seja $V = \{v_{1,p_1^1}, v_{1,p_2^1}, \dots, v_{1,p_{|P_1|}^1}, \dots, v_{m,p_1^m}, v_{m,p_2^m}, \dots, v_{m,p_{|P_m|}^m}\}$ o conjunto de vértices (todas posições candidatas) e $E = \{(v_{i,j}, v_{t,u}) : v_{i,j} \in v_{t,u} \in V, i \neq t\}$ um conjunto de potencial conflitos (sobreposições) entre posições candidatas. Assim, um grafo de conflitos pode ser definido como $G=(V,E)$.

Considerando posições candidatas discretas, Christensen et al. (1995) propuseram uma padronização cartográfica (veja Figura 2) na qual cada posição tem um peso associado mostrando a preferência cartográfica. Na Figura 2, a Posição 1 é a de maior interesse, ou seja, deve-se posicionar o rótulo do ponto preferencialmente nessa posição.

Uma rotulação normalmente é avaliada pela proporção de rótulos livres de conflitos (Christensen et al. 1995; Strijk et al. 2000; Yamamoto et al. 2002), assim quanto maior for o número de rótulos livres, melhor é a rotulação. Como neste trabalho considera-se o PRCP como um Problema do Número Máximo de Rótulos Livres de Conflitos (PNMRLC), optou-se por citar trabalhos nesta linha. Entretanto, uma boa revisão sobre as demais abordagens pode ser obtida em Mauri (2008), Ribeiro e Lorena (2008ab) e em Wolff e Strijk (1996).

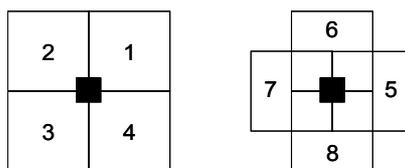


Figura 2. Padronização cartográfica de Christensen et al. (1995).

No campo das heurísticas e metaheurísticas, o PRCP, modelado como um PNMRLC, possui trabalhos interessantes. Nessa linha, Christensen et al. (1995) apresentaram, além de uma boa revisão sobre o problema da rotulação, uma busca local que está baseada na forma discreta do gradiente descendente, e um algoritmo de *Simulated Annealing*. Verner et al. (1997) aplicaram um Algoritmo Genético com Máscara tal que se um rótulo estivesse em conflito, a mudança de sua posição candidata era permitida por meio de operadores de cruzamento. Yamamoto et al. (2002) apresentaram uma Busca Tabu eficiente para o problema. Mais tarde, Yamamoto e Lorena (2005) desenvolveram um Algoritmo Genético Construtivo para o problema e o aplicaram em instâncias de grande porte criadas em 2002.

Recentemente, Alvim e Taillard (2009) aplicaram um algoritmo denominado POPMUSIC no PNMRLC. O POPMUSIC (*Partial Optimization Metaheuristic Under Special Intensification Conditions*) foi proposto por Taillard e Voss (2001) e sua idéia básica consiste em localmente otimizar partes de uma solução factível para o problema. As otimizações locais são repetidas até que nenhuma melhora na função objetivo seja encontrada. Para as otimizações locais, Alvim e Taillard (2009) implementaram uma nova versão da Busca Tabu proposta por Yamamoto et al. (2002).

Alvim e Taillard (2009) aplicaram o POPMUSIC a instâncias de Yamamoto et al. (2002) e a instâncias reais obtidas da rede de rodovias da Suíça. Os resultados obtidos pelos autores foram melhores que os encontrados por Yamamoto e Lorena (2005).

Também recentemente, Mauri (2008) apresentou uma formulação matemática e uma decomposição Lagrangiana para o PNMRLC. A decomposição, que é baseada na divisão do grafo de conflitos em *clusters* proposta por Ribeiro e Lorena (2008ab), apresentou resultados melhores que os de Alvim e Taillard (2009) provando a solução ótima de várias instâncias propostas por Yamamoto et al. (2002). Até então, não se conhecia uma formulação para o PNMRLC.

Por outro lado, esforços foram realizados para tentar reduzir o grafo de conflitos gerado por PNMRLC. Wagner et al. (2001) apresentou um método para reduzir o grafo de conflitos que é baseado em três regras que não alteram o conjunto de soluções ótimas. São elas:

- Regra 1: Se um ponto p tem uma posição candidata p_i sem qualquer conflito, declare p_i parte da solução e elimine todas as outras posições candidatas de p ;
- Regra 2: Se um ponto p tem uma posição candidata p_i que está em conflito somente com uma posição candidata q_k , e q tem uma posição candidata q_j ($j \neq k$) que está em conflito somente com uma posição candidata p_l ($l \neq i$), então adicione p_i e q_j na solução e elimine todas as outras posições candidatas dos pontos p e q ;
- Regra 3: Se p tem somente uma posição candidata p_i , e as posições candidatas em conflito com p_i formam uma clique, então declare p_i parte da solução e elimine todas as posições candidatas que estão sobre p_i . Esta regra só é aplicada se o PRCP apresentar pontos com uma única posição candidata.

Essas regras são aplicadas exaustivamente. Após eliminar uma posição candidata p_i , deve-se verificar recursivamente se as regras podem ser aplicadas na vizinhança de p_i . Essa técnica de redução foi utilizada nos experimentos computacionais apresentados na Seção 5.

3. Modelo Matemático Proposto por Mauri (2008)

O modelo de programação linear inteira 0-1 apresentado por Mauri (2008) é parecido com os propostos por Zoraster (1990) e Ribeiro e Lorena (2008a) porém permite rotular todos pontos buscando o máximo possível de rótulos livres de conflitos.

Sendo assim, seja $x_{i,j}$ uma variável binária que representa a posição candidata j do ponto i para todo $i = 1, \dots, m$ e $j \in P_i$. Se $x_{i,j} = 1$ o rótulo do ponto i deve ser colocado na posição candidata j , e $x_{i,j} = 0$, caso contrário. Considerando a padronização cartográfica, cada posição i tem associada um peso (ou preferência cartográfica) representado por $w_{i,j}$. Agora seja $S_{i,j}$ um conjunto de pares $(t,u) : t \neq i$ que indicam posições candidatas $x_{t,u}$ com potencial conflito com $x_{i,j}$. Assim, o modelo matemático proposto por Mauri (2008) pode ser apresentado:

$$v(\text{PNMRLC}) = \text{Max} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j \in P_i} w_{i,j} x_{i,j} - \sum_{i=1}^m z_i \right] \quad (1)$$

(PNMRLC) Sujeito a:

$$\sum_{j \in P_i} x_{i,j} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$x_{i,j} + x_{t,u} - z_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j \in P_i; (t,u) \in S_{i,j} \quad (3)$$

$$x_{i,j}, x_{t,u}, z_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j \in P_i; (t,u) \in S_{i,j} \quad (4)$$

Na função objetivo descrita pela Equação (1) percebe-se o surgimento de uma variável binária z_i para todo $i=1, \dots, m$. Se $z_i = 1$, o rótulo do ponto i está sobreposto por algum outro rótulo, caso contrário, $z_i = 0$. Agora note que se busca, pela função objetivo definida na Equação (1), maximizar uma diferença definida entre o posicionamento dos rótulos (dois primeiros somatórios) e as sobreposições (terceiro somatório).

As restrições definidas em (2) garantem que todo ponto deve ser rotulado. As restrições definidas em (3) garantem corretos valores para as variáveis z quando sobreposições são inevitáveis. Por último, as restrições definidas em (4) garantem que todas as variáveis do modelo são binárias. As restrições definidas em (2) também podem ser vistas como restrições de conflito porém entre posições candidatas do mesmo ponto.

Os pontos com rótulos sobrepostos (variáveis z) penalizam a função objetivo que deve ser maximizada, logo soluções sem conflito são procuradas.

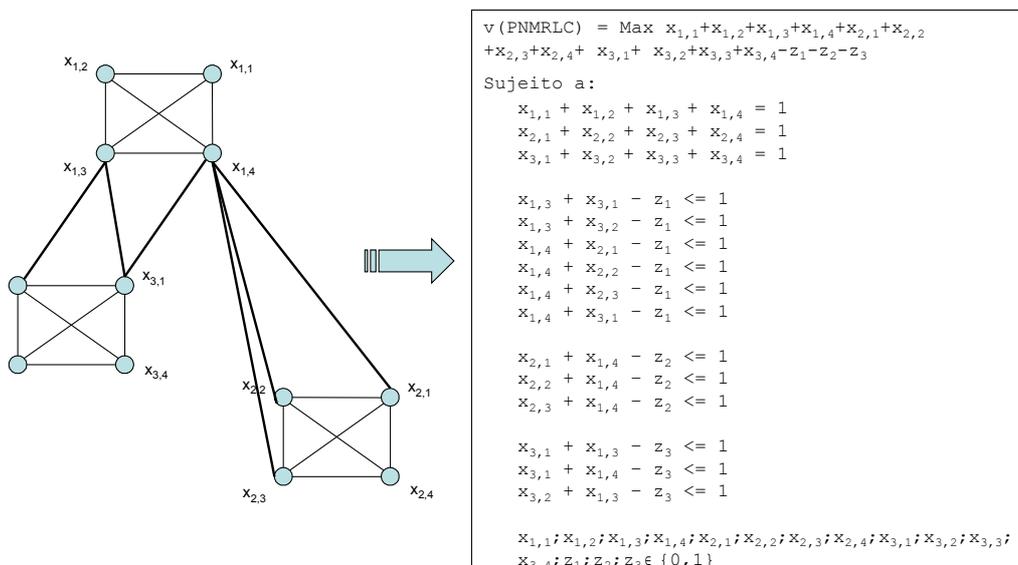


Figura 3: Exemplo de aplicação do modelo matemático de Mauri (2008).

Se na função objetivo definida na Equação (1), a preferência cartográfica for removida, ou seja, $w_{i,j} = 1 : \forall i = 1, \dots, m$ e $\forall j \in P_i$, a soma de todas as variáveis $x_{i,j}$ é igual a m (total de pontos) garantida pelas restrições definidas em (2). E considerando que o número de rótulos

sobrepostos é definido pela soma das variáveis z , essa remoção indica que a função objetivo passa a representar, literalmente, o número máximo de rótulos livres de conflitos.

A Figura 3 apresenta um exemplo do modelo (1)-(4) sem preferência cartográfica. Repare que para cada aresta existente entre posições candidatas de pontos distintos (na figura são as arestas mais espessas), existe uma restrição definida em (3). Assim, se para o exemplo $x_{1,4} = x_{2,1} = x_{3,2} = 1$, o rótulo do Ponto 1 está sobreposto pelo rótulo do Ponto 2 e vice-versa, logo $z_1 = z_2 = 1$ (garantido pelo conjunto de restrições definido em (3)). Isso indica que dois rótulos estão sobrepostos ou que “dois pontos estão sobrepostos” e com isso a função objetivo será igual a 1.

O limitante de programação linear (PL) do modelo (1)-(4) é igual ao número de pontos m . Experimentos computacionais mostram que este limitante é muito fraco, por isso existe a necessidade de achar desigualdades válidas (restrições de corte) para fortalecer o modelo matemático.

4. Restrições de Corte

Os métodos de planos de corte foram inicialmente introduzidos por Gomory (1958) para resolver problemas de programação linear inteira. Eles se baseiam na seguinte idéia: começa-se com uma solução relaxada de PL do problema, depois, de maneira sistemática, enquanto a solução ótima de PL não for inteira, procura-se eliminá-la acrescentando-se novas desigualdades válidas (restrições válidas), conhecidas como planos de corte, ao problema linear corrente.

Em otimização combinatória, existem famílias de cortes bem conhecidas como as Cliques (Padberg, 1973), os Ciclos Ímpares (Padberg, 1973), as Rodas de Cheng e Cunningham (1997), as *Antiholes* e *Webs* de Balas e Padberg (1976) e as *Grilles* de Cánovas et al. (2000). Entretanto muitos destes cortes são difíceis de serem obtidos computacionais. Além disso, para um dado problema, cortes específicos podem ser obtidos a partir da estrutura do problema.

Sendo assim, para o PRCP, dois cortes específicos para a formulação de Mauri (2008) foram identificados para as restrições de conflito. Na verdade os dois cortes estão correlacionados e são baseados na vizinhança de cada vértice no grafo de conflitos associado ao PRCP.

Seja C_{ij} um conjunto com todos os pontos que possuem ao menos uma posição candidata em conflito com a posição x_{ij} . Com isso, o Corte 1 está apresentado a seguir:

$$x_{i,j} + \sum_{(c,u) \in S_{ij}} x_{c,u} - z_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j \in P_i \forall c \in C_{ij} : i \neq c$$

O Corte 1 garante que se uma posição candidata $x_{i,j}$ possui potencial conflito com um conjunto de posições candidatas de um outro ponto c , o ponto z_i estará sobreposto se $x_{i,j} = 1$ e se alguma posição candidata do ponto c conflitante com $x_{i,j}$ for também igual a 1.

Assim, o modelo matemático com o Corte 1 pode ser apresentado:

$$v(\text{PNMRLC}_{C1}) = \text{Max} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j \in P_i} w_{i,j} x_{i,j} - \sum_{i=1}^m z_i \right] \quad (1A)$$

(PNMRLC_{C1}) Sujeito a: (2), (4)

$$x_{i,j} + \sum_{(c,u) \in S_{ij}} x_{c,u} - z_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j \in P_i \forall c \in C_{ij} : i \neq c \quad (7)$$

A Figura 4 mostra o modelo matemático para o exemplo da Figura 3 com a aplicação do Corte 1. Note que o conjunto gerado de restrições é menor do o conjunto do modelo original de Mauri (2008). O Corte 1 “domina” (contempla) algumas restrições do modelo original (1)-(4) que não são geradas, reduzindo assim o número de restrições necessárias.

O segundo corte, denominado Corte 2, é obtido a partir do Corte 1. Retomando a ideia do Corte 1, ou seja, que se uma posição candidata $x_{i,j}$ possui potencial conflito com um conjunto de posições candidatas de um outro ponto c , o ponto z_i estará sobreposto se $x_{i,j} = 1$ e se alguma posição candidata do ponto c conflitante com $x_{i,j}$ for também igual a 1. Sendo assim, ao afirmar que o ponto z_i estará sobreposto, implica dizer também que o ponto c está sobreposto, ou seja, z_c

= 1. Logo, as restrições referentes ao Corte 1 podem ser redefinidas da seguinte maneira (Corte 2):

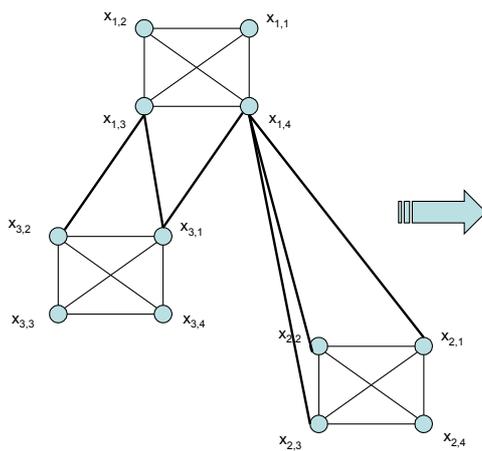
$$\left. \begin{aligned} x_{i,j} + \sum_{(c,u) \in S_{ij}} x_{c,u} - z_i &\leq 1 \\ x_{i,j} + \sum_{(c,u) \in S_{ij}} x_{c,u} - z_c &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j \in P_i \forall c \in C_{ij} : i \neq c$$

Assim, o modelo matemático com o Corte 2 é apresentado abaixo:

$$v(\text{PNMRLC}_{C2}) = \text{Max} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j \in P_i} w_{i,j} x_{i,j} - \sum_{i=1}^m z_i \right] \quad (1B)$$

(PNMRLC_{C1}) Sujeito a: (2), (4)

$$\left. \begin{aligned} x_{i,j} + \sum_{(c,u) \in S_{ij}} x_{c,u} - z_i &\leq 1 \\ x_{i,j} + \sum_{(c,u) \in S_{ij}} x_{c,u} - z_c &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad \forall i = 1, \dots, m; \forall j \in P_i \forall c \in C_{ij} : i \neq c \quad (8)$$



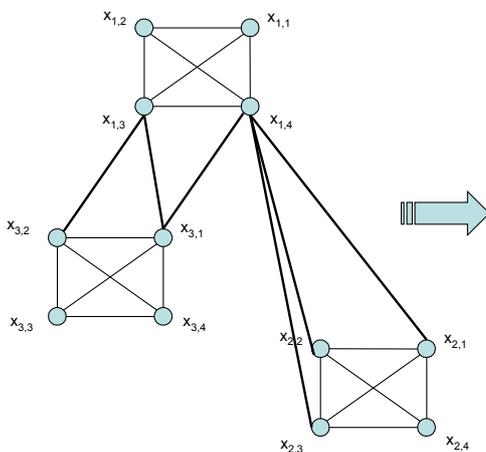
$$v(\text{PNMRLC}_{C1}) = \text{Max} \quad x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} - z_1 - z_2 - z_3$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} &= 1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} &= 1 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} &= 1 \\ \\ x_{1,3} + x_{3,1} + x_{3,2} - z_1 &\leq 1 \quad (\text{Corte 1}) \\ x_{1,4} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} - z_1 &\leq 1 \quad (\text{Corte 1}) \\ x_{1,4} + x_{3,1} - z_1 &\leq 1 \\ \\ x_{2,1} + x_{1,4} - z_2 &\leq 1 \\ x_{2,2} + x_{1,4} - z_2 &\leq 1 \\ x_{2,3} + x_{1,4} - z_2 &\leq 1 \\ \\ x_{3,1} + x_{1,3} + x_{1,4} - z_3 &\leq 1 \quad (\text{Corte 1}) \\ x_{3,2} + x_{1,3} - z_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

$x_{1,1}; x_{1,2}; x_{1,3}; x_{1,4}; x_{2,1}; x_{2,2}; x_{2,3}; x_{2,4}; x_{3,1}; x_{3,2}; x_{3,3}; x_{3,4}; z_1; z_2; z_3 \in \{0, 1\}$

Figura 4: Aplicação do Corte 1 no exemplo da Figura 3.



$$v(\text{PNMRLC}_{C2}) = \text{Max} \quad x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} - z_1 - z_2 - z_3$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} &= 1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} &= 1 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} &= 1 \\ \\ x_{1,3} + x_{3,1} + x_{3,2} - z_1 &\leq 1 \quad (\text{Corte 2}) \\ x_{1,3} + x_{3,1} + x_{3,2} - z_3 &\leq 1 \quad (\text{Corte 2}) \\ \\ x_{1,4} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} - z_1 &\leq 1 \quad (\text{Corte 2}) \\ x_{1,4} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} - z_2 &\leq 1 \quad (\text{Corte 2}) \\ \\ x_{3,1} + x_{1,3} + x_{1,4} - z_3 &\leq 1 \quad (\text{Corte 2}) \\ x_{3,1} + x_{1,3} + x_{1,4} - z_1 &\leq 1 \quad (\text{Corte 2}) \end{aligned}$$

$x_{1,1}; x_{1,2}; x_{1,3}; x_{1,4}; x_{2,1}; x_{2,2}; x_{2,3}; x_{2,4}; x_{3,1}; x_{3,2}; x_{3,3}; x_{3,4}; z_1; z_2; z_3 \in \{0, 1\}$

Figura 5: Aplicação do Corte 2 no exemplo da Figura 3.

Entretanto, cabe ressaltar que devem ser eliminadas do conjunto de Restrições (8) aquelas restrições que estão dominadas. A Figura 5 mostra o modelo matemático para o exemplo da Figura 3 com a aplicação do Corte 2. Note que o número de restrições é ainda menor que o obtido pelo Corte 1.

Esse último corte apresenta um limitante de PL melhor que os demais modelos apresentados neste trabalho. Os resultados computacionais da seção seguinte mostram que o Corte 2 produz *gaps* melhores que os demais modelos.

5. Resultados Computacionais

Testes computacionais foram realizados para avaliar a formulação original proposta por Mauri (2008) e os cortes apresentados neste trabalho. Foram consideradas as instâncias propostas na literatura por Yamamoto et al (2002) que possuem problemas com 25, 100, 250, 500, 750 e 1000 pontos, disponíveis em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html>. Todos os experimentos computacionais foram executados em um PC com Processador Pentium Dual Core de 1,73 GHz e 1GB de Memória RAM.

Tabela 1: Resultados com 25 pontos.

Inst.	PNMRLC				PNMRLC _{C1}				PNMRLC _{C2}			
	LB	UB	Gap	T (s)	LB	UB	Gap	T (s)	LB	UB	Gap	T (s)
1	23*	23	0,00	0,17	23*	23	0,00	0,09	23*	23	0,00	0,03
2	22*	22	0,00	0,19	22*	22	0,00	0,02	22*	22	0,00	0,02
3	22*	22	0,00	0,20	22*	22	0,00	0,09	22*	22	0,00	0,03
4	18*	18	0,00	17,27	18*	18	0,00	0,33	18*	18	0,00	0,14
5	22*	22	0,00	0,38	22*	22	0,00	0,08	22*	22	0,00	0,05
6	21*	21	0,00	0,20	21*	21	0,00	0,02	21*	21	0,00	0,02
7	18*	18	0,00	2,95	18*	18	0,00	0,23	18*	18	0,00	0,39
8	21*	21	0,00	0,87	21*	21	0,00	0,16	21*	21	0,00	0,19
Media	20,88	20,88	0,00	2,78	20,88	20,88	0,00	0,13	20,88	20,88	0,00	0,11

* Solução ótima

Como considerado por Zoraster (1990), Christensen et al (1995), Ribeiro e Lorena (2008ab), Verner et al (1997), Yamamoto e Lorena (2005), Alvim e Taillard (2009), entre outros, o número total de posições candidatas para cada ponto foi definido como igual a 4 e não existe preferência cartográfica, assim $P_i = \{1,2,3,4\}$ e $w_{i,j} = 1 \forall i = 1,2,\dots,m$ e $j \in P_i$.

Os testes foram executados no CPLEX 10 e o tempo computacional necessário para encontrar os Cortes 1 e 2 é da ordem de 1s. Assim, as Tabelas 1, 2 e 3 apresentam os resultados encontrados para as instâncias com 25, 750 e 1000 pontos. As colunas indicam: o limitante inferior (LB), o limitante superior (UB), o *gap* percentual ($Gap = \left(\frac{UB - LB}{UB} \right) \times 100$) e o tempo (T) em segundos utilizado pelo CPLEX.

O CPLEX foi executado até encontrar a solução ótima da instância, parar por falta de memória ou atingir um tempo limite de 10.800s. As instâncias com 100, 250 e 500 pontos não apresentam muitas dificuldades pois até mesmo o método de Wagner et al (2001), ao final, produz uma solução sem conflitos na maioria das vezes. Com isso os resultados não foram reportados.

Considerando a Tabela 1 (instâncias com 25 pontos), todas as soluções ótimas foram encontradas por todos os modelos testados. Com a inclusão dos cortes, o tempo computacional foi reduzido, mas não é possível ainda avaliar a performance dos dois cortes.

Para as instâncias com 750 pontos (Tabela 20), pode-se perceber melhor o comportamento do CPLEX com os cortes. O modelo matemático com o Corte 2 apresentou os melhores resultados. Das 25 instâncias com 750 pontos, o CPLEX encontrou 24 soluções ótimas contra 18 do modelo com o Corte 1 e contra 02 do modelo original de Mauri (2008). O tempo médio obtido com o

PNMRLC_{C2} foi inferior aos demais testes. Ao analisar o *gap*, percebe-se mais uma vez que o modelo PNMRLC_{C2} foi superior aos demais modelos.

Tabela 2: Resultados com 750 pontos.

Inst.	PNMRLC				PNMRLC _{C1}				PNMRLC _{C2}			
	LB	UB	Gap	T (s)	LB	UB	Gap	T (s)	LB	UB	Gap	T (s)
1	739	741,83	0,38	10800,06	739*	739	0,00	44,67	739*	739	0,00	2,17
2	735	744,46	1,27	10800,86	736*	736	0,00	2033,56	736*	736	0,00	3,76
3	730	743,55	1,82	6532,46	731	733,78	0,38	8957,94	731*	731	0,00	4774,05
4	741	742,00	0,13	10800,34	741*	741	0,00	10,69	741*	741	0,00	0,66
5	739	743,78	0,64	5392,55	739*	739	0,00	143,73	739*	739	0,00	3,21
6	730	743,50	1,82	7550,23	730	731,09	0,15	15210,70	730*	730	0,00	13,91
7	737	742,00	0,67	7887,57	737*	737	0,00	70,05	737*	737	0,00	6,63
8	736	743,02	0,94	7657,60	736*	736	0,00	1913,95	736*	736	0,00	12,61
9	724	744,67	2,78	6264,66	726	731,21	0,71	5183,67	726	727,93	0,27	10800,18
10	743*	743,00	0,00	635,98	743*	743	0,00	2,13	743*	743	0,00	0,42
11	732	744,00	1,61	7665,78	733*	733	0,00	2992,88	733*	733	0,00	35,63
12	733	742,50	1,28	8357,19	734*	734	0,00	20,08	734*	734	0,00	0,33
13	743*	743,00	0,00	1142,99	743*	743	0,00	1,94	743*	743	0,00	0,51
14	728	743,58	2,10	7367,05	728	731,09	0,42	8911,52	728*	728	0,00	149,25
15	728	744,25	2,18	7651,08	730*	730	0,00	15095,80	730*	730	0,00	60,00
16	729	744,00	2,02	7355,90	729*	729	0,00	11111,20	729*	729	0,00	42,46
17	728	744,62	2,23	7388,97	729	731,74	0,37	10142,30	729*	729	0,00	3418,76
18	737	742,67	0,76	10800,51	737*	737	0,00	154,44	737*	737	0,00	1,06
19	740	742,50	0,34	10800,10	740*	740	0,00	9,97	740*	740	0,00	1,79
20	737	742,67	0,76	7327,87	737*	737	0,00	81,36	737*	737	0,00	1,48
21	731	744,67	1,84	7070,45	731	733,48	0,34	7324,94	731*	731	0,00	6,71
22	744	744,00	0,00	470,09	744*	744	0,00	3,00	744*	744	0,00	1,11
23	731	742,00	1,48	7614,33	731*	731	0,00	36,77	731*	731	0,00	1,36
24	732	744,40	1,67	5800,79	732	734,95	0,40	5569,06	732*	732	0,00	310,97
25	732	743,33	1,52	7355,57	732*	732	0,00	13494,50	732*	732	0,00	10,81
Media	734,36	743,36	1,21	7139,64	734,72	735,53	0,11	4340,83	734,72	734,80	0,01	786,39

* Solução ótima

Considerando os dados da Tabela 3 (problemas com 1000 pontos), o CPLEX não encontrou nenhuma solução ótima. Porém, analisando os valores médios, percebe-se que com o Corte 2, o CPLEX apresenta um *gap* menor com limitantes mais “apertados”.

A Tabela 4 apresenta os principais resultados encontrados na literatura. Ela indica as porcentagens de rótulos livres encontradas por vários algoritmos para instâncias iguais ou com as mesmas dificuldades das propostas por Yamamoto et al (2002). No caso do presente trabalho, a

porcentagem de rótulos livres pode ser assim calculada: $\text{Rótulos Livres (\%)} = \frac{LB}{m} \times 100$.

Os resultados mostram que as heurísticas podem ser aprimoradas pois há possibilidades de melhora. A metaheurística POPMUSIC de Alvim e Taillard (2009) apresenta, no melhor caso, 92,68% de rótulos livres para as instâncias com 1000 pontos, mas, ao comparar esse valor com os novos resultados apresentados neste trabalho, percebe-se que há uma diferença de 1,18% para menos.

Entre os resultados mostrados na Tabela 4, destaca-se a decomposição Lagrangiana de Mauri (2008) que encontrou todas as soluções ótimas dos problemas com 750 pontos e provou algumas soluções ótimas para os problemas com 1000 pontos.

Tabela 3: Resultados com 1000 pontos.

Inst.	PNMRLC				PNMRLC _{C1}				PNMRLC _{C2}			
	LB	UB	Gap	T (s)	LB	UB	Gap	T (s)	LB	UB	Gap	T (s)
1	918	995,27	7,76	8234,54	939	961,03	2,29	8217,50	939	952,41	1,41	8008,06
2	892	996,56	10,49	7944,66	934	962,59	2,97	9372,64	934	951,01	1,79	9647,49
3	911	994,81	8,42	8010,25	933	961,14	2,93	7993,61	934	949,54	1,64	9067,51
4	882	996,94	11,53	7675,42	933	962,43	3,06	9234,03	933	952,96	2,09	8248,71
5	945	997,00	5,22	7585,55	961	976,20	1,56	8834,52	961	967,77	0,70	7438,00
6	920	995,42	7,58	8165,56	932	960,52	2,97	8020,03	932	946,74	1,56	7226,79
7	897	996,92	10,02	8102,22	928	960,06	3,34	8819,64	929	947,59	1,96	8065,02
8	908	998,33	9,05	8037,76	939	968,44	3,04	8312,06	940	959,42	2,02	8568,90
9	893	996,08	10,35	8074,16	925	959,52	3,60	8894,97	927	944,78	1,88	8172,86
10	901	997,14	9,64	8220,80	944	971,54	2,83	8861,16	944	960,88	1,76	7883,76
11	938	995,41	5,77	7889,20	947	967,78	2,15	8521,02	947	959,05	1,26	7867,13
12	903	996,22	9,36	7858,28	934	956,23	2,32	7860,77	934	945,07	1,17	8392,65
13	928	997,00	6,92	7549,22	955	972,99	1,85	8964,73	955	965,24	1,06	8024,91
14	897	996,15	9,95	8154,78	933	960,52	2,87	9293,41	933	950,69	1,86	9858,34
15	904	994,85	9,13	8148,46	934	963,99	3,11	9248,70	932	951,88	2,09	10186,12
16	876	997,17	12,15	8223,61	931	959,58	2,98	9647,72	932	951,22	2,02	8893,96
17	929	996,75	6,80	8105,20	937	964,61	2,86	1124,55	937	952,24	1,60	10539,91
18	923	995,75	7,31	7927,24	946	968,91	2,36	8934,28	946	960,25	1,48	10718,88
19	842	996,83	15,53	8724,84	949	970,46	2,21	9214,44	950	959,51	0,99	10202,50
20	909	997,00	8,83	7910,86	934	966,22	3,33	9253,99	934	958,49	2,56	8600,62
21	842	997,75	15,61	8219,96	930	955,38	2,66	8707,73	930	943,64	1,45	8991,02
22	928	997,25	6,94	8141,83	952	974,27	2,29	8638,53	952	965,90	1,44	8599,74
23	853	995,39	14,30	8516,06	934	960,13	2,72	9103,09	934	950,57	1,74	8949,98
24	877	995,25	11,88	8664,67	932	964,74	3,39	9178,91	932	954,64	2,37	8612,52
25	917	995,50	7,89	8181,32	944	964,70	2,15	8601,40	945	955,69	1,12	8150,15
Medi a	901,32	996,35	9,54	8090,66	938,40	964,56	2,71	8918,90	938,64	954,2872	1,64	8756,62

Tabela 4: Comparação com a literatura

Métodos	Pontos - <i>m</i>			
	250	500	750	1000
PNMRLC _{C2}	100,00*	99,68*	97,96	93,86
PNMRLC _{C1}	100,00*	99,68*	97,96	93,84
CPLEX com a Formulação de Mauri (2008)	100,00*	99,68*	97,91	90,19
Decomposição Lagrangiana (Mauri, 2008)	100,00*	99,68*	97,96*	93,74
Pop(asc) (Alvim e Taillard, 2009)	100,00	99,67	97,72	92,68
Pop(30) (Alvim e Taillard, 2009)	100,00	99,67	97,72	92,54
Pop(70) (Alvim e Taillard, 2009)	100,00	99,67	97,73	92,58
Geração de Colunas (Ribeiro e Lorena, 2008b)	100,00	99,67	97,67	92,40
LagClus (Ribeiro e Lorena, 2008b)	100,00	99,67	97,65	91,42
GRASP(6) (Cravo et al, 2008)	100,00	99,67	97,72	92,20
CGA (Yamamoto e Lorena, 2005)	100,00	99,60	97,10	90,70
Tabu Search (Yamamoto et al, 2002)	100,00	99,26	96,76	90,00
GA com máscara (Verner et al, 1997)	99,98	98,79	95,99	88,96
Simulated Annealing (Christensen et al, 1995)	99,90	98,30	92,30	82,09
3-opt Gradient Descent (Christensen et al, 1995)	99,76	97,34	89,44	77,83
2-opt Gradient Descent (Christensen et al, 1995)	99,36	95,62	85,60	73,37
Gradient Descent (Christensen et al, 1995)	95,47	86,46	72,40	58,29
Greedy Algorithm (Christensen et al, 1995)	88,82	75,15	58,57	43,41

* Todas as soluções ótimas foram encontradas

6. Conclusões e Pesquisas Futuras

Este trabalho apresentou um estudo sobre desigualdades válidas (cortes) para uma formulação matemática proposta na literatura para o Problema da Rotulação Cartográfica de Pontos (PRCP). Os cortes encontrados fortaleceram o modelo matemático de Mauri (2008) e com isso, *gaps* mais “apertados” foram apresentados.

Os resultados aqui reportados se configuram como novos limitantes para o PRCP que poderão ser utilizados para avaliar outros métodos propostos para o PRCP.

Diante do que foi apresentado, outros cortes estão sendo estudados para o PRCP, principalmente baseados naqueles existentes na literatura de *Node Packing*. Experimentos computacionais preliminares mostraram que cortes baseados em cliques podem ser utilizados no PRCP. Entretanto, deve-se estudar a forma de obtê-los sem aumentar o tempo computacional.

Agradecimentos

Os autores agradecem as importantes sugestões fornecidas por três revisores anônimos. Lorena agradece ao CNPq (processos 471837/2008-3 e 305225/2006-5) pelo suporte financeiro fornecido para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências Bibliográficas

Alvim, A. C. F. e Taillard, E. D. (2009), Popmusic for the point feature label placement, *European Journal of Operational Research*, 192(2), 396-413.

Balas, E. e Padberg, M. (1976), Set partitioning. *SIAM Review*, 18, 710–760.

Cánovas, L., Landete, M. e Marín, A. (2000), New facets for the set packing polytope. *Operations Research Letters*, 27(4), 153–161.

Čenek, F. e Stewart, L. (2003), Maximum independent set and maximum clique algorithms for overlap graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 131(1), 77-91.

Cheng, E., e Cunningham, W. H. (1997), Wheel inequalities for stable set polytopes. *Mathematical Programming*, 77, 389–421.

Christensen, J., Marks, J. e Shieber, S. (1995), An empirical study of algorithms for point-feature label placement, *ACM Transactions on Graphics*, 14(3), 203-232.

Cravo, G. L., Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N. (2008), A greedy randomized adaptive search procedure for the point-feature cartographic label placement, *Computers & GeoSciences*, 34(4), 373-386.

Gomory, R. (1958), Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64, 275–278.

ILOG, *Ilog CPLEX 10.0 user's manual*, France, 2006.

Karp, R. M. e Wigderson, A. (1985), A fast parallel algorithm for the maximal independent set problem. *Journal of the ACM*, 32(4), 762–773.

Klau, G. W., A combinatorial approach to orthogonal placement problems, *Thesis*, Saarbrueck University, Germany, 2002.

Klau, G. W. e Mutzel, P. (2003), Optimal labeling of point features in rectangular labeling models, *Mathematical Programming*, 94(2-3), 435-458.

Mauri, G. R., Novas abordagens para representação e obtenção de limitantes e soluções para alguns problemas de Otimização Combinatória, *Thesis*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Brasil, 2008. Disponível em: <http://www.lac.inpe.br/~lorena/mauri/tese_mauri.pdf>

Padberg, M. W. (1973), On the facial structure of set packing polyhedra, *Mathematical Programming*, 5, 199–215.

Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N. (2008a), Column generation approach for the point-feature cartographic label placement problem, *Journal of Combinatorial Optimization*, 15(2), 147-164.

- Ribeiro, G. M. e Lorena, L. A. N.** (2008b), Lagrangean relaxation with clusters for point-feature cartographic label placement problems, *Computers & Operations Research*, 35(7), 2129-2140.
- Strijk, T., Verweij, B. e Aardal, K.**, Algorithms for maximum independent set applied to map labeling, *Technical Report*, Universiteit Utrecht, Nederland, 2000.
- Taillard, E. e Voss, S.**, POPMUSIC: Partial Optimization Metaheuristic Under Special Intensification Conditions, In: Ribeiro, C. and Hansen, P. (Eds.), *Essays and Survey in Metaheuristics*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 613-629, 2001.
- Verner, O. V., Wainwright, R. L. e Schoenefeld, D. A.** (1997), Placing text labels on maps and diagrams using genetic algorithms with masking, *Journal on Computing*, 9(3), 266-275.
- Wagner, F., Wolff, A., Kapoor, V. e Strijk, T.** (2001), Three rules suffice for good label placement, *Algorithmica*, 30(2), 334-349.
- Wolff, A. e Strijk, T.** (1996), *The map labeling bibliography*. Disponível em: <<http://il1www.ilkd.uni-karlsruhe.de/~awolff/map-labeling/bibliography/>>.
- Yamamoto, M. e Lorena, L. A. N.**, A constructive genetic approach to point-feature cartographic label placement, in: Ibaraki, T., Nonobe, K. and Yagiura, M. (Eds.), *Metaheuristics: progress as real problem solvers*, Springer, Berlin, 285-300, 2005.
- Yamamoto, M., Câmara, G. e Lorena, L. A. N.** (2002), Tabu search heuristic for point-feature cartographic label placement, *GeoInformatica*, 6(1), 77-90.
- Zoraster, S.** (1990), The solution of large 0-1 integer programming problems encountered in automated cartography, *Operations Research*, 38(5), 752-759.