

1. Classificação <i>INPE-COM. 2/PE</i> <i>C.D.U. 533.95</i>	2. Período	4. Critério de Distribuição:  interna <input type="checkbox"/>  externa <input checked="" type="checkbox"/>
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS DISPERSIVOS</i> <i>ENERGIA</i> <i>MOMENTO LINEAR</i> <i>SPIN</i> <i>ONDAS NUM PLASMA FRIO E MAGNETIZADO</i>		
5. Relatório nº <i>INPE-1201-PE/113</i>	6. Data <i>Março de 1978</i>	7. Revisado por <i>W. D. Gonzalez-Alarcón</i>
8. Título e Sub-Título  <i>ENERGIA E MOMENTO DAS ONDAS</i> <i>ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS DISPERSIVOS</i>		9. Autorizado por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>
10. Setor <i>DCE/GPL</i>	Código <i>30.374</i>	11. Nº de cópias <i>8</i>
12. Autoria <i>Gerson Otto Ludwig</i>		14. Nº de páginas <i>42</i>
13. Assinatura Responsável <i>Ludwig</i>	15. Preço	
16. Sumário/Notas  <i>As expressões da energia e do momento linear de uma onda eletromagnética num meio dispersivo são bastante conhecidas. O propósito deste trabalho é fazer uma dedução detalhada das expressões que definem estas grandezas, bem como aplicá-las aos modos de propagação num plasma frio e magnetizado. Um elemento de novidade é introduzido pela obtenção do spin de uma onda eletromagnética, e seu cálculo para os modos ciclotrônicos num plasma frio.</i>		
17. Observações <i>Trabalho a ser submetido para publicação na Revista Brasileira de Física.</i>		

## ÍNDICE

	Pág.
LISTA DE FIGURAS .....	<i>iv</i>
1. ENERGIA E MOMENTO DE ONDAS .....	1
2. APLICAÇÃO ÀS ONDAS EM PLASMAS FRIOS .....	23
2.1. PROPAGAÇÃO PARALELA AO CAMPO MAGNÉTICO ( $k_{\perp} = 0$ ) .....	24
2.1.1. OSCILAÇÕES LONGITUDINAIS DE LANGMUIR .....	24
2.1.2. ONDAS TRANSVERSAIS CIRCULARMENTE POLARIZADAS .....	24
2.2. PROPAGAÇÃO PERPENDICULAR AO CAMPO MAGNÉTICO ( $k_{\parallel} = 0$ ) .....	29
2.2.1. MODO TRANSVERSAL ORDINÁRIO .....	29
2.2.2. MODO EXTRAORDINÁRIO .....	30
BIBLIOGRAFIA .....	39

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
FIG. 1 - DIAGRAMA DE DISPERSÃO PARA PROPAGAÇÃO PARALELA AO CAMPO MAGNÉTICO .....	39
FIG. 2 - DIAGRAMA DE DISPERSÃO PARA PROPAGAÇÃO PERPENDICULAR AO CAMPO MAGNÉTICO .....	40

## 1. ENERGIA E MOMENTO DE ONDAS

Quer-se determinar a energia associada à propagação de ondas eletromagnéticas num meio dispersivo. A evolução de tais ondas é descrita pelas equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 ,$$

$$\nabla \times \vec{B} - E/c^2 = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{ext}}) .$$

A energia da onda pode ser calculada a partir do trabalho realizado, pela fonte externa, no processo adiabático de excitação da onda desde o passado remoto

$$W(t) = - \int d^3 r \int_{-\infty}^t dt' \vec{j}_{\text{ext}} \cdot \vec{E} .$$

Pelo teorema de Poynting

$$\dot{U}_C + \nabla \cdot \vec{S}_C = - (\vec{j} + \vec{j}_{\text{ext}}) \cdot \vec{E} ,$$

onde  $U_C$  é a densidade de energia do campo e  $\vec{S}_C$  é o vetor de Poynting

$$U_C = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0 ,$$

$$\vec{S}_C = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0 .$$

Portanto,

$$W(t) = \int d^3 r \int_{-\infty}^t dt' (\dot{U}_C + \vec{j} \cdot \vec{E}) + \int_{-\infty}^t dt' \oint d^2 r \cdot \vec{S}_C .$$

Supondo que não há fluxo de energia através da superfície limitante, isto é, que o sistema está isolado, exceto pela fonte externa  $\vec{j}_{ext}$ , a integral de superfície é nula

$$W(t) = \int d^3 r (U_c + \int_{-\infty}^t dt' \vec{j} \cdot \vec{E}) .$$

Para uma resposta linear e causal, pode-se escrever

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = V^{-1} \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \vec{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') ,$$

indicando que a corrente é gradualmente induzida no sistema, devido à evolução do campo elétrico, a partir do estado não perturbado em  $t = -\infty$ . Supondo, mais ainda, que o estado não perturbado tem simetria translacional no espaço e no tempo, isto é, que as características dinâmicas do meio independem da origem do espaço e do tempo, tem-se

$$\vec{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') = \vec{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}'; t - t') .$$

As variáveis de campo podem então ser representadas pelas transformadas de Fourier

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = V^{-1} \int d^3 r \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{E}(\vec{r}, t) \exp[ - i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) ] ,$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{V}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int_B d\omega \vec{E}(\vec{k}, \omega) \exp[ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) ] ,$$

onde o volume  $V$  do sistema foi introduzido por conveniência. A condição de causalidade impõem a localização do contorno de Bromwich no semiplano  $\omega$  superior, acima de todas as singularidades de  $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$ .

Ainda como decorrência da causalidade, pode-se definir a transformada de Fourier unilateral no tempo

$$\vec{\sigma}(\vec{k}; \omega) = V^{-1} \int d^3 r \int_0^{\infty} dt \vec{\sigma}(\vec{r}; t) \exp[ - i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) ] ,$$

donde resulta

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \vec{\sigma}(\vec{k}; \omega) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) .$$

A diada de resposta dielétrica  $\vec{\epsilon}$  é definida em termos da condutividade por

$$\vec{K} = \vec{I} + \vec{\chi} = \vec{I} + i \vec{\sigma} / \omega \epsilon_0 ,$$

onde  $\vec{I}$  é a diada unidade e  $\vec{\chi}$  a suscetibilidade. O sistema completo de equações de Maxwell pode então ser escrito na forma

$$\vec{k} \times \vec{E} - \omega \vec{B} = 0 ,$$

$$\vec{k} \times \vec{B} + \omega \vec{K} \cdot \vec{E} / c^2 = - i \mu_0 \vec{j}_{\text{ext}} ,$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 ,$$

$$\vec{k} \cdot \vec{K} \cdot \vec{E} = - i \rho_{\text{ext}} / \epsilon_0 ,$$

e a expressão da energia fica

$$W(t) = \frac{\epsilon_0 V^2}{(2\pi)^5} \int d^3 k \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[ - i(\omega + \omega') t ] \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}(-\vec{k}, \omega') + \frac{1}{2} c^2 \vec{B}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{B}(-\vec{k}, \omega') + \right.$$

$$+ \frac{\omega \vec{\chi}(\vec{k}; \omega)}{\omega + \omega'} : \vec{E}(\vec{k}, \omega) \vec{E}(-\vec{k}, \omega') \Big] .$$

Utilizando-se a lei de Faraday e simetrizando com respeito a  $\vec{k}$  e  $\omega$ , esta expressão pode ser escrita como

$$W(t) = \frac{\epsilon_0 V^2}{2(2\pi)^5} \int d^3 k \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times$$

$$\times \left[ \vec{I} + \frac{k^2 c^2}{\omega \omega'} \vec{I}_t + \frac{\omega \vec{\chi}(\vec{k}; \omega) - \omega' \vec{\chi}^\dagger(\vec{k}; \omega')}{\omega - \omega'} \right] : \vec{E}(\vec{k}, \omega) \vec{E}^*(\vec{k}, \omega') ,$$

onde foram empregadas as propriedades

$$\vec{E}^*(\vec{k}, \omega) = \vec{E}(-\vec{k}, -\omega) ,$$

$$\vec{\sigma}^*(\vec{k}; \omega) = \vec{\sigma}(-\vec{k}; -\omega) ,$$

que decorrem da realidade de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  e, portanto,  $\vec{\sigma}(\vec{r}; t)$ . A dada projetora sobre o plano transversal  $\vec{e}$  definida por

$$\vec{I}_t = \vec{I} - \hat{k}\hat{k} ,$$

onde  $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$  indica a direção do vetor de onda, e a dada adjunta da suscetibilidade  $\vec{e}$  definida por

$$\vec{\chi}^\dagger(\vec{k}; \omega) = \vec{\chi}^{t*}(\vec{k}; \omega) = \vec{\chi}^t(-\vec{k}; -\omega) ,$$

onde o índice superior  $t$  indica transposição. Para condições de contorno periódicas num volume finito  $V$ , adota-se o somatório

$$V \int d^3 k / (2\pi)^3 \rightarrow \sum_{\vec{k}} ,$$

podendo a densidade de energia ser exprimida como

$$U(t) = \frac{\epsilon_0}{2(2\pi)^2} \sum_{\vec{k}} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times$$

$$\times \left[ \bar{I} + \frac{k^2 c^2}{\omega \omega'} \bar{I}_t + \frac{\omega \bar{\chi}(\vec{k}; \omega) - \omega' \bar{\chi}^\dagger(\vec{k}; \omega')}{\omega - \omega'} \right] : \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') .$$

A diãda suscetibilidade pode ser decomposta em suas partes Hermiciana e anti-Hermiciana, conforme as definições

$$\bar{\chi}_h = (\bar{\chi} + \bar{\chi}^\dagger)/2 ,$$

$$\bar{\chi}_a = (\bar{\chi} - \bar{\chi}^\dagger)/2i ,$$

obtendo-se

$$U(t) = \frac{\epsilon_0}{2(2\pi)^2} \sum_{\vec{k}} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times$$

$$\times \left[ \bar{I} + \frac{k^2 c^2}{\omega \omega'} \bar{I}_t + \frac{\omega \bar{\chi}_h(\vec{k}; \omega) - \omega' \bar{\chi}_h(\vec{k}; \omega')}{\omega - \omega'} + \right.$$

$$\left. + i \frac{\omega \bar{\chi}_a(\vec{k}; \omega) + \omega' \bar{\chi}_a(\vec{k}; \omega')}{\omega - \omega'} \right] : \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') .$$

Agora, considere-se uma excitação quase-monocromática; neste caso a transformada  $\vec{E}_{\vec{k}}(\omega)$  apresenta um pico estreito na

frequência  $\omega_0$  da portadora. Escrevendo  $\omega = \omega_0 + \delta$  e  $\omega' = \omega_0 + \delta'$ , e expandindo a suscetibilidade como

$$\omega \bar{\chi}(\vec{k}; \omega) \equiv \omega_0 \bar{\chi}(\vec{k}; \omega_0) + \delta \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \bar{\chi}(\vec{k}; \omega) \right)_0,$$

obtêm-se

$$\begin{aligned} U(t) = & \frac{\epsilon_0}{2(2\pi)^2} \sum_{\vec{k}} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times \\ & \times \left[ \bar{I} + \frac{k^2 c^2}{\omega \omega'} \bar{I}_t + \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \bar{\chi}_h(\vec{k}; \omega) \right)_0 + \frac{i2\omega_0}{\omega - \omega'} \bar{\chi}_a(\vec{k}; \omega_0) + \right. \\ & \left. + i \frac{\omega + \omega' - 2\omega_0}{\omega - \omega'} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \bar{\chi}_a(\vec{k}; \omega) \right)_0 \right] : \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') . \end{aligned}$$

As integrais sobre as frequências podem ser calculadas, sem maiores problemas, através de deformações convenientes dos contornos de Bromwich. Os resultados são os seguintes

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') = \vec{E}_{\vec{k}}(t) \vec{E}_{\vec{k}}^*(t),$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \frac{1}{\omega \omega'} \exp[-i(\omega - \omega') t] \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') =$$

$$= \int_{-\infty}^t dt' \vec{E}_{\vec{k}}(t') \int_{-\infty}^t dt'' \vec{E}_{\vec{k}}^*(t'') ,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \frac{1}{\omega - \omega'} \exp[-i(\omega - \omega') t] \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') = \\ & = -i \int_{-\infty}^t dt' \vec{E}_{\vec{k}}(t') \vec{E}_{\vec{k}}^*(t') , \\ & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \frac{\omega + \omega' - 2\omega_0}{\omega - \omega'} \exp[-i(\omega - \omega') t] \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') = \\ & = i2 \int_{-\infty}^t dt' \left[ \omega_0 \vec{E}_{\vec{k}}(t') - i \frac{\partial \vec{E}_{\vec{k}}}{\partial t'} \right] \vec{E}_{\vec{k}}^*(t') . \end{aligned}$$

Devido à hipótese de quase-monocromaticidade, a última integral é aproximadamente nula (o termo entre colchetes fornece a taxa de variação lenta do campo). Se esta contribuição for desprezada, a expressão da densidade de energia fica

$$\begin{aligned} U(t) = & \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}} \left[ \left| \vec{E}_{\vec{k}}(t) \right|^2 + k^2 c^2 \left| \vec{I}_t \cdot \int_{-\infty}^t dt' \vec{E}_{\vec{k}}(t') \right|^2 + \right. \\ & + \left. \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \vec{\chi}_h(\vec{k}; \omega) \right)_0 : \vec{E}_{\vec{k}}(t) \vec{E}_{\vec{k}}^*(t) + \right. \\ & + \left. 2\omega_0 \vec{\chi}_a(\vec{k}; \omega_0) : \int_{-\infty}^t dt' \vec{E}_{\vec{k}}(t') \vec{E}_{\vec{k}}^*(t') \right] . \end{aligned}$$

O último termo, proporcional à parte anti-Hermitiana da dada suscetibilidade, representa a dissipação ou absorção de energia pelo meio (excitações reais). Os demais termos correspondem às densidades de energia elétrica, energia magnética e energia cinética associada ao movimento ondulatório coerente das partículas (excitações virtuais).

Quando as perdas são desprezíveis, isto é,  $\bar{\chi}_a = 0$ , a densidade de energia da onda, na representação de Fourier, é dada simplesmente por

$$U(t) = \frac{\epsilon_0}{2(2\pi)^2} \sum_{\vec{k}} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times$$

$$\times \left[ \bar{I} + \frac{k^2 c^2}{\omega \omega'} \bar{I}_t + \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \bar{\chi}_h(\vec{k}; \omega) \right)_0 \right] : \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') .$$

Neste caso, as variáveis de campo podem ser representadas por séries de Fourier da forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t),$$

a que correspondem os espectros monocromáticos do tipo

$$\vec{E}_{\vec{k}}(\omega) = \pi \sum_{\vec{k}'} \vec{E}_{\vec{k}'} \left[ \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta(\omega - \omega_0) + \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \delta(\omega + \omega_0) \right] ,$$

e a densidade de energia fica especificada por sua média temporal

$$\langle U \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \sum_{\vec{k}} \left[ \bar{I} + \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2} \bar{I}_t + \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \bar{\chi}_h(\vec{k}; \omega) \right)_0 \right] : \vec{E}_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}} .$$

Se a frequência de excitação  $\omega_0$  for igual à frequência  $\omega_{\vec{k}}$  de um dos modos de oscilação do sistema, isto é,  $\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}(\vec{k})$  é solução da equação de dispersão, a energia média associada a este modo é dada por

$$\langle U_{\vec{k}} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \left[ \vec{k}\vec{k} + 2\vec{I}_t + (n^2 - 1) \vec{I}_t + \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \vec{\chi}_h(\vec{k}; \omega) \right)_{\vec{k}} \right] : \vec{E}_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}},$$

onde  $n^2 = k^2 c^2 / \omega_{\vec{k}}^2$ . Nesta expressão, os dois primeiros termos correspondem à energia do vácuo e os termos seguintes à energia de polarização do meio material. Esta expressão é atribuída a M. von Laue, ficando reduzida, para o caso de ondas longitudinais, a

$$\langle U_{\vec{k}} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega K_h(\vec{k}; \omega) \right)_{\vec{k}} |\vec{E}_{\vec{k}}|^2.$$

Considere-se, agora, o momento linear total que a fonte externa confere ao meio, durante o processo de excitação da onda; este momento é calculado por

$$\vec{P}(t) = - \int d^3 r \int_{-\infty}^t dt' (\rho_{\text{ext}} \vec{E} + \vec{j}_{\text{ext}} \times \vec{B}).$$

Usando-se as leis de Ampère e de Gauss

$$\nabla \times \vec{B} - \dot{\vec{E}}/c^2 = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{\text{ext}}),$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = (\rho + \rho_{\text{ext}})/\epsilon_0,$$

obtém-se

$$\vec{P}(t) = - \int d^3 r \int_{-\infty}^t dt' \left[ (\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} - \rho) \vec{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \vec{E} - \vec{j} \right) \times \vec{B} \right] =$$

$$= \int d^3 r \int_{-\infty}^t dt' (\vec{G}_C + \nabla \cdot \vec{T}_C + \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}),$$

onde  $\vec{G}_C = \vec{S}_C/c^2$  é a densidade de momento linear do campo eletromagnético e  $\vec{T}_C$  a díada de tensões de Maxwell

$$\vec{T}_C = \epsilon_0 \left( \frac{1}{2} \vec{I} E^2 - \vec{E} \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{2} \vec{I} B^2 - \vec{B} \vec{B} \right).$$

Portanto,

$$\vec{P}(t) = \int d^3 r \left[ \vec{G}_C + \int_{-\infty}^t dt' (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) \right] + \int_{-\infty}^t dt' \oint d^2 r \cdot \vec{T}_C.$$

Para um sistema isolado a integral de superfície é nula, ficando a densidade de momento linear definida por

$$\vec{G}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\vec{k}} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times$$

$$\times \left[ \epsilon_0 \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \times \vec{B}_{\vec{k}}^*(\omega') + i \frac{\rho_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') + \vec{j}_{\vec{k}}(\omega) \times \vec{B}_{\vec{k}}^*(\omega')}{\omega - \omega'} \right].$$

As densidades intrínsecas de carga e de corrente são dadas, no regime linear, por

$$\rho_{\vec{k}}(\omega) = -i \epsilon_0 \vec{k} \cdot \vec{\chi}(\vec{k}; \omega) \cdot \vec{E}_{\vec{k}}(\omega),$$

$$\vec{j}_{\vec{k}}(\omega) = -i \omega \epsilon_0 \vec{\chi}(\vec{k}; \omega) \cdot \vec{E}_{\vec{k}}(\omega).$$

Assim, usando a lei de Faraday e a igualdade

$$(\vec{\chi} \cdot \vec{E}) \times (\vec{k} \times \vec{E}^*) = \vec{k} \vec{\chi} : \vec{E} \vec{E}^* - \vec{k} \cdot \vec{\chi} \cdot \vec{E} \vec{E}^*,$$

resulta

$$\vec{G}(\vec{k}, t) = \frac{\epsilon_0}{(2\pi)^2} \sum_{\vec{k}} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times$$

$$\times \left[ \frac{\vec{k} \vec{I} - \vec{I} \vec{k}}{\omega'} + \frac{\vec{k} \vec{\chi}(\vec{k}; \omega)}{\omega - \omega'} \right] : \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega').$$

Após simetriação,

$$\vec{G}(\vec{k}, t) = \frac{\epsilon_0}{2(2\pi)^2} \sum_{\vec{k}} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times$$

$$\times \left\{ \vec{k} \left[ \left( \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} \right) \vec{I} + \frac{\vec{\chi}(\vec{k}; \omega) - \vec{\chi}^{\dagger}(\vec{k}; \omega')}{\omega - \omega'} \right] : \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') - \right.$$

$$\left. - \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \cdot \left( \frac{\vec{I} \vec{k}}{\omega} + \frac{\vec{k} \vec{I}}{\omega'} \right) \cdot \vec{E}_{\vec{k}}^*(\omega') \right\}.$$

Supondo que as perdas do meio são desprezíveis, isto é, que a dielétrica suscetibilidade é auto-adjunta, e utilizando-se novamente a expansão quase-monocromática, obtêm-se

$$\vec{G}(t) = \epsilon_0 \sum_{\vec{k}} \left[ (\vec{k} \vec{I} - \vec{I} \vec{k}) : \text{Re} \vec{E}_{\vec{k}}(t) \int_{-\infty}^t dt' \vec{E}_{\vec{k}}^*(t') + \right. \\ \left. + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \vec{\chi}_h(\vec{k}; \omega) \right)_0 : \vec{E}_{\vec{k}}(t) \vec{E}_{\vec{k}}^*(t) \right].$$

O valor médio no tempo da densidade de momento linear, para variações sinusoidais do campo, fica reduzido a

$$\langle \vec{G} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{\vec{k} \vec{I} - \vec{I} \vec{k}}{\omega_0} + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \vec{\chi}_h(\vec{k}; \omega) \right)_0 \right] : \vec{E}_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}}.$$

Para um modo do sistema, pode-se escrever

$$\langle \vec{G}_{\vec{k}} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \frac{1}{c} (\vec{k} \vec{I} - \vec{I} \vec{k}) + \frac{n-1}{c} (\vec{k} \vec{I} - \vec{I} \vec{k}) + \right. \\ \left. + \frac{k}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \vec{\chi}_h(\vec{k}; \omega) \right)_{\vec{k}} \right] : \vec{E}_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}},$$

onde o primeiro termo corresponde à densidade de momento do vácuo. Para ondas longitudinais, esta expressão fornece o resultado

$$\langle \vec{G}_{\vec{k}} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \vec{k} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \chi_h(\vec{k}; \omega) \right)_{\vec{k}} |\vec{E}_{\vec{k}}|^2.$$

Resta considerar o momento angular total conferido ao meio durante a excitação da onda; para isso é preciso calcular as integrais

$$\begin{aligned} \vec{J}(t) &= - \int d^3 r \int_{-\infty}^t dt' \vec{r} \times (\rho_{\text{ext}} \vec{E} + \vec{j}_{\text{ext}} \times \vec{B}) = \\ &= \int d^3 r \int_{-\infty}^t dt' \vec{r} \times (\dot{\vec{G}}_C + \nabla \cdot \vec{\bar{T}}_C + \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

A densidade de momento angular do campo eletromagnético é definida por

$$\vec{L}_C = \vec{r} \times \vec{G}_C,$$

e para a dñada de tensão pode-se escrever

$$\vec{r} \times \nabla \cdot \vec{\bar{T}}_C = \nabla \cdot \vec{r} \times \vec{\bar{T}}_C^t - (\vec{\bar{T}}_C)_x,$$

onde o índice inferior  $x$  indica o vetor da dñada. A dñada de tensão eletromagnética é simétrica ( $\vec{\bar{T}}_C^t = \vec{\bar{T}}_C$ ), portanto,

$$\vec{r} \times \nabla \cdot \vec{\bar{T}}_C = \nabla \cdot \vec{r} \times \vec{\bar{T}}_C.$$

Definindo-se o fluxo de momento angular  $\vec{\bar{M}}_C = \vec{r} \times \vec{\bar{T}}_C$ , a expressão do momento angular total fica

$$\vec{J}(t) = \int d^3 r \left[ \vec{L}_c + \int_{-\infty}^t dt' \vec{r} \times (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) \right] +$$

$$+ \int_{-\infty}^t dt' \oint d^2 r \cdot \vec{M}_c .$$

Novamente, a integral de superfície é nula se o sistema for isolado. Introduzindo o potencial vetor através de

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} ,$$

e usando a sequência de igualdades

$$\int d^3 r \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \int d^3 r \vec{r} \times [\vec{E} \times (\nabla \times \vec{A})] =$$

$$= \int d^3 r \vec{r} \times [(\nabla \vec{A}) \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \vec{A}] =$$

$$= \int d^3 r [ - \nabla \times (\vec{r} \vec{E} \cdot \vec{A}) - (\vec{r} \times \nabla \vec{E}) \cdot \vec{A} -$$

$$- \nabla \cdot (\vec{E} \vec{r} \times \vec{A}) + \vec{r} \times \vec{A} \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \times \vec{A} ] =$$

$$= \int d^3 r [ \vec{E} \times \vec{A} - (\vec{r} \times \nabla \vec{E}) \cdot \vec{A} + \vec{r} \times \vec{A} \nabla \cdot \vec{E} ] -$$

$$- \oint d^2 r \vec{r} \times (\vec{r} \vec{E} \cdot \vec{A}) - \oint d^2 r \cdot (\vec{E} \vec{r} \times \vec{A}) ,$$

resulta para o momento angular a expressão

$$\vec{J}(t) = \int d^3 r (\vec{L}_S + \vec{L}_O),$$

onde

$$\vec{L}_S = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{A} + \int_{-\infty}^t dt' \vec{j} \times \vec{A},$$

$$\vec{L}_O = \epsilon_0 \left[ -(\vec{r} \times \nabla \vec{E}) \cdot \vec{A} + \vec{r} \times \nabla \vec{A} \cdot \vec{E} \right] +$$

$$+ \int_{-\infty}^t dt' \left[ \rho \vec{r} \times \vec{E} - (\vec{r} \times \nabla \vec{j}) \cdot \vec{A} + \vec{r} \times \nabla \vec{A} \cdot \vec{j} \right].$$

A primeira das definições acima corresponde à densidade de momento angular intrínseco (spin) da onda e, a segunda definição, à densidade de momento angular orbital. O valor do momento angular orbital total depende da escolha da origem e, para um sistema com simetria de translação no espaço e no tempo, tem média temporal nula.

Na representação de Fourier, a expressão do momento angular intrínseco total fica

$$\vec{J}_S(t) = \frac{V}{(2\pi)^2} \sum_{\vec{k}} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega')t] \times$$

$$\times \left[ \epsilon_0 \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) \times \vec{A}_{\vec{k}}^*(\omega') + \frac{i \vec{j}_{\vec{k}}(\omega) \times \vec{A}_{\vec{k}}^*(\omega')}{\omega - \omega'} \right],$$

onde

$$\vec{j}_{\vec{k}}(\omega) = -i\omega\epsilon_0 \vec{\chi}(\vec{k}; \omega) \cdot \vec{E}_{\vec{k}}(\omega).$$

A conservação de energia resulta da simetria de translação no tempo e a conservação de momento linear da simetria de translação no espaço; estas duas condições de conservação são automaticamente satisfeitas ao ser definida a transformada  $\vec{\chi}(\vec{k}; \omega)$ . Entretanto, para assegurar a conservação de momento angular é preciso fazer hipóteses adicionais quanto à forma da resposta do sistema. Especificamente, o sistema deve ter simetria rotacional, isto é,  $\vec{\chi}$  deve ser diagonal na representação

$$\vec{I} = \sum_{\lambda} \vec{I}_{\lambda} + \hat{z}\hat{z},$$

onde

$$\vec{I}_{\lambda} = (\vec{I}_{\perp} + i\lambda \hat{z} \times \vec{I}_{\perp})/2,$$

e  $\vec{I}_{\perp}$  é a díada unidade no plano perpendicular ao eixo de simetria  $\hat{z}$  (a helicidade  $\lambda$  assume os valores  $\pm 1$ ). Os operadores  $\vec{I}_{\lambda}$  são os projetores (idempotentes e Hermicianos) das componentes circularmente polarizadas de um vetor, pois

$$\vec{I}_{\lambda} \cdot \vec{I}_{\lambda'} = \vec{I}_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'},$$

$$\hat{z} \cdot \vec{I}_{\lambda} = 0,$$

$$\vec{I}_{\lambda}^{\dagger} = \vec{I}_{\lambda}.$$

Estes projetores são construídos a partir de vetores unitários circularmente polarizados conforme

$$\bar{I}_\lambda = \hat{e}_\lambda \hat{e}_\lambda^* ,$$

onde  $\hat{e}_\lambda$  e  $\hat{e}_\lambda^*$  satisfazem as condições

$$\hat{e}_\lambda^* \cdot \hat{e}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} ,$$

$$\hat{z} \cdot \hat{e}_\lambda = 0 .$$

A partir de um sistema cartesiano  $(\hat{e}, \hat{z} \times \hat{e}, \hat{z})$ , pode-se escrever

$$\hat{e}_\lambda = (\hat{e} + i \lambda \hat{z} \times \hat{e})/\sqrt{2} ,$$

de modo que

$$\hat{e}_\lambda \times \hat{e}_{\lambda'} = -i \lambda \delta_{\lambda\lambda'} \hat{z} ,$$

$$\hat{z} \times \hat{e}_\lambda = -i \lambda \hat{e}_\lambda .$$

Assim, o vetor campo elétrico é dado em termos de suas componentes circularmente polarizadas e axial por

$$\vec{E} = \left( \sum_\lambda \bar{I}_\lambda + \hat{z}\hat{z} \right) \cdot \vec{E} = \sum_\lambda E_\lambda \hat{e}_\lambda + E_{||} \hat{z} ,$$

onde

$$E_\lambda = \hat{e}_\lambda^* \cdot \vec{E} = (E_\perp/\sqrt{2}) e^{-i\lambda\theta} ,$$

$$E_{||} = \hat{z} \cdot \vec{E} .$$

A componente  $E_\perp$  do campo no plano perpendicular ao eixo de simetria  $\hat{z}$  forma um ângulo  $\theta$  com o vetor unitário  $\hat{e}$ .

Portanto, se o sistema tem simetria rotacional, a suscetibilidade tem a forma

$$\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{I}} \cdot \bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{I}} = \sum_{\lambda} \chi_{\lambda} \hat{e}_{\lambda} \hat{e}_{\lambda}^* + \chi_{\parallel} \hat{z} \hat{z} ,$$

onde

$$\hat{e}_{\lambda}^* \cdot \bar{\bar{x}} \cdot \hat{e}_{\lambda'} = \chi_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'} ,$$

$$\hat{e}_{\lambda}^* \cdot \bar{\bar{x}} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \bar{\bar{x}} \cdot \hat{e}_{\lambda} = 0 ,$$

$$\hat{z} \cdot \bar{\bar{x}} \cdot \hat{z} = \chi_{\parallel} .$$

Estas condições indicam que o meio suporta modos circularmente polarizados. Além disso, a condição de simetria para uma rotação em torno de  $\hat{z}$  requer o paralelismo do vetor de onda com o eixo de simetria, isto é,

$$\vec{k} = k \hat{z} .$$

Assim,

$$\vec{j}_{\vec{k}}(\omega) = -i\omega\epsilon_0 \left[ \sum_{\lambda} \chi_{\lambda}(k; \omega) E_{k\lambda}(\omega) \hat{e}_{\lambda} + \chi_{\parallel}(k; \omega) E_{k,\parallel}(\omega) \hat{z} \right] ,$$

$$\vec{j}_{\vec{k}}(\omega) \times \vec{A}_{\vec{k}}^*(\omega') = -\omega\epsilon_0 \left[ \sum_{\lambda} \lambda \chi_{\lambda}(k; \omega) E_{k\lambda}(\omega) A_{k\lambda}^*(\omega') \hat{z} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\lambda} \lambda \chi_{\lambda}(k; \omega) E_{k\lambda}(\omega) A_{k,\parallel}^*(\omega') \hat{e}_{\lambda} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\lambda} \lambda \chi_{\parallel}(k; \omega) E_{k,\parallel}(\omega) A_{k\lambda}^*(\omega') \hat{e}_{\lambda}^* \right] .$$

Agora, o campo elétrico  $\vec{e}$  é dado em termos dos potenciais por

$$\vec{E}_{\vec{k}}(\omega) = -i k \vec{\phi}_{\vec{k}}(\omega) + i \omega \vec{A}_{\vec{k}}(\omega) .$$

Se for adotado o jugo de Lorentz

$$\phi_{\vec{k}}(\omega) = c^2 \vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}(\omega)/\omega ,$$

resulta, com  $\vec{k} = k\hat{z}$  ,

$$\omega E_{k\lambda}(\omega) = i\omega^2 A_{k\lambda}(\omega) ,$$

$$\omega E_{k,||}(\omega) = i(\omega^2 - k^2 c^2) A_{k,||}(\omega) .$$

Algumas observações são necessárias neste ponto. A definição do momento angular intrínseco envolve o potencial vetor  $\vec{A}$  dependendo, aparentemente, da escolha do jugo. Entretanto, as componentes longitudinais e transversais de  $\vec{A}$  não são acopladas pelo meio material em consideração, pertencendo a modos diversos (de acordo com a forma assumida para a suscetibilidade). Assim sendo, ao ser calculada a média temporal de  $\vec{J}_S$ , as contribuições de  $\vec{E} \times \vec{A}$  e  $\vec{j} \times \vec{A}$  que envolvem componentes diferentes se anulam. A conclusão é que somente a parte transversal de  $\vec{A}$  está associado um momento angular intrínseco que é conservado (a parte longitudinal não contribui para  $\langle \vec{J}_S \rangle$ ), e esta parte do potencial vetor é independente do jugo. Portanto, pode-se simplificar o restante do desenvolvimento limitando, desde já, a discussão aos modos transversais, isto é, escrevendo

$$\vec{j}_{\vec{k}}(\omega) \times \vec{A}_{\vec{k}}^*(\omega') = -i\omega^2 \epsilon_0 \hat{z} \sum_{\lambda} \chi_{\lambda}(k; \omega) A_{k\lambda}(\omega) A_{k\lambda}^*(\omega') .$$

Após simetriação, a densidade de momento angular intrínseco fica

$$\vec{L}_S(t) = \frac{\epsilon_0 \hat{z}}{2(2\pi)^2} \sum_{k\lambda} \chi_{\lambda} \int_B d\omega \int_{B'} d\omega' \exp[-i(\omega - \omega') t] \times$$

$$x \left[ \omega + \omega' + \frac{\omega^2 \chi_\lambda(k; \omega) - \omega'^2 \chi_\lambda^*(k; \omega')}{\omega - \omega'} \right] A_{k\lambda}(\omega) A_{k\lambda}^*(\omega') .$$

Supondo perdas desprezíveis ( $\chi_\lambda^* = \chi_\lambda$ ) e excitação quase monocromática, obtêm-se

$$\vec{L}_S(t) = \epsilon_0 \hat{z} \sum_{k\lambda} \lambda \left[ \text{Im} A_{k\lambda}(t) \frac{\partial A_{k\lambda}^*(t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \chi_\lambda(k; \omega) \right)_0 A_{k\lambda}(t) A_{k\lambda}^*(t) \right] .$$

Se o meio não suporta modos circularmente polarizados, os termos envolvendo acoplamento entre componentes resultam em contribuições semelhantes aos termos de perdas associados à parte anti-Hermitiana de  $\chi$ , isto é, dependem de toda a evolução passada da onda (conclusão, não há conservação de momento angular).

Considere-se uma onda circularmente polarizada com variação sinusoidal do tipo (a onda de helicidade positiva corresponde a  $\lambda = 1$ )

$$\vec{A}_\lambda(z, t) = \sum_k A_{k\lambda} \left[ \hat{e} \cos(kz - \omega_0 t) - \lambda \hat{z} \times \hat{e} \sin(kz - \omega_0 t) \right]$$

$$\therefore \vec{A}_{k\lambda}(\omega) = \sqrt{2} \pi \sum_{k'} A_{k'\lambda} \left[ \hat{e}_\lambda \delta_{k,k'} \delta(\omega - \omega_0) + \hat{e}_\lambda^* \delta_{k,-k'} \delta(\omega + \omega_0) \right]$$

$$\therefore A_{k\lambda}(\omega) = \hat{e}_\lambda^* \cdot \vec{A}_{k\lambda}(\omega) = \sqrt{2} \pi \sum_{k'} A_{k'\lambda} \delta_{k,k'} \delta(\omega - \omega_0) .$$

A média temporal fornece

$$\langle \vec{L}_S \rangle = \frac{\epsilon_0 \hat{z}}{2} \sum_{k\lambda} \lambda \left[ \omega_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \chi_\lambda(k; \omega) \right)_0 \right] A_{k\lambda}^2 ,$$

ficando o spin de um modo de helicidade  $\lambda$  definido por ( $E_{k\lambda}^2 = \omega_k^2 A_{k\lambda}^2$ )

$$\langle \vec{L}_{S, k\lambda} \rangle = \frac{\epsilon_0 \hat{z}}{2 \omega_k} \lambda \left[ 1 + \frac{1}{2 \omega_k} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \chi_\lambda(k; \omega) \right)_k \right] E_{k\lambda}^2 ,$$

onde o primeiro termo  $\bar{e}$  o spin do vácuo.

Introduzindo-se o número de ocupação

$$N_{\vec{k}} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{E_{\vec{k}}^2}{\omega_{\vec{k}}} ,$$

as expressões da energia e do momento linear de uma onda podem ser es  
critas na forma

$$\langle U_{\vec{k}} \rangle = N_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left[ \frac{n^2 + 1}{2} \bar{I}_t + \frac{\vec{k}\vec{k}}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \bar{\chi}_h(k; \omega) \right)_{\vec{k}} \right] : \hat{E}_{\vec{k}} \hat{E}_{\vec{k}} ,$$

$$\langle \vec{G}_{\vec{k}} \rangle = N_{\vec{k}} k \left[ \vec{k}\bar{I} - \bar{I}\vec{k} + \vec{k} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \chi_h(\vec{k}; \omega) \right)_{\vec{k}} \right] : \hat{E}_{\vec{k}} \hat{E}_{\vec{k}} .$$

Para uma onda circularmente polarizada de helicidade  $\lambda$ , a energia, o momento linear e o spin são dados por

$$\langle U_{k\lambda} \rangle = N_{k\lambda} \omega_k \left[ \frac{n^2 + 1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \chi_\lambda(k; \omega) \right)_k \right],$$

$$\langle \vec{G}_{k\lambda} \rangle = N_{k\lambda} k \hat{z} \left[ 1 + \frac{\omega_k}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \chi_\lambda(k; \omega) \right)_k \right],$$

$$\langle \vec{L}_{S,k\lambda} \rangle = N_{k\lambda} \lambda \hat{z} \left[ 1 + \frac{1}{2\omega_k} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \chi_\lambda(k; \omega) \right)_k \right],$$

que fornecem imediatamente o resultado para fôtons

$$\langle U_{k\lambda} \rangle = N_{k\lambda} \omega_k,$$

$$\langle \vec{G}_{k\lambda} \rangle = N_{k\lambda} k \hat{z},$$

$$\langle \vec{L}_{S,k\lambda} \rangle = N_{k\lambda} \lambda \hat{z}.$$

Observe-se que um modo circularmente polarizado satis faz a relação de dispersão

$$n^2 = 1 + \chi_\lambda,$$

o que permite escrever as expressões do momento linear e do spin em termos da energia, para tais modos, como

$$\langle \vec{G}_{k\lambda} \rangle = N_{k\lambda} k \hat{z} \left[ (N_{k\lambda} \omega_k)^{-1} \langle U_{k\lambda} \rangle - (n^2 - 1) \right],$$

$$\langle \vec{L}_{S,k\lambda} \rangle = \omega_k^{-1} \langle U_{k\lambda} \rangle \lambda \hat{z}.$$

## 2. APLICAÇÃO ÀS ONDAS EM PLASMAS FRIOS

As expressões para a energia e o momento serão aplicadas, nesta seção, aos modos de propagação em plasmas frios num campo magnético. A frequência de plasma para a espécie componente de carga  $q$  será denotada por

$$\omega_q = (n_q q^2 / m_q \epsilon_0)^{1/2} ,$$

e a girofrequência por

$$\vec{\Omega}_q = - q \vec{B} / m_q .$$

As autofrequências para modos longitudinais são calculadas a partir de relações de dispersão da forma

$$\hat{k} \cdot \vec{K} \cdot \hat{k} = 0 ,$$

onde

$$\vec{K} = \vec{I} + \vec{\chi} ,$$

e, para modos eletromagnéticos, a partir do determinante

$$| n^2 \vec{I}_t - \vec{K} | = 0 .$$

As formas apropriadas da suscetibilidade estão listadas, abaixo, para cada um dos modos do plasma frio. Em geral, o plasma é considerado neutro, de modo que

$$\sum_q \omega_q^2 / \Omega_q = 0 ,$$

para uma soma sobre componentes.

## 2.1. PROPAGAÇÃO PARALELA AO CAMPO MAGNÉTICO ( $k_{\perp} = 0$ )

### 2.1.1. OSCILAÇÕES LONGITUDINAIS DE LANGMUIR

Estas oscilações são descritas pela suscetibilidade

$$\chi_{\ell} = - \sum_q \frac{\omega_q^2}{\omega^2},$$

que, para um plasma de duas espécies componentes ( $q = e, i$ ), fica

$$\chi_{\ell} = - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

onde  $\omega_p^2 = \omega_e^2 + \omega_i^2 \cong \omega_e^2$ . A relação de dispersão é simplesmente

$$\omega_k^2 = \omega_p^2,$$

e a energia e o momento linear são dados por

$$\langle U \rangle_{\ell} = N_{\ell} \omega_p,$$

$$\langle \vec{G} \rangle_{\ell} = N_{\ell} k_{\parallel} \hat{z}.$$

### 2.1.2. ONDAS TRANSVERSAIS CIRCULARMENTE POLARIZADAS

A forma apropriada da suscetibilidade é

$$\chi_{\lambda} = - \sum_q \frac{\omega_q^2}{\omega(\omega + \lambda\Omega_q)}.$$

Para um plasma neutro de duas componentes, esta expressão fornece

$$\chi_\lambda = - \frac{\omega_p^2}{(\omega + \lambda\Omega_e)(\omega + \lambda\Omega_i)},$$

a partir da qual se podem calcular as frequências de corte ( $\chi_\lambda = -1$ )

$$\begin{aligned} \omega_\lambda &= \frac{\Omega_e + \Omega_i}{2} \left[ \left( 1 + \frac{4(\omega_p^2 - \Omega_e\Omega_i)}{(\Omega_e + \Omega_i)^2} \right)^{1/2} - \lambda \right] \cong \\ &\cong \frac{\Omega_e}{2} \left[ \left( 1 + \frac{4\omega_p^2}{\Omega_e^2} \right)^{1/2} - \lambda \right], \end{aligned}$$

e as frequências de ressonância  $\Omega_e$  e  $|\Omega_i|$ . A ressonância ciclotrônica dos elétrons ocorre para modos de helicidade negativa e a ressonância dos íons para helicidade positiva (observe-se que, de acordo com a definição adotada para a girofrequência,  $\Omega_e > 0$  e  $\Omega_i < 0$ ).

Os modos descritos pela suscetibilidade acima recebem diferentes denominações conforme a faixa de frequências considerada.

i) Ondas elétron - ciclotrônicas ( $\omega^2 \gg \Omega_i^2$ )

$$\chi_{ec} = - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \lambda\Omega_e)}.$$

A relação de dispersão é

$$\frac{k_{||}^2 c^2}{\omega_k^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_k(\omega_k + \lambda\Omega_e)},$$

tendo por frequências de corte as frequências  $\omega_\lambda$  calculadas acima, e ressonância, para modos de helicidade negativa, na girofrequência dos elétrons. O modo ressonante ( $\lambda = -1$ ) propaga-se para frequências acima de  $\omega_{-1}$  ou abaixo de  $\Omega_e$ . O modo não ressonante ( $\lambda = +1$ ) somente se propaga para frequências acima de  $\omega_{+1}$  (enquanto não for incluído o movimento dos íons).

A energia, o momento linear e o spin são dados por

$$\langle U \rangle_{ec} = N_{ec} \omega_k \left[ 1 + (n^2 - 1) \frac{\lambda \Omega_e / 2}{\omega_k + \lambda \Omega_e} \right],$$

$$\langle \vec{G} \rangle_{ec} = N_{ec} k_{||} \hat{z} \left[ 1 - (n^2 - 1) \frac{\omega_k + \lambda \Omega_e / 2}{\omega_k + \lambda \Omega_e} \right],$$

$$\langle \vec{L}_s \rangle_{ec} = N_{ec} \lambda \hat{z} \left[ 1 + (n^2 - 1) \frac{\lambda \Omega_e / 2}{\omega_k + \lambda \Omega_e} \right].$$

ii) Helicons ou assobios ( $\Omega_i^2 \ll \omega^2 \ll \Omega_e^2$ )

$$\chi_h \cong \frac{\omega_p^2}{\omega \Omega_e}.$$

A relação de dispersão é ( $\omega_p^2 \gg \Omega_e^2$ )

$$\omega_k \cong \Omega_e \frac{k_{||}^2 c^2}{\omega_p^2},$$

correspondendo ao modo elétron - ciclotrônico de helicidade negativa no regime de frequências muito menores que a girofrequência dos elétrons.

A energia, o momento linear e o spin de um helicon são dados por

$$\langle U \rangle_h = N_h \omega_k \left( 1 + \frac{n^2 - 1}{2} \right),$$

$$\langle \vec{G} \rangle_h = N_h k_{||} \hat{z} \left( 1 - \frac{n^2 - 1}{2} \right),$$

$$\langle \vec{L}_s \rangle_h = -N_h \hat{z} \left( 1 + \frac{n^2 - 1}{2} \right) \quad (\lambda = -1).$$

iii) Ondas íon - ciclotrônicas ( $\omega^2 \lesssim \Omega_i^2$ )

Nesta faixa de frequências o movimento dos íons torna-se importante, sendo a suscetibilidade dada por

$$\chi_{ic} \cong - \frac{\omega_p^2}{\Omega_e (\omega + \Omega_i)}.$$

A relação de dispersão é

$$\frac{k_{||}^2 c^2}{\omega_k^2} \cong 1 - \frac{\omega_p^2}{\Omega_e (\omega_k + \Omega_i)},$$

descrevendo um modo que se propaga para frequências abaixo da frequência de ressonância  $|\Omega_i|$  (corresponde ao modo de helicidade positiva que volta a se propagar devido à inclusão do movimento dos íons).

A energia, o momento linear e o spin são dados por

$$\langle U \rangle_{ic} = N_{ic} \omega_k \left[ 1 + (n^2 - 1) \frac{\omega + 2\Omega_i}{2(\omega + \Omega_i)} \right],$$

$$\langle \vec{G} \rangle_{ic} = N_{ic} k_{\parallel} \hat{z} \left[ 1 - (n^2 - 1) \frac{\omega}{2(\omega + \Omega_i)} \right],$$

$$\langle \vec{L}_s \rangle_{ic} = N_{ic} \hat{z} \left[ 1 + (n^2 - 1) \frac{\omega + 2\Omega_i}{2(\omega + \Omega_i)} \right] \quad (\lambda = +1).$$

iv) Ondas de Alfvén ( $\omega^2 \ll \Omega_i^2$ ).

A suscetibilidade para estas ondas é

$$\chi_a = \frac{\omega_p^2}{\Omega_e |\Omega_i|} = \frac{c^2}{V_A^2},$$

onde  $V_A = B/\sqrt{\mu_0 n m_i}$  é a velocidade de Alfvén, e a relação de dispersão fica

$$\frac{\omega_k}{k_{\parallel}} = \frac{V_A}{(1 + V_A^2/c^2)^{1/2}}.$$

Neste limite de baixa frequência as ondas de helicidade positiva e negativa tem a mesma velocidade de propagação e a onda de Alfvén resulta linearmente polarizada. A energia e o momento linear são dados por

$$\langle U \rangle_a = N_a \omega_k (1 + c^2/V_A^2) ,$$

$$\langle \vec{G} \rangle_a = N_a k_{||} \hat{z} .$$

A Fig. 1 mostra o diagrama de dispersão para os modos que se propagam paralelamente ao campo magnético.

## 2.2. PROPAGAÇÃO PERPENDICULAR AO CAMPO MAGNÉTICO ( $k_{||} = 0$ )

### 2.2.1. MODO TRANSVERSAL ORDINÁRIO

$$\chi_o = - \sum_q \frac{\omega_q^2}{\omega^2} .$$

A relação de dispersão é

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{\vec{k}}^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{\vec{k}}^2} ,$$

descrevendo uma onda linearmente polarizada na direção do campo magnético que, para frequências muito acima da frequência de plasma, se reduz a uma onda eletromagnética no vácuo (fóton). A frequência de corte para este modo é a frequência de plasma, e a energia e o momento linear são dados por

$$\langle U \rangle_o = N_o \omega_{\vec{k}} ,$$

$$\langle \vec{G} \rangle_o = N_o k_{\perp} (1 + \omega_p^2/\omega_{\vec{k}}^2) .$$

### 2.2.2. MODO EXTRAORDINÁRIO

Este  $\vec{e}$  é um modo que tem componentes longitudinal e transversal, e polarização elíptica no plano perpendicular ao campo magnético

$$\vec{E}_{\vec{k}} = E_{\ell} \hat{k} + E_t \hat{z} \times \hat{k} \quad (\hat{k} \perp \hat{z})$$

$$\therefore \vec{E}_{\vec{k}} = \cos \theta \hat{k} + \sin \theta \hat{z} \times \hat{k} .$$

A suscetibilidade tem a forma

$$\vec{\chi}_X = (S - 1) (\hat{k}\hat{k} + \hat{z}\hat{z} \times \hat{k}\hat{k}) + iD(\hat{z} \times \hat{k}\hat{k} - \hat{k}\hat{z} \times \hat{k}) ,$$

onde

$$S = 1 - \sum_q \frac{\omega_q^2}{\omega^2 - \Omega_q^2} ,$$

$$D = - \sum_q \frac{\omega_q^2}{\omega^2 - \Omega_q^2} \frac{\Omega_q}{\omega} .$$

A partir da equação de onda

$$(-n^2 \vec{I}_t + \vec{K}) \cdot \vec{E}_{\vec{k}}(\omega) = 0 ,$$

obtem-se a razão entre polarizações

$$E_{t,\vec{k}}(\omega)/E_{\ell,\vec{k}}(\omega) = -i S(\omega)/D(\omega) ,$$

e a relação de dispersão

$$n^2 = (S^2 - D^2)/S ,$$

que pode ser escrita como

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{\vec{k}}^2} = 1 + \left( 1 - \sum_q \frac{\omega_q^2}{\omega_{\vec{k}}^2 - \Omega_q^2} \right)^{-1} \left( 1 - \sum_q \frac{\omega_q^2}{\omega_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}} - \Omega_q)} \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \sum_q \frac{\omega_q^2}{\omega_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}} + \Omega_q)} \right) .$$

A energia e o momento do modo extraordinário são dados por

$$\langle U \rangle_{\vec{k}} = N_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left[ 1 + \frac{n^2 - 1}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega(S - 1) \right)_{\vec{k}} \right] ,$$

$$\langle \vec{G} \rangle_{\vec{k}} = N_{\vec{k}} k \left[ \hat{k} - (\cos \theta \hat{k} + \sin \theta \hat{z} \times \hat{k}) \cos \theta + \right. \\ \left. + \hat{k} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} (S - 1) \right)_{\vec{k}} \right] ,$$

onde

$$\tan \theta = E_{t, \vec{k}} / E_{l, \vec{k}} = S(\omega_{\vec{k}}) / D(\omega_{\vec{k}}) .$$

Na obtenção dessa razão entre amplitudes foram utilizadas as relações

$$S(-\omega) = S(\omega) ,$$

$$D(-\omega) = -D(\omega) .$$

Para um plasma neutro, com duas componentes, tem-se

$$S = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 + \Omega_e \Omega_i)}{(\omega^2 - \Omega_e^2)(\omega^2 - \Omega_i^2)} ,$$

$$D = - \frac{\omega \omega_p^2(\Omega_e + \Omega_i)}{(\omega^2 - \Omega_e^2)(\omega^2 - \Omega_i^2)} ,$$

e, para a relação de dispersão,

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{\vec{k}}^2} = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega_{\vec{k}}^2 - \omega_p^2 + \Omega_e \Omega_i)}{(\omega_{\vec{k}}^2 - \Omega_e^2)(\omega_{\vec{k}}^2 - \Omega_i^2) - \omega_p^2(\omega_{\vec{k}}^2 + \Omega_e \Omega_i)} .$$

A partir dessa equação calculam-se as frequências de corte

$$\omega = \pm \frac{\Omega_e + \Omega_i}{2} + \left[ \left( \frac{\Omega_e - \Omega_i}{2} \right)^2 + \omega_p^2 \right]^{1/2} \cong$$

$$\cong \frac{\Omega_e}{2} \left[ \left( 1 + \frac{4\omega_p^2}{\Omega_e^2} \right)^{1/2} \pm 1 \right] = \omega_{\pm 1} ,$$

que são aproximadamente iguais às frequências de corte,  $\omega_{\lambda}$ , para os modos ciclotrônicos. As frequências de ressonância são calculadas a partir de

$$(\omega^2 - \Omega_e^2) (\omega^2 - \Omega_i^2) = \omega_p^2 (\omega^2 + \Omega_e \Omega_i) ,$$

sendo dadas aproximadamente por

$$\omega^2 \cong \omega_p^2 + \Omega_e^2 + \Omega_i^2 = \omega_{hs}^2 ,$$

$$\omega^2 \cong |\Omega_e \Omega_i| (\omega_p^2 + |\Omega_e \Omega_i|) / (\omega_p^2 + \Omega_e^2 + \Omega_i^2) = \omega_{hi}^2 ,$$

e chamadas frequências híbrida superior e híbrida inferior. O modo extraordinário propaga-se para frequências acima da frequência de corte  $\omega_{-1}$  e na faixa entre a frequência híbrida superior e a frequência de corte  $\omega_{+1}$ . Abaixo da frequência híbrida inferior também ocorre propagação com a participação dos íons.

O modo extraordinário combina as oscilações ciclotrônicas com as oscilações devidas à distribuição espacial de carga, porém, nos limites, para frequências muito altas ou muito baixas, reduz-se a ondas puramente transversais ou puramente longitudinais. Assim, para  $\omega^2 \rightarrow \infty$  a relação de dispersão fica

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{\vec{k}}^2} \cong 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{\vec{k}}^2} ,$$

descrevendo uma onda transversal linearmente polarizada. No limite  $\omega^2 \ll \Omega_i^2$ , tem-se

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{\vec{k}}^2} \cong 1 + \frac{\omega_p^2}{|\Omega_e \Omega_i|} = 1 + \frac{c^2}{V_A^2} .$$

Essa onda de baixa frequência é longitudinal, linearmente polarizada, e recebe a denominação onda magneto-acústica, ou compressional de Alfvén.

Em geral, a relação de dispersão para o modo extraordinário pode ser escrita em termos das frequências de corte e de ressonância como

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{\vec{k}}^2} = \frac{(\omega_{\vec{k}}^2 - \omega_{-1}^2) (\omega_{\vec{k}}^2 - \omega_{+1}^2)}{(\omega_{\vec{k}}^2 - \omega_{hs}^2) (\omega_{\vec{k}}^2 - \omega_{hi}^2)},$$

com duas faixas distintas de frequências.

i) Modo híbrido superior ( $\omega^2 \gg \omega_{hi}^2$ )

$$S \cong 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_e^2},$$

$$D \cong - \frac{\omega_p^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}.$$

A relação de dispersão

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{\vec{k}}^2} = \frac{(\omega_{\vec{k}}^2 - \omega_p^2)^2 - \omega_{\vec{k}}^2 \Omega_e^2}{\omega_{\vec{k}}^2 (\omega_{\vec{k}}^2 - \omega_{hs}^2)},$$

descreve um modo do qual s̄o participam os el̄etrons. O ângulo  $\theta$  utilizado no c̄alculo da energia e do momento linear ̄e dado por

$$\tan \theta = - \frac{\omega(\omega^2 - \omega_{hs}^2)}{\omega_p^2 \Omega_e}.$$

ii) Modo híbrido inferior ( $\omega^2 \lesssim \omega_{hi}^2$ )

$$S \cong 1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 + \Omega_e \Omega_i)}{\Omega_e^2(\Omega_i^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_{hs}^2(\omega_{hi}^2 - \omega^2)}{\Omega_e^2(\Omega_i^2 - \omega^2)},$$

$$D \cong - \frac{\omega \omega_p^2(\Omega_e + \Omega_i)}{\Omega_e^2(\Omega_i^2 - \omega^2)}.$$

A relação de dispersão

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_{\vec{k}}^2} = \frac{\Omega_e^2(\Omega_i^2 - \omega_{\vec{k}}^2) (S^2 - D^2)}{\omega_{hs}^2(\omega_{hi}^2 - \omega_{\vec{k}}^2)},$$

inclui o movimento dos íons e, para  $\omega^2 \ll \Omega_i^2$ , corresponde ao modo compressional de Alfvén.

O ângulo  $\theta$  é dado por

$$\tan \theta = - \frac{\omega_{hs}^2(\omega_{hi}^2 - \omega^2)}{\omega \omega_p^2(\Omega_e + \Omega_i)}.$$

A Fig. 2 mostra o diagrama de dispersão para os modos que se propagam perpendicularmente ao campo magnético.

## BIBLIOGRAFIA

A expressão para a densidade de energia num meio dispersivo foi discutida pela primeira vez por

von Laue, M., *Ann Physik* 18(4), 523 (1905).

Este conceito foi tratado em maior detalhe, porém ainda para meios descritos por suscetibilidades escalares, por

Landau, L.D. e E.M. Lifshitz, *Électrodynamique des Milieux Continus* (Éditions Mir, Moscou, 1969), c. IX, p. 332-336,

e, com a inclusão de perdas, por

Ginzburg, V.L., *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* (Pergamon Press, Oxford, 1964), c. IV, p. 240-250.

O efeito das perdas foi também considerado, desta vez para um meio de suscetibilidade tensorial, por

Stix, T.H., *The Theory of Plasma Waves* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1962), c. 3, p. 46-49,

e por

Bekefi, G., *Radiation Processes in Plasmas* (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966), c. 1, p. 9-12.

As expressões para as densidades de momento linear e de energia, para modos eletrostáticos num meio sem perdas, podem ser encontradas no trabalho de

Coppi, B., M.N. Rosenbluth e R.N. Sudan, *Ann. Phys.* 55, 207 (1969).

Uma discussão sobre o momento angular de fótons pode ser encontrada no livro de

Heitler, W., *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford University Press, London, 1954), a. 1, p. 401.

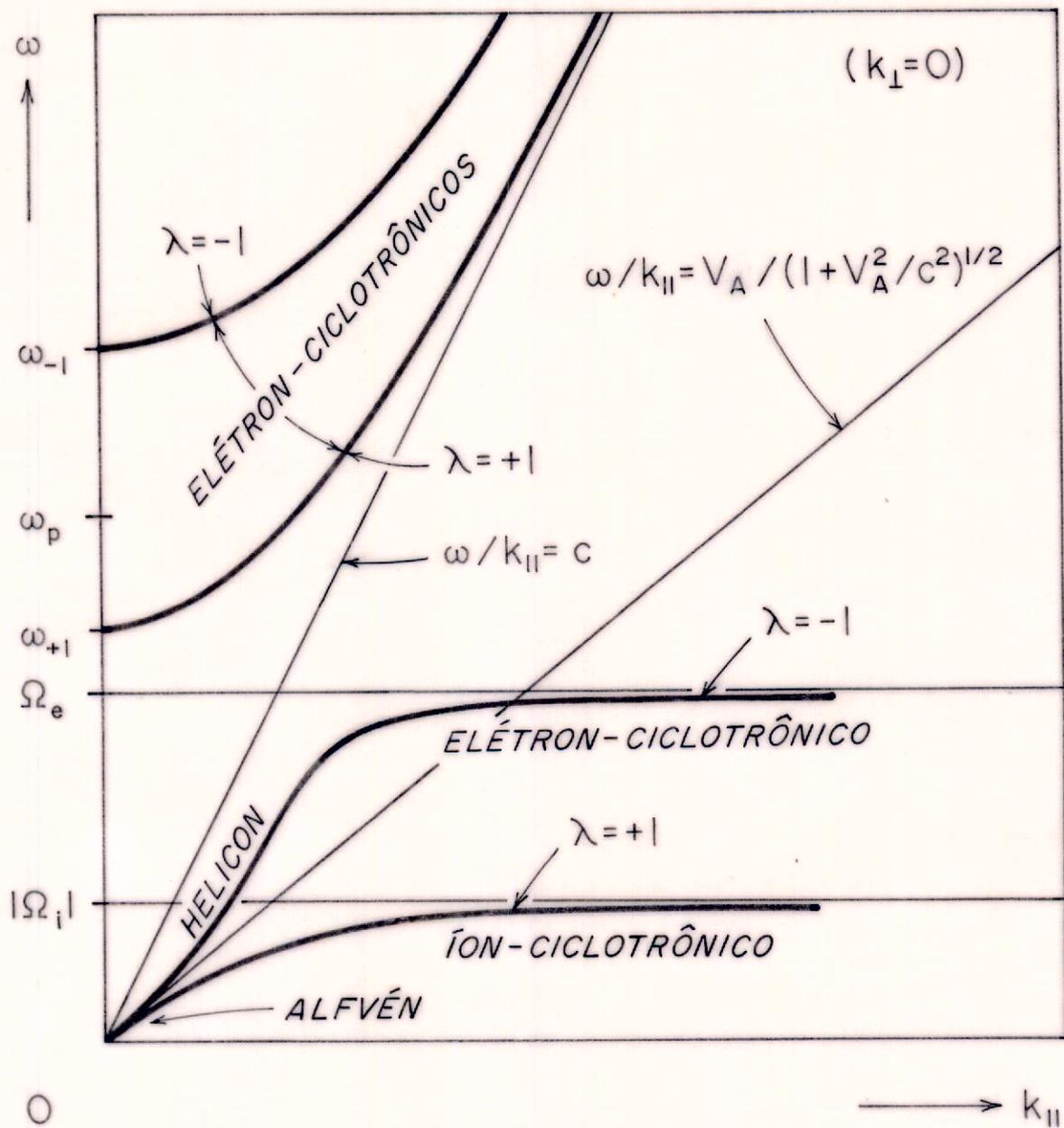


Figura 1

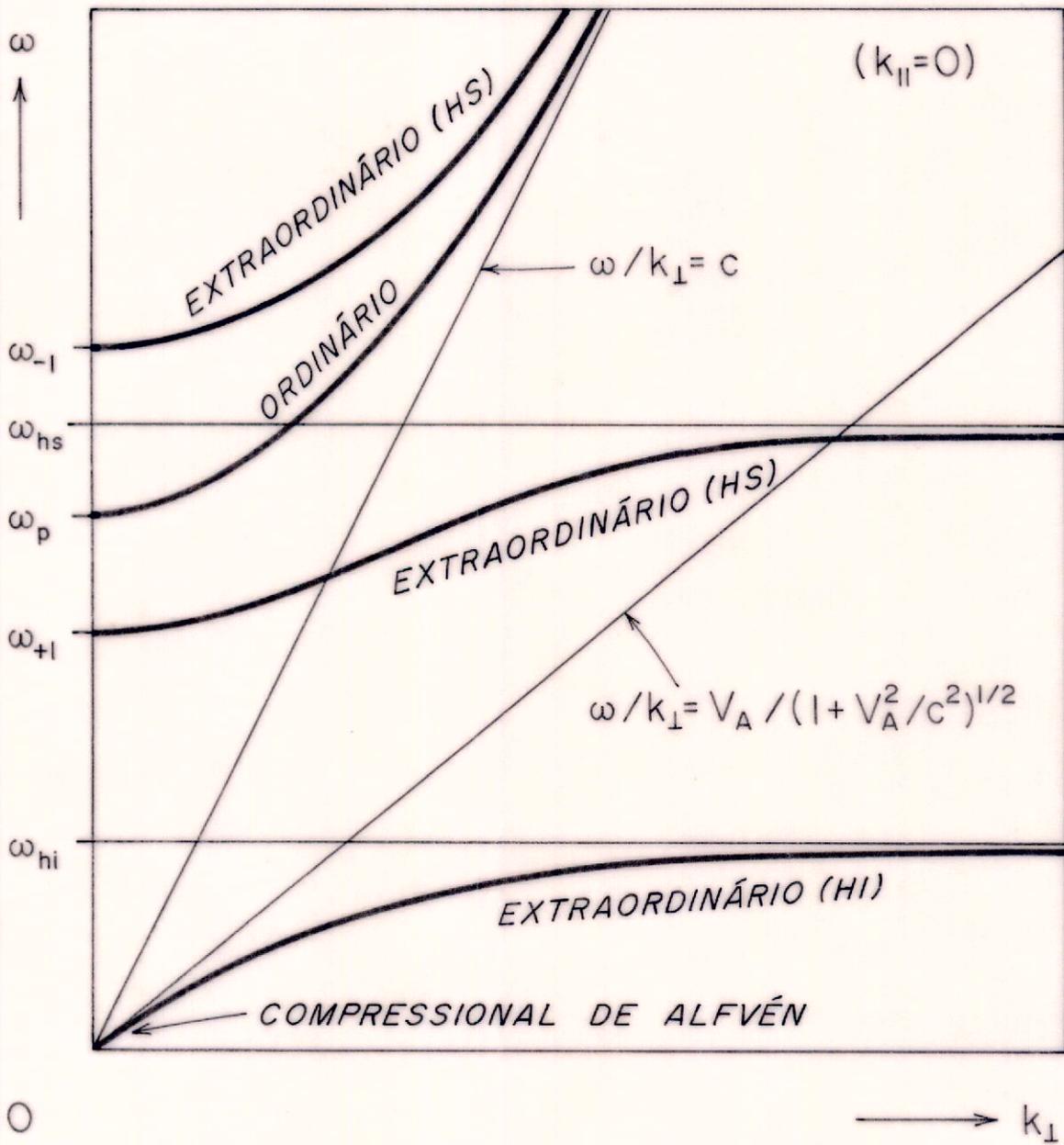


Figura 2