

1. Classificação <i>INPE-COM.3/PE</i> <i>C.D.U 533.98</i>		2. Período	4. Critério de Distribuição: interna <input type="checkbox"/> externa <input checked="" type="checkbox"/>
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>Anéis Iônicos</i> <i>Campo Magnético Reverso</i> <i>Rotor Rígido</i> <i>Equilíbrio Isotérmico</i> <i>Equilíbrio Adiabático</i>			
5. Relatório nº <i>INPE-1205-PE/116</i>	6. Data <i>Março, 1978</i>	7. Revisado por <i>Bittencourt</i> <i>J.A. Bittencourt</i>	
8. Título e Sub-Título <i>EQUILÍBRIO DE ANÉIS IÔNICOS</i>		9. Autorizado por <i>Parada</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>	
10. Setor <i>DCE/GPL</i>	Código <i>30.374</i>	11. Nº de cópias <i>16</i>	
12. Autoria <i>Gerson Otto Ludwig</i>		14. Nº de páginas <i>46</i>	
13. Assinatura Responsável <i>Ludwig</i>		15. Preço	
16. Sumário/Notas <i>São apresentadas as equações apropriadas à descrição de sistemas de partículas carregadas em equilíbrio, com simetria rotacional, num campo magnético externo. É dada ênfase especial à classe de equilíbrios diamagnéticos do tipo rotor rígido. As soluções unidimensionais e bidimensionais, destas equações, são examinadas, considerando-se anéis iônicos em estado isotérmico e em estado adiabático.</i>			
17. Observações <i>Trabalho a ser submetido para publicação na Revista Brasileira de Física.</i>			

EQUILÍBRIO DE ANÉIS IÔNICOS

por

Gerson Otto Ludwig

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

São José dos Campos - S.P. - Brasil

RESUMO

São apresentadas as equações apropriadas à descrição de sistemas de partículas carregadas em equilíbrio, com simetria rotacional, num campo magnético externo. É dada ênfase especial à classe de equilíbrios diamagnéticos do tipo rotor rígido. As soluções uni e bidimensionais, destas equações, são examinadas, considerando-se anéis iônicos em estado isotérmico e em estado adiabático.

ABSTRACT

The equations which describe the azimuthally symmetric equilibrium of a system of charged particles in an external magnetic field are studied. In particular, attention is focused on the rigid-rotor type of diamagnetic equilibrium. The solutions of these equations are discussed, in one and two dimensions, for ion rings in isothermal and in adiabatic equilibrium states.

ÍNDICE

ABSTRACT	<i>iii</i>
LISTA DE FIGURAS	<i>iv</i>
1. INTRODUÇÃO	1
2. DESCRIÇÃO DE VLASOV-MAXWELL	2
3. EQUILÍBRIO DE ANÉIS E PARTÍCULAS	9
4. EQUILÍBRIO UNIDIMENSIONAL	20
4.1 - EQUILÍBRIO ISOTÉRMICO	21
4.2 - EQUILÍBRIO ADIABÁTICO	22
5. EQUILÍBRIO BIDIMENSIONAL	28
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	40

ABSTRACT

The equations which describe the azimuthally symmetric equilibrium of a system of charged particles in an external magnetic field are studied. In particular, attention is focused on the rigid-rotor type of diamagnetic equilibrium. The solutions of these equations are discussed, in one and two dimensions, for ion rings in isothermal and in adiabatic equilibrium states.

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
FIG. 1 - LIMITES DE CONTINUIDADE DO JACOBIANO DA TRANSFORMAÇÃO $d^3v \rightarrow dK_{\perp} dP_{\theta} dP_z$	41
FIG. 2 - EQUILÍBRIO DE UM ANEL DE PARTÍCULAS A CAMPO REVERSO	42
FIG. 3 - DISTRIBUIÇÕES RADIAIS DA DENSIDADE DE PARTÍCULAS E DA DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO AXIAL PARA O EQUILÍBRIO UNIDIMENSIONAL ISOTÉRMICO ($\gamma=1$; $\delta^2\omega_p^2/c^2 = \eta/2 = s/\sqrt{2}$)	43
FIG. 4 - EQUILÍBRIO UNIDIMENSIONAL ADIABÁTICO PARA TRÊS GRAUS DE LIBERDADE ($\gamma=5/3$)	44
FIG. 5 - EQUILÍBRIO UNIDIMENSIONAL ADIABÁTICO PARA DOIS GRAUS DE LIBERDADE ($\gamma=2$)	45
FIG. 6 - SOLUÇÃO EXTERIOR PARA O EQUILÍBRIO BIDIMENSIONAL DE UM ANEL A CAMPO REVERSO E DETERMINAÇÃO GRÁFICA DO CONTORNO DO ANEL	46

1. INTRODUÇÃO

O estudo do equilíbrio, de anéis intensos de partículas carregadas, tem interesse no desenvolvimento de técnicas para o confinamento magnético de plasmas quentes e para a aceleração coletiva de íons.¹ O presente trabalho trata, em particular, do equilíbrio de anéis iônicos caracterizados por fortes efeitos diamagnéticos, capazes de produzir reversão do campo magnético aplicado externamente. Tais anéis oferecem alternativas interessantes na realização de um reator de fusão, pois produzem, de acordo com o conceito astron,² configurações magnéticas favoráveis ao confinamento de plasmas termonucleares.

Na seção 2 é feito um sumário das definições e equações utilizadas na descrição microscópica (equações de Vlasov-Maxwell) do equilíbrio de sistemas com simetria rotacional. Estas equações são particularizadas, na seção 3, ao estudo da classe de equilíbrios descritos por funções de distribuição do tipo rotor rígido, com confinamento axial (anéis propriamente ditos). Verifica-se, então, que somente duas equações macroscópicas, a de Ampère e a do equilíbrio de forças, resultam não triviais para a determinação das soluções de equilíbrio, havendo completa liberdade na escolha da equação de estado para o gás de partículas, equação esta que completa o sistema. Esta indeterminação é típica da descrição de Vlasov, que admite, em geral, muitas soluções de equilíbrio para uma dada configuração de campo.

Para que se possa proceder à solução do problema, é suposto que o anel de partículas tem seu estado descrito pela equação adiabática $P \propto n^\gamma$, com a constante adiabática assumindo valores compreendidos na faixa $1 \leq \gamma \leq 2$. É dada ênfase especial ao caso isotérmico ($\gamma=1$) e aos sistemas formados por partículas com três ($\gamma=5/3$) e dois ($\gamma=2$) graus de liberdade.

As soluções de equilíbrio unidimensional são examinadas na seção 4, sendo o problema bidimensional tratado na seção 5. Na discussão do problema em duas dimensões, mostra-se a grande liberdade que há na es

colha da superfície limite de anéis em equilíbrio adiabático, isto é, como é possível determinar a distribuição de densidade, que satisfaz as condições de equilíbrio, para qualquer forma do catodo. Chama-se a atenção para o modelo descrito pelo coeficiente adiabático $\gamma = 2$, que resulta num problema inteiramente linear.

2. DESCRIÇÃO DE VLASOV-MAXWELL

Considere-se a classe de equilíbrios que apresentam simetria azimutal, isto é, que satisfazem a condição $\partial/\partial\theta \equiv 0$, onde (r, θ, z) constitui um sistema de coordenadas cilíndricas. O teorema de Jeans permite escrever a forma geral da função de distribuição, que descreve o equilíbrio de cada espécie componente, q , de sistemas deste tipo, como

$$f_q(\vec{r}, \vec{v}) = f_q(H, P_\theta, P_z).$$

No limite não relativístico, o Hamiltoniano e as componentes θ e z do momento canônico são dados por

$$H = mv^2/2 + q\phi(r, z) + q\phi_{\text{ext}}(r, z),$$

$$P_\theta = r[mv_\theta + qA_\theta(r, z) + qA_{\theta, \text{ext}}(r, z)],$$

$$P_z = mv_z + qA_z(r, z) + qA_{z, \text{ext}}(r, z).$$

Incluiu-se a dependência no momento canônico P_z , entretanto, sua invariância somente é assegurada com a condição adicional $\partial/\partial z \equiv 0$ (invariância para uma translação ao longo do eixo de simetria).

A densidade de carga e a densidade de corrente intrínsecas podem ser calculadas, em termos dos potenciais ϕ e \vec{A} , a partir das funções de distribuição f_q e, então, substituídas nas equações de Maxwell para os potenciais

$$\nabla^2 \phi = - \rho / \epsilon_0,$$

$$(\nabla^2 - r^{-2}) A_\theta = - \mu_0 j_\theta,$$

$$\nabla^2 A_z = - \mu_0 j_z,$$

onde

$$\rho = \sum_q q \int f_q d^3v,$$

$$j_\theta = \sum_q q \int f_q v_\theta d^3v,$$

$$j_z = \sum_q q \int f_q v_z d^3v$$

$$\left(\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ; d^3v = dv_r dv_\theta dv_z \right).$$

O campo el\u00e9trico e a densidade de fluxo magn\u00e9tico s\u00e3o calculados por

$$E_r = - \frac{\partial \phi}{\partial r} , \quad E_z = - \frac{\partial \phi}{\partial z} ,$$

$$B_r = - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} , \quad B_\theta = - \frac{\partial A_z}{\partial r} ,$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} .$$

As equa\u00e7\u00f5es de Maxwell, acima, envolvem apenas as contri
bui\u00e7\u00f5es intr\u00ednsecas dos campos el\u00e9trico e magn\u00e9tico. A estas de
vem

somar-se as contribuições externas; sã assim ficam especificadas as cons_tantes do movimento das partí_culas. As equações para os potenciais for_mam, em geral, um sistema de equações diferenciais parciais, nã line_ares e acopladas. Podem-se introduzir algumas hipó_teses simplificadoras que permitem reduzir o número de variáveis (nas seções seguintes serã utilizada a aproximação (i) abaixo):

- i) Se o sistema for eletricamente neutro, tem-se $\rho=0$. Isto ocorre, por exemplo, quando o feixe ou anel de partí_culas estã imerso num plasma de fundo que pode suprir as cargas neutralizantes. Se, alã disso, nã houver nenhum campo elãtrico externo aplica_do, o potencial eletrostático total ã nulo.
- ii) A aproximação nã-diamagnética consiste em desprezar o campo magnético intrínseco do sistema de partí_culas, em comparação com o campo magnético externo. Isto pode resultar da neutraliza_ção magnética pelo plasma de fundo, no qual circulam correntes que se opõem ã corrente associada ao feixe ou anel de partí_culas. Assim, no equilí_brio nã diamagnético, $\vec{B} \equiv \vec{B}_{ext}$.

O método acima permite a determinação de soluções para os campos elãtrico e magnético, consistentes com o equilí_brio do sistema de partí_culas.³

Uma subclasse de funções de distribuição, que depende de H e P_θ , exclusivamente atravã da combinação linear $H-\Omega P_\theta$, descreve, pa_ra $\Omega = \text{constante}$, o equilí_brio de rotores rí_gidos.⁴ Assim, considere-se

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = f(H-\Omega P_\theta, P_z),$$

com

$$H-\Omega P_\theta = m \left[v_r^2 + (v_\theta - r\Omega)^2 + (v_z - u_z)^2 \right] / 2 + \\ + m u_z v_z - m(r^2 \Omega^2 + u_z^2) / 2 - r\Omega q A_{\theta, tot} + q\phi_{tot},$$

$$P_z = mv_z + qA_{z,tot} .$$

Para simplificar a notação, nestas expressões e nas que se seguem, eliminou-se o índice q indicativo da espécie de partículas; os resultados que serão apresentados no restante desta seção são válidos para cada uma das componentes.

A normalização da função de distribuição \bar{f} é definida por

$$n = \int f d^3v ,$$

onde $n(r,z)$ é a densidade. A velocidade média \bar{v} é calculada por

$$\vec{u} = n^{-1} \int f \vec{v} d^3v = r\Omega\hat{\theta} + u_z \hat{z} ,$$

indicando que o movimento azimutal médio das partículas é uma rotação rígida em torno do eixo de simetria, com velocidade angular $\Omega = \text{constante}$. Se $\Omega = \Omega(r,z)$, a rotação não é rígida. Observe-se que somente o movimento médio é especificado pela velocidade acima; em geral a função f permite um desvio de velocidades em torno da média.

As densidades de massa e de momento linear, a tríada de tensões e a tríada do fluxo de tensões são definidas, respectivamente, por

$$v = n \langle m \rangle = nm ,$$

$$\vec{G} = n \langle m\vec{v} \rangle = nm\vec{u} ,$$

$$\bar{T} = n \langle m\vec{v}\vec{v} \rangle ,$$

$$\bar{Q} = n \langle m\vec{v}\vec{v}\vec{v} \rangle ,$$

onde $\langle \phi \rangle = n^{-1} \int f \phi d^3v$ indica a média de ϕ sobre o espaço de velocidades. Estas grandezas satisfazem a equação de conservação da massa

$$\partial v / \partial t + \nabla \cdot \vec{G} = 0 ,$$

a equação de conservação do momento linear

$$\partial \vec{G} / \partial t + \nabla \cdot \vec{T} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} ,$$

e a equação de evolução das tensões

$$\partial \vec{T} / \partial t + \nabla \cdot \vec{Q} = \vec{E} \vec{j} + \vec{j} \vec{E} + (q/m)(\vec{T} \times \vec{B} - \vec{B} \times \vec{T}) .$$

Observe-se que as densidades de carga $\rho = qn$ e de corrente $\vec{j} = qn\vec{u}$, acima, correspondem somente à espécie q .

A metade do traço da última equação fornece a equação de conservação da energia

$$\partial U / \partial t + \nabla \cdot \vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{E} ,$$

onde

$$U = \vec{T} : \vec{T} / 2 = n \langle mv^2 / 2 \rangle$$

\vec{E} é a densidade de energia, e

$$\vec{S} = \vec{T} : \vec{Q} / 2 = n \langle mv^2 \vec{v} / 2 \rangle$$

\vec{E} é o vetor do fluxo de energia (\vec{T} é a dada unidade). Para uma função de distribuição do tipo rotor, a dada de tensões pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \vec{T} &= n \langle m(\vec{v}-\vec{u})(\vec{v}-\vec{u}) \rangle + nm\vec{u}\vec{u} = \\ &= n \langle mv_r^2 \hat{r}\hat{r} + (v_\theta - r\Omega)^2 \hat{\theta}\hat{\theta} + (v_z - u_z)^2 \hat{z}\hat{z} \rangle + nm\vec{u}\vec{u} = \end{aligned}$$

$$= n \langle m v_r^2 (\hat{r}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{\theta}) + (v_z - u_z)^2 \hat{z}\hat{z} \rangle + n m \vec{u} \vec{u} ,$$

onde foi utilizada a propriedade de simetria de f para uma permutação

$$v_r \leftrightarrow v_\theta - r\Omega .$$

Definindo a pressão $P_\perp = n \langle m v_r^2 \rangle = n \langle m (v_\theta - r\Omega)^2 \rangle$ no plano perpendicular ao eixo de simetria, e a pressão $P_\parallel = n \langle m (v_z - u_z)^2 \rangle$ ao longo do eixo, tem-se

$$\vec{T} = P_\perp \vec{I}_\perp + P_\parallel \hat{z}\hat{z} + n m \vec{u} \vec{u} ,$$

onde $\vec{I}_\perp = \hat{r}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{\theta}$. Portanto,

$$U = P_\perp + P_\parallel/2 + n m u^2/2 ,$$

e $U_T = P_\perp + P_\parallel/2$ é a densidade de energia térmica. Da mesma forma

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= n \langle m (\vec{v} - \vec{u}) (\vec{v} - \vec{u}) (\vec{v} - \vec{u}) \rangle + \\ &+ n \langle m (\vec{v} - \vec{u}) \vec{u} (\vec{v} - \vec{u}) \rangle + \vec{T} \vec{u} + \vec{u} \vec{T} - n m \vec{u} \vec{u} \vec{u} = \\ &= n \langle m v_r^2 (v_z - u_z) \rangle (\hat{r}\hat{r}\hat{z} + \hat{r}\hat{z}\hat{r} + \hat{z}\hat{r}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{\theta}\hat{z} + \\ &+ \hat{\theta}\hat{z}\hat{\theta} + \hat{z}\hat{\theta}\hat{\theta}) + n \langle m (v_z - u_z)^3 \rangle \hat{z}\hat{z}\hat{z} + \\ &+ n \langle m v_r^2 \rangle (\hat{r}\hat{u}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{u}\hat{\theta}) + n \langle m (v_z - u_z)^2 \rangle \hat{z}\hat{u}\hat{z} + \\ &+ \vec{T} \vec{u} + \vec{u} \vec{T} - n m \vec{u} \vec{u} \vec{u} . \end{aligned}$$

Definindo as componentes da tríada do fluxo de calor

$$Q_\perp = n \langle m v_r^2 (v_z - u_z) \rangle ,$$

$$Q_\parallel = n \langle m (v_z - u_z)^3 \rangle ,$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= Q_{\perp}(\bar{r}\bar{r}\bar{z} + \bar{r}\bar{z}\bar{r} + \bar{z}\bar{r}\bar{r} + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{z} + \bar{\theta}\bar{z}\bar{\theta} + \bar{z}\bar{\theta}\bar{\theta}) + \\ &+ Q_{\parallel}\bar{z}\bar{z}\bar{z} + P_{\perp}(\bar{r}\bar{r}\bar{u} + \bar{r}\bar{u}\bar{r} + \bar{u}\bar{r}\bar{r} + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{u} + \bar{\theta}\bar{u}\bar{\theta} + \bar{u}\bar{\theta}\bar{\theta}) + \\ &+ P_{\parallel}(\bar{z}\bar{z}\bar{u} + \bar{z}\bar{u}\bar{z} + \bar{u}\bar{z}\bar{z}) + n\mu\bar{u}\bar{u}\bar{u} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{S} &= (Q_{\perp} + Q_{\parallel}/2) \bar{z} + P_{\perp}(2r\bar{\omega}\bar{\theta} + u_z\bar{z}) + \\ &+ P_{\parallel}(r\bar{\omega}\bar{\theta} + 3u_z\bar{z})/2 + n\mu^2\bar{u} . \end{aligned}$$

Portanto, sendo especificada a função de distribuição, podem-se calcular as grandezas macroscópicas que descrevem a evolução do sistema. Estas grandezas devem satisfazer as equações de conservação indicadas anteriormente.

No cálculo das integrais, que definem as grandezas macroscópicas, é, muitas vezes, conveniente fazer a mudança de variáveis

$$d^3v = J dK_{\perp} dP_{\theta} dP_z ,$$

em que $K_{\perp} = mv_{\perp}^2/2$ é a energia cinética da partícula no plano perpendicular, e o Jacobiano J é dado por

$$J = \frac{1}{m^3 r} \left[\frac{2K_{\perp}}{m} - \left(\frac{P_{\theta}}{mr} - \frac{qA_{\theta}}{m} \right)^2 \right]^{-1/2} .$$

Assim,

$$n = \int_0^{\infty} dK_{\perp} \int_{r(qA_{\theta} - \sqrt{2mK_{\perp}})}^{r(qA_{\theta} + \sqrt{2mK_{\perp}})} dP_{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} dP_z J f(H - \Omega P_{\theta}, P_z)$$

(a Fig. 1 mostra os limites de continuidade de J). A transformação $d^3v \rightarrow dK_{\perp} dP_{\theta} dP_z$ é particularmente útil no cálculo de integrais envolvendo distribuições concentradas (distribuições microcanônicas).

A função de distribuição da forma geral $f(H - \Omega P_{\theta}, P_z)$ é apropriada para descrever uma grande variedade de equilíbrios com simetria rotacional (independentes do azimute θ).⁵ Na próxima seção será considerado o equilíbrio de um anel de partículas, cuja simetria é do tipo toroidal.

3. EQUILÍBRIO DE ANÉIS DE PARTÍCULAS

Considere-se o estado de equilíbrio ($\partial/\partial t \equiv 0$) de um anel de partículas com simetria azimutal ($\partial/\partial \theta \equiv 0$), conforme esquematizado na Fig. 2. O anel está confinado por uma garrafa magnética, que pode resultar de efeitos diamagnéticos do anel. Por simplicidade, supõe-se que o anel é formado por uma só espécie de partículas e que está imerso num plasma que constitui um fundo aproximadamente estático e uniforme ($\vec{u}_p \equiv 0, \nabla P_p \equiv 0$). O plasma de fundo neutraliza a densidade de carga do anel, de modo que $\phi_{tot} \equiv 0$, conforme a aproximação (i) da seção anterior. Como o equilíbrio depende de r e z (confinamento radial e axial), somente existem duas constantes do movimento, H e P_{θ} , isto é, a função f será suposta da forma

$$f = f(H - \Omega P_{\theta}) .$$

A corrente axial média é nula ($j_z = 0$), pois o anel está confinado axialmente; assim, a única componente do potencial vetor

intrínseco a ser determinada é a componente azimutal A_θ . Na forma mais geral, pode-se escrever

$$\vec{A} = A_\theta(r, z) \hat{\theta} + A_{\theta, \text{ext}}(r, z) \hat{\theta} - (\mu_0 I / 2\pi) \ln(r/r_0) \hat{z},$$

em que o primeiro termo corresponde ao campo diamagnético gerado pela corrente do anel, que é determinado a partir da equação de Ampère

$$(\nabla^2 - r^{-2}) A_\theta = -\mu_0 j_\theta = -\mu_0 q n r \Omega.$$

O segundo termo, na expressão de \vec{A} , corresponde à parte do campo da garrafa magnética que é produzido por correntes externas; e o terceiro termo, que corresponde ao campo magnético produzido por um condutor axial em que circula a corrente I , foi introduzido porque pode melhorar a estabilidade do anel, embora não tenha efeito sobre o equilíbrio. A densidade de fluxo magnético é calculada, a partir de \vec{A} , como

$$\vec{B} = \frac{1}{r} (\nabla r A_\theta) \times \hat{\theta} - \left(\frac{\partial A_{\theta, \text{ext}}}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r A_{\theta, \text{ext}}}{\partial r} \right) \hat{z} + (\mu_0 I / 2\pi r) \hat{\theta}$$

$$(\nabla \equiv \hat{r} \partial/\partial r + \hat{z} \partial/\partial z).$$

Se a componente axial do campo externo for especificada, tem-se

$$\vec{B} = \frac{1}{r} (\nabla r A_\theta) \times \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r dr' r' B_{z, \text{ext}}(r', z) \hat{r} +$$

$$+ B_{z, \text{ext}}(r, z) \hat{z} + (\mu_0 I / 2\pi r) \hat{\theta}.$$

Portanto, a determinação dos campos do equilíbrio fica reduzida à solução da equação de Ampère para A_θ

$$(\nabla^2 - r^{-2}) A_\theta = - \mu_0 q r \Omega \int f(H - \Omega P_\theta) d^3v ,$$

em que f ainda precisa ser especificado. Além disso, há que se levar em conta as condições de contorno; pode haver, por exemplo, uma parede condutora cilíndrica de raio a sobre a qual a componente radial da densidade de fluxo magnético intrínseco deve ser nula (isto se o tempo de vida do anel é pequeno comparado com o tempo de difusão magnética através da parede condutora).

Com $u_z = 0$, as grandezas macroscópicas que descrevem o equilíbrio do anel têm suas expressões bastante simplificadas:

$$\vec{G} = n m r \Omega \hat{\theta} = n m \vec{u} ,$$

$$\vec{T} = P \vec{I} + n m r^2 \Omega^2 \hat{\theta} \hat{\theta} ,$$

$$U = 3P/2 + n m r^2 \Omega^2 / 2 ,$$

$$\vec{Q} = r \Omega [P(\hat{r}\hat{r}\hat{\theta} + \hat{r}\hat{\theta}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{r}\hat{r} + 3\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{z}\hat{z}\hat{\theta} + \hat{z}\hat{\theta}\hat{z} + \hat{\theta}\hat{z}\hat{z}) + n m r^2 \Omega^2 \hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\theta}] ,$$

$$\vec{S} = r \Omega (5P/2 + n m r^2 \Omega^2) \hat{\theta} .$$

Assim, apenas quatro grandezas (Ω , n , P e A_θ) caracterizam o equilíbrio do anel, sendo as equações de conservação, mais a equação de Ampère, suficientes para fornecer todos os vínculos independentes entre estas grandezas. Destas equações, as da continuidade e de conservação da energia são trivialmente satisfeitas no equilíbrio. A equação de conservação do momento, porém, fornece uma condição envolvendo o gradiente da pressão térmica, o gradiente na densidade da energia cinética de rotação, e a densidade da força de interação entre partículas e campo magnético

$$\nabla P - n m r \Omega^2 \hat{r} = n q \Omega \nabla [r(A_\theta + A_{\theta,ext})] ,$$

que, para $\Omega = \text{constante}$, pode ser escrita como

$$n^{-1} \nabla P = \nabla \left[mr^2 \Omega^2 / 2 + qr \Omega (A_\theta + A_{\theta, \text{ext}}) \right],$$

ou, em forma integral,

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{dP}{n} = \left[\frac{mr^2 \Omega^2}{2} + qr \Omega (A_\theta + A_{\theta, \text{ext}}) \right]_{(1)}^{(2)},$$

onde os limites de integração são dois pontos quaisquer na região ocupada pelo anel. Resta definir uma relação entre n e P para que esta equação possa ser integrada. Introduzindo-se a temperatura

$$\theta = \langle m(\vec{v} - \vec{u})^2 \rangle / 3,$$

a pressão fica dada pela lei de Charles-Gay-Lussac para gases perfeitos

$$P = n \theta = 2U_T / 3,$$

e a condição de equilíbrio pode ser escrita como (n_0 e θ_0 são valores de referência)

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\theta}{\theta_0} d \ln \left(\frac{n \theta}{n_0 \theta_0} \right) = \left[\frac{mr^2 \Omega^2}{2 \theta_0} + \frac{qr \Omega (A_\theta + A_{\theta, \text{ext}})}{\theta_0} \right]_{(1)}^{(2)}.$$

Esta equação representa um vínculo a ser satisfeito pelo parâmetro θ , que mede o desvio térmico da função de distribuição. O outro vínculo conhecido entre as grandezas macroscópicas (reduzidas a n , θ e A_θ , pois a frequência angular Ω foi suposta constante) é imposto pela equação de Ampère. Falta conhecer a equação de estado $n = n(\theta)$ para que a densidade de corrente intrínseca possa ser determinada em função do potencial total e, então, substituída na equação de Ampère. Observe-se, porém, que as equações de equilíbrio não fornecem nenhuma informação sobre a possível equação de estado, havendo liberdade na escolha da função $n(\theta)$. Além disso, note-se que a forma detalhada da função de

distribuição $f(H-\Omega P_\theta)$ é irrelevante para o equilíbrio, bastando dela se conhecerem os momentos n e θ .

O procedimento que tem sido mais frequentemente adotado na literatura, para prosseguir na solução do problema, é assumir-se a forma canônica para a função de distribuição.^{6,7}

$$f = (m^3/h^3) \exp [- (H-\Omega P_\theta)/\theta] ,$$

com o coeficiente de normalização h^3/m^3 (unidade de volume no espaço de fase) dado por

$$h^3/m^3 = n^{-1} (2\pi\theta/m)^{3/2} \exp [(r\Omega q A_\theta + mr^2\Omega^2/2)/\theta] .$$

Esta é a distribuição mais provável para o estado macroscópico especificado por n , $u_\theta = r\Omega$ e θ , isto é, a função que maximiza a densidade de entropia termodinâmica

$$\sigma = - k_B \int f \ln(h^3 f/m^3) d^3v ,$$

sujeita às restrições de invariância, para uma variação arbitrária de f , dos parâmetros macroscópicos n , u_θ e θ (k_B é a constante de Boltzmann). A distribuição canônica implica num número finito de partículas girando em sentido contrário à média (isto pode ser verificado, simplesmente, trocando-se o sinal de P_θ , operação esta que resulta num valor não nulo da densidade), o que está em contradição com os experimentos. Na realidade, esta dificuldade não tem importância, pois, como ficou dito acima, não é necessário especificar a forma de f para a determinação do equilíbrio macroscópico.

Outra hipótese, que normalmente é feita nos modelos para o equilíbrio, e que tem relevância na sua solução, é tomar-se a temperatura θ igual à constante θ_0 ; isto corresponde ao equilíbrio isotérmico, que será tratado na próxima seção. Porém, assumindo-se que a evolução do anel, para situações próximas do equilíbrio, ocorra de acordo com as

equações de fluido, isto é, que a pressão se mantenha escalar, obtêm-se a lei adiabática

$$\frac{D}{Dt} \ln \left[\frac{(P/P_0)^{3/5}}{n/n_0} \right] = 0 ,$$

em que $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$ é a derivada convectiva (note-se que $D/Dt \equiv 0$ no equilíbrio) e $P_0 = n_0 \theta_0$

$$\therefore n/n_0 = (\theta/\theta_0)^{3/2} .$$

Esta equação será escrita como

$$n/n_0 = (\theta/\theta_0)^{1/(\gamma-1)} ,$$

com a constante adiabática $\gamma = 5/3$; o equilíbrio isotérmico corresponde ao limite $\gamma \rightarrow 1$.

A descrição de situações de não-equilíbrio pelas equações de fluido (estágio hidrodinâmico) pode constituir uma simplificação drástica, pois deixa de levar em conta efeitos como os associados à dimensão finita (grande) do raio de Larmor das partículas; a objeção é especialmente válida no caso dos íons. Entretanto, no regime de baixas frequências é uma aproximação razoável, o que justificaria, em parte, a adoção de um modelo adiabático para o equilíbrio. A descrição de Vlasov-Maxwell, estritamente, permite uma escolha arbitrária da equação de estado.

Nas próximas seções examinar-se-ão, em maior detalhe, as soluções associadas aos equilíbrios isotérmico e adiabático; mas, antes, serão introduzidas normalizações que permitem escrever as equações em forma mais conveniente para a análise matemática. Introduzindo-se a escala de comprimento δ definida por⁶

$$\delta^4 = \theta_0 / \mu_0 n_0 q^2 \Omega^2 ,$$

as coordenadas podem ser normalizadas conforme (não confundir a coordenada radial normalizada ρ , utilizada daqui por diante, com a densidade de carga)

$$\rho = r/\delta \quad , \quad \zeta = z/\delta .$$

Em lugar do potencial vetor A_θ , será introduzido o fluxo magnético total, que atravessa uma superfície de raio r com centro num ponto z sobre o eixo de simetria,

$$\begin{aligned} \psi(r, z) &= \oint \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_0^{2\pi} r(A_\theta + A_{\theta,ext}) d\theta = 2\pi r(A_\theta + A_{\theta,ext}) . \end{aligned}$$

A equação de Ampère para a função fluxo fica (lembrar que, para o campo externo, a região ocupada pelo anel é livre de fontes)

$$\nabla \cdot (r^{-2}\nabla) \psi = - 2\pi\mu_0 qn\Omega .$$

Se o campo externo é uniforme, hipótese que será mantida nas próximas seções, tem-se

$$\psi_{ext} = \pi r^2 B_{z,ext} .$$

Pode-se então introduzir a função fluxo normalizada

$$\Psi = \psi/\pi\delta^2 B_{z,ext} ,$$

ficando a equação de Ampère reduzida à forma

$$\nabla \cdot (\rho^{-2}\nabla) \Psi = \frac{n}{1+s} \frac{n}{n_0}$$

$$(\nabla \equiv \hat{\rho} \partial/\partial\rho + \hat{\zeta} \partial/\partial\zeta) ,$$

e a condição de equilíbrio a

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\theta}{\theta_0} d \ln \left(\frac{n\theta}{n_0\theta_0} \right) = \frac{1}{\eta} \left[\rho^2 - (1+s) \Psi \right]_{(1)}^{(2)} .$$

O coeficiente η é definido por

$$\eta = 2 \frac{\omega_p}{|\Omega|} \frac{v_T}{\sqrt{3} c} , \quad (\eta > 0)$$

onde $\omega_p = (n_0 q^2 / m \epsilon_0)^{1/2}$ é a frequência de plasma e $v_T = (3\theta_0/m)^{1/2}$ a velocidade térmica do anel (c é a velocidade da luz). O fator de reversão do campo magnético (cujo significado ficará claro mais adiante) é definido por

$$1+s = \Omega_q / \Omega \quad (s > 0) ,$$

onde $\Omega_q = -qB_{z,ext}/m$ é a girofrequência das partículas do anel no campo externo uniforme. O coeficiente η mede a intensidade do anel, no sentido que $\eta \rightarrow 0$ constitui uma fonte intrínseca pouco intensa na equação de Ampère (neste limite a aproximação de Born-Helmholtz é adequada para resolver a equação do fluxo). Efeitos diamagnéticos apreciáveis, como reversão do campo magnético, são mais interessantes, correspondendo a fontes intrínsecas intensas.

Como uma simplificação adicional, pode-se introduzir a função

$$\Phi = -\rho^2/s + (1+s) \Psi/s ,$$

que satisfaz, com a densidade n , o sistema de equações

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \right) \Phi = \frac{\eta}{s} \frac{n}{n_0} ,$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\theta}{\theta_0} d \ln \left(\frac{n\theta}{n_0\theta_0} \right) = - \frac{s}{\eta} \left[\Phi \right]_{(1)}^{(2)},$$

ao qual se deve acrescentar a equação de estado $\theta = \theta(n)$.

Hã dois casos limites, de geometria simples, para os quais a solução deste sistema de equações é conhecida:

- (i) para um anel alongado, quando é válido desprezar a variação na direção axial ($\partial/\partial z \equiv 0$), o sistema pode ser reduzido a quadraturas;
- (ii) para um anel de grande razão de aspecto, isto é, em que o raio médio do anel é muito maior que as dimensões da seção transversal (num plano que contém o eixo), é possível determinar uma solução geral da equação diferencial para o fluxo.

A seguir, cada um destes casos será considerado brevemente, antes da análise detalhada nas próximas seções.

(i) ANEL ALONGADO (CAMADA)

Neste caso a condição de contorno, sobre uma parede condutora cilíndrica de raio a , é satisfeita trivialmente, pois a componente normal, à superfície condutora, da densidade de fluxo diamagnético, é nula ($\partial/\partial z \equiv 0$). O fluxo deve satisfazer a condição de contorno sobre o eixo

$$\Psi(0) = 0,$$

e a condição de contorno no infinito

$$\Psi \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \rho^2.$$

A segunda condição implica que o campo diamagnético decai rapidamente, fora da região ocupada pelo anel. Além disso, Ψ e $d\Psi/d\rho$ devem ser funções contínuas, pois exclui-se a existência de correntes superficiais. Finalmente, verifica-se que a função Φ deve satisfazer as mesmas condições que o fluxo Ψ .

Multiplicando-se pelo fator de integração

$2 \, d\tilde{\Phi}/d\rho$,

a equação diferencial para $\tilde{\Phi}$ pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{\Phi}}{d\rho} \right)^2 = 2 \frac{\eta}{s} \frac{n(\tilde{\Phi})}{n_0} \frac{d\tilde{\Phi}}{d\rho} ,$$

donde resulta

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{d\rho^2} = \pm \left[1 + \frac{\eta}{2s} \left(\frac{n(\tilde{\Phi})}{n_0} d\tilde{\Phi} \right)^2 \right]^{1/2} .$$

A constante de integração foi escolhida de modo que seja satisfeita a condição de continuidade de $d\tilde{\Phi}/d\rho$ sobre as superfícies limites do anel (ou no infinito), isto é, deve-se ter

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{d\rho^2} = \pm 1$$

nas regiões em que a densidade é nula.

Uma segunda integração fornece

$$\pm \int \left[1 + \frac{\eta}{2s} \left(\frac{n(\tilde{\Phi})}{n_0} d\tilde{\Phi} \right)^2 \right]^{-1/2} d\tilde{\Phi} = \rho^2 + C ,$$

onde C é uma constante a ser determinada. A densidade precisa ser calculada, em função de $\tilde{\Phi}$, a partir da condição de equilíbrio, pois somente então é possível resolver o problema das quadraturas. Porém, mesmo sem que a solução exata seja conhecida, pode-se examinar algumas propriedades gerais desta solução. Primeiramente, observe-se que a derivada

$d\phi/d\rho$, além de ser sempre nula sobre o eixo, também pode anular-se para um valor de $\rho = \rho_0$ que satisfaça a condição

$$\left[1 + \frac{\eta}{2s} \left(\frac{n(\phi)}{n_0} \frac{d\phi}{d\rho} \right) \right]_{\rho=\rho_0} = 0 .$$

Nesta posição, ρ_0 , ocorre o máximo da densidade, pois

$$\left[\frac{dn}{d\rho} \right]_{\rho=\rho_0} = \left[\frac{dn}{d\phi} \frac{d\phi}{d\rho} \right]_{\rho=\rho_0} = 0 .$$

O valor de referência n_0 será assumido igual ao valor máximo da densidade, indo esta escolha produzir uma relação entre os coeficientes η e s . O sinal da raiz quadrada é tomado negativo para $\rho < \rho_0$ (região interna ao pico) e positivo para $\rho > \rho_0$ (região externa), pois o ponto ρ_0 corresponde ao mínimo da função ϕ . Se as condições acima não são satisfeitas para nenhum valor de $\rho \neq 0$, o máximo da densidade ocorre sobre o eixo, isto é, $\rho_0 = 0$. Neste caso, certamente, não ocorre reversão do campo magnético, como se pode verificar a partir da expressão para a densidade de fluxo total

$$\frac{B_{z,tot}}{B_{z,ext}} = \frac{1}{1+s} \left(1 + s \frac{d\phi}{d\rho^2} \right) .$$

Assim, a condição para que ocorra reversão na região interna limitada pelo raio $\rho_r < \rho_0$ é que

$$\left[1 + \frac{\eta}{2s} \left(\frac{n(\phi)}{n_0} \frac{d\phi}{d\rho} \right) \right]_{\rho < \rho_r} > \frac{1}{s^2} ,$$

o que somente é possível se o fator de reversão s for maior que 1 (ρ_r de fine o ponto em que $B_{z,tot} = 0$, e a situação mais favorável corresponde a $\rho_r = 0$).

(ii) ANEL COM GRANDE RAZÃO DE ASPECTO

Anéis concentrados em pequenas regiões em torno do raio médio, e suficientemente afastados do eixo, podem ser descritos por soluções da equação simplificada

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Phi = \rho_0^2 \frac{\eta}{s} \frac{n(\Phi)}{n_0},$$

em que o operador diferencial foi reduzido à forma cartesiana por meio da transformação $\rho \rightarrow \rho_0 + \rho$ e expansão para $\rho_0 \rightarrow \infty$. Esta é a mesma equação, obtida por Lagrange, para a função fluxo, que descreve o movimento rotacional, estacionário e bidimensional de um fluido incompressível.

Maiores considerações sobre o equilíbrio bidimensional, inclusive a solução geral da equação acima, para um equilíbrio isotérmico, serão relegadas à seção 5.

4. EQUILÍBRIO UNIDIMENSIONAL

A análise nesta seção será restrita aos anéis alongados, cujo equilíbrio é descrito por soluções da equação diferencial ordinária

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \Phi = \frac{\eta}{s} \frac{n(\Phi)}{n_0},$$

que, como foi visto na seção anterior, pode ser reduzida a quadraturas. O estado do anel de partículas será do tipo isotérmico

$$\theta = \theta_0 ,$$

ou do tipo adiabático

$$n/n_0 = (\theta/\theta_0)^{1/(\gamma-1)} .$$

4.1 - EQUILÍBRIO ISOTÉRMICO

Se o estado do anel \bar{e} descrito pela lei de Boyle-Mariotte, a condição de equilíbrio fornece

$$n = n(0) e^{-s\Phi/n} ,$$

onde $n(0)$ é o valor da densidade sobre o eixo. Neste caso, as integrações que resolvem a equação de Ampère são elementares, obtendo-se (com $C = -\rho_0^2$)

$$\frac{n}{n_0} = \frac{2s^2}{n^2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{s}{2n} (\rho^2 - \rho_0^2) \right] .$$

A escolha $n/s = \sqrt{2}$ faz com que o valor máximo da densidade, que ocorre no ponto $\rho = \rho_0$, seja dado por n_0 .

$$\therefore \frac{n}{n_0} = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2\sqrt{2}} \right) .$$

A densidade de fluxo magnético total pode então ser calculada como

$$\frac{B_{z,tot}}{B_{z,ext}} = \frac{1}{1+s} \left[1 + s \tanh \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2\sqrt{2}} \right) \right] ,$$

expressão esta que fornece, para $\rho = 0$,

$$\frac{B_{z,tot}}{B_{z,ext}} = \frac{1 - s \tanh(\rho_0^2/2\sqrt{2})}{1+s}$$

Verifica-se que, quando

$$s > 1/\tanh(\rho_0^2/2\sqrt{2}),$$

ocorre reversão do campo magnético. Para

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_p}{|\Omega|} \frac{v_T}{\sqrt{3} c} \gg 1 \quad (s = \eta/\sqrt{2})$$

e ρ_0 não nulo, a reversão, sobre o eixo, é quase total.

A solução unidimensional de equilíbrio isotérmico é conhecida há bastante tempo,⁶ tendo sido discutida em detalhe na literatura.⁷ O presente trabalho limita-se a apresentar uma ilustração (Fig. 3) das distribuições da densidade de partículas e da densidade de fluxo magnético, para um caso em que ocorre reversão.

4.2 - EQUILÍBRIO ADIABÁTICO

Para este tipo de equilíbrio a densidade do anel somente difere de zero num intervalo radial finito, em que o poço de potencial efetivo, criado pelo equilíbrio entre forças centrífugas e magnéticas, é suficientemente profundo para confinar as partículas. De acordo com estas considerações, a condição de equilíbrio será escrita na forma

$$\int_0^n \frac{\theta}{\theta_0} d \ln \left(\frac{n\theta}{n_0\theta_0} \right) = - \frac{s}{\eta} (\Phi - \Phi_0),$$

onde Φ_0 é o valor da função fluxo correspondente às superfícies limites do anel. Substituindo a equação de estado adiabático na integral acima, obtêm-se

$$\frac{n}{n_0} = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{s}{\eta} (\Phi_0 - \Phi) \right]^{1/(\gamma-1)}$$

Assim, a função Φ , na região em que a densidade do anel é diferente de zero ($\rho_1 < \rho < \rho_2$), pode ser calculada a partir da integral

$$\pm \int \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{2s^2} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{s}{\eta} (\Phi_0 - \Phi) \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \right\}^{-1/2} d\Phi = \rho^2 + C ,$$

e, nas regiões de densidade nula, é dada por

$$\Phi = \Phi_0 - (\rho^2 - \rho_1^2) \quad \text{para} \quad \rho < \rho_1 ,$$

$$\Phi = \Phi_0 + (\rho^2 - \rho_2^2) \quad \text{para} \quad \rho > \rho_2 .$$

As expressões acima foram escritas de modo a satisfazer a condição de continuidade de Φ para $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$. A condição de continuidade da derivada $d\Phi/d\rho$ sobre as superfícies limites, que é decorrente da não existência de correntes superficiais, é assegurada pela escolha da constante de integração, feita no item (i) da seção 3, como se pode verificar a partir das expressões seguintes:

$$\frac{d\Phi}{d\rho^2} = -1 \quad \text{para} \quad \rho < \rho_1 ,$$

$$\frac{d\Phi}{d\rho^2} = - \left[1 - \frac{\eta^2}{2s^2} \left(\frac{n}{n_0} \right)^\gamma \right]^{1/2} \quad \text{para} \quad \rho_1 < \rho < \rho_0 ,$$

$$\frac{d\phi}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\eta^2}{2s^2} \left(\frac{n}{n_0} \right)^\gamma \right]^{1/2} \quad \text{para} \quad \rho_0 < \rho < \rho_2 ,$$

$$\frac{d\phi}{d\rho^2} = 1 \quad \text{para} \quad \rho > \rho_2 .$$

O ponto ρ_0 deve corresponder ao máximo n_0 da densidade, o que é verdadeiro se $\eta/s = \sqrt{2}$. A constante C pode ser escolhida convenientemente de modo que

$$\int_{\rho}^{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{n}{n_0} \right)^\gamma \right]^{-1/2} d\phi = \rho^2 - \rho_0^2 \quad \text{para} \quad \rho < \rho_0 ,$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \left[1 - \left(\frac{n}{n_0} \right)^\gamma \right]^{-1/2} d\phi = \rho^2 - \rho_0^2 \quad \text{para} \quad \rho > \rho_0 .$$

Observe-se que, quando escrita na forma acima, a integral para ϕ tanto descreve o equilíbrio adiabático de um sistema de partículas com três graus de liberdade ($\gamma=5/3$), como o equilíbrio isotérmico ($\gamma=1$), que corresponde a um número infinito de graus de liberdade.

Introduzindo-se a variável

$$x = (n/n_0)^\gamma ,$$

a integral para ϕ pode ser escrita como

$$\int_x^1 \frac{x^{\mu-1} dx}{(1-x)^{1/2}} = \left| \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\sqrt{2}} \right| ,$$

onde $\mu = (\gamma-1)/\gamma$. Esta integral pode ser resolvida em termos da função hipergeométrica ou da função associada de Legendre de primeira espécie, conforme

$$\int_0^x \frac{x^{\mu-1} dx}{(1-x)^{1/2}} = \frac{x^\mu}{\mu} F(1/2, \mu; 1+\mu; x) =$$

$$= \frac{2^\mu}{\mu} \Gamma(1+\mu) x^{\mu/2} P_{-\mu}^{-\mu} \left[(1-x)^{1/2} \right],$$

$$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1} dx}{(1-x)^{1/2}} = B(\mu, 1/2) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+1/2)},$$

onde $B(a, b)$ e $\Gamma(a)$ indicam as funções beta e gama, respectivamente.

Próximo ao máximo da densidade tem-se $x \lesssim 1$ e

$$F(1/2, \mu; 1+\mu; x) \cong \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\mu)}{\Gamma(\mu+1/2)}.$$

$$\therefore \left(\frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-1} \cong 1 - \left| \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\sqrt{2} B(\mu, 1/2)} \right|, \quad \text{para } \rho \cong \rho_0.$$

Na região próxima aos zeros da densidade ($x \gtrsim 0$) utiliza-se a aproximação

$$F(1/2, \mu; 1+\mu; x) \cong 1,$$

resultando

$$\left(\frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-1} \cong \mu B(\mu, 1/2) \left[1 - \left| \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\sqrt{2} B(\mu, 1/2)} \right| \right] .$$

Portanto, a densidade cai a zero para

$$\rho = \left[\rho_0^2 \pm \sqrt{2} B(\mu, 1/2) \right]^{1/2} .$$

Obviamente, o limite inferior somente é aplicável se $\rho_0^2 > \sqrt{2} B(\mu, 1/2)$, em caso contrário, a densidade é diferente de zero em toda a região compreendida entre o eixo e o limite superior, determinado a partir da equação acima. Observe-se que, para $1 < \gamma < 2$, a derivada $dn/d\rho$ é nula sobre as superfícies limites do anel.

O equilíbrio isotérmico ($\gamma=1$, $\mu=0$) é um caso limite para o qual a equação em x fica reduzida a integral elementar

$$\int_x^1 \frac{dx}{x(1-x)^{1/2}} = \ln \left[\frac{1 + (1-x)^{1/2}}{1 - (1-x)^{1/2}} \right] = \left| \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\sqrt{2}} \right| .$$

$$\therefore \frac{n}{n_0} = \operatorname{sech}^2 \left| \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2\sqrt{2}} \right|$$

Neste caso a densidade não é nula em nenhum ponto situado a uma distância finita do eixo, o que está de acordo com a expressão assintótica.

$$B(\mu, 1/2) \sim 1/\mu \quad \mu \rightarrow 0$$

Outro caso particular, também resolvido por integrais elementares, corresponde ao equilíbrio de um anel formado por partículas

com apenas dois graus de liberdade (por exemplo, restritas em seu movimento betatrônico a um plano normal ao eixo ou a uma superfície cilíndrica). Para tal modelo o coeficiente adiabático assume o valor $\gamma=2$ ($\mu=1/2$) e

$$x^{1/4} P_{-1/2}^{-1/2} \left[(1-x)^{1/2} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{arc sen } \sqrt{x} .$$

$$\therefore \frac{n}{n_0} = \cos \left| \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2 \sqrt{2}} \right| .$$

Esta distribuição radial de densidade se anula nos pontos

$$\rho = \left[\rho_0^2 \pm \pi \sqrt{2} \right]^{1/2} .$$

Para um anel formado de partículas com três graus de liberdade, o coeficiente adiabático tem o valor $\gamma=5/3$, e os valores de ρ , para os quais a densidade de equilíbrio do anel se anula, são calculados por

$$\begin{aligned} \rho &= \left[\rho_0^2 \pm \frac{\pi \sqrt{2} \Gamma(2/5)}{\Gamma(1/2) \Gamma(2/5+1/2)} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\rho_0^2 \pm 1,171 \pi \sqrt{2} \right]^{1/2} , \end{aligned}$$

de modo que as caudas da distribuição radial de densidade são mais longas do que para $\gamma=2$ (o pico da distribuição é um pouco mais estreito).

Na região em que a densidade do anel é diferente de zero, a densidade de fluxo magnético total é dada, em geral, por

$$\frac{B_{z,tot}}{B_{z,ext}} = \frac{1}{1+s} \left\{ 1 \mp s \left[1 - \left(\frac{n}{n_0} \right)^\gamma \right]^{1/2} \right\},$$

onde o sinal superior corresponde a $\rho < \rho_0$ e o sinal inferior a $\rho > \rho_0$. As Figs. 4 e 5 mostram as distribuições radiais da densidade de partículas e da densidade de fluxo magnético, para $\gamma=5/3$ e $\gamma=2$, respectivamente.

5. EQUILÍBRIO BIDIMENSIONAL

As soluções para o equilíbrio bidimensional, até agora apresentadas na literatura, são aproximadas, sendo aplicáveis a feixes finos em geometria toroidal.^{5,8,9} Estas soluções tem sido obtidas através de expansões em que o parâmetro pequeno é o inverso da relação de aspecto ($\rho_0^{-1} = \delta/r_0$, onde r_0 é a distância radial correspondente ao valor máximo da densidade). Nas referências acima indicadas, a função de distribuição foi suposta concentrada somente no momento canônico,⁵ ou tanto no momento canônico como na energia.^{8,9}

Como foi visto no item (ii) da seção 3, as soluções que descrevem o equilíbrio de anéis de grande razão de aspecto podem ser obtidas a partir da equação

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Phi = \rho_0^2 \frac{\eta}{s} \frac{n(\Phi)}{n_0}.$$

Para o equilíbrio isotérmico ($\theta = \theta_0$), isto é, em que a equação de estado é a lei de Boyle-Mariotte

$$P = n \theta_0,$$

a relação entre a densidade e a função fluxo \bar{e} é obtida a partir da condição de equilíbrio como

$$n = n(0) e^{-s\Phi/\eta} .$$

A equação para Φ pode então ser escrita na forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Phi + be^{a\Phi} = 0 ,$$

onde $a = -s/\eta$ e $b = -\rho_0^2 \eta n(0)/s\eta_0$. Esta é a equação de Liouville, cuja solução geral é¹⁰

$$e^{a\Phi} = \frac{g}{ab} \frac{[(\partial g/\partial \rho)^2 + (\partial g/\partial \zeta)^2]}{(1 + g^2 + h^2)^2} ,$$

onde g e h são as funções conjugadas (reais) obtidas a partir de uma função F arbitrária, suficientemente diferenciável, do argumento $\rho + i\zeta$, por

$$g(\rho, \zeta) + ih(\rho, \zeta) = F(\rho + i\zeta) .$$

De acordo com esta definição, g e h satisfazem as equações diferenciais de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{\partial h}{\partial \zeta} , \quad \frac{\partial g}{\partial \zeta} = - \frac{\partial h}{\partial \rho} .$$

A solução acima foi escrita numa forma que assegura valores reais e positivos à densidade em todos os pontos. O processo de geração de soluções de equilíbrio, a partir desta solução geral, será ilustrado considerando-se uma função do tipo

$$F(\rho + i\zeta) = \exp \left(\frac{(\rho + i\zeta)^2 - \rho_0^2}{2\sigma_0^2} \right),$$

onde ρ_0 e σ_0 são constantes. Para esta escolha de F , tem-se

$$g(\rho, \zeta) = \exp \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2 - \zeta^2}{2\sigma_0^2} \right) \cos \left(\frac{\rho\zeta}{\sigma_0^2} \right),$$

$$h(\rho, \zeta) = \exp \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2 - \zeta^2}{2\sigma_0^2} \right) \text{sen} \left(\frac{\rho\zeta}{\sigma_0^2} \right),$$

ficando a densidade do anel simplesmente dada por

$$\frac{n}{n_0} = \frac{2}{\sigma_0^4} \frac{\rho^2 + \zeta^2}{\rho_0^2} \text{sech}^2 \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2 - \zeta^2}{2\sigma_0^2} \right).$$

Escolhendo $\sigma_0^2 = \sqrt{2}$, n_0 passa a ser o valor da densidade no ponto $\rho = \rho_0$, $\zeta = 0$.

$$\therefore \frac{n}{n_0} = \frac{\rho^2 + \zeta^2}{\rho_0^2} \text{sech}^2 \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2 - \zeta^2}{2\sqrt{2}} \right).$$

Observe-se a semelhança entre esta solução aproximada e a solução unidimensional exata obtida para o equilíbrio isotérmico na seção 4.1; aliás, a solução unidimensional serviu como orientação na escolha da função F geradora do equilíbrio bidimensional.

A função ϕ é determinada, a partir de n , utilizando-se a condição de equilíbrio. As componentes da densidade de fluxo intrínseco, por sua vez, são calculadas por

$$\frac{B_r}{B_{z,\text{ext}}} = -\frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},$$

$$\frac{B_z}{B_{z,\text{ext}}} = \frac{s}{1+s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho^2} - 1 \right).$$

Aplicando a condição de decaimento rápido, para $\rho \rightarrow \infty$, sobre a componente axial da densidade de fluxo diamagnético, obtém-se a relação

$$\eta/s = \sqrt{2}.$$

A solução para n , acima, obviamente não é válida nas proximidades do eixo, onde falha a aproximação feita na equação diferencial. Desta forma, o método apresentado permite gerar uma infinidade de soluções aproximadas, para a distribuição da densidade de partículas, no equilíbrio isotérmico de feixes com grande razão de aspecto.

Em geral, a função Φ deve satisfazer, na região de densidade não nula, a equação diferencial não homogênea

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Phi = \rho^2 \frac{\eta}{s} \frac{n}{n_0},$$

e, fora da região ocupada pelo anel, a equação homogênea

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Phi = 0.$$

Quanto às condições de contorno, cada valor constante Φ_0 , atribuído à função Φ , define uma possível superfície limite para a densidade do anel em equilíbrio adiabático, isto é, um contorno (ρ, ζ) sobre o qual a densidade cai a zero, conforme a condição de equilíbrio

$$\frac{n}{n_0} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{s}{\eta} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

A equação elíptica quase-linear, satisfeita por Φ na região interna do anel, tem solução única para o problema de Dirichlet especificado por Φ_0 , desde que ¹¹

$$\Phi \leq \Phi_0 \quad \text{para} \quad \gamma > 1.$$

O valor $\gamma = 1$ corresponde ao equilíbrio isotérmico, para o qual o contorno do anel está localizado no infinito, pois a densidade não é nula em nenhum ponto situado a uma distância finita da origem.

Sendo n_0 o valor máximo da densidade, o mínimo valor que pode ser assumido pela função Φ é

$$\Phi_{\min} = \Phi_0 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\eta}{s},$$

que ocorre num ponto $\rho = \rho_0, \zeta = 0$ no interior do anel, onde

$$B_r = 0 \quad \text{e} \quad B_{z,\text{tot}}/B_{z,\text{ext}} = 1/(1+s).$$

Supondo que não há nenhuma parede condutora suficientemente próxima para influenciar o campo diamagnético, a solução da equação homogênea pode ser escrita na forma

$$\Phi(\rho, \zeta) = \rho^2 + \rho \int_0^\infty dk F(k) \cos(k\zeta) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>),$$

onde o primeiro termo é a solução homogênea correspondente ao campo externo uniforme. Os símbolos $\rho_<$ e $\rho_>$, nos argumentos das funções de Bessel modificadas, representam, respectivamente, o menor e o maior dos valores ρ e ρ_0 .

É conveniente escrever a equação para Φ em forma integral, utilizando-se a função de Green em coordenadas esféricas

$$\frac{\Phi - \rho^2}{\rho} = - \frac{\eta}{s} \sum_{\ell=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{P_{\ell}^1(\mu)}{\ell(\ell+1)} \int_0^{\infty} \frac{dR' R'^2}{\delta^3} \int_0^1 d\mu' \sqrt{1-\mu'^2} x$$

$$x P_{\ell}^1(\mu') = \frac{R' R_{<}^{\ell}}{R_{>}^{\ell+1}} \frac{n(R', \mu')}{n_0},$$

onde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\tan \vartheta = r/z$, $\mu = \cos \vartheta$ e P_{ℓ}^1 é a função associada de Legendre de primeira espécie. Agora, $R_{<}$ e $R_{>}$ representam, respectivamente, o menor e o maior dos valores R e R' . Fora da esfera que envolve o anel, a equação acima fornece, com $R > R'$, a expansão multipolar para o potencial vetor intrínseco, que é dado em termos de Φ por

$$\frac{4\pi}{\mu_0} A_{\theta} = - \frac{2\pi s m \Omega \delta}{\mu_0 q} \left[\frac{\Phi - \rho^2}{\rho} \right].$$

Portanto, para $R > R'$,

$$\frac{4\pi}{\mu_0} A_\theta = 2\pi q\Omega \sum_{\ell=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2P_\ell^1(\mu)}{\ell(\ell+1)R^{\ell+1}} \int_0^\infty dR' R'^2 \int_0^1 d\mu' \sqrt{1-\mu'^2} \times$$

$$\times P_\ell^1(\mu') R'^{\ell+1} n(R', \mu'),$$

onde se utilizou a igualdade ($\lambda = c/\omega_p$)

$$\frac{\lambda^2}{\delta^2} \frac{\eta}{2} = 1.$$

A grandes distâncias do anel, o campo diamagnético \vec{e} é equivalente ao produzido por um dipolo magnético de momento

$$m_z = 2\pi q\Omega \int_0^\infty dr r^3 \int_0^\infty dz n(r,z),$$

isto é, o potencial vetor intrínseco é dado por

$$\frac{4\pi}{\mu_0} A_\theta \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} m_z \frac{\sin \vartheta}{R^2} = - m_z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Esta condição permite determinar o coeficiente $F(k)$ da expansão para Φ a grandes distâncias do anel

$$\frac{\Phi}{\rho_0^2} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 - \frac{4\alpha}{\pi} \rho \int_0^\infty dk \cos(kz) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>),$$

com a constante α definida por

$$\alpha = - \frac{1+s}{s} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_z}{r_0^3 B_{z,\text{ext}}} \quad (\alpha > 0).$$

A integral acima pode ser escrita em termos da função de Legendre de segunda espécie, $Q_{1/2}$, como

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \rho \int_0^\infty dk \cos(k\zeta) I_1(k\rho_<) K_1(k\rho_>) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} Q_{1/2} \left[\frac{1+(\rho^2+\zeta^2)/\rho_0^2}{2\rho/\rho_0} \right] \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(\rho/\rho_0)^2}{[\chi+(\rho^2+\zeta^2)/\rho_0^2]^{3/2}}, \end{aligned}$$

onde a última expressão corresponde ao limite apropriado para descrever o campo do dipolo magnético. Esta solução para ϕ corresponde ao campo produzido por uma espira de raio $r_0 = \rho_0 \delta$, na qual circula a corrente total do anel, $I = m_z / \pi r_0^2$.

Em geral, os coeficientes da expansão multipolar, para o campo na região externa ao anel, são calculados a partir da distribuição de densidade. Porém, pode-se também proceder da maneira inversa, escolhendo a forma da solução externa, que deve satisfazer a equação homogênea, e a partir daí calcular a distribuição de densidade capaz de produzir tal campo. Por exemplo, é possível determinar uma solução da equação não homogênea tal que o campo seja em todos os pontos exteriores equivalente ao produzido por uma espira de corrente, isto é, que a função ϕ seja dada, em toda a região externa, por

$$\frac{\Phi}{\rho_0^2} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} Q_{1/2} \left[\frac{1 + (r^2 + z^2)/r_0^2}{2r/r_0} \right].$$

O segundo termo desta equação corresponde ao fluxo magnético intrínseco na região externa

$$\psi_{int} = \frac{\mu_0}{2} \frac{m_z}{r_0} \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} Q_{1/2} \left[\frac{1 + (r^2 + z^2)/r_0^2}{2r/r_0} \right].$$

A relação entre o momento magnético, m_z , e a corrente do anel, I , resulta da lei integral de Ampère, aplicada à densidade de fluxo calculada a partir da expressão para Φ ,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = -2\alpha \frac{s}{1+s} r_0 B_{z,ext} = \mu_0 I,$$

onde o percurso de integração envolve o anel; supõe-se que a densidade de \vec{e} é nula sobre o eixo, de modo que, para $r = 0$,

$$\frac{B_z}{B_{z,ext}} = - \frac{s}{1+s} \frac{\alpha}{(1+z^2/r_0^2)^{3/2}} \quad (B_r = 0).$$

A Fig. 6, que é uma representação da solução Φ exterior, mostra como é possível determinar, graficamente, a curva no plano (ρ, z) que define, para um dado valor Φ_0/ρ_0^2 e no caso particular em consideração, o contorno do anel. A figura ilustra uma situação de forte reversão, para a qual a densidade sobre o eixo é nula. Ca

da valor constante Φ_0/ρ_0^2 define, através das interseções com as curvas para a função Φ/ρ_0^2 , um contorno possível (a parte tracejada corresponde à região interior do anel, isto é, onde a densidade é diferente de zero). Da mesma forma, as interseções das curvas para Φ/ρ_0^2 com parábolas especificadas por

$$[(1+s) \psi_0 - \rho^2] / s\rho_0^2 ,$$

onde ψ_0 é um valor constante do fluxo magnético, definiriam os tubos do campo de indução na região exterior ($\psi_0 = 0$ corresponde à separatriz entre as classes de tubos que se fecham nas proximidades do anel e tubos que se fecham no infinito).

Assim, resta resolver o problema interior, que consiste em determinar uma solução da equação não homogênea e não linear, sujeita à condição de continuidade de Φ , e de sua derivada normal, sobre o contorno, e desta forma caracterizar completamente o equilíbrio macroscópico do anel.

Em geral, a equação satisfeita pela densidade na região interna é

$$\nabla \cdot \left[\rho^{-2} \left(\frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-2} \nabla \right] \frac{n}{n_0} = - \frac{1}{\gamma} \frac{n}{n_0} ,$$

que é válida inclusive na descrição do equilíbrio isotérmico ($\gamma = 1$) em duas dimensões, caso em que a região interna é todo o plano (ρ, ζ) . Observa-se que o valor $\gamma = 2$, aplicável ao anel constituído por partículas com dois graus de liberdade, resulta numa equação linear para n (ou Φ). Embora este modelo não seja, talvez, realístico, as vantagens matemáticas são enormes e, como se pode verificar a partir das soluções

unidimensionais obtidas na seção 4, a forma do anel não depende drasticamente do valor de γ (essencialmente, a diferença está na rapidez com que a pressão varia com a densidade, pois $P \propto n^\gamma$, o que tem influência na espessura do anel).

Para o problema linear, correspondente a $\gamma = 2$, a densidade de partículas é dada, em geral, por uma expansão em funções de onda de Coulomb, F_0 e G_0 , da forma

$$\frac{n}{n_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(kz) \left[A_k F_0 \left(\frac{k^2}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho^2}{2\sqrt{2}} \right) + B_k G_0 \left(\frac{k^2}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho^2}{2\sqrt{2}} \right) \right],$$

podendo a função ϕ , na região interna, ser calculada a partir de n por

$$\phi = \phi_0 - \frac{2\eta}{s} \frac{n}{n_0}.$$

Como já ficou dito anteriormente, pode-se escolher a distribuição de densidade, isto é, arbitrar os valores dos coeficientes A_k e B_k na expansão acima, e após determinar os coeficientes da expansão multipolar para o campo externo, ou então ajustar os coeficientes A_k e B_k para que a densidade seja nula sobre uma das superfícies $\phi = \phi_0$, obtidas a partir da forma do campo no exterior do anel.

Como um exemplo trivial, considere-se o caso em que são desprezados os termos da série acima a partir de $k = 1$; desta forma, recupera-se a solução para anéis alongados

$$\frac{n}{n_0} = A_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\rho^2}{2\sqrt{2}} \right) + B_0 \operatorname{cos} \left(\frac{\rho^2}{2\sqrt{2}} \right) = \operatorname{cos} \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2\sqrt{2}} \right).$$

Os coeficientes A_0 e B_0 são determinados a partir da condição de máxima densidade, $n = n_0$, no ponto $\rho = \rho_0$. A condição de continuidade da densidade de fluxo magnético fornece a restrição $n/s = \sqrt{2}$ entre os parâmetros do anel.

Na prática, o contorno do anel, e portanto toda a solução de equilíbrio macroscópico, fica especificado pela forma do catodo. Por outro lado, o equilíbrio mais estável deve corresponder ao menor valor da energia total, dado pela soma das energias cinética, térmica e magnética. Assim, é possível adotar um critério de mínima energia na escolha da forma mais apropriada do catodo, entre as infinitas formas possíveis, procurando-se determinar o contorno do anel que corresponde ao menor valor da energia total.

A determinação deste tipo ideal de catodo é de grande interesse no projeto dos diodos utilizados na geração de anéis intensos de íons, porém este cálculo será assunto de uma próxima comunicação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. D. Keefe, Sci. Am. 226, n. 4, p. 22 (1972).
2. N. Christofilos, em Proc. Second U.N. Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, v. 32, p. 279.
3. C.L. Longmire, *Elementary Plasma Physics* (Interscience Publishers, New York, 1963), c. V.
4. R.C. Davidson e N.A. Krall, Phys. Fluids 13, 1543 (1970).
5. R.C. Davidson, *Theory of Nonneutral Plasmas* (W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1974), c. 3.
6. D. Pfirsch, Z. Naturforschg. 17a, 861 (1962).
7. K.D. Marx, Phys. Fluids 11, 357 (1968).
8. E. Ott e R.N. Sudan, Phys. Fluids 14, 1226 (1971).
9. A. Mondelli e E. Ott, Phys. Fluids 17, 1017 (1974).
10. W.F. Ames, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering* (Academic Press, New York, 1965), c. 4, p. 180-183.
11. L. Bers, F. John e M. Schechter, *Partial Differential Equations* (Interscience Publishers, New York, 1966), c.7.

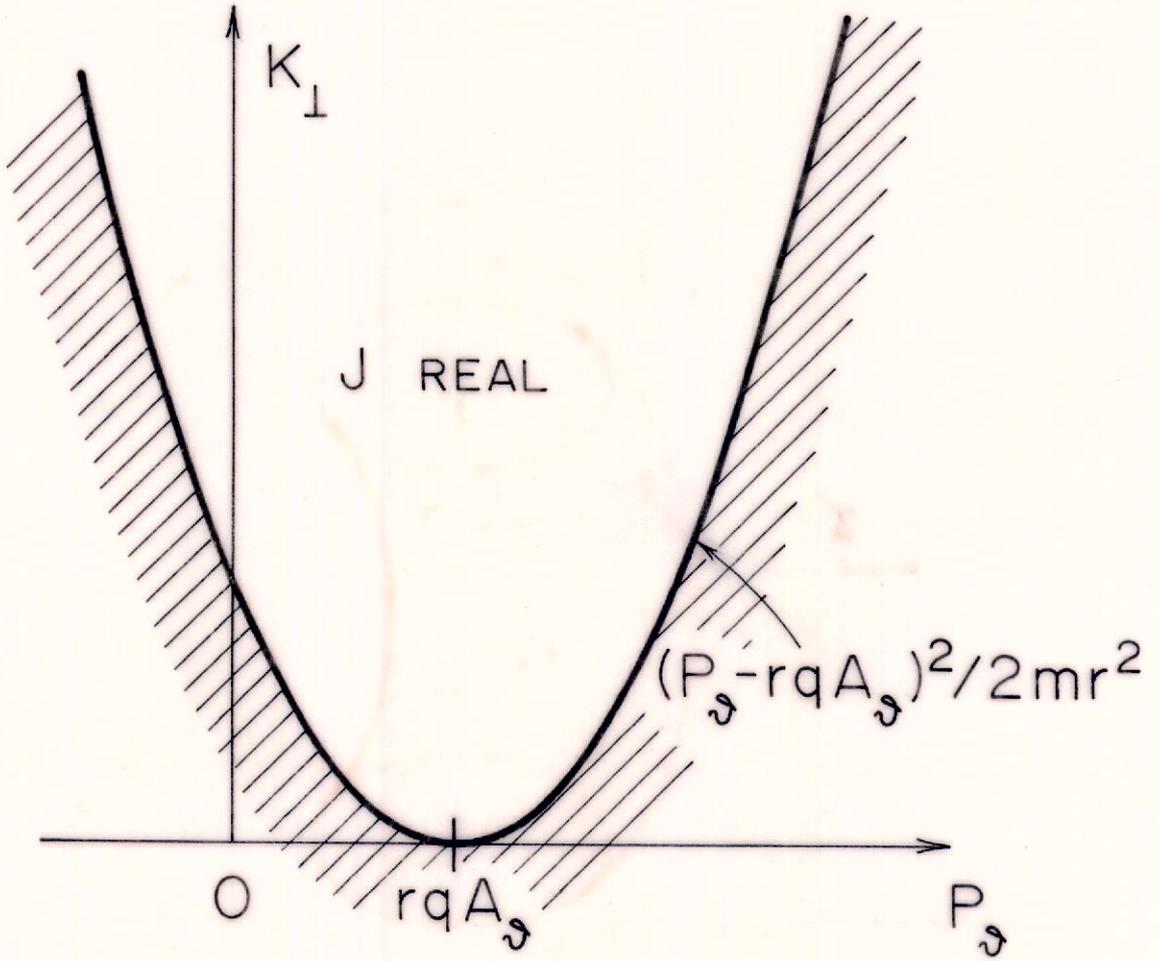


Figura 1

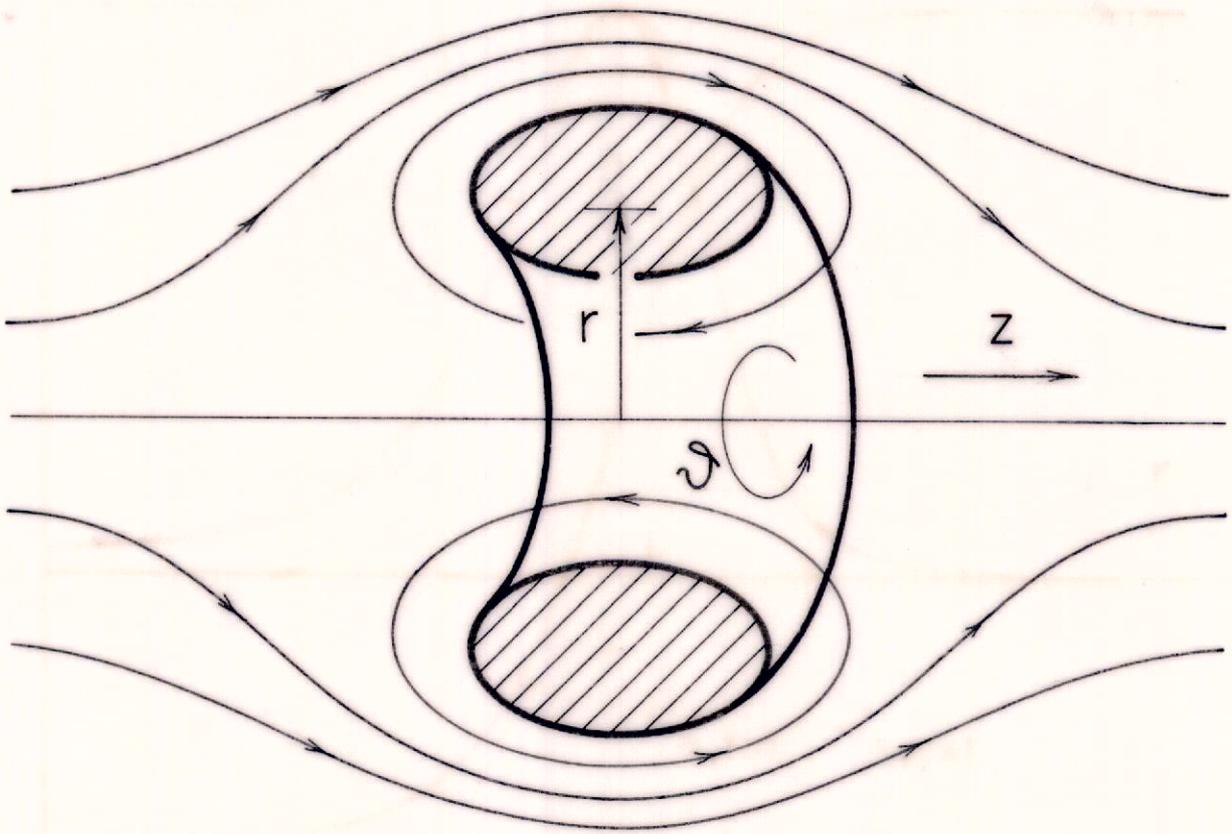


Figura 2

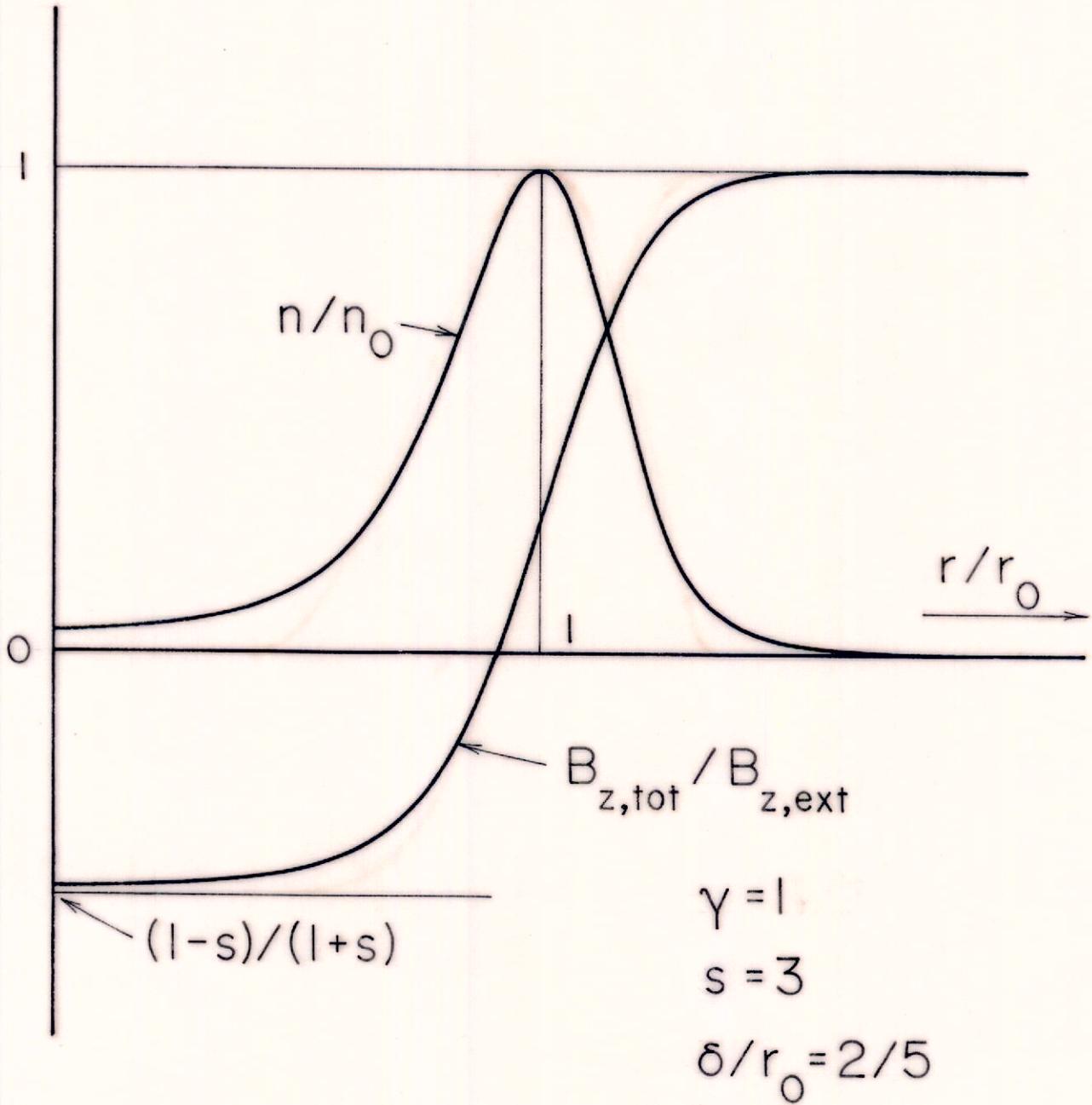


Figura 3

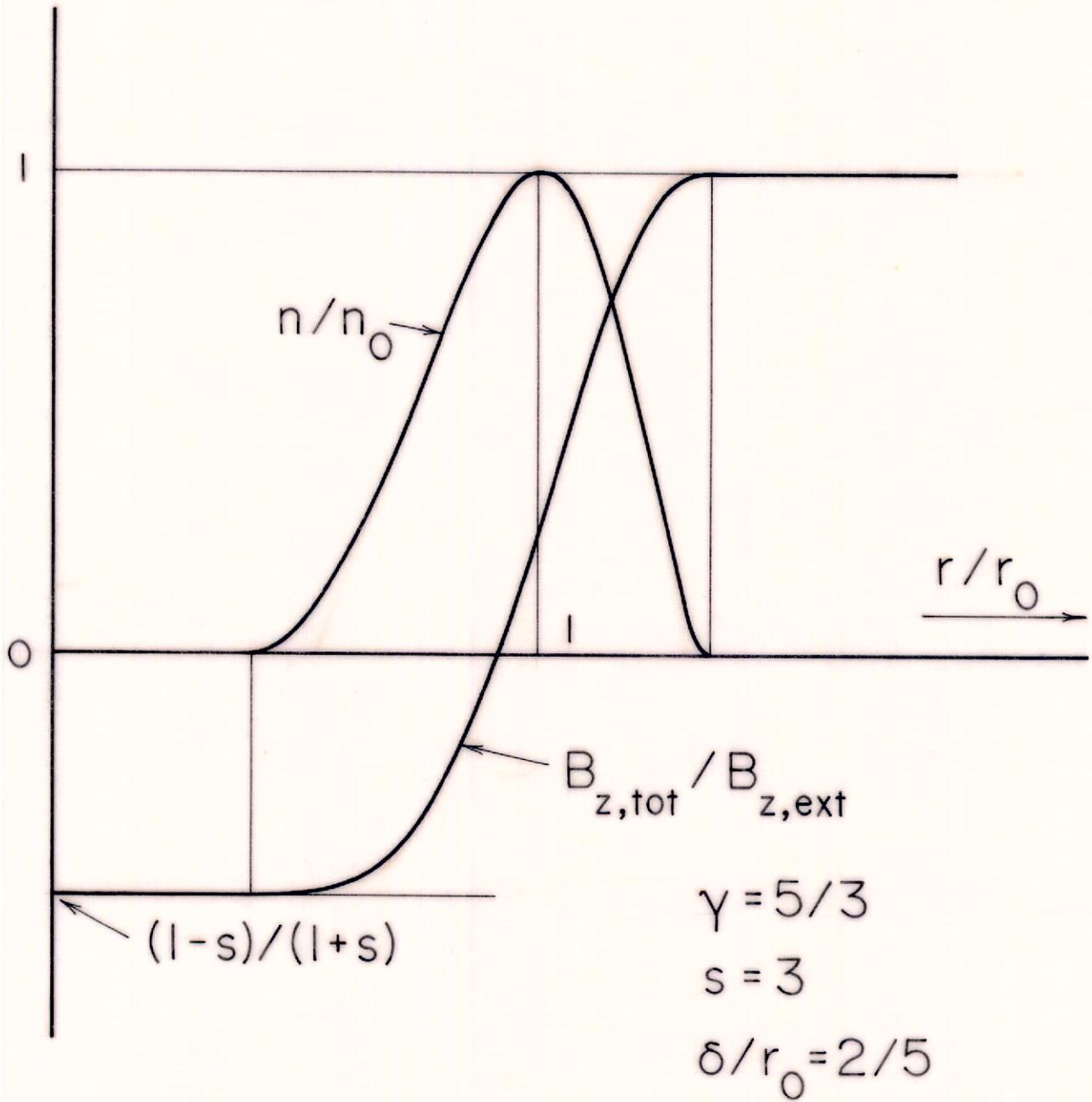


Figura 4

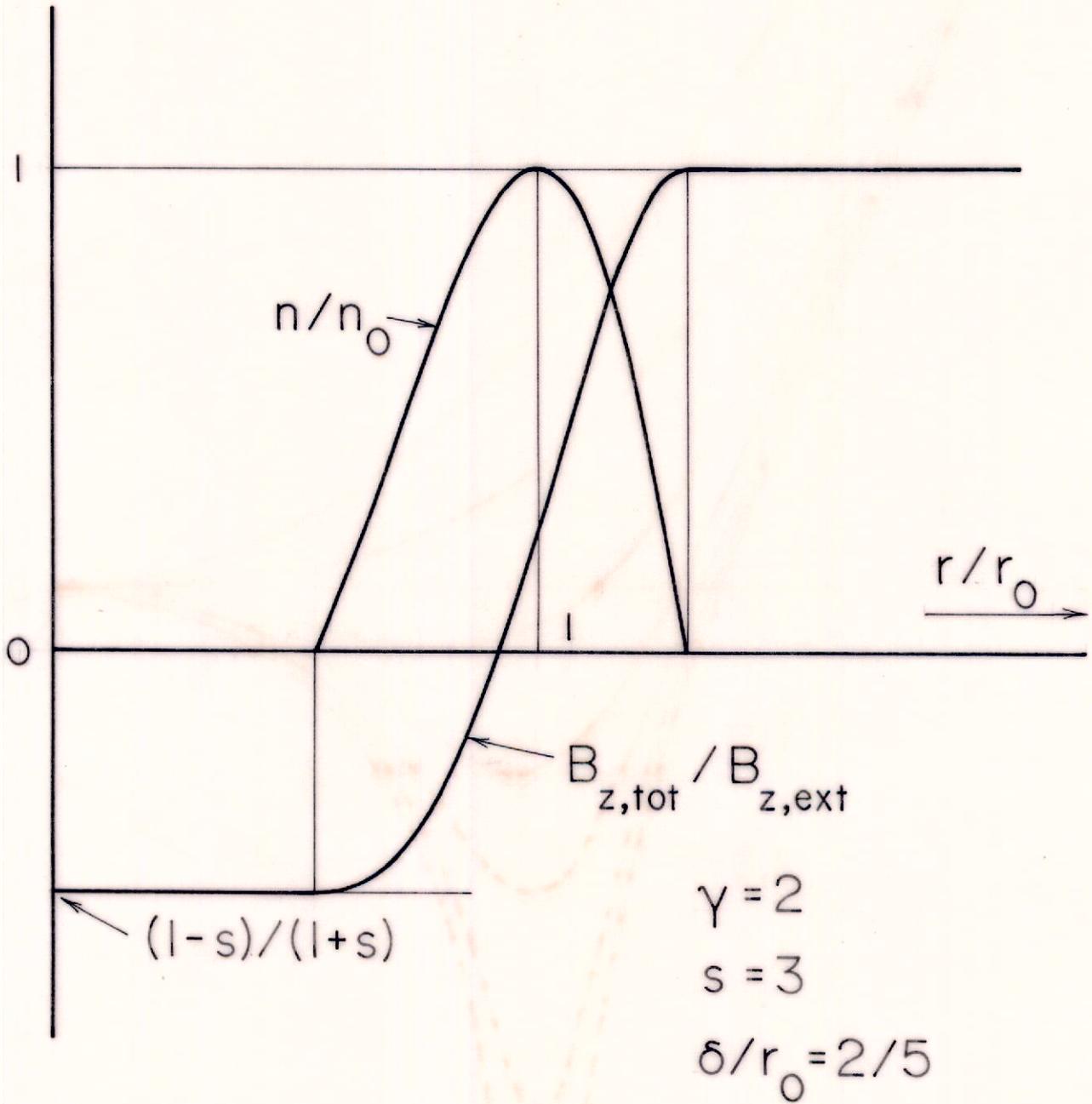


Figura 5

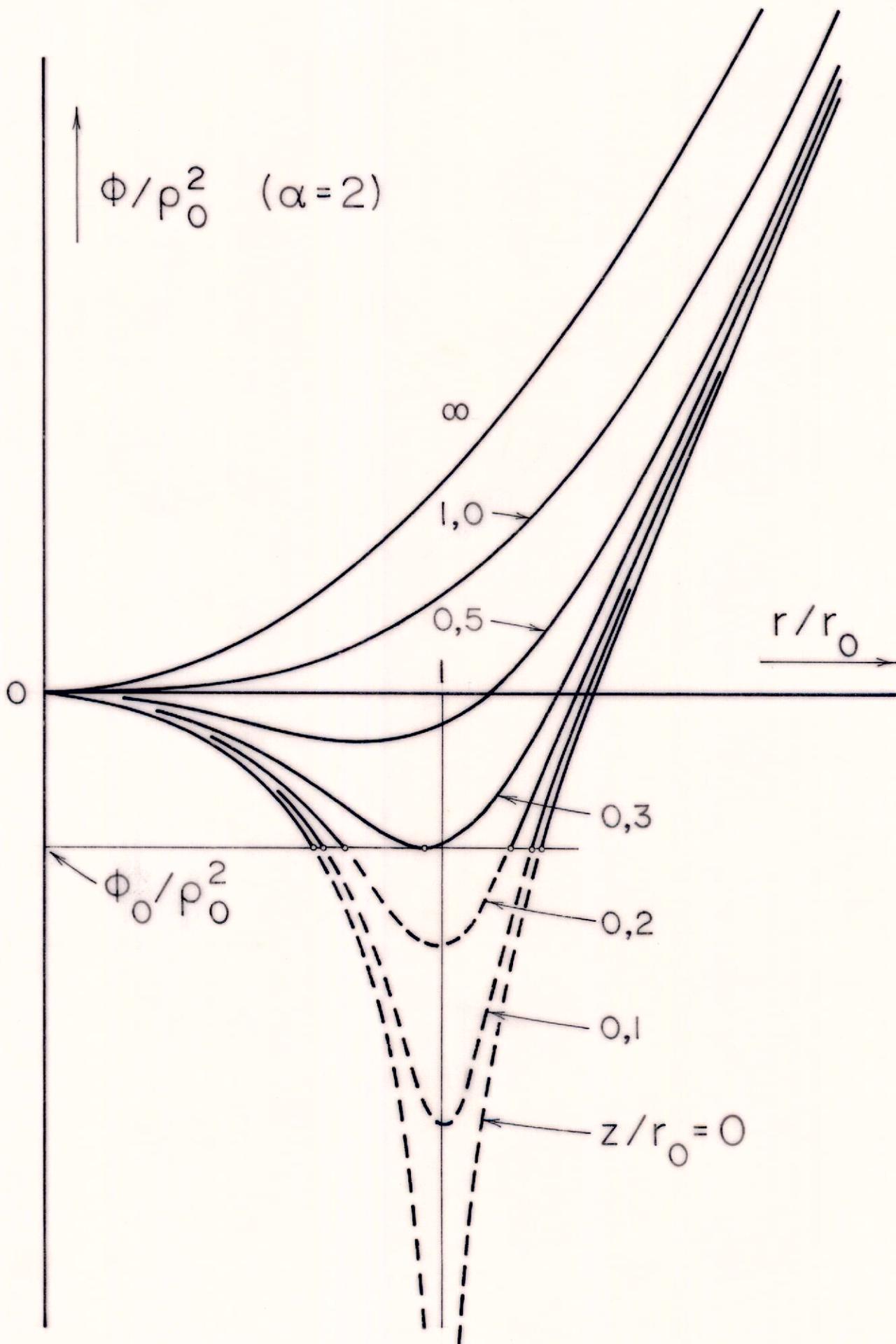


Figura 6