



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE – 4024 – TDL / 241

**EXPRESSÕES PARAMETRIZADAS NÃO SINGULARES PARA  
PROPAGAÇÃO DE ORBITAS VIA TEORIA DE ESTIMAÇÃO DE  
PARÂMETROS.**

Carlos Oliveira Lino

Dissertação de Mestrado em Ciência Espaciais, orientada por Wilson C. Carnesin da  
Silva, aprovada em fevereiro de 1986.

INPE  
São José dos Campos  
1986



PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

AUTORES / AUTHORS

EXPRESSÕES PARAMETRIZADAS  
PROPAGAÇÃO DE ÓRBITAS  
ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

*Marco Antonio Raupp*  
Marco Antonio Raupp

AUTOR RESPONSÁVEL  
RESPONSIBLE AUTHOR

Carlos de Oliveira Lino

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

INTERNA / INTERNAL  
 EXTERNA / EXTERNAL  
 RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

*Wilson C. Canesin da Silva*  
Wilson C. Canesin da Silva

CDU/UDC

521.3:629.7.076.6

DATA / DATE

Novembro, 1986

|                    |   |
|--------------------|---|
| TÍTULO/TITLE       | PUBLICAÇÃO Nº<br>PUBLICAÇÃO NO<br>INPE-4024-TDL/241   |
|                    | EXPRESSÕES PARAMETRIZADAS NÃO SINGULARES<br>PARA PROPAGAÇÃO DE ÓRBITAS VIA TEORIA<br>DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS |
| AUTORES/AUTHORSHIP | Carlos de Oliveira Lino<br><br><i>Carlos de Oliveira Lino</i>   |

ORIGEM  
ORIGIN

DRH/DMC

PROJETO  
PROJECT

FRH/CEA

Nº DE PAG.  
NO OF PAGES

107

ULTIMA PAG.  
LAST PAGE

C.2

VERSÃO  
VERSION

Nº DE MAPAS  
NO OF MAPS

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

Propõe-se uma modificação no procedimento estocástico desenvolvido por Silva para propagação de órbitas de satélites artificiais mediante expressões paramétricas ajustadas que representam a variação no tempo dos elementos keplerianos da órbita de um satélite. A modificação proposta na escolha de variáveis das equações de órbita visa eliminar singularidades que tornam o procedimento de uso mais geral. O ajuste dos coeficientes das expressões modeladas é feito por processamento sequencial, empregando o filtro estendido de Kalman. O novo conjunto de expressões permite a propagação de todos os tipos de órbita, inclusive os casos críticos de órbitas equatoriais e circulares que apresentam singularidades nos elementos keplerianos clássicos.

OBSERVAÇÕES / REMARKS

Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em fevereiro de 1986.

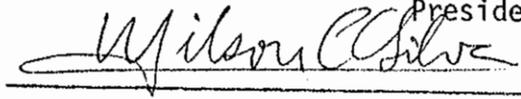
Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Mestre  
em Ciência Espacial

Dr. Atair Rios Neto



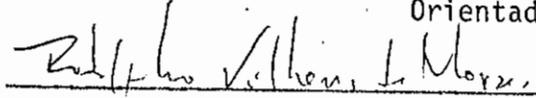
Presidente

Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva



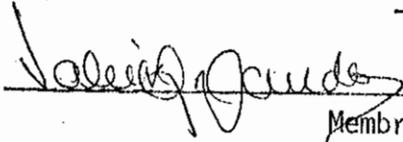
Orientador

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



Membro da Banca  
-convidado-

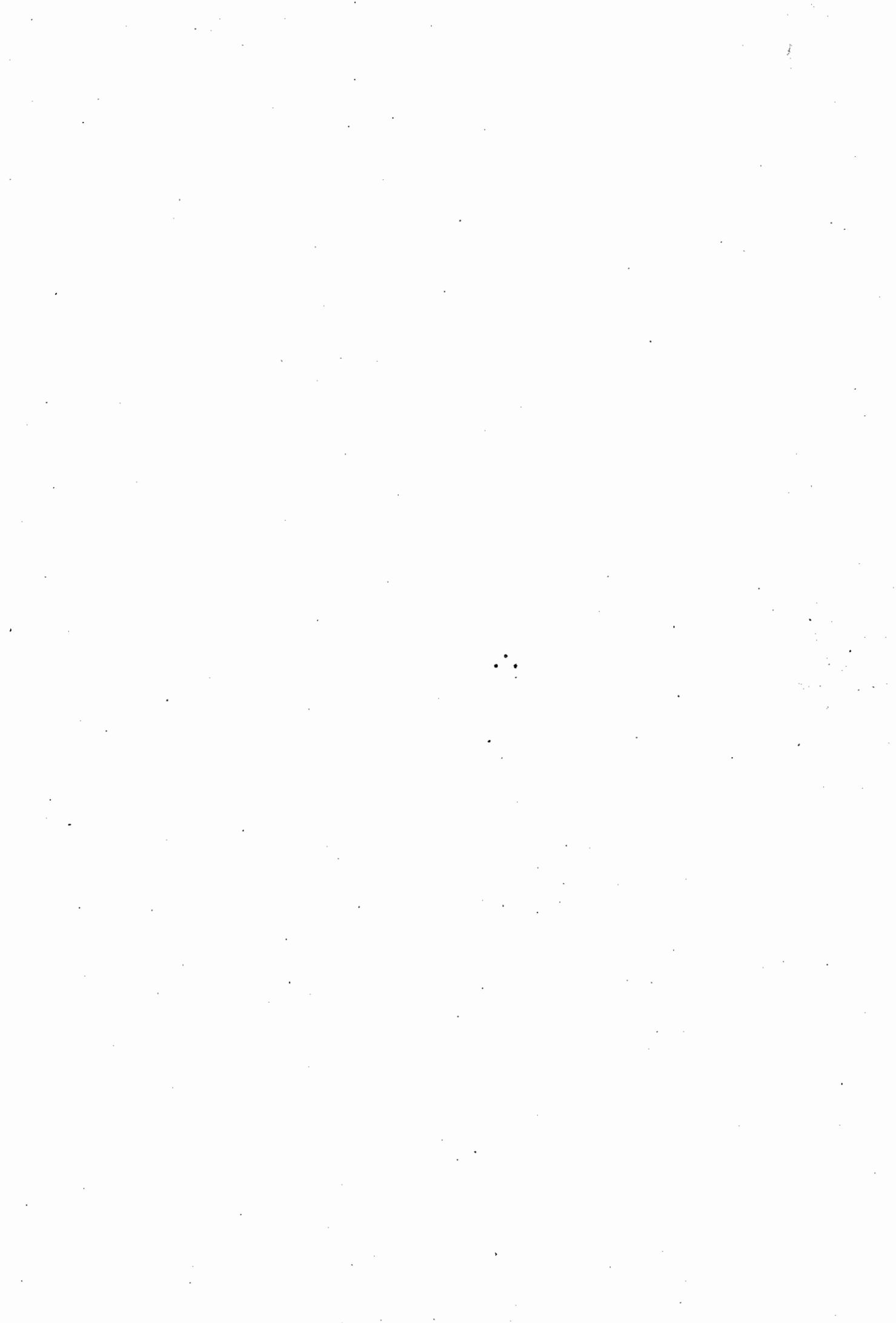
Dr. Valcir Orlando



Membro da Banca

Candidata: Carlos de Oliveira Lino

São José dos Campos, 14 de fevereiro de 1986



À Silvia.

1950

At the end of the year, the total amount of the loan was \$100,000.

The interest on the loan was \$10,000.

The principal of the loan was \$90,000.

A total of \$100,000 was paid for the loan.

The interest on the loan was \$10,000.

A total of \$100,000 was paid for the loan.

The interest on the loan was \$10,000.

A total of \$100,000 was paid for the loan.

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva pela orientação segura e paciente durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Dr. Atair Rios Neto pelo incentivo e pelos comentários recebidos.

Ao Dr. Clóvis Solano Pereira pelo apoio para levar a bom termo o meu programa de mestrado.

Ao amigo Hélio Koiti Kuga pela idéia para este trabalho e pelas contribuições.

Aos membros da Banca Examinadora pela dedicada análise deste trabalho, que contribuiu para seu efetivo aperfeiçoamento.

A todos os colegas que de uma forma ou de outra contribuíram para o bom término deste trabalho, especialmente ao Dr. Ralf Gielow.

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais, na pessoa de seu Diretor Geral Dr. Marco Antonio Raupp, pela oportunidade de realização deste trabalho e pelos recursos técnicos que o tornaram possível.

100  
95  
90  
85  
80  
75  
70  
65  
60  
55  
50  
45  
40  
35  
30  
25  
20  
15  
10  
5  
0



Figure 1

#### ABSTRACT

*A modification is proposed in the stochastic procedure developed for the propagation of satellite orbits via adjusted parametric expressions for the time variation of the Keplerian elements of a satellite. The modification proposed in the choice of variables of the orbit equations aims to eliminate singularities and generalize the procedure's application. The adjustment of coefficients of the modelled expressions is done by sequential processing, with use of the extended Kalman filter. The new set of expressions allows propagation of all types of orbit, including the critical cases of equatorial and circular orbits which present singularities in the classical Keplerian elements.*

1997

1998

1999  
2000  
2001  
2002  
2003  
2004  
2005  
2006  
2007  
2008  
2009  
2010  
2011  
2012  
2013  
2014  
2015  
2016  
2017  
2018  
2019  
2020  
2021  
2022  
2023  
2024  
2025  
2026  
2027  
2028  
2029  
2030  
2031  
2032  
2033  
2034  
2035  
2036  
2037  
2038  
2039  
2040  
2041  
2042  
2043  
2044  
2045  
2046  
2047  
2048  
2049  
2050  
2051  
2052  
2053  
2054  
2055  
2056  
2057  
2058  
2059  
2060  
2061  
2062  
2063  
2064  
2065  
2066  
2067  
2068  
2069  
2070  
2071  
2072  
2073  
2074  
2075  
2076  
2077  
2078  
2079  
2080  
2081  
2082  
2083  
2084  
2085  
2086  
2087  
2088  
2089  
2090  
2091  
2092  
2093  
2094  
2095  
2096  
2097  
2098  
2099  
2100

1997

1998

1999

2000

2001

2002

2003

2004

2005

2006

2007

2008

2009

2010

2011

2012

2013

2014

2015

2016

2017

2018

2019

2020

2021

2022

2023

2024

2025

2026

2027

2028

2029

2030

2031

2032

2033

2034

2035

2036

2037

2038

2039

2040

2041

2042

2043

2044

2045

2046

2047

2048

2049

2050

2051

2052

2053

2054

2055

2056

2057

2058

2059

2060

2061

2062

2063

2064

2065

2066

2067

2068

2069

2070

2071

2072

2073

2074

2075

2076

2077

2078

2079

2080

2081

2082

2083

2084

2085

2086

2087

2088

2089

2090

2091

2092

2093

2094

2095

2096

2097

2098

2099

2100

## SUMÁRIO

|   | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| LISTA DE FIGURAS .....  | <i>xi</i>   |
| LISTA DE TABELAS .....  | <i>xiii</i> |
| <u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u> .....  | 1           |
| 1.1 - Objetivo .....  | 1           |
| 1.2 - Histórico .....   | 1           |
| 1.3 - Procedimento proposto .....   | 3           |
| <u>CAPÍTULO 2 - MODELAGEM MATEMÁTICA</u> .....  | 5           |
| 2.1 - Análise do formato das equações .....   | 5           |
| 2.2 - Escolha das variáveis .....   | 9           |
| 2.3 - Equacionamento .....  | 14          |
| <u>CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u> .....  | 17          |
| 3.1 - Introdução .....  | 17          |
| 3.2 - Filtro de Kalman aplicado a sistemas dinâmicos lineares contínuos, com medidas lineares discretas ..... | 17          |
| 3.3 - Filtro de Kalman aplicado a sistemas não-lineares .....   | 21          |
| <u>CAPÍTULO 4 - ALGORITMO DO PROCEDIMENTO</u> .....   | 29          |
| 4.1 - Introdução .....  | 29          |
| 4.2 - Procedimento de ajuste .....  | 29          |
| 4.3 - Determinação dos vetores de derivadas parciais .....  | 34          |
| 4.4 - Determinação das matrizes de covariância do erro no estado e do ruído nas medidas .....                 | 36          |
| 4.5 - Procedimento de propagação .....  | 39          |
| <u>CAPÍTULO 5 - TESTE DO PROCEDIMENTO</u> .....   | 45          |
| 5.1 - Introdução .....  | 45          |
| 5.2 - Caso de Teste 1 .....   | 45          |
| 5.3 - Caso de Teste 2 .....   | 53          |
| 5.4 - Teste do integrador numérico de referência .....  | 60          |

|   | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 5.5 - Teste de propagação .....                               | 61          |
| 5.5.1 - Caso de Teste 1 .....                                 | 61          |
| 5.5.2 - Caso de Teste 2 .....                                 | 64          |
| <u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES</u> .....                          | 67          |
| 6.1 - Comentários .....                                       | 67          |
| 6.2 - Conclusões .....  | 68          |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                              | 71          |
| APÊNDICE A - CASO DE TESTE 1                                  |             |
| APÊNDICE B - CASO DE TESTE 2                                  |             |
| APÊNDICE C - PROCEDIMENTO PARA CÁLCULO DOS DESVIOS EM POSIÇÃO |             |

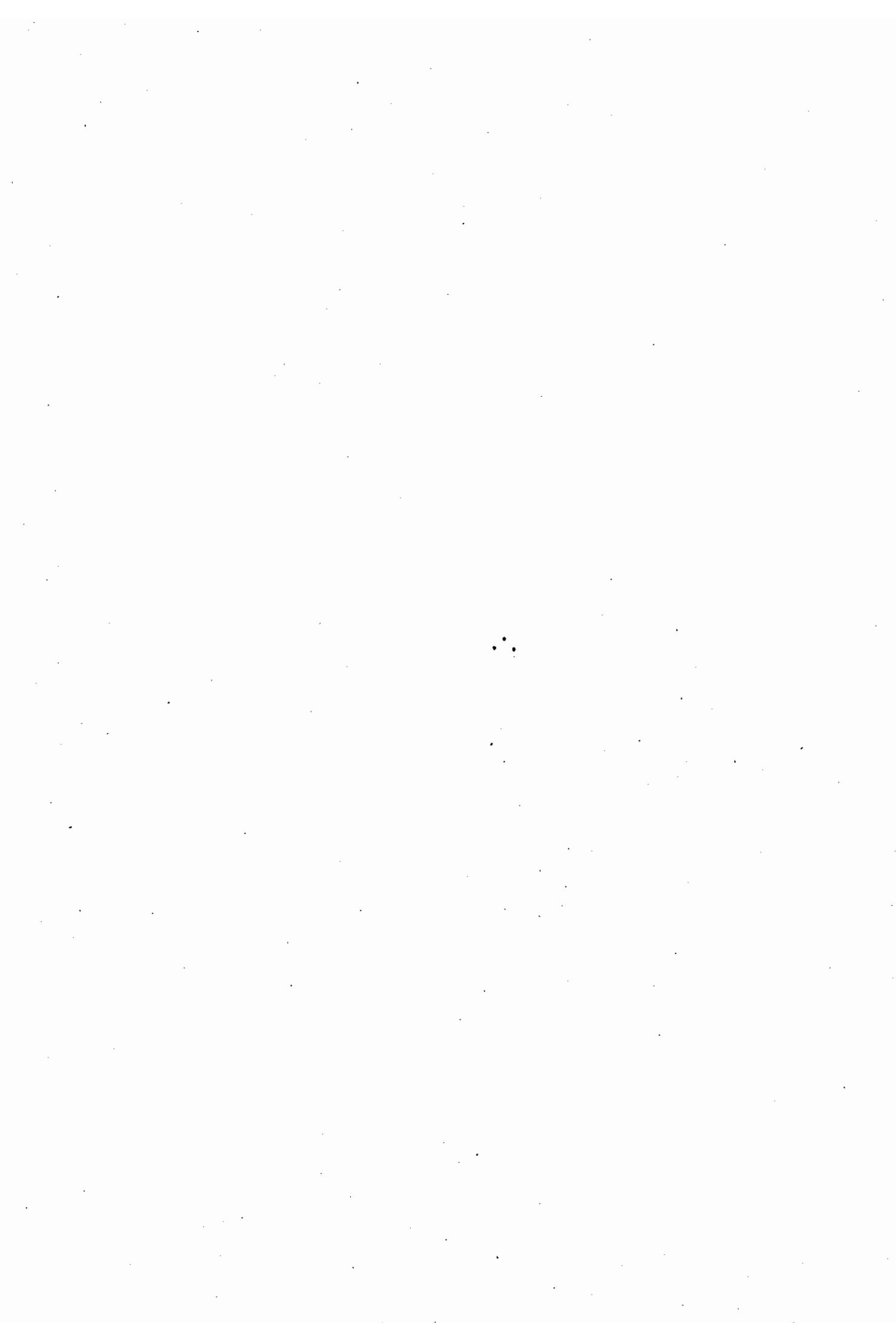
## LISTA DE FIGURAS

|   | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 2.1 - Esquema das perturbações nos elementos orbitais de um satélite .....                    | 5           |
| 2.2 - Esquema da órbita de um satélite representada nos elementos keplerianos clássicos ..... | 10          |
| 5.1 - Resíduo em $a^*$ - Caso de Teste 1 .....  | 47          |
| 5.2 - Resíduo em $h$ - Caso de Teste 1 .....  | 48          |
| 5.3 - Resíduo em $\varrho$ - Caso de Teste 1 .....  | 49          |
| 5.4 - Resíduo em $p$ - Caso de Teste 1 .....  | 50          |
| 5.5 - Resíduo em $q$ - Caso de Teste 1 .....  | 51          |
| 5.6 - Resíduo em $\Gamma$ - Caso de Teste 1 .....   | 52          |
| 5.7 - Resíduo em $a^*$ - Caso de Teste 2 .....  | 54          |
| 5.8 - Resíduo em $h$ - Caso de Teste 2 .....  | 55          |
| 5.9 - Resíduo em $\varrho$ - Caso de Teste 2 .....  | 56          |
| 5.10 - Resíduo em $p$ - Caso de Teste 2 .....   | 57          |
| 5.11 - Resíduo em $q$ - Caso de Teste 2 .....   | 58          |
| 5.12 - Resíduo em $\Gamma$ - Caso de Teste 2 .....  | 59          |
| 5.13 - Desvio radial - Caso de Teste 1 .....  | 62          |
| 5.14 - Desvio normal - Caso de Teste 1 .....  | 63          |
| 5.15 - Desvio tangente - Caso de Teste 1 .....  | 63          |
| 5.16 - Desvio radial - Caso de Teste 2 .....  | 65          |
| 5.17 - Desvio normal - Caso de Teste 2 .....  | 65          |
| 5.18 - Desvio tangente - Caso de Teste 2 .....  | 66          |
| A.1 - Curva observada de $a^*$ - Caso de Teste 1 .....  | A.3         |
| A.2 - Curva observada de $h$ - Caso de Teste 1 .....  | A.4         |
| A.3 - Curva observada de $\varrho$ - Caso de Teste 1 .....                                    | A.5         |
| A.4 - Curva observada de $p$ - Caso de Teste 1 .....  | A.6         |
| A.5 - Curva observada de $q$ - Caso de Teste 1 .....  | A.7         |
| A.6 - Curva observada de $\Gamma$ - Caso de Teste 1 .....                                     | A.8         |
| B.1 - Curva observada de $a^*$ - Caso de Teste 2 .....  | B.4         |
| B.2 - Curva observada de $h$ - Caso de Teste 2 .....  | B.5         |
| B.3 - Curva observada de $\varrho$ - Caso de Teste 2 .....                                    | B.6         |

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| B.4 - Curva observada de $p$ - Caso de Teste 2 .....       | B.7         |
| B.5 - Curva observada de $q$ - Caso de Teste 2 .....       | B.8         |
| B.6 - Curva observada de $\bar{c}$ - Caso de Teste 2 ..... | B.9         |

## LISTA DE TABELAS

|   | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 4.1 - Resumo dos ruídos de observação .....                                   | 39          |
| 5.1 - Resultados de propagação para o integrador numérico de referência ..... | 60          |
| 5.2 - Resumo dos desvios inicial e final para o Caso de Teste 1               | 61          |
| 5.3 - Resumo dos desvios inicial e final para o Caso de Teste 2               | 64          |



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é generalizar um procedimento para propagação de órbitas de satélites artificiais, baseado no procedimento apresentado em Silva (1982) e em Rios-Neto e Silva (1983).

O método fornece uma alternativa simples, de grande alcance, baixo custo computacional e razoável precisão para propagação de órbitas por intervalos de tempo de até um dia. As expressões matemáticas envolvidas são parametrizadas em formato semelhante às utilizadas nas teorias analíticas de propagação de órbitas e ajustadas a partir de dados observados mediante o uso da teoria de estimação de parâmetros.

#### 1.2 - HISTÓRICO

Os métodos que têm sido empregados para a propagação de órbitas de satélites artificiais são basicamente de três tipos:

- a) Os métodos numéricos, que trabalham pela integração das equações de movimento ponto a ponto.
- b) Os métodos analíticos, que se baseiam na integração analítica das equações de perturbação do geopotencial em variáveis canônicas, como no método de Brouwer (1959), e incluem outras perturbações como em King-Hele (1964), Sehnal (1973) e Vilhena de Moraes (1978).
- c) Os métodos semi-analíticos, onde se calculam as variações médias por período dos elementos da órbita, através de integração numérica das perturbações em um período. Estas variações são consideradas constantes dentro de um certo intervalo de tempo, de meio a um dia, no qual a órbita é propagada. Em seguida as varia

ções são recalculadas, como em Cefola (1976), Medeiros (1983) e Martins e Medeiros (1984).

Comparando os vários métodos, verifica-se que os métodos numéricos são de grande precisão, o que permite a utilização de sofisticados modelos de força, onde se inclui todo tipo de perturbação que se desejar. Entretanto, estes métodos exigem grande tempo de computação, o que os torna muito dispendiosos em propagações por longos intervalos de tempo, além de apresentar o problema de acúmulo de erro numérico. Já os métodos analíticos têm a vantagem de exigir baixo tempo de computação, o que torna mais rápida e simples a propagação de uma órbita por um intervalo de tempo maior que pelos métodos numéricos. Apresentam, porém, a desvantagem de ser menos precisos devido aos modelos simplificados das perturbações seculares e dissipativas que utilizam.

Os métodos semi-analíticos foram desenvolvidos posteriormente na tentativa de obter melhor precisão e fácil computação, graças ao grande passo de integração usado. Entretanto, o cálculo das variações médias por período dos elementos da órbita, que é feito usando as equações planetárias de Lagrange, é de grande complexidade, o que exige grande quantidade de cálculos.

Foi proposto pela primeira vez em Veis e Moore (1960) um método empírico com a utilização de expressões parametrizadas, com o duplo objetivo de simplificar as equações de propagação e propagá-las por longos intervalos de tempo com razoável precisão. Entretanto, o procedimento proposto usava as expressões ajustadas para extrapolar o movimento além do intervalo de tempo utilizado para o ajuste dos parâmetros das expressões, o que levava os erros de precisão.

Silva (1982) propôs um procedimento baseado no princípio de que o satélite movimenta-se ao longo de períodos sucessivos numa mesma região do espaço, dentro das vizinhanças de uma órbita nominal, com pequenas variações de condições ambientais. Para a propagação da órbita adotou-se um procedimento de reinicialização, que permite que se

utilizem valores da variável independente atualizados para cada novo período propagado. Após o intervalo de propagação, da ordem do utilizado nos métodos semi-analíticos, as expressões são reajustadas, o que evita o problema de acúmulo de erros. Conseguiram-se, neste trabalho, precisões comparáveis aos métodos analíticos e semi-analíticos em um período de propagação de cerca de 2 dias.

### 1.3 - PROCEDIMENTO PROPOSTO

Propõe-se no presente trabalho um procedimento baseado no de Silva (1982), com a diferença de que as expressões parametrizadas correspondem a um novo conjunto de variáveis, que são as variáveis equinoaciais. A vantagem de escolher estas variáveis é que elas são não-singulares para praticamente qualquer órbita, exceto para o caso de inclinação igual a  $180^{\circ}$ , ou seja, uma órbita equatorial retrógrada, segundo Eckstein (1978). Os elementos Keplerianos ao contrário apresentam singularidades para um conjunto de órbitas muito importantes; a ascensão reta fica indefinida para as órbitas com inclinação de  $0^{\circ}$  e o argumento do perigeu e a anomalia média ficam indefinidas para órbitas circulares.

O método torna-se, portanto, mais poderoso, com uma gama maior de órbitas para o qual é aplicável. A utilização deste método aplica-se a casos onde se deseja uma precisão razoável na propagação de órbitas de satélites artificiais, sem exigir grandes recursos computacionais, como, por exemplo, no apontamento de antenas em estações de rastreamento de satélites ou na propagação de órbita efetuada a bordo de satélites artificiais. O método é interessante para estes casos, pois as expressões de propagação de órbitas apresentam-se na forma de polinômios de ordem baixa, cujos coeficientes precisam ser reatualizados em períodos de aproximadamente um dia.

O trabalho está organizado de forma que no Capítulo 2 encontra-se o equacionamento matemático, com as justificativas para o formato escolhido para as expressões parametrizadas em elementos equinoaciais. No Capítulo 3 são apresentados os fundamentos teóricos, que se

rão utilizados no Capítulo 4 para o desenvolvimento do algoritmo do procedimento, que faz como em Silva (1982) uso da teoria de estimação de parâmetros através do filtro estendido de Kalman. No Capítulo 5 aparecem os testes realizados, com os seus respectivos resultados, aonde se faz uma avaliação numérica do erro de posição nas direções radial, normal e tangencial, por um período de propagação de um dia, para os casos do satélite TIROS N nas mesmas condições utilizadas em Silva (1982) e para um satélite hipotético num caso crítico de órbita circular e equatorial. A comparação dos resultados de propagação é feita com um propagador numérico suficientemente preciso para ser usado como referência. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho. As observações utilizadas pelo algoritmo do procedimento de ajuste das expressões parametrizadas foram geradas numericamente e aparecem em forma de gráficos nos Apêndices A e B.

## CAPÍTULO 2

### MODELAGEM MATEMÁTICA

#### 2.1 - ANÁLISE DO FORMATO DAS EQUAÇÕES

Para representar, com boa aproximação as equações de variação em função do tempo dos elementos da órbita de um satélite artificial, por expressões ajustadas, é necessário que o formato destas equações, em relação à variável independente, se aproxima daquele das expressões reais das teorias analíticas, que em geral não são conhecidas. Em função disto, antes de escolher as expressões a serem ajustadas é necessário efetuar uma análise qualitativa do formato assumido pelas equações de variação dos elementos da órbita nas teorias analíticas; uma análise mais extensa poderá ser encontrada em Silva (1982).

As perturbações no movimento de um satélite artificial em órbita ao redor da Terra são de três tipos, que se superpõem, como mostra de maneira esquemática a Figura 2.1.

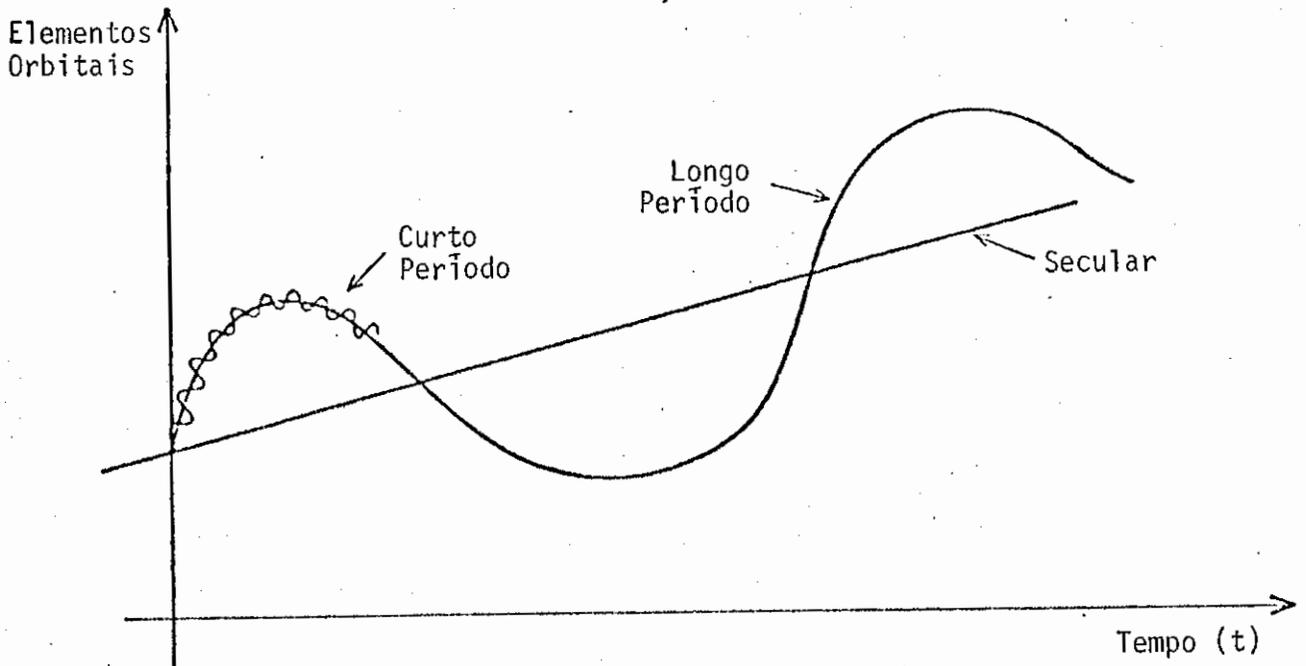


Fig. 2.1 - Esquema das perturbações nos elementos orbitais de um satélite.

As perturbações seculares têm variação linear com o tempo, enquanto as perturbações periódicas de longo período - L.P. - têm um período de variação muito maior que o período orbital do satélite, da ordem de meses. Já as perturbações periódicas de curto período - C.P. - têm um período de variação da ordem de grandeza do período orbital do satélite.

Estas perturbações são devidas principalmente a três origens:

- ao geopotencial ou campo gravitacional terrestre;
- a um terceiro corpo, geralmente o Sol ou a Lua;
- a efeitos não-gravitacionais, dos quais os mais importantes são o arrasto atmosférico e a pressão de radiação.

Entretanto, entre as perturbações mais importantes estão as devidas ao campo gravitacional terrestre, que, além de introduzir perturbações seculares nas variáveis angulares, introduzem também significativas perturbações periódicas. A perturbação mais importante, de origem não-gravitacional, nos satélites de órbita baixa, é o arrasto atmosférico, porém somente devido aos efeitos seculares, uma vez que suas perturbações de curto período são no máximo de alguns metros no semi-eixo maior.

As equações das perturbações devidas ao geopotencial, desenvolvidas por Brouwer (1959), usando o método de Von Zeipel, têm como formato final:

$$a_0 = a + a_1 \cos(2g' + 2f'), \quad (2.1)$$

$$e = e_0 + e_1 \operatorname{sen} g' + e_2 \cos 2g' + e_3 \operatorname{sen} 3g' + e_4 \cos(2g' + f') + e_5 \cos(2g' + 2f') + e_6 \cos(2g' + 3f'), \quad (2.2)$$

$$I = I_0 + I_1 \text{sen} g' + I_2 \text{cos} 2g' + I_3 \text{sen} 2g' + I_4 \text{cos}(2g' + f') + \\ + I_5 \text{cos}(2g' + 2f') + I_6 \text{cos}(2g' + 3f'), \quad (2.3)$$

$$l = l_0 + l_1 t + l_2 \text{cos} g' + l_3 \text{cos} 2g' + l_5 \text{sen} f' + l_6 \text{sen}(2g' + f') + \\ + l_7 \text{sen}(2g' + 3f'), \quad (2.4)$$

$$g = g_0 + g_1 t + g_2 \text{cos} g' + g_3 \text{sen} 2g' + g_4 \text{cos} 3g' + g_5 \text{sen} f' + \\ + g_6 \text{sen}(2g' + f') - g_7 \text{sen}(2g' + 2f') + g_8 \text{sen}(2g' + 3f'), \quad (2.5)$$

$$h = h_0 + h_1 t + h_2 \text{cos} g' + h_3 \text{sen} 2g' + h_4 \text{cos} 3g' + h_5 \text{sen} f' + \\ + h_6 \text{sen}(2g' + f') + h_7 \text{sen}(2g' + 2f') + h_8 \text{sen}(2g' + 3f'), \quad (2.6)$$

Os coeficientes das variáveis são funções dos elementos keplerianos clássicos  $a$ ,  $e$ ,  $I$ , sendo:

$a$  - semi-eixo maior,

$e$  - excentricidade,

$I$  - inclinação,

Tem-se ainda:

$l = M$  - anomalia média,

$g = \omega$  - argumento do perigeu,

$h = \Omega$  - ascensão reta do nodo ascendente,

$f$  - anomalia verdadeira

Estas equações, em elementos keplerianos, podem ser escritas em forma simplificada aproximada, apresentando termos constantes, perturbações seculares e termos com uma função trigonométrica, seno ou co-seno, para descreverem as perturbações periódicas.

As perturbações provocadas por um terceiro corpo, segundo Cook (1962), têm características seculares em " $\Omega$ " e " $\omega$ " e de longo período nos outros elementos, exceto para "a", que em primeira aproximação não é perturbado.

As perturbações provocadas pelos efeitos não-gravitacionais, segundo Cook (1962) e Lāla (1974), têm para a pressão de radiação características periódicas para todos os elementos da órbita e para o arrasto atmosférico características periódicas e seculares em todos os elementos da órbita, sendo as mais importantes no semi-eixo maior e na excentricidade.

A análise da origem das perturbações e de como estas atuam em elementos osculadores da órbita de um satélite mostra que uma tentativa de representar tais perturbações através de expressões simplificadas que se aproximam das expressões reais das perturbações, deve conter termos constantes, lineares e quadráticos em  $t$ , para representar as perturbações seculares e de longo período, e termos com funções trigonométricas de seno ou co-seno ou polinômios, para perturbações de curto período.

Esta aproximação é bastante válida, tendo em vista que o conjunto de perturbações seculares e periódicas dos elementos da órbita de um satélite se somam no tempo e a resultante pode ser descrita, por trechos, por uma equação simplificada que considere que:

- Os termos seculares devidos ao geopotencial e a outras perturbações se somam linearmente no tempo.
- Os termos de longo período compõem-se de senos e co-senos e podem ser representados por pequenos arcos de parábola de um período orbital, que é muito menor que os períodos típicos destas perturbações, descritos por um termo quadrático em  $t$ .
- Os termos seculares oriundos do arrasto atmosférico ajustam-se melhor com a inclusão de um termo quadrático em  $t$ , nas equações re

representativas das perturbações, como demonstrado em Silva (1982).

- Os termos de curto período decorrentes do arrasto atmosférico e da pressão de radiação podem ser negligenciados devido a sua pequena magnitude.
- Os termos de curto período decorrentes dos efeitos gravitacionais podem ser modelados em analogia com as Equações de Brouwer. Para tanto, devem constar de termos trigonométricos em seno ou co-seno, que apresentam fase, amplitude e uma frequência de variação aproximada como um valor médio da ordem de grandeza da frequência orbital do satélite. Esta aproximação é válida, pois termos com frequência mais baixa podem ser representados por outros termos da equação parametrizada, e termos com frequência muito alta geralmente apresentam amplitudes pequenas, podendo ser negligenciados. Podem-se adicionar também termos polinomiais ao modelo para melhor ajuste das equações.

A forma geral, portanto, para a representação simplificada das equações de variação dos elementos da órbita é do tipo:

$$h(X,t) = \sum_{n=1}^m X_n t^{n-1} + \sum_{q=1}^p f_q(t), \quad (2.7)$$

onde  $f_q(t)$  são funções trigonométricas do tempo.

## 2.2 - ESCOLHA DAS VARIÁVEIS

Os elementos keplerianos clássicos ( $a, e, I, \omega, \Omega, M$ ), representados na Figura 2.2, não constituem o melhor conjunto de variáveis para as equações simplificadas.

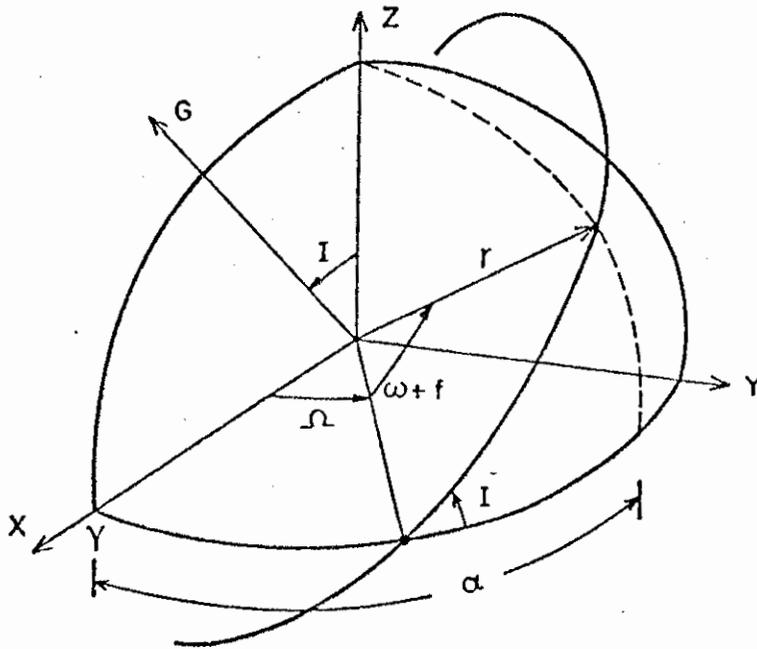


Fig. 2.2 - Esquema da órbita de um satélite representada nos elementos keplerianos clássicos.

Os elementos orbitais clássicos apresentam indeterminações para um conjunto muito importante de órbitas equatoriais e circulares. Para  $e = 0$  o perigeu da órbita  $e$ , conseqüentemente,  $\omega$  e  $M$  ficam indeterminados; para  $I = 0$  o nodo ascendente  $e$ , conseqüentemente,  $\Omega$  ficam indeterminados.

Estas indeterminações podem ser removidas através da escolha de um conjunto apropriado de variáveis não-singulares.

Escolhe-se aqui o conjunto de variáveis equinociais, empregado há muito tempo em Mecânica Celeste e definido, em termos de elementos keplerianos, pelas expressões (Eckstein, 1978):

$$a^* = a, \quad (2.8)$$

$$h = e \sin(\Omega + \omega), \quad (2.9)$$

$$\ell = \text{ecos}(\Omega + \omega) , \quad (2.10)$$

$$p = \text{sen} \frac{I}{2} \cos \Omega , \quad (2.11)$$

$$q = \text{sen} \frac{I}{2} \sin \Omega , \quad (2.12)$$

$$\bar{L} = \Omega + \omega + M . \quad (2.13)$$

Estes elementos são adimensionais, exceto  $a^*$ , e a escolha de  $\text{sen} \frac{I}{2}$  na definição de  $p$  e  $q$  destina-se a eliminar ambiguidades entre órbita direta e retrógrada que poderiam ocorrer se fosse adotado  $\text{sen} I$ .

Com estas variáveis é possível calcular o vetor de estado de um satélite através das expressões (Eckstein, 1978):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{a^* (1-h^2-\ell^2)}{1+h\text{sen}L+\ell\text{cos}L} A \begin{pmatrix} \text{cos}L \\ \\ \text{sen}L \end{pmatrix} , \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \frac{a^*n}{(1-h^2-\ell^2)^{\frac{1}{2}}} A \begin{pmatrix} -h-\text{sen}L \\ \\ \ell + \text{cos}L \end{pmatrix} , \quad (2.15)$$

onde  $L = \Omega + \omega + f$ , e

$$A = \begin{pmatrix} 1-2p^2 & 2pq \\ 2pq & 1-2q^2 \\ 1-2p\sqrt{1-p^2-q^2} & 2q\sqrt{1-p^2-q^2} \end{pmatrix} , \quad (2.16)$$

$$\cos L = [\cos L_E - \ell + h \left( \frac{\ell \sin L_E - h \cos L_E}{1 + \sqrt{1 - h^2 - \ell^2}} \right)] / (1 - h \sin L_E - \ell \cos L_E), \quad (2.17)$$

$$\sin L = [\sin L_E - h - \ell \left( \frac{\ell \sin L_E - h \cos L_E}{1 + \sqrt{1 - h^2 - \ell^2}} \right)] / (1 - h \sin L_E - \ell \cos L_E), \quad (2.18)$$

sendo  $L_E$  obtido pela equação de Kepler modificada:

$$L_E - \ell \sin L_E + h \cos L_E = \bar{L} = \bar{L}_0 + n(t - t_0), \quad (2.19)$$

onde  $n$  é dado pela equação do movimento médio:

$$n = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{(a^*)^3}}}{}, \quad (2.20)$$

onde

$\mu = 398601,3 \text{ km}^3/\text{s}^2$  - constante gravitacional terrestre.

Segundo Eckstein (1978), podem-se calcular os elementos equinociais a partir do vetor de estado, da seguinte forma:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (2.21)$$

$$v = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} D_X &= Y\dot{Z} - Z\dot{Y} \\ D_Y &= Y\dot{Z} - Z\dot{X} \\ D_Z &= X\dot{Y} - Y\dot{X} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$D = \sqrt{D_X^2 + D_Y^2 + D_Z^2}, \quad (2.24)$$

$$p = D_X / \sqrt{2D(D+D_Z)} \quad , \quad (2.25)$$

$$q = D_Y / \sqrt{2D(D+D_Z)} \quad , \quad (2.26)$$

$$a^* = \left( \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right)^{-1} \quad , \quad (2.27)$$

$$\text{sen} L = (Y \sqrt{1-p^2-q^2} + Zq) / (r \sqrt{1-p^2-q^2}) \quad , \quad (2.28)$$

$$\text{cos} L = (X \sqrt{1-p^2-q^2} - Zp) / (r \sqrt{1-p^2-q^2}) \quad , \quad (2.29)$$

$$h = -\text{sen} L - \frac{D}{\mu} \left( \dot{X} - \dot{Z} \frac{p}{\sqrt{1-p^2-q^2}} \right) \quad , \quad (2.30)$$

$$\ell = -\text{cos} L + \frac{D}{\mu} \left( \dot{Y} + \dot{Z} \frac{q}{\sqrt{1-p^2-q^2}} \right) \quad , \quad (2.31)$$

$$\Gamma = L_E - \ell \text{sen} L_E + h \text{cos} L_E \quad , \quad (2.32)$$

$$\Gamma_0 = L - n(t-t_0) \quad , \quad (2.33)$$

onde:

$$L_E = \text{arc tan} \left( \frac{\text{sen} L_E}{\text{cos} L_E} \right) \quad , \quad (2.34)$$

$$\text{sen} L_E = \frac{[\text{sen} L [1 - \ell^2 / (1 + \sqrt{1 - \ell^2 - h^2})] + \ell h \text{cos} L / (1 + \sqrt{1 - \ell^2 - h^2}) + h]}{(1 + \ell \text{cos} L + h \text{sen} L)} \quad , \quad (2.35)$$

$$\text{cos} L_E = \frac{[\text{cos} L [1 - h^2 / (1 + \sqrt{1 - \ell^2 - h^2})] + h \text{sen} L / (1 + \sqrt{1 - \ell^2 - h^2}) + \ell]}{(1 + \ell \text{cos} L + h \text{sen} L)} \quad , \quad (2.36)$$

São aparecerão singularidades nas Equações 2.28 a 2.31, quando  $p^2 + q^2 = 1$ . Para conhecer o caso físico em que isto ocorre, é necessário fazer as transformações inversas das Equações 2.8 a 2.13, que são:

$$a = a^* , \quad (2.37)$$

$$e = \sqrt{h^2 + \ell^2} , \quad (2.38)$$

$$I = 2 \text{ arc sen. } (\sqrt{p^2 + q^2}) , \quad (2.39)$$

$$\Omega = \text{arc tan } (p/q) , \quad (2.40)$$

$$\omega = \text{arc tan } (h/\ell) - \Omega , \quad (2.41)$$

$$M = \Gamma - \Omega - \omega , \quad (2.42)$$

Logo para  $p^2 + q^2 = 1$ , tem-se pela Equação 2.39 que:

$$I = 2 \text{ arc sen } 1 = \pi . \quad (2.43)$$

Isto equivale ao caso de uma órbita equatorial retrógrada, que é totalmente não-usual; logo as Equações de transformação 2.21 a 2.36 são válidas para todos os casos usuais.

### 2.3 - EQUACIONAMENTO

Para poder escolher o formato da equação modelada, bem como o melhor conjunto de valores iniciais, para cada um dos elementos equinociais, adota-se o seguinte procedimento geral, lembrando-se que a validade do ajuste é por um período nodal:

- 1) Efetua-se a propagação numérica ao longo de um período orbital, no conjunto de variáveis equinociais, para gerar as observações.

- 2) Escolhe-se o formato de cada equação modelada, obedecendo à forma geral dada pela Equação 2.7.
- 3) Adota-se como valor inicial de  $X_{i1} \cong h_{i0}$  o valor observado de cada elemento equinocial em  $t = t_0$ .
- 4) As condições iniciais para as frequências das funções trigonométricas são grosseiramente aproximadas por múltiplos ou submúltiplos da frequência orbital do satélite, calculada pela Equação 2.20 em  $t = t_0$ .
- 5) As condições iniciais para os demais coeficientes são calculados comparando as curvas obtidas pelas equações modeladas com as observações obtidas pela propagação numérica. Quando esta comparação não for possível, as condições iniciais serão consideradas nulas.

As equações adotadas foram:

Para  $a^*$ :

$$a^* = a_1^* + a_2^*t + a_3^*t^2 + a_4^*t^3 + a_5^*t^4 + a_6^*t^5 + a_7^*\cos(a_8^* + a_9^*t). \quad (2.44)$$

Para  $h$ :

$$h = h_1 + h_2t + h_3t^2 + h_4\cos(h_5 + h_6t) + h_7\sin(h_8 + h_9t) + \\ - h_{10}\cos(h_{11} + h_{12}t). \quad (2.45)$$

Para  $l$ :

$$l = l_1 + l_2t + l_3t^2 + l_4\sin(l_5 + l_6t) - l_7\sin(l_8 + l_9t). \quad (2.46)$$

Para  $p$ ,  $q$  e  $\bar{L}$ :

$$h_i = h_{i1} + h_{i2}t + h_{i3}t^2 + h_{i4}\cos(h_{i5} + h_{i6}t), \quad (2.47)$$

sendo  $0 \leq t \leq t_n$ , onde  $t_n$  = período orbital nodal,

As curvas das observações resultantes da propagação numérica, bem como o conjunto de valores iniciais para cada elemento, para os exemplos do Capítulo 5, encontram-se nos Apêndices A e B.

## CAPÍTULO 3

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

O procedimento a ser utilizado para o ajuste dos parâmetros das expressões modeladas, como foi dito na Introdução, faz uso da teoria de estimação de parâmetros. Será utilizado um estimador de mínima variância não-tendencioso, baseado na técnica de filtragem ótima desenvolvida por Kalman.

O estimador nada mais é que um procedimento numérico estocástico que processa de forma sequencial as observações simuladas, para deduzir os parâmetros procurados, utilizando informações da dinâmica do sistema, através das expressões modeladas, das observações e suas estatísticas de erros, do ruído dinâmico e informações sobre as condições iniciais.

Este Capítulo visa descrever os conhecimentos teóricos que serão utilizados no Capítulo seguinte para a dedução do algoritmo que será empregado; explicações mais detalhadas podem ser obtidas em Jazwinski (1970), Gelb et alii (1974), Liebelt (1967), Maybeck (1979) e Kuga (1982).

#### 3.2 - FILTRO DE KALMAN APLICADO A SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES CONTÍNUOS, COM MEDIDAS LINEARES DISCRETAS

Seja um sistema dinâmico regido pela equação diferencial:

$$\dot{X}(t) = F(t) X(t) + G(t) w(t), \quad (3.1)$$

onde:

$X(t)$  = vetor  $n$  que representa o estado,

$F(t)$  = matriz  $n \times n$  contínua e dependente do tempo,

$G(t)$  = matriz  $n \times r$  contínua e dependente do tempo,

$w(t)$  = vetor  $r$  que representa o ruído dinâmico no estado,

onde, por hipótese,  $w(t)$  é um processo gaussiano branco com estatística  $w(t) \sim N(0, Q(t))$ , que é independente de valores passados do estado dentro do intervalo de tempo considerado.

Sejam as medidas discretas do estado representadas pela Equação:

$$Y_k = H_k X_k + V_k, \text{ com } k = 1, 2 \dots n, \quad (3.2)$$

para  $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ ,

onde:

$Y_k$  = vetor  $m$  das observações efetuadas em  $t = t_k$ ,

$H_k$  = matriz  $m \times n$  limitada e não aleatória,

$V_k$  = vetor  $m$  que representa o ruído das observações, ou seja, os erros de caráter aleatório cometidos ao fazer a observação.

Por hipótese,  $V_k$  é uma sequência gaussiana branca, independente do estado e do ruído no estado e apresenta a seguinte estatística:

$$E[V_k] = 0 \text{ esperança de } V_k,$$

$$E[V_k V_j^T] = R_k \delta_{kj}^*,$$

onde:

$\delta_{kj}^*$  - função delta de Kronecker,

$R_k$  - matriz de covariância não-nula associada a  $V_k$ .

Sejam as condições iniciais gaussianas e não-tendenciosas:

$$E [X(t_0) - \hat{X}(t_0)] = 0,$$

$$E [(X(t_0) - \hat{X}(t_0)) (X(t_0) - \hat{X}(t_0))^T] = P(t_0), \quad (3.3)$$

onde:

$t_0$  = instante inicial,

$P$  = matriz de covariância do erro no estado,

$\hat{X}$  = melhor estimativa do estado no instante considerado.

O estimador, filtro de Kalman, que deduz a melhor estimativa do estado com mínima variância, é um algoritmo recursivo que executa uma sequência de propagações e atualizações no intervalo de tempo considerado,  $t_0 < t < t_n$ , com as seguintes equações:

### 1 - Propagação

- O estado é propagado integrando a Equação:

$$\dot{X}(t) = F(t) X(t) \quad (3.4)$$

do instante  $t_{k-1}^+$  ao instante  $t_k^-$ , com condição inicial  $\hat{X}_{k-1}^+$  dada em  $t_{k-1}^+$ , obtendo-se  $\hat{X}_k^-$ .

- A matriz de covariância do erro no estado é obtida pela solução da Equação de Ricatti:

$$\dot{P}(t) = F(t) P(t) + P(t) F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t), \quad (3.5)$$

do instante  $t_{k-1}^+$  ao instante  $t_k^-$ , com condição inicial  $P_{k-1}^+$  dada em  $t_{k-1}^+$ , obtendo-se  $P_k^-$ .

## 2 - Ganho de Kalman

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1} \quad (3.6)$$

## 3 - Atualização

- do estado:

$$\hat{X}_k^+ = \hat{X}_k^- + K_k [Y_k - H_k \hat{X}_k^-] \quad (3.7)$$

- da matriz de covariância do erro no estado:

$$P_k^+ = [I - K_k H_k] P_k^- \quad (3.8)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ .

Para evitar a resolução da Equação de Riccati 3.5, pode-se usar uma formulação alternativa, com o cálculo da matriz de transição de estado  $\phi(k, k-1)$  do instante  $t_{k-1}$  ao instante  $t_k$ , como em Liebelt (1967) ou em Gelb et alii (1974), através da integração da equação:

$$\dot{\phi}(t, t_{k-1}) = F(t) \phi(t, t_{k-1}), \quad (3.9)$$

com a condição inicial  $\phi(t_{k-1}, t_{k-1}) = I$ .

A vantagem deste procedimento é que ele permite discretizar nos instantes de interesse,  $t_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , o sistema contínuo regido pela Equação 3.1 da seguinte forma:

$$X_k^- = \phi(k, k-1) X_{k-1}^+ + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi(k, s) G(s) w(s) ds. \quad (3.10)$$

Dessa forma as Equações 3.4 e 3.5 podem ser substituídas respectivamente por:

$$\hat{X}_k^- = \phi(k, k-1) \hat{X}_{k-1}^+ \quad (3.11)$$

$$P_k^- = \phi(k, k-1) P_{k-1}^+ \phi(k, k-1)^T + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi(k, s) G(s) Q(s) G^T(s) \phi(k, s)^T ds. \quad (3.12)$$

O filtro funciona com o seguinte esquema:

- 1 - As equações de propagação são utilizadas para propagar a estimativa do estado e da matriz de covariância do erro no estado entre os instantes  $t_{k-1}$  e  $t_k$ , com os valores iniciais obtidos em  $t_{k-1}$ ; com isto obtêm-se  $X_k^-$  e  $P_k^-$ .
- 2 - Calcula-se o ganho de Kalman.
- 3 - Atualizam-se os valores para a estimativa do estado e da matriz de covariância do erro no estado, obtendo-se  $X_k^+$  e  $P_k^+$ .
- 4 - Faz-se a propagação do instante  $t_k$  ao instante  $t_{k+1}$ , utilizando como valores iniciais os obtidos em  $t_k$  para  $X_k^+$  e  $P_k^+$  e assim sucessivamente.

Este procedimento sequencial permite a retificação da trajetória ponto a ponto e minimiza a necessidade de memória de máquina, pois necessita-se de guardar apenas os dados referentes a um ponto para o processamento do seguinte.

### 3.3 - FILTRO DE KALMAN APLICADO A SISTEMAS NÃO-LINEARES

Tendo em vista a aplicação da técnica de Kalman no problema proposto, o qual apresenta uma série de equações com não-linearidade

dades, é necessário adotar uma aproximação para aplicações não-lineares. A mais utilizada emprega a técnica de linearização em torno de uma trajetória de referência, atualizada ponto a ponto, dando origem ao chamado filtro estendido de Kalman, descrito a seguir.

Seja um sistema dinâmico não-linear regido pela equação diferencial:

$$\dot{X}(t) = f[X(t),t] + G(t) w(t) , \quad (3.13)$$

onde:

$X(t)$  = vetor  $n$  que representa o estado;

$f[X(t),t]$  = vetor  $n$ , no qual pelo menos uma componente é função não-linear do estado;

$G(t)$  = matriz  $n \times r$  contínua e dependente do tempo;

$w(t)$  = vetor  $r$  que representa o ruído dinâmico no estado.

Novamente supõe-se que  $w(t)$  é independente de valores passados do estado e do ruído das observações dentro do intervalo de tempo considerado, tendo a estatística:

$$E[w(t)] = 0 , \quad (3.14)$$

$$E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t) \delta(t-\tau),$$

onde:

$\delta(t-\tau)$  = função delta de Dirac,

$Q$  = matriz de densidade espectral associada ao ruído dinâmico no estado.

Para implementar a técnica de Kalman, deve-se inicialmente gerar uma trajetória de referência sem a componente estocástica da Equação 3.13, dada pela equação:

$$\dot{\bar{X}} = f[\bar{X}(t), t], \quad (3.15)$$

com a condição inicial  $\bar{X}(t_0)$ .

Definindo:

$$\delta X(t) = X(t) - \bar{X}(t), \quad p/t \geq t_0 \quad (3.16)$$

com a diferença da solução real  $X(t)$  para a solução nominal  $\bar{X}(t)$ , pode-se escrever uma nova equação diferencial:

$$\delta \dot{X}(t) = \dot{X}(t) - \dot{\bar{X}}(t) = f[X(t), t] + G(t)w(t) - f[\bar{X}(t), t], \quad (3.17)$$

com a condição inicial  $\delta X(t_0)$ , cuja estatística é:

$$\delta X(t_0) \sim N[X(t_0) - \bar{X}(t_0), P(t_0)].$$

Linearizando a parte determinística da Equação 3.17 por uma expansão em série de Taylor até a primeira ordem tem-se:

$$f[X(t), t] - f[\bar{X}(t), t] = \frac{\partial f[\bar{X}(t), t]}{\partial X} \cdot \delta X(t), \quad (3.18)$$

Definindo

$$F(t) = \frac{\partial f[\bar{X}(t), t]}{\partial X}, \quad (3.19)$$

tem-se finalmente:

$$\delta \dot{X}(t) = F(t) \delta X(t) + G(t) w(t), \quad (3.20)$$

que é uma equação linear em  $\delta X(t)$ .

Para evitar a integração de uma Equação de Riccati para a propagação da covariância de  $\delta X(t)$ , escreve-se a Equação 3.20 numa forma discreta, usando a matriz de transição de estado  $\phi(t_{k+1}, t_k)$  que satisfaz:

$$\dot{\phi}(t, t_k) = F(t) \phi(t, t_k) \quad (3.21)$$

para  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$  com a condição inicial:

$$\phi(t_k, t_k) = I.$$

Considerando que os intervalos de tempo são suficientemente pequenos para que o ruído  $w$  possa ser considerado constante em cada intervalo, tem-se um "step-process", logo:

$$\delta X(t_{k+1}) = \phi(t_{k+1}, t_k) \delta X(t_k) + \Gamma(t_k) w(t_k), \quad (3.22)$$

onde

$$\Gamma(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) d\tau, \quad (3.23)$$

tendo-se por hipótese a seguinte estatística para  $w(t_k)$ :

$$E[w(t_k)] = 0,$$

$$E[w(t_k) w^t(t_j)] = Q(t_k) \delta_{kj},$$

onde:

$$\delta_{kj} = 1 \text{ ou } 0, \text{ para } k=j \text{ e } k \neq j, \text{ respectivamente.}$$

As Equações 3.22 e 3.23 fornecem a forma final da equação do sistema dinâmico, linearizada e discretizada,

Para tratar a equação das observações será adotado um procedimento semelhante,

Sejam as observações modeladas pela equação

$$Y_k = h(X(t_k), t_k) + V_k, \quad (3.24)$$

onde:

$Y_k$  = vetor  $m$  das observações efetuadas em  $t = t_k$ ;

$h(X(t_k), t_k)$  = vetor  $m$ , função não linear do estado;

$V_k$  = vetor  $m$  que representa o ruído das observações, que, por hipótese, é independente do estado e do ruído no estado e apresenta a seguinte estatística:

$$E[V_k] = 0,$$

$$E[V_k V_j^T] = R_k \delta_{kj},$$

onde

$R_k$  = matriz de covariância associada ao ruído das observações;

$\delta_{kj} = 1$  ou  $0$  para  $k=j$  ou  $k \neq j$ , respectivamente.

Analogamente à Equação 3.15, lineariza-se a Equação 3.24 em torno do estado nominal, definindo inicialmente a observação nominal:

$$Y_k = h[X(t_k), t_k]. \quad (3.25)$$

A diferença entre a real  $Y_k$  e a nominal  $\bar{Y}_k$  é dada por:

$$\delta Y_k = Y_k - \bar{Y}_k \quad (3.26)$$

Adotando procedimento de linearização análogo ao adotado para a equação do estado, tem-se:

$$\delta Y_k = H(t_k) \delta X(t_k) + V_k, \quad (3.27)$$

que é linear, onde  $H(t_k)$  é da forma:

$$H(t_k) = \frac{\partial h(\bar{X}(t_k), t_k)}{\partial X} \quad (3.28)$$

Em resumo, partindo do sistema não-linear dados pelas Equações 3.13 e 3.24, chega-se ao sistema linearizado representando pelas Equações 3.22, 3.23 e 3.27.

A trajetória de referência deve ser atualizada ponto a ponto adotando:

$$\bar{X}(t_k) = \hat{X}^+(t_k), \quad (3.29)$$

que é a mais recente estimativa corrente do estado.

A partida é feita com

$$\bar{X}(t_0) = \hat{X}(t_0), \quad (3.30)$$

tendo-se  $\delta X(t_0) \sim N(0, P(t_0))$ .

Isto permite que se gerem os valores nominais a partir da própria estrutura recursiva do filtro, linearizando as equações a cada passo e minimizando  $\delta X(t)$ .

Dessa forma o filtro estendido de Kalman, analogamente ao caso linear, tem as seguintes equações:

1 - Propagação

- do estado:

$$\hat{X}_{k+1}^- = \hat{X}_k^+ + \int_{t_k^+}^{t_{k+1}^+} f[\hat{X}(t), t] dt; \quad (3.31)$$

- da matriz de covariância do erro no estado:

$$P_{k+1}^- = \phi_{(k+1,k)} P_k^+ \phi_{(k+1,k)}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T. \quad (3.32)$$

2 - Ganho de Kalman

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}. \quad (3.33)$$

3 - Atualização

- do estado:

$$\hat{X}_{k+1}^+ = \hat{X}_{k+1}^- + K_{k+1} [Y_{k+1} - h_{k+1}(\hat{X}_{k+1}^-)]; \quad (3.34)$$

- da matriz de covariância do erro no estado:

$$P_{k+1}^+ = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1}^-. \quad (3.35)$$

O esquema de aplicação das equações do filtro é semelhante ao do caso linear.



## CAPÍTULO 4

### ALGORITMO DO PROCEDIMENTO

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Para desenvolver o algoritmo de ajuste das expressões modeladas, devem-se construir as equações do filtro aplicando o desenvolvimento do capítulo anterior, considerando que as equações modeladas a serem ajustadas, desenvolvidas para os elementos equinociais no Capítulo 2, apresentam-se não-lineares.

Como descrito na Introdução, as observações são simuladas em um gerador preciso de órbita que trabalha integrando as equações do movimento do satélite em variáveis cartesianas, ponto a ponto, ao longo de um período orbital modal, partindo de condições iniciais dadas.

#### 4.2 - PROCEDIMENTO DE AJUSTE

Com a integração numérica da equação diferencial das forças que atuam no satélite:

$$\dot{Z} = f(Z, t) , \quad (4.1)$$

onde  $t_0 \leq t \leq t_n$  e  $t_n - t_0$  é igual a um período nodal, obtêm-se o vetor de estado  $Z(t_k)$  do satélite em cada instante  $t_k$  da órbita, que, transformado de variáveis métricas em elementos equinociais, fornecerá o vetor de observações simulado  $Y(t_k)$ .

Organizando as observações para cada instante  $t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , pode-se representá-las pela equação:

$$Y_i(t_k) = h_i[X_i(t_k), t_k] + V_i(t_k) , \quad (4.2)$$

onde

$t_k$  = instante da observação;

$Y_i(t_k)$  = observação simulada de cada um dos elementos equinociais no instante  $t_k$ ,  $i = 1 \dots 6$ ;

$h_i(X_i, t_k)$  = equação modelada de cada um dos elementos equinociais a ser ajustado, o qual segue o formato geral da Equação 2.7;

$X_i(t_k)$  = vetor dos parâmetros de cada equação a serem estimados, conforme os modelos estabelecidos no Capítulo 2;

$V_i(t_k)$  = componente que representa o ruído na  $i$ -ésima medida no instante  $t_k$ .

Uma vez que se consideram os  $V_i$  com distribuição normal de média nula e variância definida, completamente independente entre si, pode-se caracterizá-los como uma sequência branca gaussiana com a seguinte estatística:

$$E[V_i(t_k)] = 0 ,$$

$$E[V_i(t_k)V_i(t_j)] = R_i(t_k) \delta_{kj} , \quad (4.3)$$

onde

$R_i(t_k)$  = variância associada ao ruído nas medidas no instante  $t_k$ ,

$\delta_{kj}$  = função delta de Kronecker.

Seguindo um procedimento análogo ao apresentado na Seção 3.3, efetua-se a linearização da Equação 4.2 em torno do estado nominal  $\bar{X}_i$  de forma que:

$$Y_i(t_k) = h[\bar{X}_i(t_k), t_k] ; \quad (4.4)$$

logo:

$$\delta X_i(t_k) = X_i(t_k) - \bar{X}_i(t_k) , \quad (4.5)$$

$$\delta Y_i(t_k) = Y_i(t_k) - \bar{Y}_i(t_k) . \quad (4.6)$$

Com uma expressão análoga a executada na Equação 3.27, tem-se

$$\delta Y_i(t_k) = H_i(t_k) \delta X_i(t_k) + V_i(t_k) , \quad (4.7)$$

onde

$$H_i(t_k) = \frac{\partial h[X_i(t_k), t_k]}{\partial X} . \quad (4.8)$$

Substituindo  $\delta X_i(t_k) = X_i(t_k) - \bar{X}_i(t_k)$  na Equação 4.7, tem-se

$$H_i(t_k)X_i(t_k) + V_i(t_k) = \delta Y_i(t_k) + H_i(t_k)\bar{X}_i(t_k) . \quad (4.9)$$

Simplificando a notação tem-se para a equação de observação linearizada

$$Y_i(t_k) = \delta Y_i(t_k) + H_i(t_k) \bar{X}_i(t_k) . \quad (4.10)$$

É importante ressaltar que o estado  $\bar{e}$  é representado pelos parâmetros de cada um dos vetores  $X_i$ , onde  $i = 1, \dots, 6$ , sendo as componentes destes vetores, estimadas em  $t = t_n$ , utilizados no procedimento de propagação descrito na Seção 4.5.

Tendo em vista o desenvolvimento anterior, as equações no filtro estendido de Kalman ficam:

## 1 - Propagação

- do estado:

$$\widehat{X}_{ik+1}^- = \phi_{i(k+1,k)} \widehat{X}_{ik}^+ ; \quad (4.11)$$

- da matriz de covariância do erro no estado:

$$P_{ik+1}^- = \phi_{i(k+1,k)} P_{ik}^+ \phi_{i(k+1,k)}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k . \quad (4.12)$$

Entretanto, deve-se lembrar que as equações do movimento escritas em função dos elementos equinociais sofrem alteração somente na variável temporal. Os parâmetros das expressões que as representam não se alteram no intervalo de tempo considerado, o que equivale a dizer que o estado  $X_i$  é estacionário e o procedimento de estimação busca apenas ajustá-lo para melhor representar o movimento orbital do satélite. Logo, tem-se que o estado não evolui na propagação de  $t_k$  a  $t_{k+1}$ , e a matriz de transição será unitária, ou seja:

$$\phi_{i(k+1,k)} = I . \quad (4.13)$$

Por hipótese adicional, considera-se neste trabalho que o ruído no estado é nulo; tem-se, portanto, que as Equações 4.11 e 4.12 se transformarão em:

$$\widehat{X}_{ik-1}^- = \widehat{X}_{ik}^+ \quad (4.14)$$

e

$$P_{ik+1}^- = P_{ik}^+ . \quad (4.15)$$

## 2 - Cálculo do resíduo estimado

$$Y_{ik+1} = \delta Y_{ik+1} + H_{ik+1} \widehat{X}_{ik+1} , \quad (4.16)$$

onde

$$\bar{X}_{ik+1} = \hat{X}_{ik+1}^- ,$$

$$\delta Y_{ik+1} = Y_{ik+1} - h_i[\bar{X}_{ik+1}, t_{k+1}] ,$$

$$H_{ik+1} = \frac{\partial h_i[\bar{X}_{ik+1}, t_{k+1}]}{\partial X} , \text{ derivada calculada no estado propagado,}$$

e

$Y_{ik+1}$  = observação do  $i$ -ésimo elemento no instante  $t_{k+1}$ ,

$h_i[\bar{X}_{ik+1}, t_{k+1}]$  = função modelada calculada no estado propagado.

### 3 - Cálculo do ganho de Kalman

$$K_{ik+1} = P_{ik+1}^- H_{ik+1}^T [R_{ik+1} + H_{ik+1} P_{ik+1}^- H_{ik+1}^T]^{-1} . \quad (4.17)$$

### 4. Atualização

- do estado:

$$\hat{X}_{ik+1}^+ = \hat{X}_{ik+1}^- + K_{ik+1} [Y_{ik+1} - H_{ik+1} \hat{X}_{ik+1}^-] ; \quad (4.18)$$

- da matriz de covariância do erro no estado:

$$P_{ik+1}^+ = P_{ik+1}^- - K_{ik+1} H_{ik+1} P_{ik+1}^- . \quad (4.19)$$

A cada passo substituem-se os índices e recomeça-se o processo até  $t_k = t_n$ .

### 4.3 - DETERMINAÇÃO DOS VETORES DE DERIVADAS PARCIAIS

Para determinação dos vetores  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  de derivadas parciais, utilizar-se-á a definição do vetor  $H_i$  dada pela Equação 3.28, aplicada às Equações 2.44 a 2.47.

Logo, têm-se para os elementos  $p$ ,  $q$  e  $\bar{L}$ :

$$\begin{aligned} H_{i1} &= 1, \\ H_{i2} &= t, \\ H_{i3} &= t^2, \\ H_{i4} &= \cos (X_{i5} + X_{i6} t), \\ H_{i5} &= -X_{i4} \operatorname{sen} (X_{i5} + X_{i6} t), \\ H_{i6} &= -X_{i4} t \operatorname{sen} (X_{i5} + X_{i6} t). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Para o elemento  $\ell$  têm-se:

$$\begin{aligned} H_{31} &= 1, \\ H_{32} &= t, \\ H_{33} &= t^2, \\ H_{34} &= \operatorname{sen} (X_{35} + X_{36} t), \\ H_{35} &= X_{34} \cos (X_{35} + X_{36} t), \\ H_{36} &= X_{34} t \cos (X_{35} + X_{36} t), \\ H_{37} &= -\operatorname{sen} (X_{38} + X_{39} t), \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$H_{38} = - X_{37} \cos (X_{38} + X_{39} t) ,$$

$$H_{39} = - X_{37} t \cos (X_{38} + X_{39} t) .$$

Para o elemento h têm-se;

$$H_{21} = 1 ,$$

$$H_{22} = t ,$$

$$H_{23} = t^2 ,$$

$$H_{24} = \cos (X_{25} + X_{26} t) ,$$

$$H_{25} = - X_{24} \sin (X_{25} + X_{26} t) , \tag{4.22}$$

$$H_{26} = - X_{24} t \sin (X_{25} + X_{26} t) ,$$

$$H_{27} = \sin (X_{28} + X_{29} t) ,$$

$$H_{28} = X_{27} \cos (X_{28} + X_{29} t) ,$$

$$H_{29} = X_{27} t \cos (X_{28} + X_{29} t) ,$$

$$H_{210} = - \cos (X_{211} + X_{212} t) ,$$

$$H_{211} = X_{210} \sin (X_{211} + X_{212} t) ,$$

$$H_{212} = X_{210} t \sin (X_{211} + X_{212} t) .$$

Para o elemento a têm-se;

$$H_{11} = 1 ,$$

$$H_{12} = t ,$$

$$H_{13} = t^2 ,$$

$$H_{14} = t^3 ,$$

$$H_{15} = t^4 ,$$

$$H_{16} = t^5 , \tag{4.23}$$

$$H_{17} = \cos (X_{18} + X_{19}t) ,$$

$$H_{18} = - X_{17} \text{ sen } (X_{18} + X_{19}t) ,$$

$$H_{19} = - X_{17}t \text{ sen } (X_{18} + X_{19}t) .$$

#### 4.4 - DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA DO ERRO NO ESTADO E DO RUÍDO NAS MEDIDAS

A convergência do método para determinação dos coeficientes das equações ajustadas depende, em grande parte, de ter bons valores iniciais para as matrizes de covariância do erro no estado  $P_i(t_k)$  e do ruído nas medidas  $R_i(t_k)$ , para cada um dos elementos equino

ciais.

As matrizes de covariâncias iniciais  $P_i(t_0)$  podem ser consideradas diagonais e, para conseguir boa convergência, devem ter os elementos da diagonal da matriz ajustados iterativamente a partir da seguinte avaliação:

$$(P_i)_{jj}(t_0) \cong \frac{(X_{ij}(t_0))^2}{N_{ij}} \tag{4.24}$$

onde;

$(P_i)_{jj}(t_0)$  é o j-ésimo termo da diagonal da matriz em  $t_k=t_0$  para o i-ésimo elemento equinocial;

$X_{ij}(t_0)$  é o valor inicial atribuído ao j-ésimo coeficiente do i-ésimo elemento equinocial, avaliado na Seção 2.3.

$N_{ij}$  - valor a ser avaliado para o j-ésimo coeficiente do i-ésimo elemento equinocial.

Esta matriz é não-estacionária no tempo, pois é atualizada a cada passo pelo algoritmo do filtro estendido de Kalman.

Utilizou-se em Silva (1982) a seguinte estimativa para o desvio padrão do ruído nas observações  $V_i(t_k)$ , para os elementos keplerianos  $a, e, I, \Omega, \omega, M$ , no caso de um satélite em órbita baixa:

- elementos lineares - 10 m - 50 m;
- excentricidades -  $\leq 10^{-4}$ ;
- elementos angulares -  $\leq 10^{-4}$  rads;
- anomalia média -  $\leq 10^{-3}$  rads.

Observando as Equações de transformação 2.8 a 2.13 de elementos keplerianos em elementos equinociais, nota-se que o valor do ruído para  $a^*$  será da mesma ordem que em Silva (1982); logo tem-se:

$$\Delta a^* = \Delta a \quad (4.25)$$

Para  $\Gamma$  tem-se:

$$\Gamma + \Delta\Gamma = \Omega + \omega + M + \Delta\Omega + \Delta\omega + \Delta M; \quad (4.26)$$

logo

$$\Delta \bar{\Gamma} = \Delta \bar{\Omega} + \Delta \bar{\omega} + \Delta M ,$$

que será da mesma ordem que para a anomalia média em Silva (1982)

Para  $\ell$  tem-se que:

$$\ell + \Delta \ell = (e + \Delta e) \cos (\omega + \Omega + \Delta \omega + \Delta \Omega) , \quad (4.27)$$

substituindo  $\Omega + \omega$  por  $\tilde{\omega}$  e desenvolvendo a equação resultante, têm-se:

$$\ell + \Delta \ell = e \cos (\omega + \Delta \omega) + \Delta e \cos (\tilde{\omega} + \Delta \tilde{\omega}) \Delta e ,$$

$$\ell + \Delta \ell = e \cos \tilde{\omega} \cos \Delta \tilde{\omega} + e \sin \tilde{\omega} \sin \Delta \tilde{\omega} ;$$

logo

$$\Delta \ell \approx e \sin \tilde{\omega} \sin \Delta \tilde{\omega} , \quad (4.28)$$

que será também da mesma ordem que em Silva (1982).

Adotando desenvolvimento semelhante para os outros elementos, têm-se:

para  $h$

$$\Delta h \approx e \sin \Delta \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} ; \quad (4.29)$$

para  $p$

$$\Delta p \approx \frac{1}{2} \sin \Delta \Omega \cos \Omega + \frac{1}{2} \sin \Delta I \cos \Omega ; \quad (4.30)$$

e para q

$$\Delta q \cong \frac{1}{2} \text{sen} \Delta \Omega \text{sen} \Omega + \text{sen} \Delta \text{Icos} \frac{1}{2} \text{Icos} \Omega . \quad (4.31)$$

Todos estes elementos são da mesma ordem que em Silva (1982). O resumo dos ruídos de observação encontra-se na Tabela 4.1.

TABELA 4.1

RESUMO DOS RUÍDOS DE OBSERVAÇÃO

| ELEMENTO                         | a*<br>(m) | h                  | ℓ                  | p                  | q                  | Γ<br>(rads)        |
|----------------------------------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| R <sub>i</sub> (t <sub>0</sub> ) | 10-50     | ≤ 10 <sup>-4</sup> | ≤ 10 <sup>-4</sup> | ≤ 10 <sup>-4</sup> | ≤ 10 <sup>-4</sup> | ≤ 10 <sup>-3</sup> |

No caso supõe-se que R<sub>i</sub>(t<sub>0</sub>) é estacionário no tempo. Essa hipótese é bastante razoável, uma vez que a origem dos ruídos ou erros de observação vem da integração numérica utilizada para gerar as observações. Os erros são de precisão, de truncamento, de indeterminação na posição calculada devida ao erro na condição inicial e à falha no modelo de forças utilizado no integrador. Estes erros podem ser considerados constantes no período de ajuste.

4.5 - PROCEDIMENTO DE PROPAGAÇÃO

Tendo sido obtidos os coeficientes para as expressões modeladas no fim do intervalo de ajuste de um período nodal, pode-se propagar a órbita de um satélite utilizando o intervalo de validade do ajuste. Entretanto, para esta propagação devem-se executar algumas correções a cada novo período propagado.

Silva (1982) e Rios Neto e Silva (1983) assinalam que o coeficiente X<sub>1</sub> da Equação genérica 2.7 deve ser recalculado, e não con

siderado constante como os demais coeficientes, ao fim de cada período propagado. Tal procedimento se deve à hipótese básica admitida na introdução do trabalho de que o movimento do satélite, ao longo do período de validade do ajuste, se dá numa região de espaço vizinha daquela em que foi efetuado o ajuste dos coeficientes das expressões modeladas, portanto com uma variação negligenciável de condições ambientais que pudessem afetar o movimento orbital. Esta hipótese é básica para a validade do procedimento de interpolação, usado para o cálculo do valor dos elementos orbitais em qualquer momento no intervalo de propagação, o que resulta em que as expressões ajustadas são consideradas como resultantes de integrações de equações diferenciais em similaridade às Equações de força 4.1, e os coeficientes  $X_{ij}$  são considerados como constantes desta integração válidos por um período orbital.

O valor de  $X_{ij}$  deve, portanto, ser atualizado no final de cada período propagado, impondo-se a condição de contorno de que  $h_i(t_n) = h_i(t'_0)$ , onde  $t_n$  é o instante final de propagação de um período e  $t'_0$  é o instante inicial para o próximo período propagado. Assim, numa condição de inexistência de erros de ajustamentos;

$$h_i(t_n) = h_i(t'_0) . \quad (4.32)$$

Para a tem-se que:

$$h_1(t'_0) = X_{11}(t'_0) + X_{17}\cos X_{18} ; \quad (4.33)$$

logo

$$X_{11}(t'_0) = h_1(t_n) - X_{17}\cos X_{18} . \quad (4.34)$$

Para a tem-se que:

$$h_3(t'_0) = X_{31}(t'_0) + X_{34}\sin X_{35} - X_{37} \sin X_{38} ; \quad (4.35)$$

logo

$$X_{31}(t'_0) = h_3(t_n) - X_{34} \text{sen } X_{35} + X_{37} \text{ sen } X_{38} . \quad (4.36)$$

Para h tem-se que;

$$h_2(t'_0) = X_{21}(t'_0) + X_{24} \text{cos } X_{25} + X_{27} \text{sen } X_{28} + \\ + X_{210} \text{cos } X_{211} ; \quad (4.37)$$

logo

$$X_{21}(t'_0) = h_2(t_n) - X_{24} \text{cos } X_{25} - X_{27} \text{sen } X_{28} + \\ + X_{210} \text{cos } X_{211} . \quad (4.38)$$

Para p, q e tem-se;

$$h_i(t'_0) = X_{i1}(t'_0) + X_{i4} \text{cos } X_{i5} ; \quad (4.39)$$

logo

$$X_{i1}(t'_0) = h_i(t_n) - X_{i4} \text{cos } X_{i5} . \quad (4.40)$$

Para corrigir os erros de ajustamento das extremidades das curvas, afim de eliminar o erro de ajuste final no início da propagação de cada novo período, faz-se:

$$\hat{h}_i(t'_0) = \hat{h}_i(t_n) + \Delta h_{ip} + \Delta h_{i0} \quad (4.41)$$

para cada período propagado, onde

$$\Delta h_{i0} = \hat{h}_i(t_0) - h_{i \text{ obs.}}(t_0) , \quad (4.42)$$

sendo  $t_0$  = instante inicial do ajuste de  $h_i$  ,

e

$$\Delta h_{ip} = h_{i\text{obs.}}(t_p) - \hat{h}_i(t_p), \quad (4.43)$$

sendo  $t_p$  = instante final do ajuste de  $h_i$ .

Nas equações 4.41 a 4.43,  $h_{i\text{obs.}}(t_0)$  e  $h_{i\text{obs.}}(t_p)$  são obtidos a partir das observações de  $h_i$ .

Adicionando  $\Delta h_{ip}$  e  $\Delta h_{i0}$  às Equações 4.34, 4.36, 4.38 e 4.40, obtêm-se:

para a

$$\hat{X}_{11}(t'_0) = \hat{h}_1(t_n) + \Delta h_{1p} + \Delta h_{10} - \hat{X}_{17} \cos \hat{X}_{18}; \quad (4.44)$$

para l

$$\begin{aligned} \hat{X}_{31}(t'_0) = & \hat{h}_3(t_n) + \Delta h_{3p} + \Delta h_{30} - \hat{X}_{34} \text{sen } \hat{X}_{35} + \\ & + \hat{X}_{37} \text{sen } \hat{X}_{38}; \end{aligned} \quad (4.45)$$

para h

$$\begin{aligned} \hat{X}_{21}(t'_0) = & \hat{h}_2(t_n) + \Delta h_{2p} + \Delta h_{20} - \hat{X}_{24} \cos \hat{X}_{25} + \\ & - \hat{X}_{27} \text{sen } \hat{X}_{28} + \hat{X}_{210} \cos \hat{X}_{211}; \end{aligned} \quad (4.46)$$

para p, q e  $\bar{\Gamma}$

$$\hat{X}_{i1}(t'_0) = \hat{h}_i(t_n) + \Delta h_{ip} + \Delta h_{i0} - \hat{X}_{i4} \cos \hat{X}_{i5}; \quad (4.47)$$

onde  $\Delta h_{ip}$  e  $\Delta h_{i0}$  são constantes por todo o intervalo de propagação.

Este procedimento visa permitir a propagação das equações parametrizadas ao longo de todo o intervalo desejado, bem como manter os erros de ajustamento das equações parametrizadas constantes.



## CAPÍTULO 5

### TESTE DO PROCEDIMENTO

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

O procedimento desenvolvido é utilizável em uma gama maior de órbitas importantes do que o proposto em Silva (1982). Para avaliar a precisão de propagação do procedimento são propostos dois testes, onde se busca o ajuste das expressões modeladas com o cálculo do resíduo resultante, para comparação dos seus resultados de propagação com os obtidos numericamente. Os casos escolhidos são o satélite TIROS-N, nas mesmas condições usadas em Silva (1982), e um satélite em um caso crítico de uma órbita hipotética circular e equatorial.

As curvas de resíduo obtidas da comparação entre as observações e as curvas ajustadas estão representadas nas Seções 5.2 e 5.3, juntamente com os valores encontrados para cada coeficiente da respectiva equação parametrizada listados em seguida. Na Seção 5.4 é apresentado um teste do integrador que será utilizado como referência para os testes de propagação, apresentados na Seção 5.5, ao longo de um período de um dia.

#### 5.2 - CASO DE TESTE 1

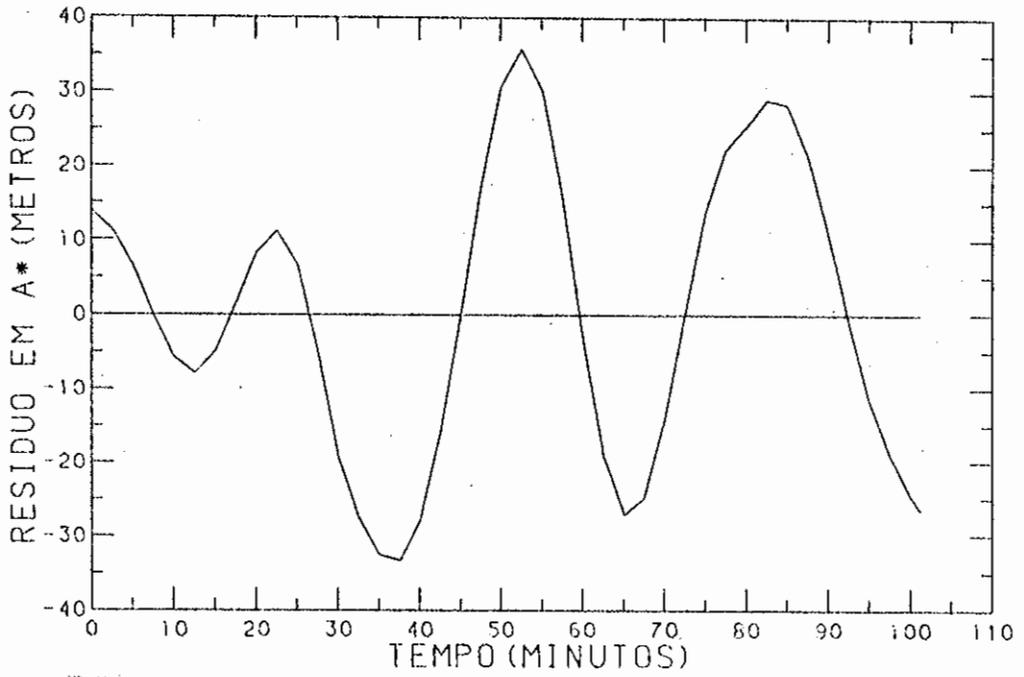
Neste teste é utilizado o satélite TIROS-N nas mesmas condições utilizadas em Silva (1982). As condições em que foram geradas numericamente as observações estão descritas no Apêndice A, juntamente com as observações em elementos equinociais e com o conjunto de valores iniciais obtido para este caso de teste.

Na Figura 5.1 observa-se que o resíduo resultante para o elemento  $a^*$  mantém-se dentro do valor estimado para a faixa de um desvio padrão do ruído de observação deste elemento, de acordo com a Tabela 4.1.

Nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.6 observa-se que os resíduos resultantes para os elementos  $h$ ,  $\ell$ ,  $\bar{L}$  mantêm-se ligeiramente abaixo do valor estimado para a faixa de um desvio padrão do ruído de observação destes elementos, de acordo com a Tabela 4.1.

Nas Figuras 5.4 e 5.5 observa-se que os resíduos resultantes dos elementos  $p$  e  $q$  mantêm-se sempre bem abaixo do valor estimado para a faixa de 1 desvio padrão do ruído de observação destes elementos, de acordo com a Tabela 4.1.

Estes resultados indicam que o ajuste das equações paramétricas para este caso de teste foi satisfatório, pois os resíduos de ajuste mantiveram-se sempre abaixo, ou no máximo da ordem de grandeza, do valor estimado para a faixa de 1 desvio padrão do ruído de observação para cada elemento equinocial.



$$a^*_1 = 7,1885606E+06$$

$$a^*_2 = 4,4161051E-02$$

$$a^*_3 = 7,3528540E-06$$

$$a^*_4 = 0$$

$$a^*_5 = 0$$

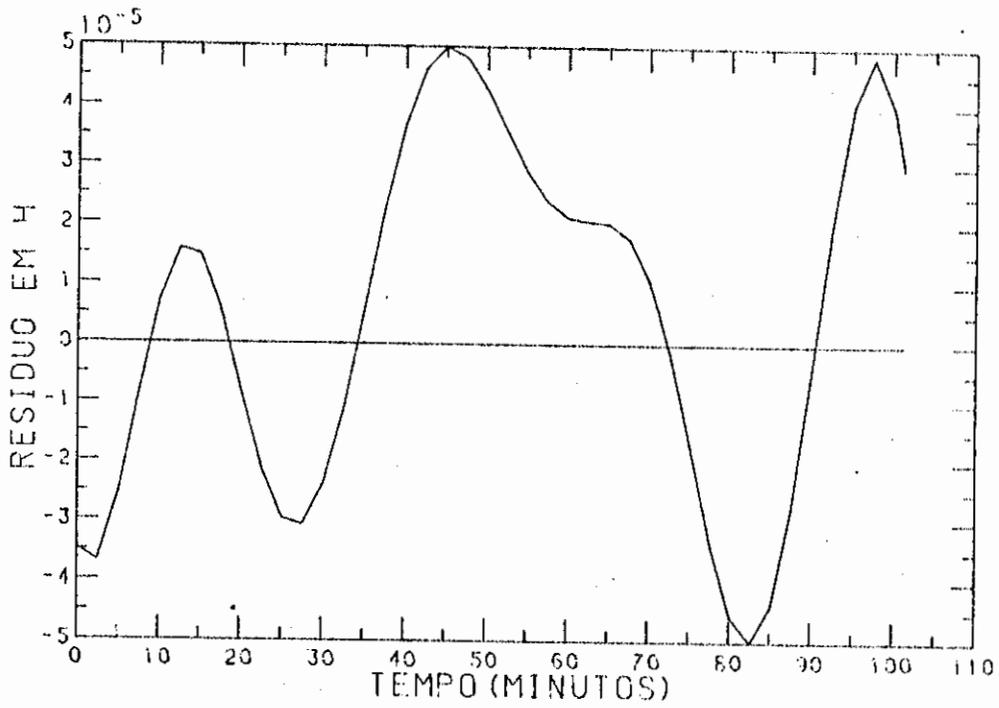
$$a^*_6 = 0$$

$$a^*_7 = 8,9273703E+03$$

$$a^*_8 = 6,1570322E-01$$

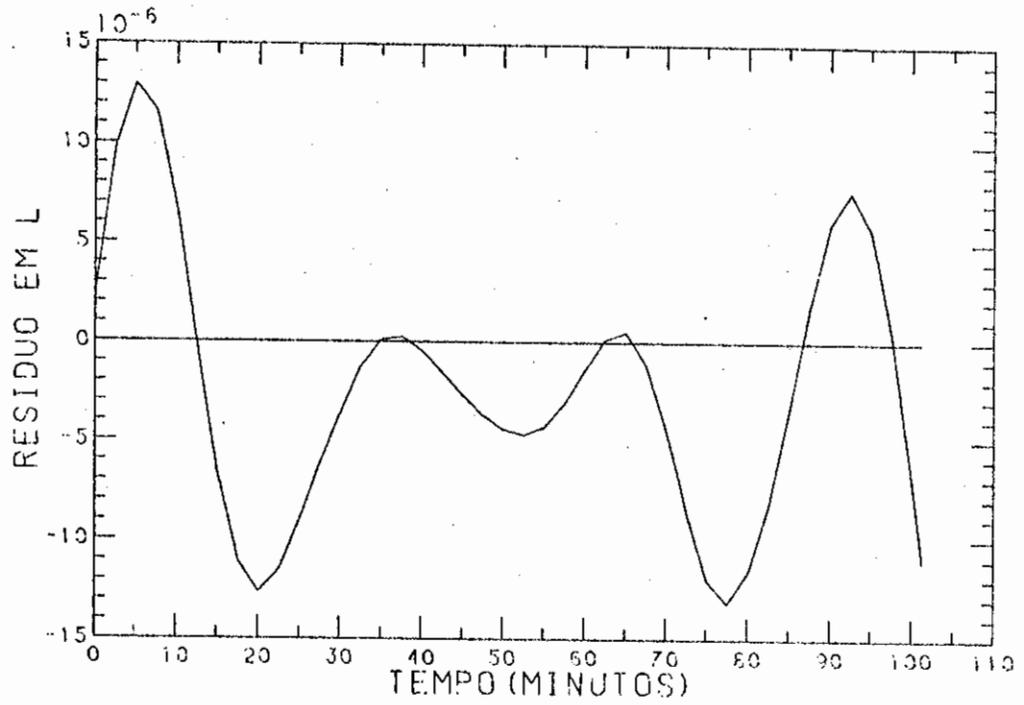
$$a^*_9 = 2,0702079E-03$$

Fig. 5.1 - Resíduo em  $a^*$  - Caso de Teste 1.



- $h_1 = 9,762333E-04$
- $h_2 = 1,607520E-09$
- $h_3 = -5,002375E-14$
- $h_4 = 3,679527E-04$
- $h_5 = 1,371790E+01$
- $h_6 = -1,132694E-03$
- $h_7 = -5,816427E-05$
- $h_8 = 2,415737E+01$
- $h_9 = -1,768626E-03$
- $h_{10} = 7,199983E-04$
- $h_{11} = 3,891659E+01$
- $h_{12} = -3,143926E-02$

Fig. 5.2 - Resíduo em h - Caso de Teste 1.



$$l_1 = 1,3486763E-03$$

$$l_2 = 9,9995746E-10$$

$$l_3 = 4,9998303E-13$$

$$l_4 = 8,9440002E-04$$

$$l_5 = 2,7681358$$

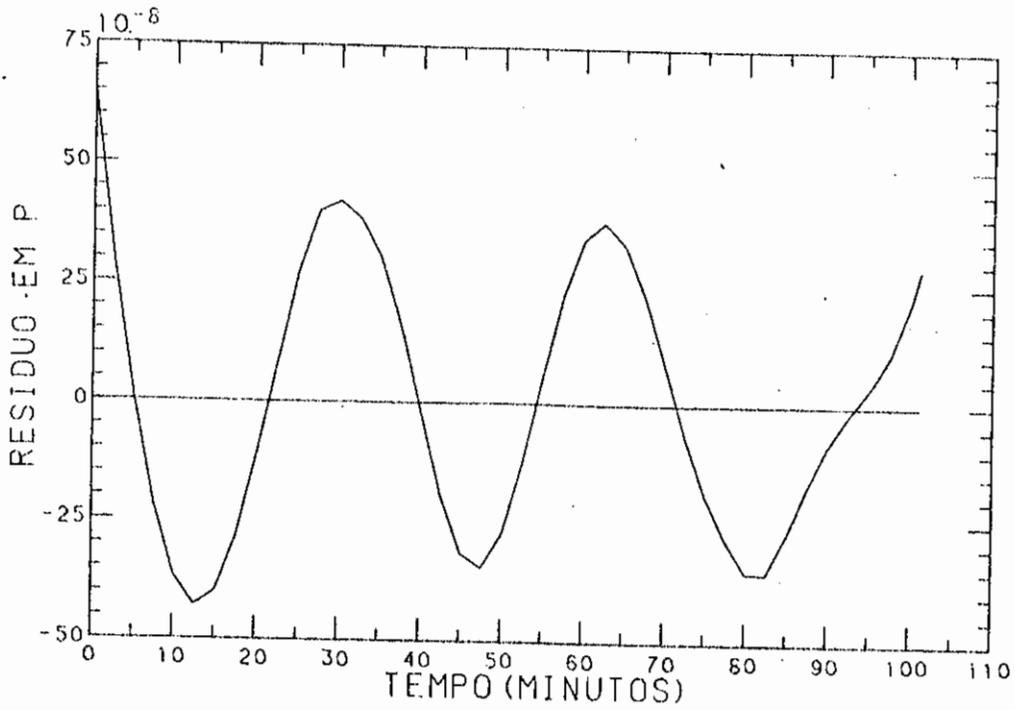
$$l_6 = 1,0389489E-03$$

$$l_7 = 7,267399E-04$$

$$l_8 = 8,2994599$$

$$l_9 = 3,1137486E-03$$

Fig. 5.3 - Resíduo em  $l$  - Caso de Teste 1.



$$p_1 = -7,4686851E-01$$

$$p_2 = -2,3867497E-08$$

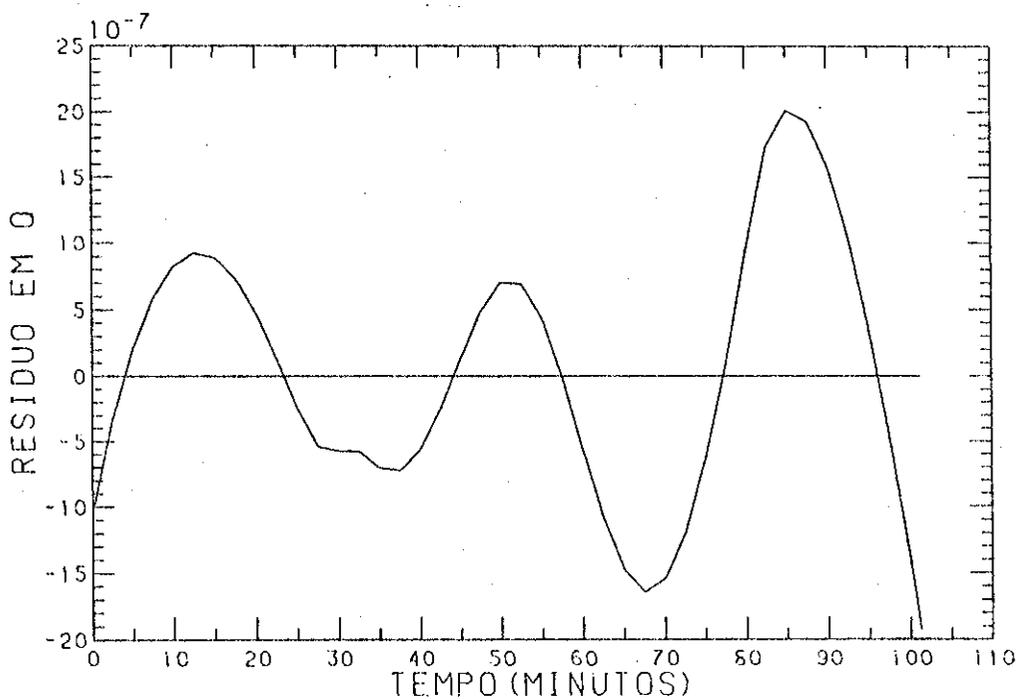
$$p_3 = -2,5846609E-13$$

$$p_4 = 3,3490406E-05$$

$$p_5 = -1,0227093$$

$$p_6 = 2,0713570E-03$$

Fig. 5.4 - Resíduo em p - Caso de Teste 1.



$$q_1 = -1,3241999E-01$$

$$q_2 = 1,4381746E-07$$

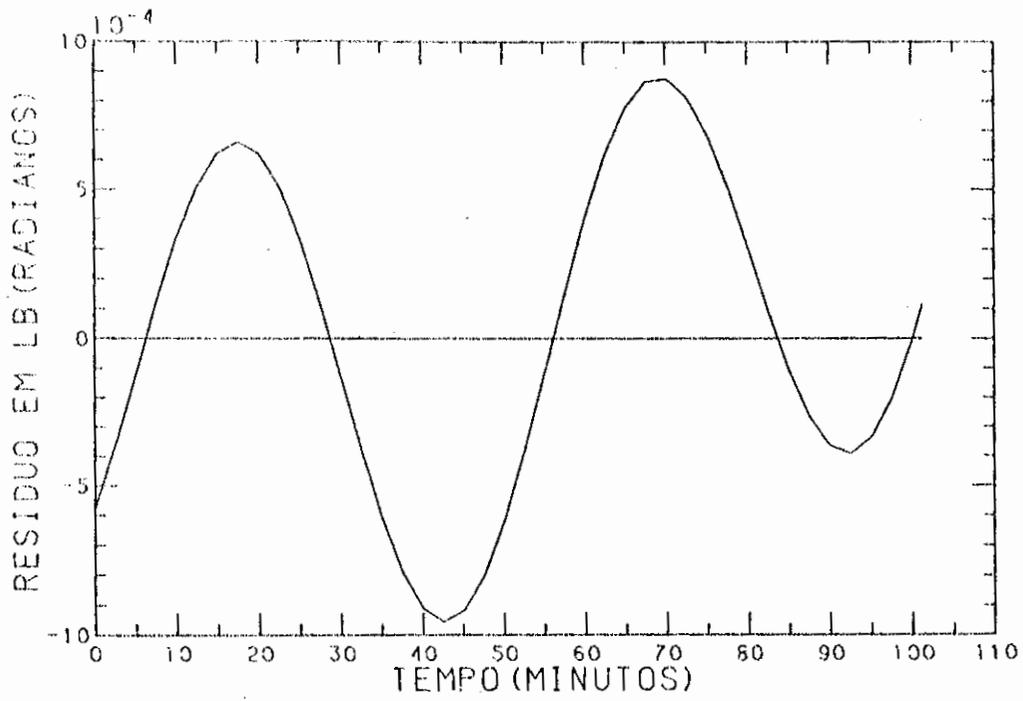
$$q_3 = 9,7527408E-13$$

$$q_4 = 7,1327343E-05$$

$$q_5 = 8,8337647E-01$$

$$q_6 = 2,0635923E-03$$

Fig. 5,5 - Resíduo em q - Caso de Teste 1.



$$\tau_1 = -2,0517413$$

$$\tau_2 = 1,0349713E-03$$

$$\tau_3 = -3,44177001E-11$$

$$\tau_4 = 1,0108715E-06$$

$$\tau_5 = -7,8886880E-09$$

$$\tau_6 = -2,1217958E-05$$

Fig. 5.6 - Resíduo em  $\Gamma$  - Caso de Teste 1.

### 5.3 - CASO DE TESTE 2

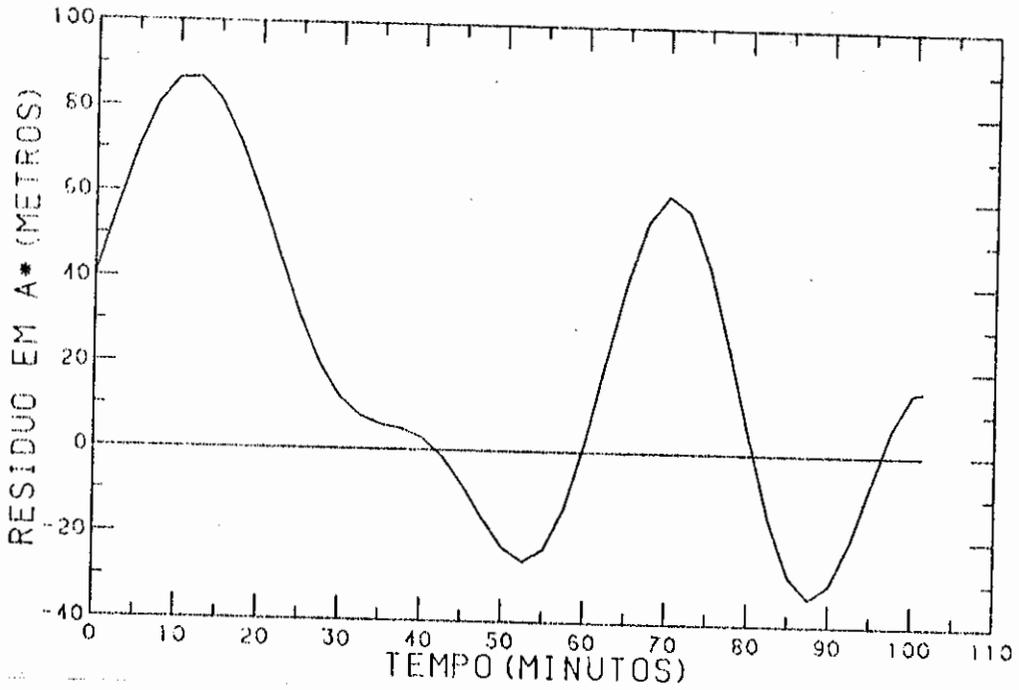
Neste teste é utilizado um satélite em uma órbita hipotética circular e equatorial simulada numericamente a partir de condições semelhantes às utilizadas no Caso de Teste 1. No Apêndice B descreve-se o procedimento utilizado para gerar as observações e apresenta-se as observações e o conjunto de valores iniciais obtidos para este caso.

Na Figura 5.7, observa-se que o resíduo resultante do elemento  $a^*$  atinge valores ligeiramente superiores, mas ainda da mesma ordem de grandeza do valor estimado para a faixa de 1 desvio padrão do ruído de observação deste elemento, de acordo com a Tabela 4.1.

Nas Figuras 5.8 e 5.9, observa-se que os resíduos resultantes dos elementos  $h$  e  $l$  mantêm-se ligeiramente abaixo do valor estimado para a faixa de 1 desvio padrão do ruído de observação destes elementos, de acordo com a Tabela 4.1.

Nas Figuras 5.10 a 5.12, observa-se que os resíduos resultantes dos elementos  $p$ ,  $q$ , e  $\bar{L}$  mantêm-se sempre bem abaixo do valor estimado para a faixa de 1 desvio padrão do ruído de observação destes elementos, de acordo com a Tabela 4.1.

Como no Caso de Teste 1, os resultados indicam que o ajuste das equações paramétricas foi satisfatório, apesar de o elemento  $a^*$  ter apresentado alguns valores de resíduo ligeiramente superiores à faixa de 1 desvio padrão do ruído de observação correspondente.



$$a^*_1 = 7,1951567E+06$$

$$a^*_2 = -5,5617065E-01$$

$$a^*_3 = -5,0590878E-04$$

$$a^*_4 = 5,4692126E-07$$

$$a^*_5 = -1,2124332E-10$$

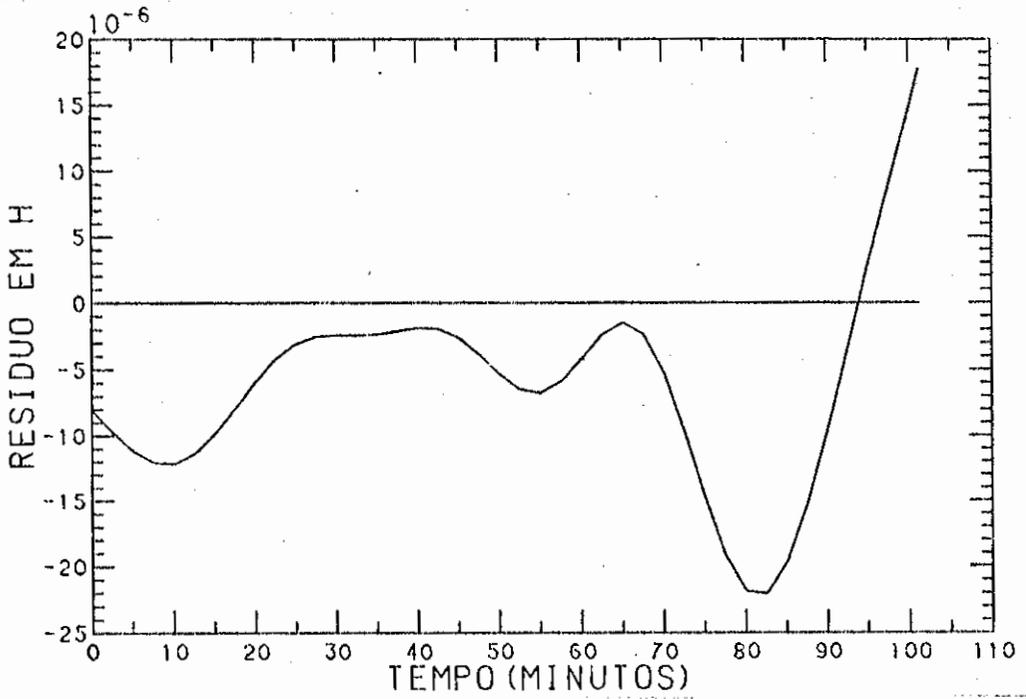
$$a^*_6 = 7,9955079E-15$$

$$a^*_7 = 1,3869373E+03$$

$$a^*_8 = 1,056621$$

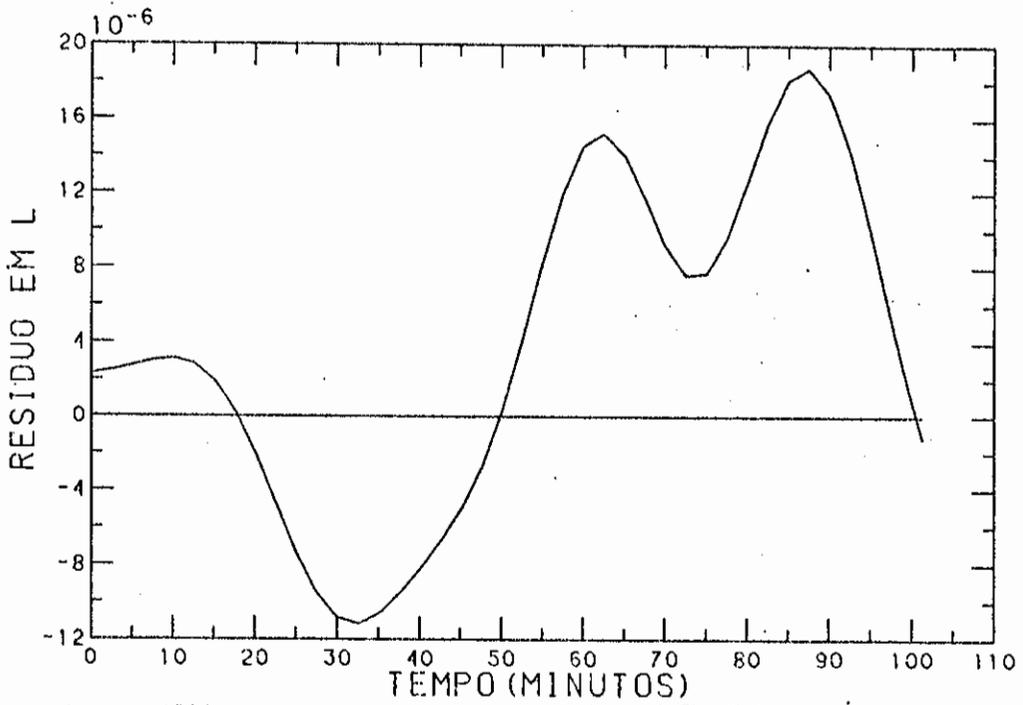
$$a^*_9 = 8,5439727E-04$$

Fig. 5.7 - Resíduo em  $a^*$ . - Caso de Teste 2.



- $h_1 = 1,175265E-03$
- $h_2 = -1,007782E-08$
- $h_3 = 5,590192E-15$
- $h_4 = 1,1299498E-03$
- $h_5 = 1,620271E+01$
- $h_6 = -1,033592E-03$
- $h_7 = 0$
- $h_8 = 0$
- $h_9 = 0$
- $h_{10} = 0$
- $h_{11} = 0$
- $h_{12} = 0$

Fig. 5.8 - Resíduo em h - Caso de Teste 2.



$$\lambda_1 = 6,0971374E-04$$

$$\lambda_2 = -9,992575E-09$$

$$\lambda_3 = 5,0384166E-13$$

$$\lambda_4 = 1,2770369E-03$$

$$\lambda_5 = 5,7840648$$

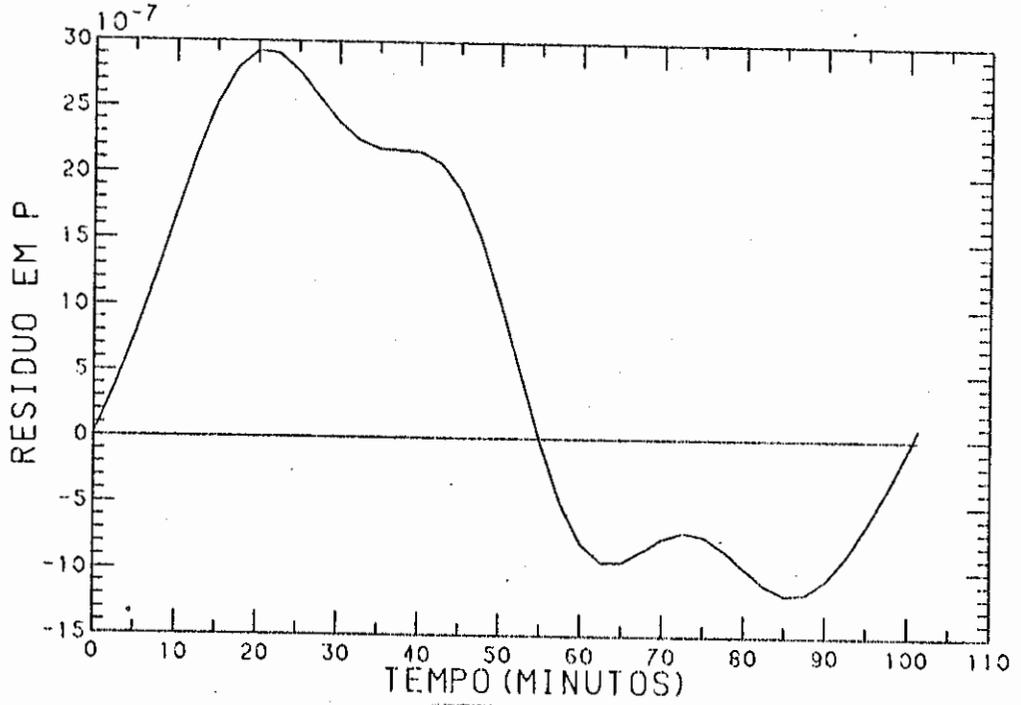
$$\lambda_6 = 1,0424965E-03$$

$$\lambda_7 = 0$$

$$\lambda_8 = 0$$

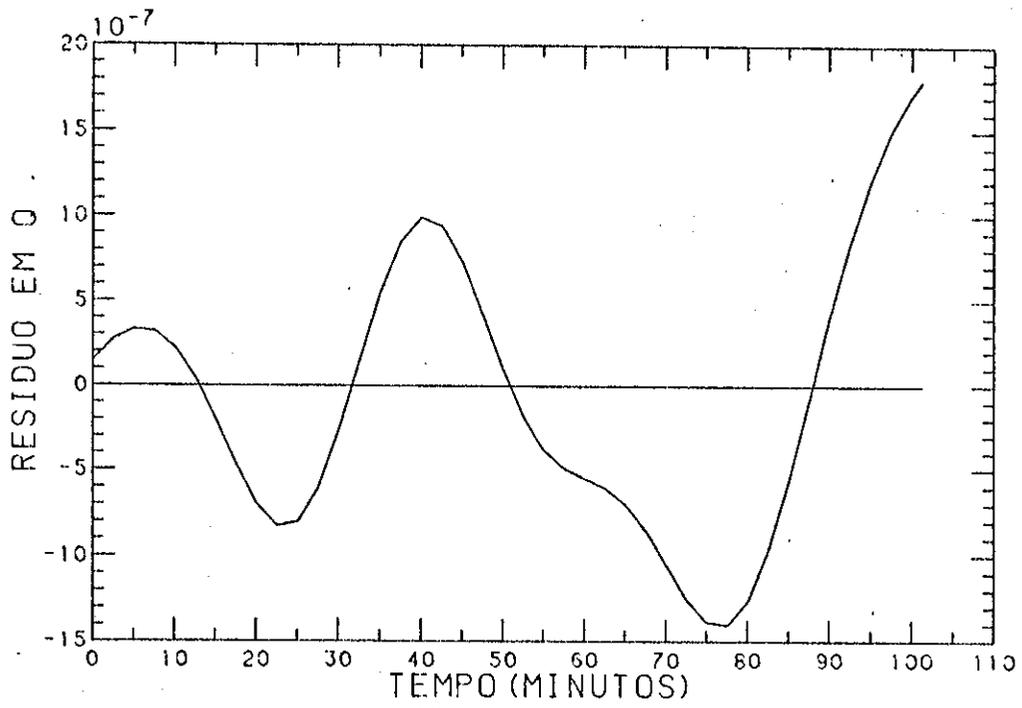
$$\lambda_9 = 0$$

Fig. 5.9 - Resíduo em  $\lambda$  - Caso de Teste 2.



$p_1 = -2,4999999E-08$   
 $p_2 = 5,5179098E-10$   
 $p_3 = 0$   
 $p_4 = 0$   
 $p_5 = 0$   
 $p_6 = 0$

Fig. 5.10 - Resíduo em p - Caso de Teste 2.



$$q_1 = -1,5E-07$$

$$q_2 = 4,1093925E-10$$

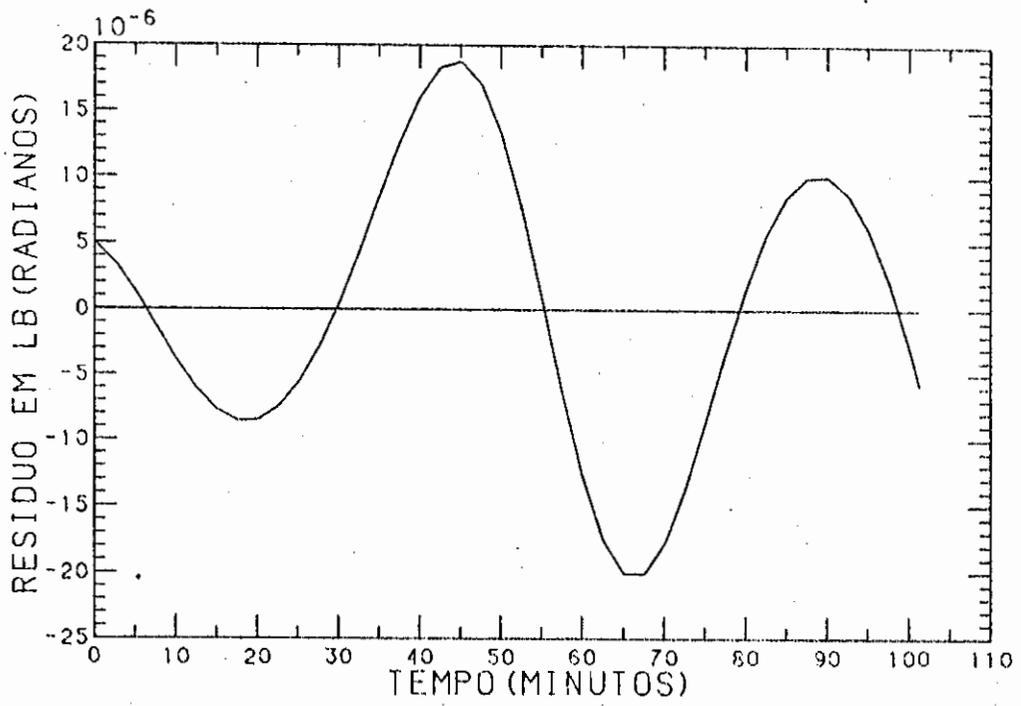
$$q_3 = 0$$

$$q_4 = 0$$

$$q_5 = 0$$

$$q_6 = 0$$

Fig. 5.11 - Resíduo em q - Caso de Teste 2.



$$\Gamma_{1,2} = -2,0523170$$

$$\Gamma_{2,2} = 1,0369447E-03$$

$$\Gamma_{3,2} = 2,1356952E-12$$

$$\Gamma_{4,2} = -4,841795E-09$$

$$\Gamma_{5,2} = 0$$

$$\Gamma_{6,2} = 0$$

Fig. 5.12 - Resíduo em  $\Gamma$  - Caso de Teste 2.

#### 5.4 - TESTE DO INTEGRADOR NUMÉRICO DE REFERÊNCIA

Para avaliar a precisão do integrador numérico, que será utilizado para gerar as referências para comparação com os testes de propagação das equações ajustadas, é feito um teste utilizando os valores fornecidos por 2 boletins APT PREDICT para o satélite TIROS-N, com cerca de 2 dias de intervalo. Os resultados deste teste aparecem na Tabela 5.1.

As condições iniciais utilizadas para integração são as mesmas que aparecem no Apêndice A, exceto para o integrador que, neste caso, é mais preciso.

Tempo total de integração  $t = 170286$  seg.

TABELA 5.1

RESULTADOS DE PROPAGAÇÃO PARA O  
INTEGRADOR NUMÉRICO DE REFERÊNCIA

| VALORES FORNECIDOS PELO BOLETIM APT PREDICT | RESULTADOS DE PROPAGAÇÃO DO INTEGRADOR NUMÉRICO | DESVIOS (m) e (m/s)     |
|---|---|-------------------------|
| X = - 964462,4 (m)                          | X = - 964899,7                                  | $\Delta X = - 437,3$    |
| Y = - 7130652,2                             | Y = - 7130723,7                                 | $\Delta Y = - 71,5$     |
| Z = - 337297,6                              | Z = - 333491,8                                  | $\Delta Z = 3805,8$     |
| $\dot{X} = - 1155,806$ (m/s)                | $\dot{X} = - 1155,351$                          | $\Delta \dot{X} = 0,46$ |
| $\dot{Y} = - 182,190$                       | $\dot{Y} = - 178,220$                           | $\Delta \dot{Y} = 3,97$ |
| $\dot{Z} = 7342,971$                        | $\dot{Z} = 7343,176$                            | $\Delta \dot{Z} = 0,21$ |

Tendo em vista os resultados apresentados na Tabela 5.1 e que o tempo total de integração a ser usado na Seção 5.5 é de um

dia, o integrador numérico de referência pode ser considerado suficientemente preciso para ser usado na comparação com os resultados de propagação das equações ajustadas.

## 5.5 - TESTES DE PROPAGAÇÃO

### 5.5.1 - CASO DE TESTE 1

Para avaliar a precisão do procedimento é feita uma propagação da órbita ao longo de um dia para o Caso de Teste 1, empregando o procedimento descrito na Seção 4.5. As condições iniciais de propagação são as mesmas utilizadas para gerar as observações empregadas no ajuste e estão descritas no Apêndice A.

Utilizam-se as Equações 4.42, 4.43 e 4.44 a fim de efetuar a correção dos desvios de ajuste inicial  $\Delta h_{i0}$  e final  $\Delta h_{ip}$ , calculados respectivamente pelas Equações 4.43 e 4.44, para cada elemento, relacionados na Tabela 5.1.

TABELA 5.2

### RESUMO DOS DESVIOS INICIAL E FINAL PARA O CASO DE TESTE 1

|                 | a*            | h             | z             | p            | q             | $\Gamma$      |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|--------------|---------------|---------------|
| $\Delta h_{i0}$ | 1,3741943E+1  | -3,4758377E-5 | 2,4998683E-6  | 6,4031519E-7 | -1,0204985E-6 | -5,7189861E-4 |
| $\Delta h_{ip}$ | -2,6571259E+1 | 2,9829998E-5  | -1,1049724E-5 | 2,9102921E-7 | -1,9295039E-6 | 1,1453798E-4  |

A propagação é feita por passos de 30 minutos. Ao final da propagação é feita a conversão para o vetor de estado através das Equações 2.14 a 2.20.

É feita uma comparação dos resultados com os obtidos através de um integrador numérico bem mais preciso do que o utilizado para gerar as observações. Estes resultados aparecem nas Figuras 5.13 a 5.15 em termos dos desvios de posição, nas direções radial, normal e tangente à trajetória. O procedimento para cálculo destes desvios aparece no Apêndice C.

Os desvios encontrados equivalem, no pior caso, a um desvio angular aproximado de  $1^\circ$  dentro do período de 1 dia de propagação.

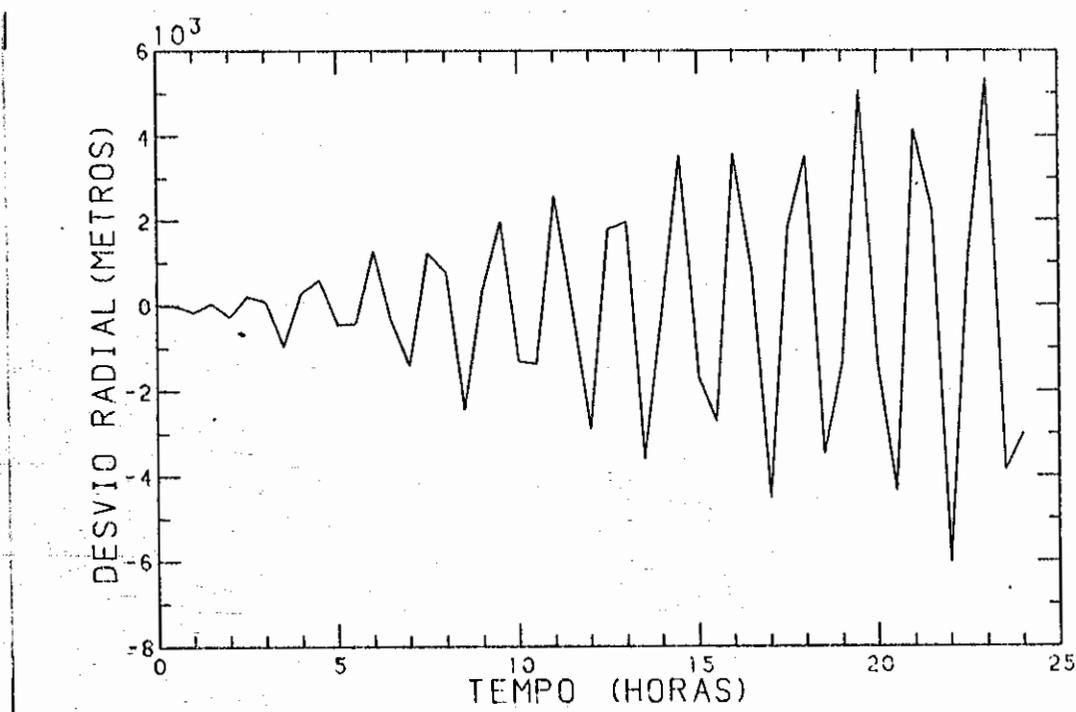


Fig. 5.13 - Desvio radial - Caso de Teste 1.

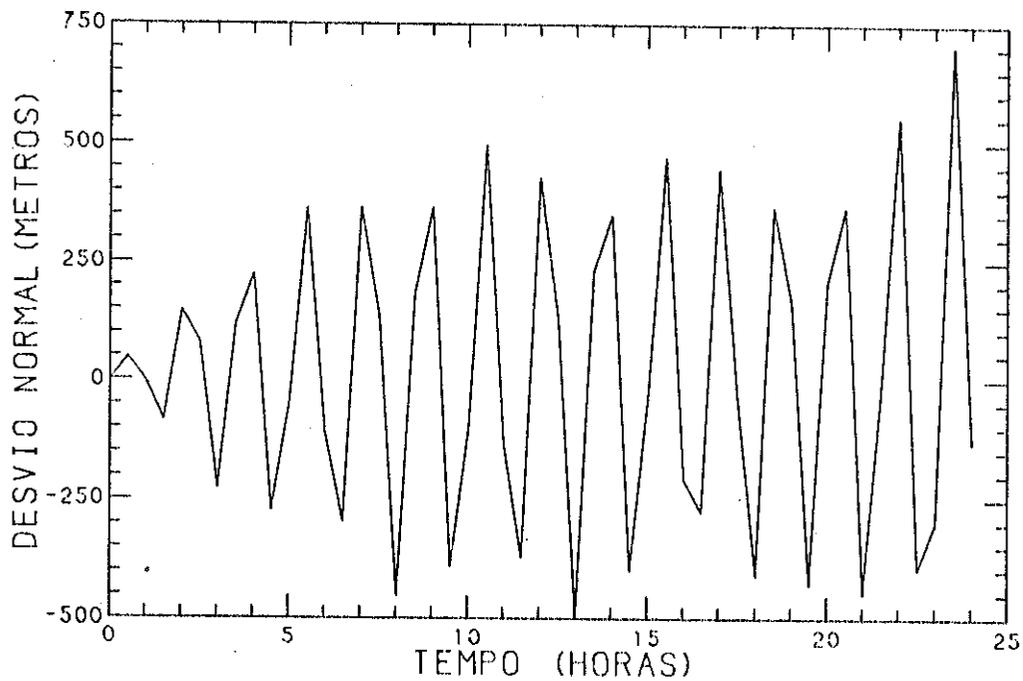


Fig. 5.14 - Desvio normal - Caso de Teste 1.

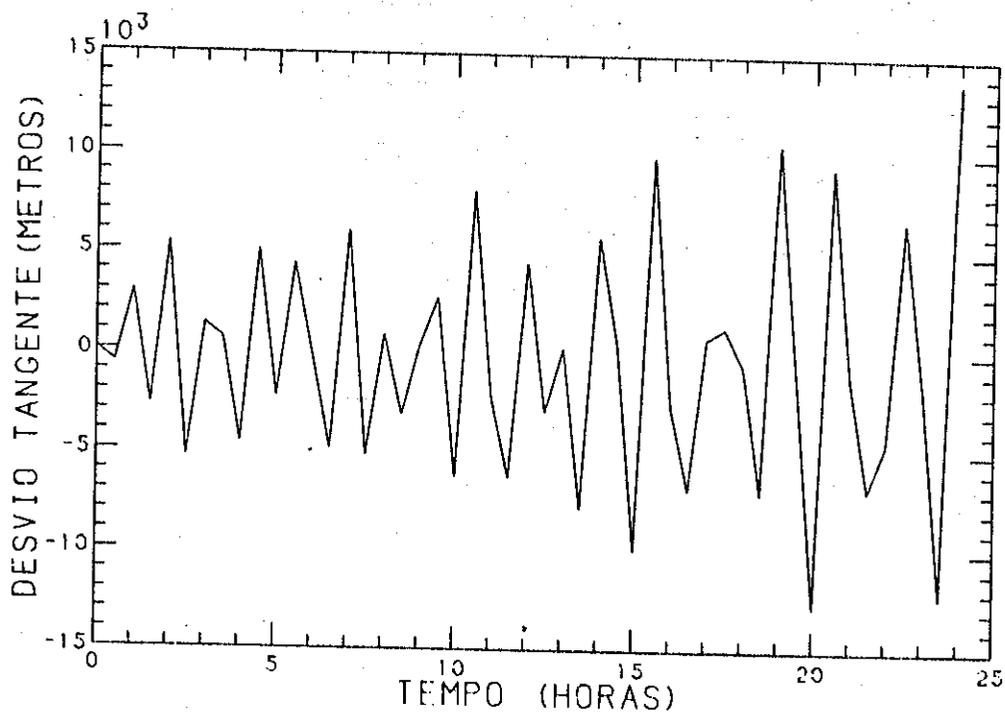


Fig. 5.15 - Desvio tangente - Caso de Teste 1.

### 5.5.2 - CASO DE TESTE 2

Repete-se o procedimento utilizado na Seção 5.5.1 para o teste de propagação da órbita do satélite do Caso de Teste 2; as condições iniciais de propagação são as mesmas descritas no Apêndice B.

Os desvios inicial  $\Delta h_{i0}$  e final  $\Delta h_{ip}$  do ajuste executado para cada elemento estão relacionados na Tabela 5.3.

TABELA 5.3

RESUMO DOS DESVIOS INICIAL E FINAL PARA O CASO DE TESTE 2.

|                 | a*           | h            | z             | p            | q            | i'            |
|-----------------|--------------|--------------|---------------|--------------|--------------|---------------|
| $\Delta h_{i0}$ | 2,3569305E+1 | 8,1894741E-6 | 2,705925E-6   | 2,4999999E-8 | 1,5E-7       | 4,8466609E-6  |
| $\Delta h_{ip}$ | -2,006305E+1 | 4,8282954E-5 | -1,6641801E-6 | 8,7652778E-8 | 1,8106977E-6 | -5,8083388E-6 |

A comparação dos resultados com os obtidos por integração numérica aparecem nas Figuras 5.16 a 5.18.

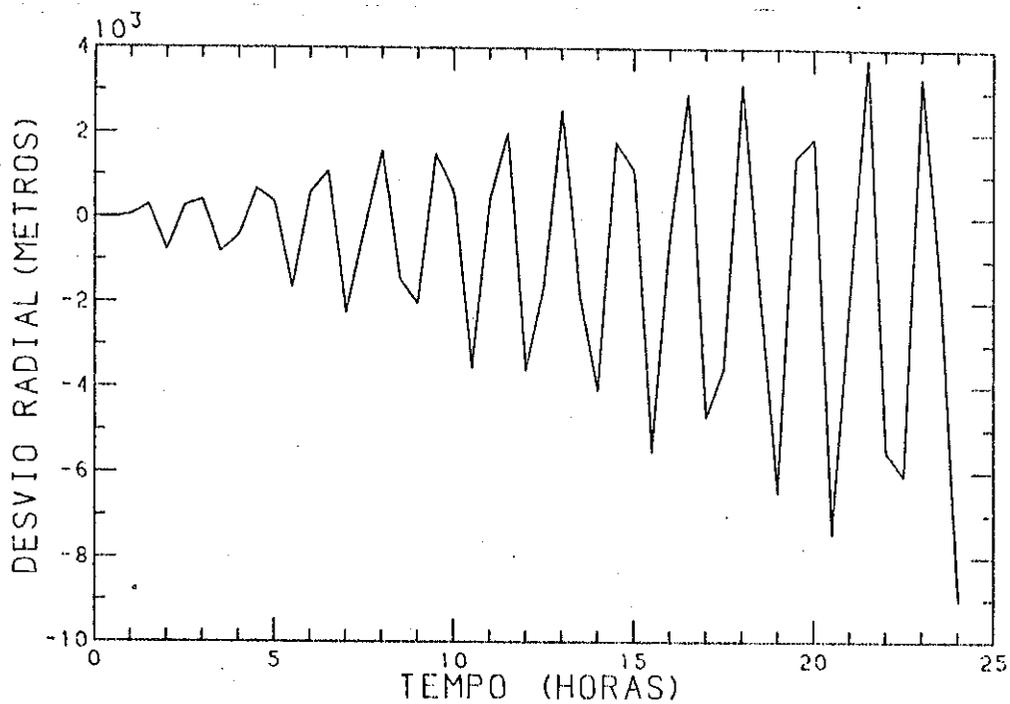


Fig. 5.16 - Desvio radial - Caso de Teste 2.

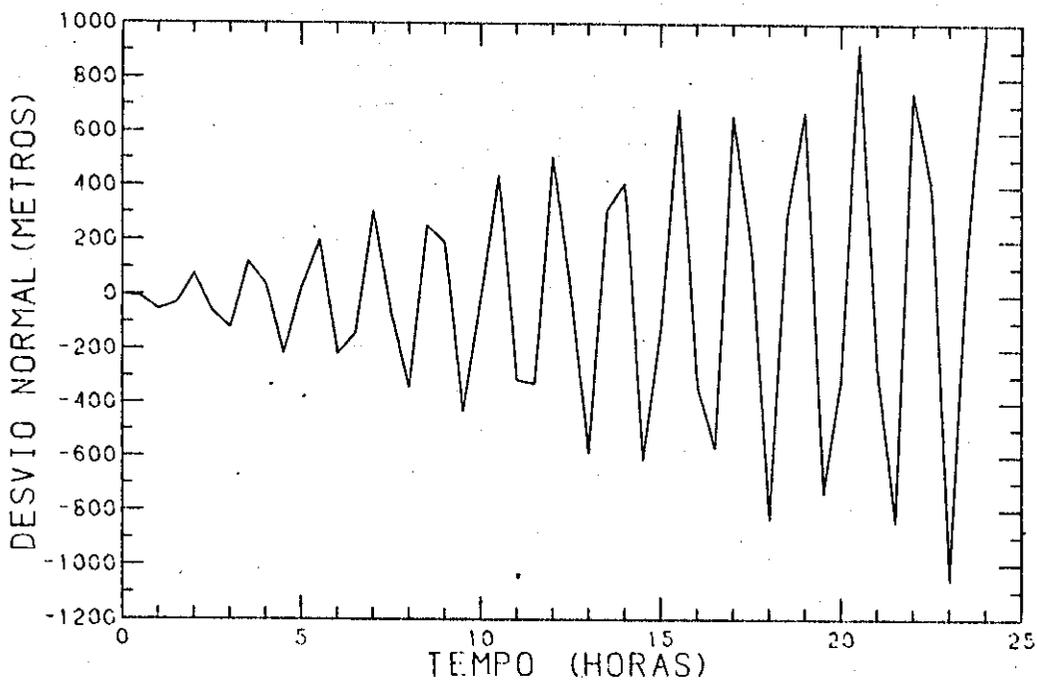


Fig. 5.17 - Desvio normal - Caso de Teste 2.

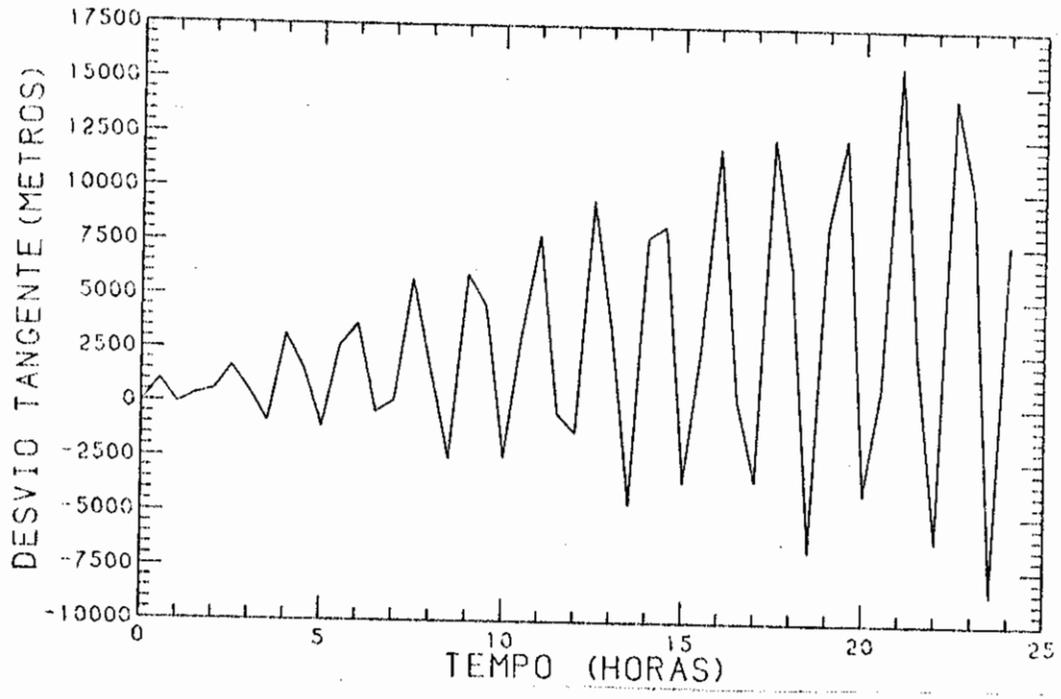


Fig. 5.18 - Desvio tangente - Caso de Teste 2.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

#### 6.1 - COMENTÁRIOS

O procedimento geral utilizado neste trabalho pode ser resumido nas seguintes etapas:

- 1) escolha do conjunto de variáveis a ser utilizado na propagação;
- 2) geração das observações ao longo de um período orbital, com a avaliação do ruído nas observações correspondentes a cada variável;
- 3) a escolha das equações parametrizadas e avaliação dos valores iniciais, pelos critérios descritos na Seção 2.3;
- 4) avaliação das matrizes iniciais de covariância do erro no estado, como descrito na Seção 4.4.
- 5) ajuste dos coeficientes das equações parametrizadas pelo procedimento descrito na Seção 4.2;
- 6) análise dos resíduos obtidos e retorno à etapa 3, se necessário;
- 7) propagação das equações ajustadas pelo procedimento descrito na Seção 4.5.

Para melhorar o ajuste das expressões modeladas foi utilizado um processo iterativo, com reaplicação do algoritmo do filtro estendido de Kalman na etapa 5. As novas matrizes de covariância são geradas aplicando um peso conveniente nas resultantes do ajuste inicial.

As equações parametrizadas resultantes têm formato semelhante às das teorias analíticas e, portanto, são válidas para uma vasta gama de órbitas baixas, com exceção dos casos em que as perturba

ções devidas ao arrasto atmosférico tornam-se muito importantes, comparadas com as gravitacionais.

As fontes de desvios nos resultados obtidos são devidos principalmente a três fatores:

- 1) erro no ajuste das curvas, especialmente para as variáveis "h" e "l", que possuem formato complexo;
- 2) erro na propagação das expressões ajustadas ao longo de vários períodos devido ao fato de se considerarem constantes os coeficientes das equações em função da hipótese inicial de que a lei de variação no intervalo de propagação não se altera significativamente;
- 3) erro na propagação das equações ajustadas devido à hipótese de considerar o período orbital nodal constante ao longo de vários intervalos sucessivos.

O procedimento de propagação visa manter o erro de ajuste inicial constante ao longo de vários períodos para cada variável, uma vez que são feitas correções dos desvios inicial e final de cada curva ao longo do intervalo de propagação, período a período, mantendo-se sua continuidade com os vínculos de contorno. O cálculo dos valores desejados é, portanto, feito por interpolação dentro do intervalo de ajuste, não por extrapolação.

Os erros devidos às hipóteses admitidas na Seção 4.2 são tão implícitas no erro de ajuste das curvas.

## 6.2 - CONCLUSÕES

A modificação introduzida permite eliminar as singularidades presentes no procedimento anterior.

O novo procedimento pode ser empregado, portanto, nos casos críticos de órbitas circulares e equatoriais, onde não era possível a utilização do anterior.

O procedimento, devido à simplicidade numérica na propagação e à não-existência de singularidades ou indefinições nas equações, pode ser empregado para o rastreamento de satélites por estações remotas, onde o máximo erro de apontamento das antenas será de um grau para intervalos de um dia de propagação, e para o processamento da posição na órbita a bordo de satélites, sendo os coeficientes das equações recarregadas a cada 12 ou 24 horas.

A maior dificuldade no procedimento é a modelagem das equações parametrizadas, especialmente para "h" e "l" que apresentaram o ajuste menos preciso; no entanto é desejável trabalhar com equações de propagação relativamente simples para manter a aplicabilidade do método.

Devido às deficiências de modelagem, o ajuste executado pelo algoritmo do filtro de Kalman fica prejudicado, o que leva ao erro de ajuste nas curvas; entretanto, como visto nas Seções 5.2 e 5.3, este erro é menor ou no máximo da ordem de grandeza da faixa de 1 desvio padrão dos erros de observação dos elementos equinociais; este fato, bem como o comportamento dos gráficos de desvios (Figuras 5.13 a 5.18) sugere que o principal fator de desvio é devido ao acúmulo dos erros de propagação ao longo de vários períodos. O procedimento, como foi proposto inicialmente, atingiu o limite de sua precisão. Para melhorar a precisão geral do método é preciso compensar os fatores de desvios identificados. Uma abordagem a ser testada para melhorar a precisão de ajuste é para os elementos que apresentarem curvas de observação de formato complexo, dividindo-as em segmentos que possam ser aproximados por um polinômio e garantindo sua continuidade por um vínculo de contorno. Neste caso serão obtidas três ou quatro equações para propagar um período nestes elementos, mas com expressões que não contêm termos trigonométricos mais simples e fáceis de ajustar.

Outra abordagem a ser testada para melhorar a qualidade da propagação é considerar o período orbital nodal variável, para efeito de passo de propagação. Neste caso, o período teria de ser recalculado a cada passo usando os valores propagados para os elementos equinociais e as Equações B.1 a B.5, tendo-se o cuidado de reestimar os valores dos erros de ajuste inicial e final.

Outra técnica numérica a ser testada é introduzir um ruído aleatório no estado, estimado adaptativamente a partir das observações, com o objetivo de simplificar a escolha dos valores iniciais e facilitar a convergência do filtro de Kalman.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BROUWER, O. Solution of problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*, 17(9):378-397, Nov. 1959.
- CEFOLA, P.J. On the development of a recursive semianalytical orbit prediction method. *Flight Mechanics Conference Greenbelt*, MD. 1976.
- COOK, G.E. Luni-solar perturbations of the orbit of an Earth satellite. *The Geophysical Journal of Royal Astronomical Society*, 6(3):271-291, Apr. 1962.
- ECKSTEIN, M.C. *Orbit computation and life time prediction of close Earth satellites*. Oberpfaffenhofen, DFVLR/Institute for Flight Systems Dynamics, 1978.
- GELB, A.; KASPER JR., J.F.; NASH JR., R.A.; PRICE, C.F.; SUTHERLAND JUNIOR, A.A. *Applied optimal estimation*. Cambridge, MA, MIT, 1974.
- JAZWINSKI, A.H. *Stochastic process and filtering theory*. New York, NY. Academic, 1970.
- KING-HELE, O.G. *Theory of satellites orbits in an atmosphere*. London, Butterworths, 1964.
- KUGA, H.K. *Estimação adaptativa de órbitas aplicada a satélites de baixa altitude*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982. (INPE-2316-TDL/079).
- LÁLA, P. *Perturbations of the satellite orbit due to the solar radiation pressure*, s.l., s.c.p., 1974.
- LIEBELT, P.B. *An introduction to optimal estimation*. Reading, MA, Wesley, 1967.
- MAYBECK, P.S. *Stochastic models, estimation, and control*. New York, NY. Academic, 1979, v.1.
- MARTINS, R.V.; MEDEIROS, V.M. *Um método semi-analítico para propagação de órbitas de satélites artificiais*. São José dos Campos, INPE, 1984. (INPE-3112-RPI/098).

- MEDEIROS, V.M. *Análise de missões: definição da geometria orbital de satélites artificiais*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2843-TDL/141).
- RIOS NETO, A.; SILVA, W.C.C. Procedimento semi-analítico baseado em estimação de parâmetros para propagação de órbitas de satélites artificiais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 7, *Anais*, Uberlândia, 13-16, dez, 1983. Uberlândia, Universidade Federal de Uberlândia, 1983.
- SEHNAL, L. *Non-gravitational forces in satellite dynamics*. Ondrejow, Astron/Inst. of the Chzechoslak Academt of Sciences, 1973.
- SILVA, W.C.C. *Determinação de expressões analíticas simplificadas para cálculo e propagação de órbitas mediante o uso de teoria de estimação de parâmetros*. Tese de Doutorado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982. (INPE-2320-TDL/080).
- VEIS, G.; MOORE, C.H. *Improvement orbit program*. Cambridge, MA, SAO, 1960.
- VILHENA DE MORAES, R. *Ação da pressão de radiação solar e do arrasto atmosférico sobre órbitas de satélites artificiais*. Tese de Doutorado, São José dos Campos, ITA, 1978.

## APÊNDICE A

### CASO DE TESTE 1

#### A.1 - INTRODUÇÃO

O Caso de Teste 1 refere-se ao Satélite TIROS-N nas mesmas condições utilizadas em Silva (1982). As condições utilizadas para gerar as observações foram obtidas do BOLETIN APT PREDICTION do Satélite TIROS-N:

##### 1) Época inicial

16/8/1981 às 20h12m17,999s.

##### 2) Período nodal

$P_n = 101, 2099 \text{ min.}$

##### 3) Fluxos Solares

$SSOF = 176 \text{ em } 10^{-22} \text{ watts/(M}^2\text{H}_2) ,$

$SOF = 215 \text{ em } 10^{-22} \text{ watts/(M}^2\text{H}_2) .$

##### 4) Índice geomagnético

$K_p = 1,89.$

##### 5) Posição, velocidade, semi-eixo maior, excentricidade e inclinação iniciais:

$X = - 875,6310 \text{ km;}$

$Y = - 6819,7526 \text{ km;}$

$Z = - 2153,0222 \text{ km;}$

$$\dot{X} = - 1,442522 \text{ km};$$

$$\dot{Y} = - 2,022677 \text{ km/s};$$

$$\dot{Z} = 7,005805 \text{ km/s};$$

$$a = 7195,8804 \text{ km};$$

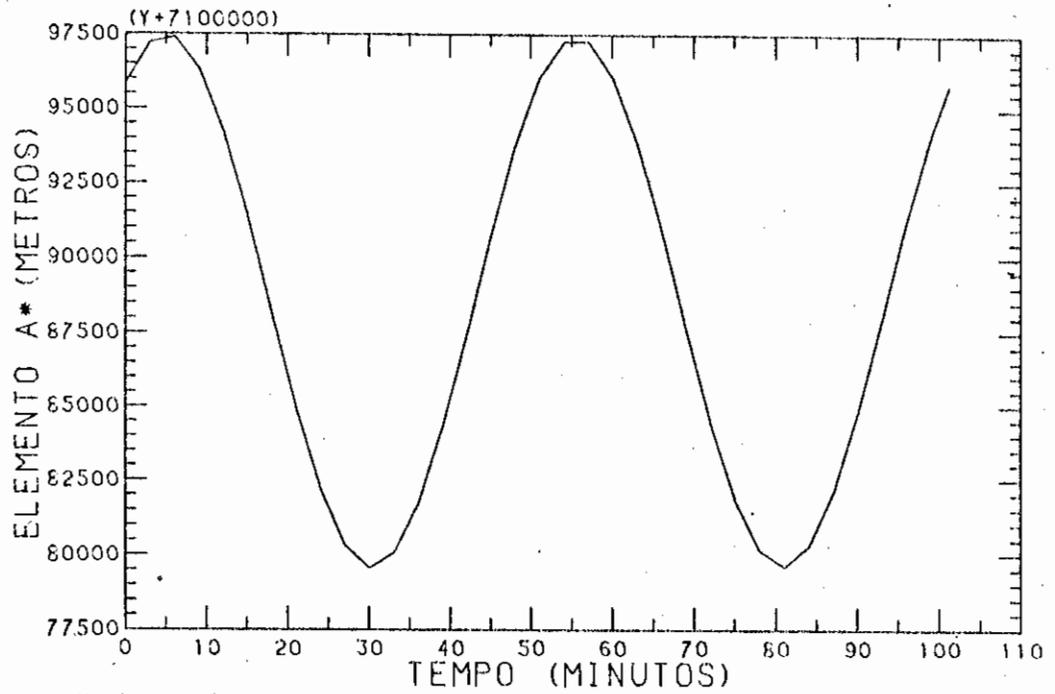
$$e = 0,00135;$$

$$I = 1,72199 \text{ rads.}$$

As observações geradas aparecem em elementos equinociais nas Figuras A.1 e A.6, juntamente com o conjunto de valores iniciais adotados para cada coeficiente de cada equação.

Para gerar as observações foi utilizado um gerador numérico de órbitas que considera as seguintes perturbações sobre o movimento do satélite:

- coeficientes dos harmônicos tesserais até 4ª ordem;
- coeficientes dos harmônicos zonais até 6ª ordem;
- atração lunissolar;
- arrasto atmosférico.



Valores iniciais:

$$a_1^* = 7,1890153E+06$$

$$a_2^* = 0$$

$$a_3^* = 0$$

$$a_4^* = 0$$

$$a_5^* = 0$$

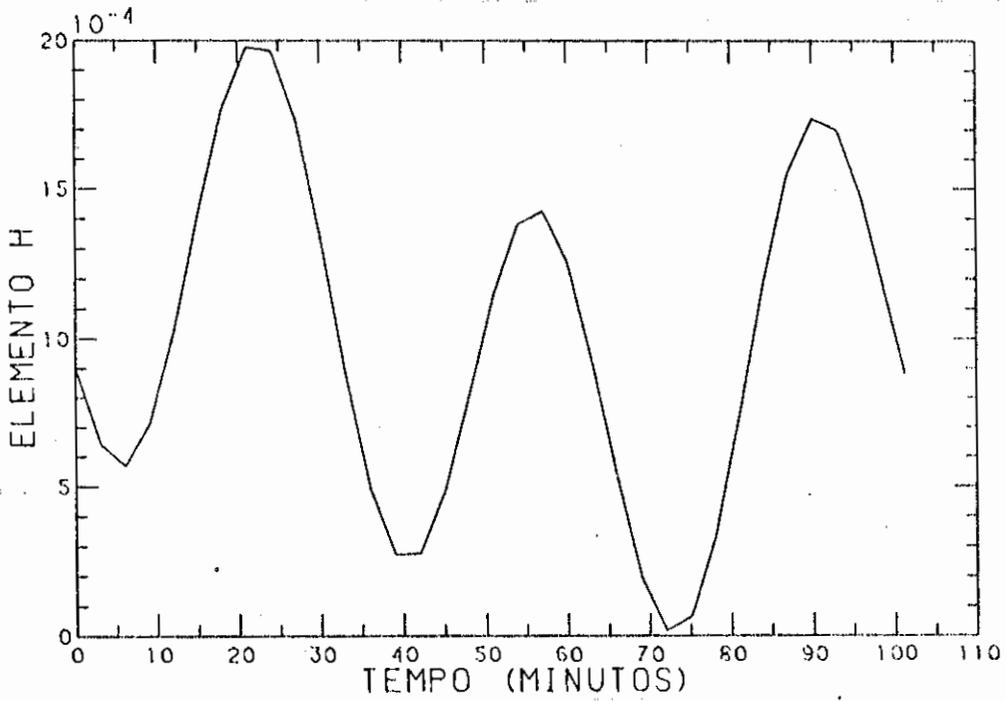
$$a_6^* = 0$$

$$a_7^* = 8,5695021E+03$$

$$a_8^* = -6,4514849E-01$$

$$a_9^* = 2,0685923E-03$$

Fig. A.1 - Curva observada de  $a^*$  - Caso de Teste 1.



Valores iniciais:

$$h_1 = 9,762336E-04$$

$$h_2 = 1,607259E-09$$

$$h_3 = -4,999999E-14$$

$$h_4 = 3,680000E-04$$

$$h_5 = 1,371713E+01$$

$$h_6 = -1,132554E-03$$

$$h_7 = -5,820000E-05$$

$$h_8 = 2,415749E+01$$

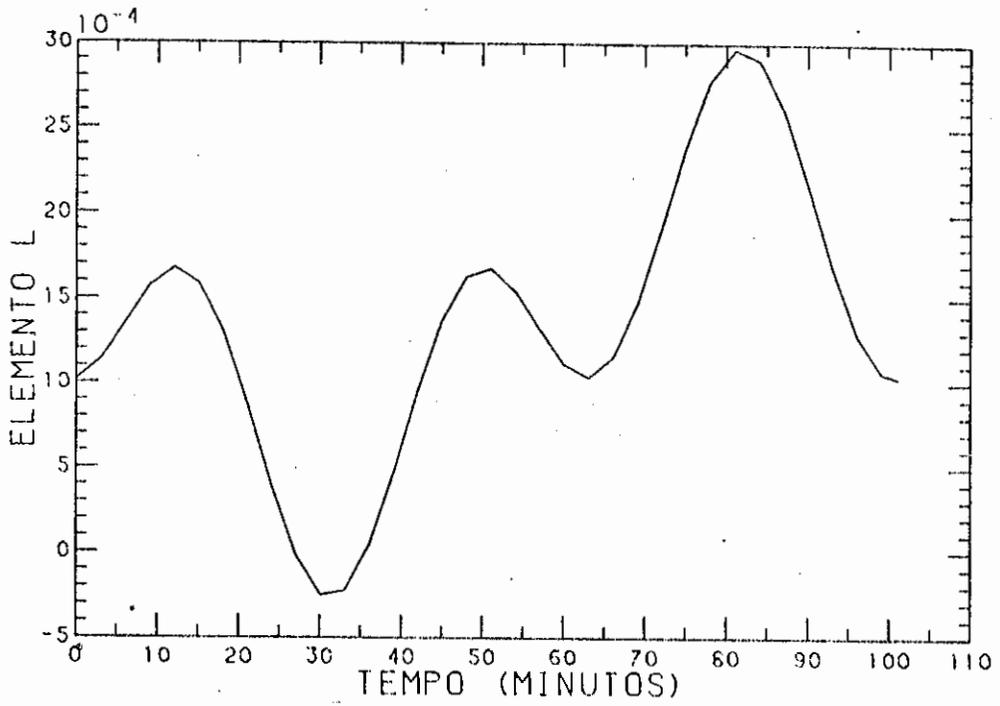
$$h_9 = -1,768647E-03$$

$$h_{10} = 7,200000E-04$$

$$h_{11} = 3,891672E+01$$

$$h_{12} = -3,143847E-03$$

Fig. A.2 - Curva observada de h - Caso de Teste 1.



Valores iniciais:

$$\lambda_1 = 1,3486764E-03$$

$$\lambda_2 = 1,0000000E-09$$

$$\lambda_3 = 5,0000000E-13$$

$$\lambda_4 = 8,9440000E-04$$

$$\lambda_5 = 2,7681358$$

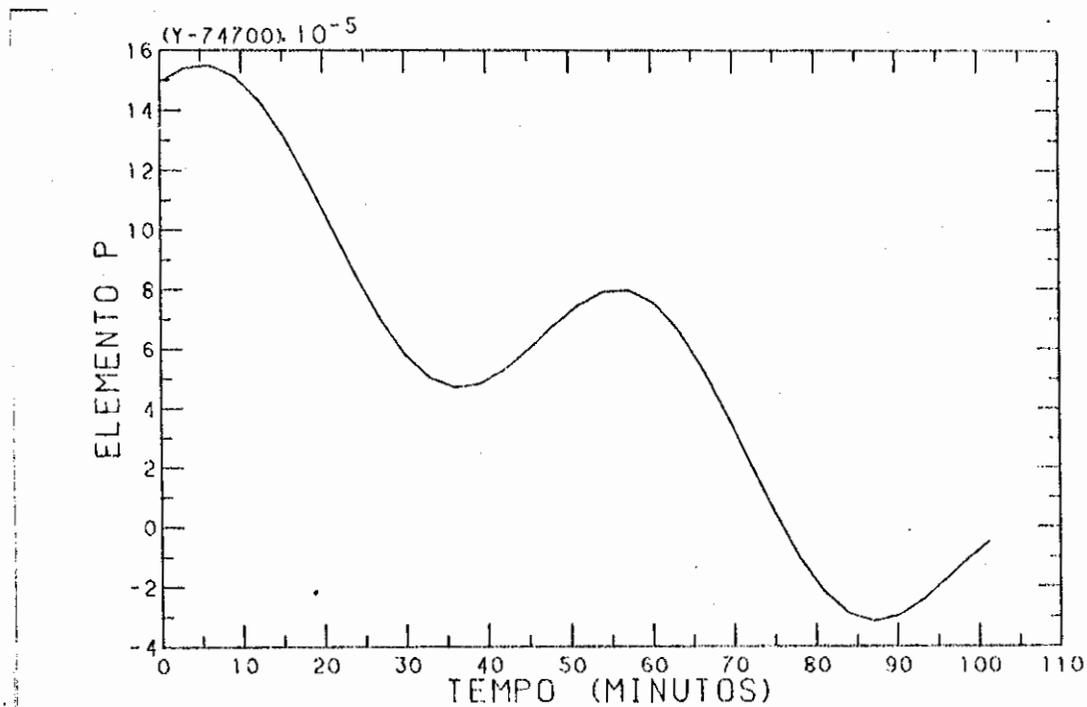
$$\lambda_6 = 1,0389505E-03$$

$$\lambda_7 = 7,2674000E-04$$

$$\lambda_8 = 8,2994595$$

$$\lambda_9 = 3,1137486E-03$$

Fig. A.3 - Curva observada de  $\lambda$  - Caso de Teste 1.



Valores iniciais:

$$p_1 = -7,4686381E-01$$

$$p_2 = -2,450000E-08$$

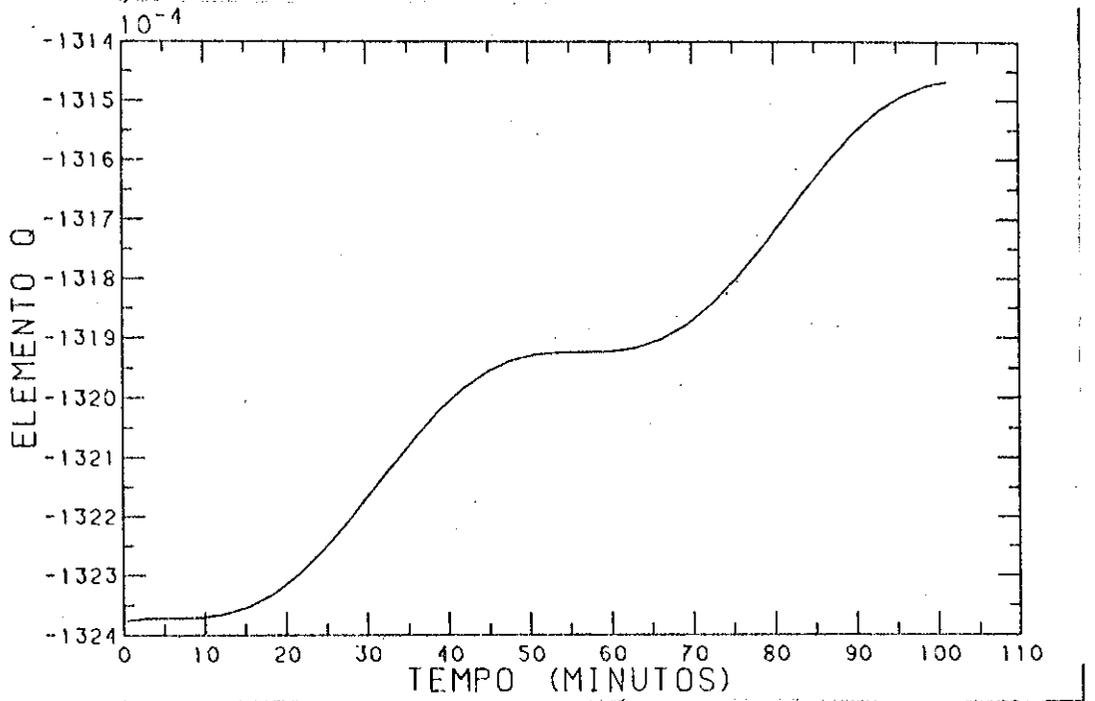
$$p_3 = 0$$

$$p_4 = 3,50000000E-05$$

$$p_5 = -1,1780972$$

$$p_6 = 2,0685923E-03$$

Fig. A.4 - Curva observada de p - Caso de Teste 1.



Valores iniciais:

$$q_1 = -1,3244070E-01$$

$$q_2 = 1,5000000E-07$$

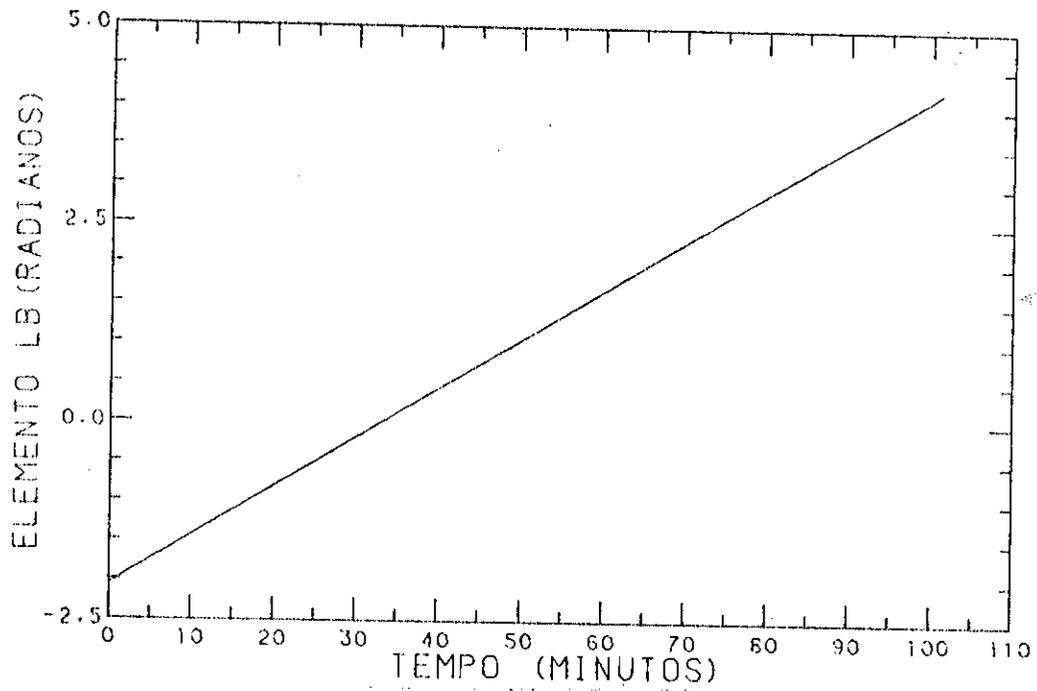
$$q_3 = -1,0000000E-12$$

$$q_4 = 7,5000000E-05$$

$$q_5 = 5,2359878E-01$$

$$q_6 = 2,0685923E-03$$

Fig. A.5 - Curva observada de q - Caso de Teste 1.



Valores iniciais:

$$\Gamma_1 = -2,0523121$$

$$\Gamma_2 = 1,0100000E-03$$

$$\Gamma_3 = 0$$

$$\Gamma_4 = 0$$

$$\Gamma_5 = 0$$

$$\Gamma_6 = 0$$

Fig. A.6 - Curva observada de  $\Gamma$  - Caso de Teste 1.

## APÊNDICE B

### CASO DE TESTE 2

#### B.1 - INTRODUÇÃO

O Caso de Teste 2 refere-se a um satélite em uma órbita hipotética circular e equatorial simulada numericamente a partir de condições semelhantes às utilizadas no Caso de Teste 1. Foi empregado o mesmo gerador de órbitas utilizado no Caso de Teste 1.

##### 1) Época inicial

16/8/1981 às 20h12m17,999s.

##### 2) Fluxos solares

SSOF = 176 em  $10^{-22}$  watts/(M<sup>2</sup>H<sub>z</sub>) ,

SOF = 215 em  $10^{-22}$  watts/(M<sup>2</sup>H<sub>z</sub>) .

##### 3) Índice geomagnético

Kp = 1,89.

##### 4) Posição, velocidade, semi-eixo maior, excentricidade e inclinação iniciais:

X = -3332,5790 km;

Y = -6377,6651 km;

Z = 0 km;

$\dot{X}$  = 6,596362 km/s;

$\dot{Y}$  = -3,446856 km/s;

$\dot{Z}$  = 0 km/s;

$$a = 7195,8804 \text{ km};$$

$$e = 0;$$

$$I = 0 \text{ rads.}$$

### 5) Período nodal

O período é dado pela seguinte equação:

$$P_n = \frac{2\pi}{\dot{M} + \dot{\omega}}, \quad (\text{B.1})$$

que pode ser escrita como:

$$P_n = \frac{2\pi}{n_0 + \theta(j_2)}, \quad (\text{B.2})$$

sendo

$$\theta(j_2) = \frac{3}{4} \frac{n_0 J_2}{(1-e^2)^2} \frac{a_e^2}{a} [(3\eta+5) \cos^2 I - \eta - 1], \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\eta = (1 - e^2)^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

$$n_0 = \frac{\mu}{a^3} \quad (\text{B.5})$$

$$\mu = 398601,3 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2} \text{ (constante gravitacional) ,}$$

$$a_e = 6378,160 \text{ km (raio da terra) ,}$$

$$J_2 = 1082,628 \times 10^{-6} \text{ (coeficiente geopotencial do achamento terrestre),}$$

$a$  = semi-eixo maior da órbita do satélite,

$e$  = excentricidade da órbita do satélite,

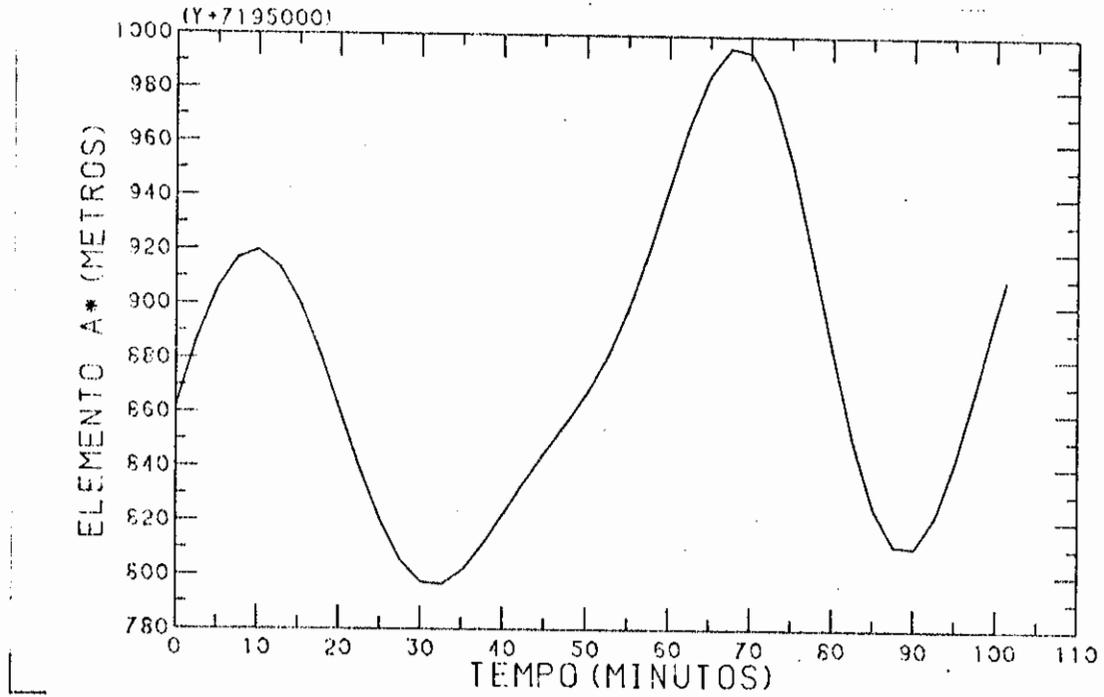
$I$  = inclinação da órbita do satélite.

Resolvendo as Equações B.4 e B.5 e substituindo os resultados encontrados na Equação B.3 obtêm-se:

$$P_n = 101,1834 \text{ min.}$$

As observações geradas aparecem em elementos equinociais nas Figuras B.1 a B.6, juntamente com o conjunto de valores iniciais adotados para cada coeficiente de cada equação.

B.2 - OBSERVAÇÕES GERADAS



Valores iniciais:

$$a_1^* = 7,1952452E+06$$

$$a_2^* = 0$$

$$a_3^* = 0$$

$$a_4^* = 0$$

$$a_5^* = 0$$

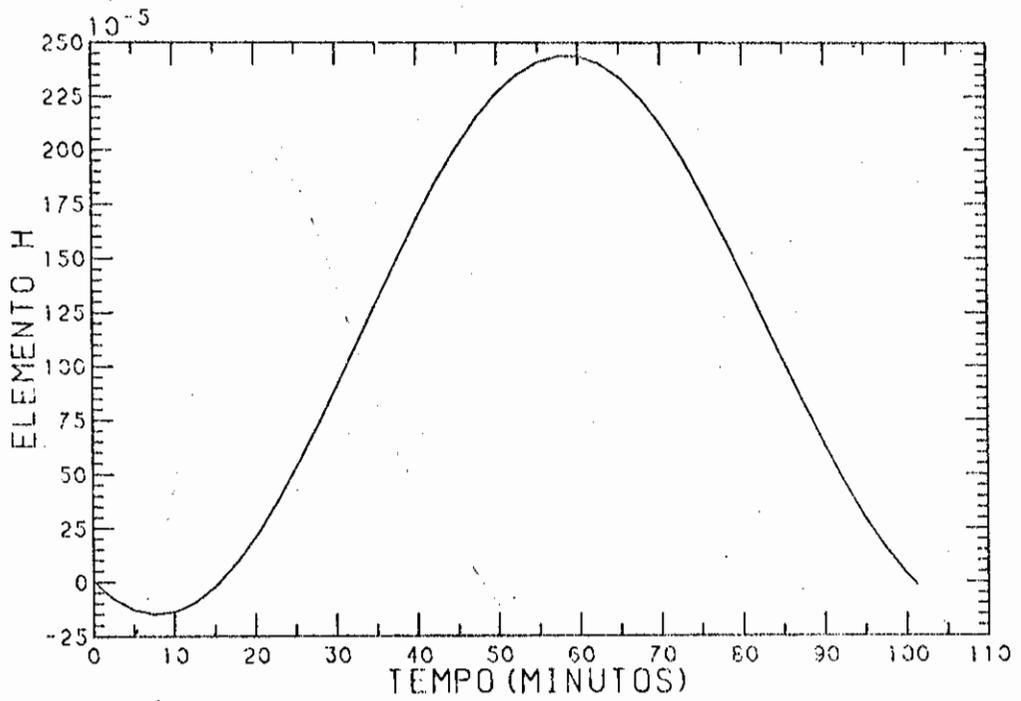
$$a_6^* = 0$$

$$a_7^* = 1,4139678E+03$$

$$a_8^* = -8,4149803E-01$$

$$a_9^* = 2,0685924E-03$$

Fig. B.1 - Curva observada de  $a^*$  - Caso de Teste 2.



Valores iniciais:

$$h_1 = 1,174876E-03$$

$$h_2 = 1,0E-08$$

$$h_3 = 0$$

$$h_4 = 2,16E-03$$

$$h_5 = 1,605624E+01$$

$$h_6 = -1,009473E-03$$

$$h_7 = 0$$

$$h_8 = 0$$

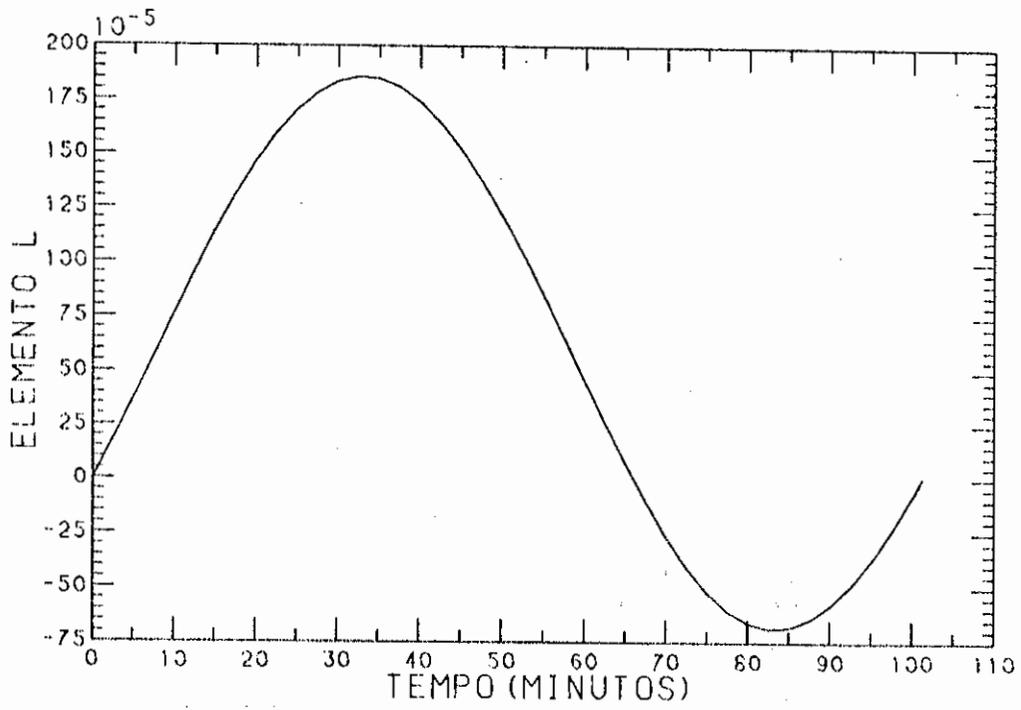
$$h_9 = 0$$

$$h_{10} = 0$$

$$h_{11} = 0$$

$$h_{12} = 0$$

Fig. B.2 - Curva observada de h - Caso de Teste 2.



Valores iniciais:

$$\lambda_1 = 6,0835549E-04$$

$$\lambda_2 = -1,0E-08$$

$$\lambda_3 = 5,0E-13$$

$$\lambda_4 = 1,278992E-03$$

$$\lambda_5 = 5,7840648$$

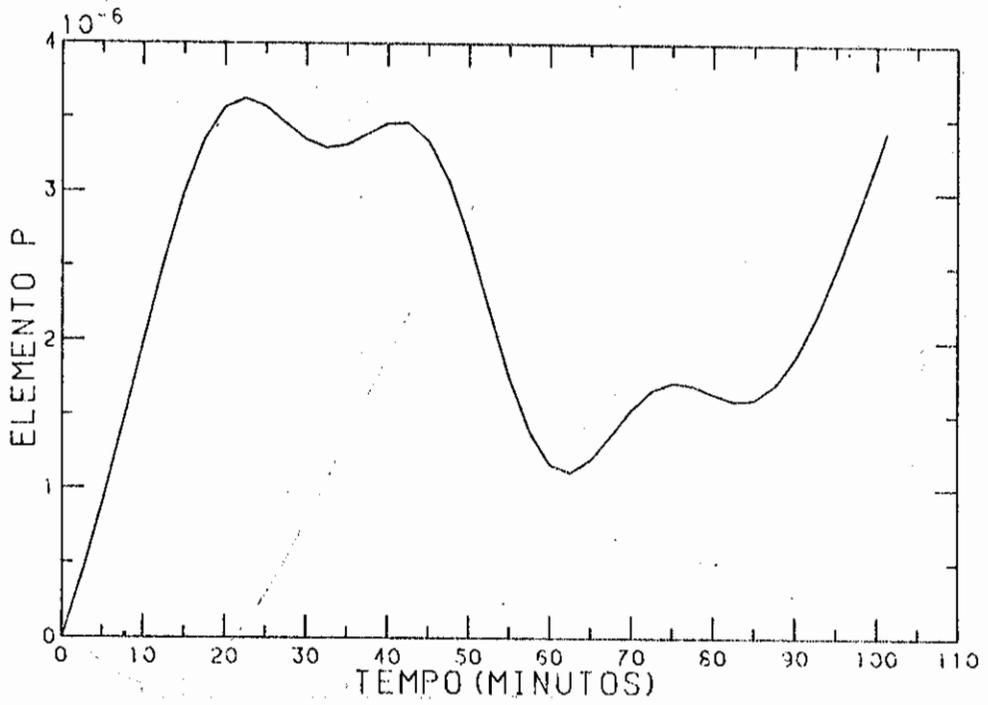
$$\lambda_6 = 1,0446391E-03$$

$$\lambda_7 = 0$$

$$\lambda_8 = 0$$

$$\lambda_9 = 0$$

Fig. B.3 - Curva observada de  $\lambda$  - Caso de Teste 2.



Valores iniciais:

$$p_1 = -2,4499999E-08$$

$$p_2 = 2,4499999E-08$$

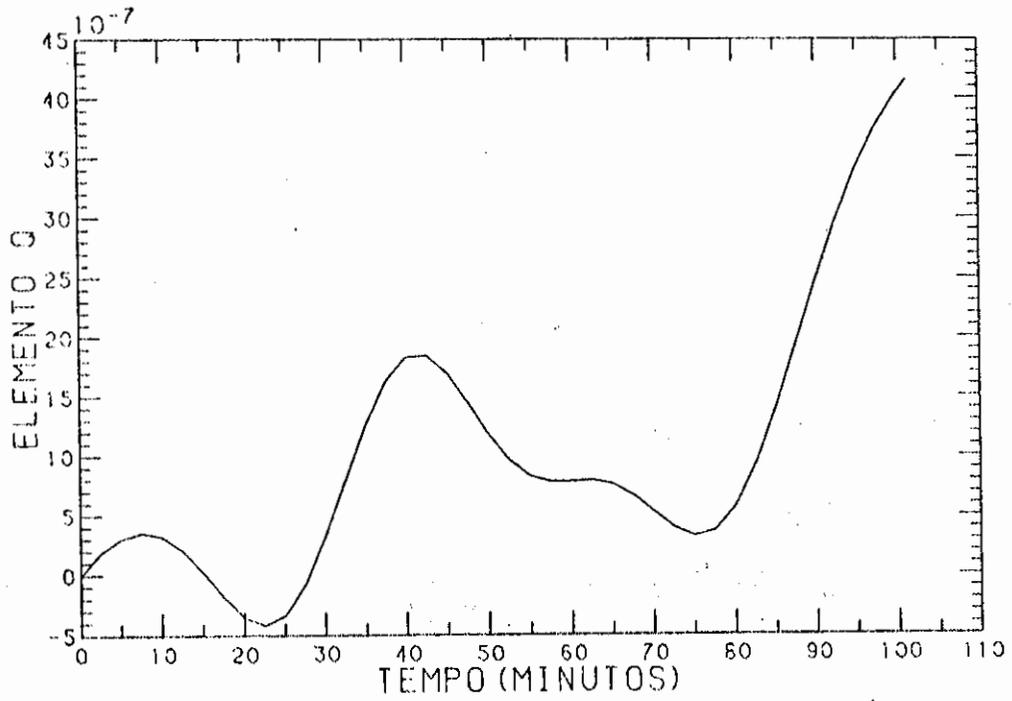
$$p_3 = 0$$

$$p_4 = 0$$

$$p_5 = 0$$

$$p_6 = 0$$

Fig. B.4 - Curva observada de  $p$  - Caso de Teste 2.



Valores iniciais:

$$q_1 = -1,5E-07$$

$$q_2 = 1,5E-07$$

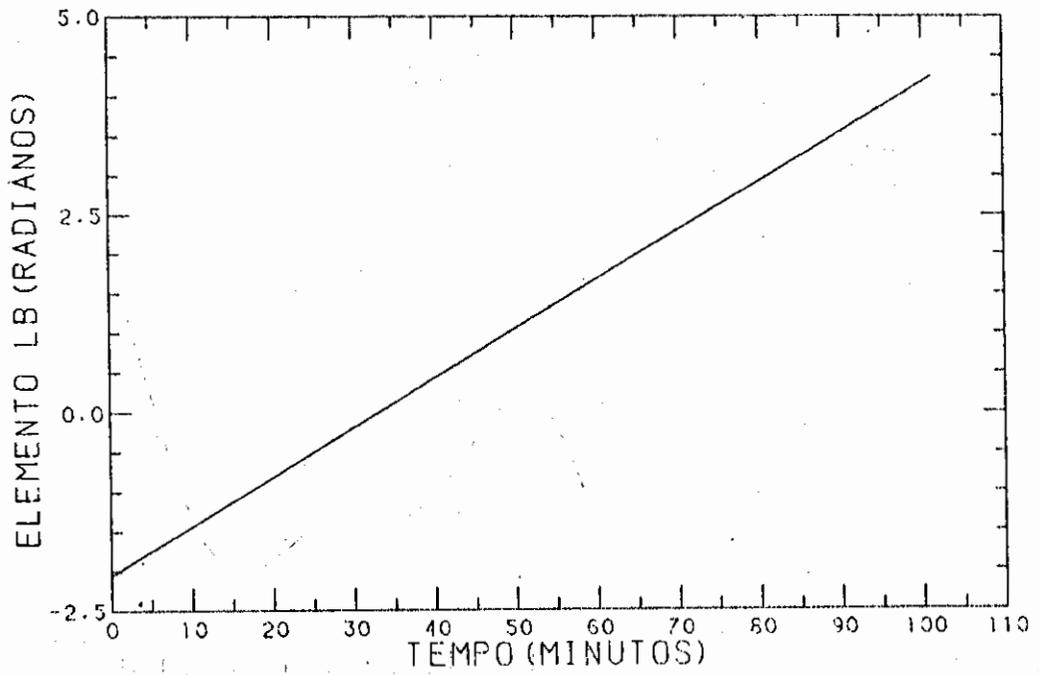
$$q_3 = 0$$

$$q_4 = 0$$

$$q_5 = 0$$

$$q_6 = 0$$

Fig. B.5 - Curva observada de q - Caso de Teste 2.



Valores iniciais:

$$\bar{L}_1 = -2,0523122$$

$$\tau_2 = 1,01E-03$$

$$\tau_3 = 0$$

$$\tau_4 = 0$$

$$\tau_5 = 0$$

$$\tau_6 = 0$$

Fig. B.6 - Curva observada de  $\bar{L}$  - Caso de Teste 2.

## APÊNDICE C

### PROCEDIMENTO PARA CÁLCULO DOS DESVIOS DE POSIÇÃO

Para determinação dos desvios em posição nas direções radial, normal e tangencial para os satélites dos Casos de Teste 1 e 2 em um instante qualquer, entre a órbita propagada pelo procedimento descrito na Seção 4.5 e uma órbita de referência gerada numericamente a partir das mesmas condições iniciais, adota-se o seguinte procedimento:

Dado  $X = \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}$ , vetor de estado de um satélite em um instante  $t$  de sua trajetória, calculado a partir da órbita de referência gerada por integração numérica, definem-se os versores radial, normal e tangente como:

$$L_r = \frac{r}{|r|} \quad (\text{versor da direção radial}), \quad (C.1)$$

$$L_n = \frac{r \wedge v}{|r \wedge v|} \quad (\text{versor na direção normal}), \quad (C.2)$$

$$L_t = L_n \wedge L_r \quad (\text{versor na direção tangente}), \quad (C.3)$$

onde:

$$|r| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \quad (C.4)$$

$$|v| = \sqrt{\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2 + \dot{X}_3^2}. \quad (C.5)$$

Tendo  $\bar{X} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X} \end{bmatrix}$ , vetor de estado do satélite calculado no mesmo instante  $t$  de uma trajetória gerada pelo procedimento descrito na Seção 4.5, obtêm-se o desvio em posição definido por  $\Delta X$ :

$$\Delta X = \bar{X} - X . \quad (C.6)$$

Os desvios em posição serão dados por:

$$\Delta r = \Delta X \cdot L_r \quad (\text{desvio na direção radial}) , \quad (C.7)$$

$$\Delta n = \Delta X \cdot L_n \quad (\text{desvio na direção normal}) , \quad (C.8)$$

$$\Delta t = \Delta X \cdot L_t \quad (\text{desvio na direção tangencial}) . \quad (C.9)$$

The first part of the proof is to show that the function  $f$  is continuous. Let  $x, y \in X$  and  $\epsilon > 0$ . We need to find  $\delta > 0$  such that  $d(x, y) < \delta$  implies  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

Let  $x, y \in X$  and  $\epsilon > 0$ . We need to find  $\delta > 0$  such that  $d(x, y) < \delta$  implies  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

(1.1) 
$$d(f(x), f(y)) = d\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(y)\right)$$

(2.1) 
$$d\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(y)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(f_n(x), f_n(y))$$

(3.1) 
$$d(f(x), f(y)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(f_n(x), f_n(y)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \epsilon_n$$

(4.1) 
$$d(f(x), f(y)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \epsilon_n$$

(5.1) 
$$d(f(x), f(y)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \epsilon_n$$