Referência Completa

Tipo da Referência	Report
Repositório	sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.26.21.25
Metadados	sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.26.21.25.04
Site	mtc-m05.sid.inpe.br
Rótulo	2623
Número do Relatório	INPE-3719-RPE/496
Chave de Citação	Hada:1985:InNuRo
Autor	Hada, Kioshi
Grupo	INPE-BR
Título	Influencia do nucleo e da rotacao nas ondas de gravidade no fluido geofisico
Ano	1985
Institução	INPE
Cidade	Sao Jose dos Campos
Palavras-Chave	METEOROLOGIA.
Número de Páginas	17
Idioma	Pt
Tipo	RPQ
Projeto	MASC/TECLIM
Ultima Atualização dos Metadados	2014:09.29.15.19.26 sid.inpe.br/banon/2001/04.03.15.36 administrator {D 1985}
Estágio do Documento	concluido
e-Mail (login)	marciana
Grupo de Usuários	administrator
Visibilidade	shown
Transferível	1
Data Secundária	19921215
Conteúdo da Pasta source	não têm arquivos
Conteúdo da Pasta agreement	não têm arquivos
Histórico	2014-09-29 15:19:26 :: administrator -> marciana :: 1985
Campos Vazios	abstract affiliation archivingpolicy archivist area callnumber contenttype copyholder copyright creatorhistory date descriptionlevel dissemination documentstage doi e-mailaddress edition electronicmailaddress format isbn issn lineage mark mirrorrepository nextedition nexthigherunit notes numberoffiles parameterlist parentrepositories previousedition progress readergroup readergroup readpermission resumeid rightsholder secondarykey secondarymark secondarytype session shorttitle size sponsor subject targetfile tertiarymark tertiarytype url versiontype
Data de Acesso	29 jul. 2015

atualizar

1. Publicação nº
INPE-3719-RPE/496

2. Versão

3. Data
November 1985

5. Distribuição
☐ Interna ☒ Externa
☐ Restrita

4. Origem
DME/DPM

Programa
MASC/TECLIM

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
ONDAS DE GRAVIDADE
INFLUÊNCIA DO NÚCLEO
INFLUÊNCIA DA ROTAÇÃO

7. C.D.U.: *532.11:523.031.5*

8. Título *INPE-3719-RPE/496*

INFLUÊNCIA DO NÚCLEO E DA ROTAÇÃO NAS ONDAS DE GRAVIDADE NO FLUIDO GEOFÍSICO

10. Páginas: *17*

11. Última página: *10*

12. Revisada por

Y. Viswanadham
Y. Viswanadham

9. Autoria *Kioshi Hada*

Assinatura responsável Kioshi Hada

13. Autorizada por

Marco Antonio Raupp
Diretor Geral

14. Resumo/Notas

O equilíbrio hidrostático estável de duas massas imiscíveis, concêntricas, em rotação e em autogravitação é independente da força centrífuga até termos de ordem Ω^2. As perturbações gravitacionais deste equilíbrio são as ondas de gravidade externas se o núcleo das massas é sólido. Por outro lado, elas são ondas de gravidade internas e externas se o núcleo das massas é fluido. No primeiro caso, o aumento do tamanho do núcleo diminui as frequências. No segundo caso, a estratificação é significativa especialmente para núcleos grandes. As frequências das ondas de gravidade externas aumentam com o aumento do tamanho do núcleo, e as frequências das ondas de gravidade internas aumentam com a diminuição do tamanho do núcleo. Em todos os casos, as frequências são independentes do sentido da rotação. Além disso, as perturbações ondulatórias de origem gravitacional devem sempre possuir direções zonal e meridional. Futuramente este modelo vai ser ampliado para um de 3 camadas. Este modelo melhorado é muito útil para descrever ondas de gravidade externas e internas na atmosfera (ou oceano) terrestre.

15. Observações

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Dr. Yelisetty Viswanadham a revisão técnica, a Marcos Antônio Maringolo Lemes e Yoshihiro Yamazaki o apoio, a Célia Regina Rosa a datilografia e a Marília Prado de Carvalho a revisão de linguagem.

ABSTRACT

The stable hydrostatic equilibrium of two immiscible masses, concentric, in rotation and autogravitation is independent of centrifugal force up to terms of the order Ω^2. The gravitational perturbations of this equilibrium are external gravity waves if the nucleus of the masses is a solid. However, they are internal and external gravity waves if the nucleus of masses is a fluid. In the first case, the increase of the nucleus size decreases the frequencies. In the second case, the stratification is specially significant for big nuclei. The frequencies of the external gravity waves increase with the increase of the nucleus size, and the frequencies of the internal gravity waves increase with the decrease of the nucleus size. In all the cases, the frequencies are independent of the rotation sense. Besides, the wavy perturbations of gravitational origin must always have zonal and meridional directions. In the future, this model will be improved to one of three layers. This improved model is very usefull for describing external and internal gravity waves in the atmosphere (or ocean) of the earth.

<u>SUMÁRIO</u>

1. INTRODUÇÃO

O equilíbrio hidrostático em primeira aproximação será independente dos efeitos da força centrífuga se a rotação for suficientemente lenta. Considera-se neste caso o equilíbrio hidrostático estável das massas imiscíveis e concêntricas com geometrias esféricas (Hada, 1985a). As pequenas perturbações de origem gravitacional deste equilíbrio são oscilatórias no tempo se os efeitos dissipativos são desprezíveis. O estudo de tais perturbações ondulatórias é essencialmente uma investigação das frequências dos modos normais da configuração do equilíbrio.

Nesta configuração o núcleo das massas com densidade ρ_1 é sempre um sólido ou um fluido, ao passo que a massa restante de densidade ρ_2 é sempre um outro fluido de densidade menor ou igual à da massa do núcleo. Ondas de gravidade externas ou ondas de gravidade externas e internas serão geradas se o núcleo for um sólido ou fluido, respectivamente.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes para ondas de gravidade em geometria esférica foram deduzidas por Hada (1985b). Elas são:

$$\nabla^2 \psi^{(i)} = 0 \ , \tag{1}$$

$$\nabla^2 \phi^{(i)} = 0 \ , \tag{2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial R} \, d\mu = 0 \ , \tag{3}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial R} \, \mu \, d\mu = 0 \ , \tag{4}$$

onde μ é $\cos(\theta)$, R é o raio das esferas, ψ é a velocidade potencial e ϕ é o potencial gravitacional. Aqui θ é a latitude e ψ e ϕ são dados por:

$$\psi = \psi^{(0)} + \varepsilon\ \psi^{(1)} + O(\varepsilon^2)\ , \tag{5}$$

$$\phi = \phi^{(0)} + \varepsilon\ \phi^{(1)} + O(\varepsilon^2)\ , \tag{6}$$

onde ε é um parâmetro de magnitude pequena representado por:

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{\sqrt{\pi G \rho_2}}\ , \tag{7}$$

que é essencialmente uma medida da influência da rotação nas ondas de gravidade.

Se o núcleo for sólido, as condições de contorno serão:

$$\frac{\partial \psi_2{}^{(i)}}{\partial R} = 0\ , \tag{8}$$

$$\phi_1^{(i)} = \phi_2^{(i)}\ , \tag{9}$$

$$\frac{\partial \phi_2{}^{(i)}}{\partial R} = \frac{\partial \phi_1{}^{(i)}}{\partial R}\ , \tag{10}$$

para o contorno interior R=a, e

$$\phi_2^{(i)} = \phi_3^{(i)}\ , \tag{11}$$

$$\frac{\partial \phi_3{}^{(i)}}{\partial R} - \frac{\partial \phi_2{}^{(i)}}{\partial R} = -\ \frac{\partial \psi_2{}^{(i)}}{\partial R}\ , \tag{12}$$

$$\sigma^{(0)2}\ \psi_2^{(0)} + \phi_2^{(0)} - \frac{1}{3}\ (1 - a^3\ \zeta)\ \frac{\partial \psi_2{}^{(0)}}{\partial R}\ , \tag{13}$$

$$\sigma^{(0)^2}\ \psi_2^{(1)} + 2\sigma^{(0)}\ \sigma^{(1)}\ \psi_2^{(0)} + \phi_2^{(1)} - \frac{1}{3}\ \frac{\partial\psi_2{}^{(1)}}{\partial R} \qquad (14)$$

para o contorno exterior R=1. Aqui ζ é igual a $1-\rho_1/\rho_2$.

Se o núcleo for fluido, as Condições 9, 11 e 12 também serão válidas. As condições restantes são:

$$\frac{\partial\phi_2{}^{(i)}}{\partial R} - \frac{\partial\phi_1{}^{(i)}}{\partial R} = \zeta\ \frac{\partial\psi_2{}^{(i)}}{\partial R}\ , \qquad (15)$$

$$\frac{\partial\psi_2{}^{(i)}}{\partial R} = \frac{\partial\psi_1{}^{(i)}}{\partial R}\ , \qquad (16)$$

$$\sigma^{(0)^2}\ (\rho_2\ \psi_2^{(0)} - \rho_1\ \psi_1^{(0)} + (\rho_2\phi_2^{(0)} - \rho_1\phi_1^{(0)}) - \frac{1}{3}\ a\ \rho_1\zeta(1+\frac{\rho_1}{\rho_2})\ \frac{\partial\psi_2{}^{(0)}}{\partial R} = 0, \qquad (17)$$

$$\sigma^{(0)^2}(\rho_2\psi_2^{(1)} - \rho_1\psi_1{}^{(1)}) + 2\sigma^{(0)}\sigma^{(1)}(\rho_2\psi_2{}^{(0)} - \rho_1\psi_0{}^{(0)}) + (\rho_2\phi_1{}^{(1)} -$$

$$- \rho_1\phi_1{}^{(1)}) - \frac{1}{3}\ a\ \rho_1\ \zeta(1+\frac{\rho_1}{\rho_2})\ \frac{\partial\psi_2{}^{(1)}}{\partial R} = 0 \qquad (18)$$

para o contorno interior R=a, e

$$\sigma^{(0)^2}\ \psi_2^{(0)} + \phi_2^{(0)} - \frac{1}{3}\left[1-a\zeta\right]\frac{\partial\psi_2{}^{(0)}}{\partial R} = 0 \qquad (19)$$

$$\sigma^{(0)^2}\ \psi_2^{(1)} + 2\sigma^{(0)}\ \sigma^{(1)}\psi_2^{(0)} + \phi_2{}^{(1)} - \frac{1}{3}\left[1-a\zeta\right]\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial} = 0 \qquad (20)$$

para o contorno exterior R=1.

As equações acima descreverão as ondas de gravidade externa se o núcleo for sólido, ou externas e internas se o núcleo for fluido.

3. ONDAS DE GRAVIDADE EXTERNAS

As equações governantes das ondas de gravidade externas são dadas pelas Equações 1 a 4 e pelas Condições de Contorno 8 a 14. A solução geral das Equações 1 e 2 para i=0 é do tipo:

$$\psi_2^{(0)} = \left[(n+1)\, R^n + n\, a^{2n-1}\, R^{-n-1}\right] A_n\, Y_n^m \,, \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1^{(0)} \\ \phi_2^{(0)} \\ \phi_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n\, R^n \\ C_n\, R^n + D_n\, R^{-n-1} \\ E_n\, R^{-n-1} \end{pmatrix} Y_n^m \,, \tag{22}$$

respectivamente.

Usando as condições de contorno 8 a 14 obtêm-se os autovalores:

$$\sigma(0)^2 = \frac{n(n+1)\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}\right]\left[1 - \frac{3}{2n+1}\frac{\rho_2}{\bar{\rho}}\right]}{n+1 + n\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}}\, \frac{g}{b} \,, \tag{23}$$

onde a é o raio do núcleo e b é o raio da massa externa concêntrica, quando ambos estão no equilíbrio, e $\bar{\rho}$ é a densidade média representada por:

$$\bar{\rho} = \frac{3}{4}\, \frac{g}{\pi G b} \,. \tag{24}$$

Na Equação 24 g é a aceleração da gravidade dada por $G(M_1 + M_2)/b^2$, e M_1 e M_2 são as massas correspondentes às densidades ρ_1 e ρ_2.

Dois casos particulares de frequências da Equação 24 podem ser considerados. No primeiro caso tem-se $a \to 0$ e $\bar{\rho} \to \rho_2$ com frequência simplificada dada por:

$$\sigma^{(0)2} = \frac{2n(n-1)}{2n+1} \frac{g}{b} \, . \tag{25}$$

O segundo caso é a aproximação água rasa, isto é, $a = b-h$ com $h \ll a \sim b$. Assim, supondo $n \ll b/h$, tem-se:

$$\sigma^{(0)2} \approx n(n+1) \left[1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho_2}{\bar{\rho}} \right] \frac{gh}{a^2} \, , \tag{26}$$

que são as frequências das ondas de gravidade irrotacionais de um fluido delgado sobre uma esfera sólida (Terra). O fator $3\rho_2/(2n+1)\bar{\rho}$ corresponde à contribuição gravitacional devida à massa fluida de densidade ρ_2.

Na geometria plana, pode-se admitir que n é proporcional a b/a, ou melhor, $n = kb$, onde k funciona como um número de onda. Assim, a Equação de Frequência (23) fica reduzida a:

$$\sigma^{(0)2} = gk \tanh (kh) \, . \tag{27}$$

Se $|kh| < \pi/2$ ou $L > 4h$, sendo L uma escala de comprimento horizontal,

$$\sigma^{(0)2} = k^2 gh \, , \tag{28}$$

e se $|kh| \to \infty$ ou $L \ll h$,

$$\sigma^{(0)2} = gk \, . \tag{29}$$

Para i=1, verifica-se facilmente que $\sigma^{(1)} = 0$. Isto significa que o sentido da rotação não influi nas frequências das ondas de gravidade externa pelo menos até termos de ordem Ω.

Os resultados obtidos acima só são válidos para $m \neq 0$, pois as Equações 3 e 4 devem ser satisfeitas. Fisicamente isto significa que as perturbações gravitacionais existem em ambas as direções (zonal e meridional); porém, não se pode ter estas perturbações somente em uma direção específica.

4. ONDAS DE GRAVIDADE EXTERNAS E INTERNAS

A solução geral das Equações 1 e 2 é da forma:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1^{(0)} \\ \\ \psi_2^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AR^n \\ \\ BR^n + CR^{-n-1} \end{Bmatrix} Y_n^m \, , \tag{30}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1^{(0)} \\ \\ \phi_2^{(0)} \\ \\ \phi_3^{(0)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} DR^n \\ \\ ER^n + FR^{-n-1} \\ \\ GR^{-n-1} \end{Bmatrix} Y_n^m \, , \tag{31}$$

respectivamente.

Usando as Condições de Contorno 9, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19 e 20 obtém-se:

$$\alpha \, \sigma^{(0)^4} + \beta \, \sigma^{(0)^2} + \gamma = 0 \, , \tag{32}$$

onde:

$$\alpha = \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{n}{n+1} \right] + \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} \left[\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n}{n+1} \right] \xi \, ,$$

$$\beta = -\left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{n}{n+1}\right]\frac{2n(n-1)}{3(2n+1)} - \left[\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{2n(n-1)}{3(n+1)} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{2n^2(n-1)}{(2n+1)(n+1)} -\right.$$

$$\left. - \frac{2n(n-1)}{3(2n+1)}\right](\frac{a}{b})^{2n+1} + \left\{\left[1 + \frac{n}{n+1}(\frac{a}{b})^{2n+1}\right]\left[\frac{n}{2n+1}(\frac{a}{b})^{2n+1} - \frac{n}{3}(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2})\right] -\right.$$

$$- \frac{n}{n+1}(\frac{a}{b})^{2n+1} - \frac{n(2n+1)}{3(2n+1)}(\frac{a}{b})^{2n+4} + \left[1 - (\frac{a}{b})^{2n+1}\right] \times$$

$$\left.\times\left[\frac{n^2}{(2n+1)(n+1)}(\frac{a}{b})^{2n+1} - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\frac{3n^2+n}{3(2n+1)}(\frac{a}{b})^3\right]\right\}\xi +$$

$$+ \left\{- \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{n}{2n+1} - \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)}(\frac{a}{b})^{2n+1} - \frac{n}{3}\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\left[(\frac{a}{b})^3 - (\frac{a}{b})^{2n+4}\right]\right\}\xi^2$$

$$\gamma = \left\{\frac{2n^2(n-1)}{9(2n+1)}\left[\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right]\left[1 - (\frac{a}{b})^{2n+1}\right]\right\}\xi + \left\{\left[1 - (\frac{a}{b})^{2n+1}\right] \times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{2n^2(n-1)}{3(2n+1)^2} + \frac{n^2}{9}(\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} + \frac{\rho_1^3}{\rho_2^3})(\frac{a}{b})^3 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{n^2}{(n+1)^2}(\frac{a}{b})^{2n+1}\right]\right\}\xi^2 +$$

$$+ \left\{\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\frac{n^2}{3(2n+1)}\left[(\frac{a}{b})^3 - (\frac{a}{b})^{2n+4}\right]\right\}\xi^3 , \quad \text{e}$$

$$\xi = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} .$$

A Equação de Frequência (32) representa as ondas de gravidade externas e internas, simultaneamente. Desde que as ondas de gravidade externas são de ordem unitária quando $\rho_1 \sim \rho_2$, pode-se concluir que:

$$\sigma_{ex}^{(0)^2} = \frac{2n(n-1)}{3(2n+1)} + \left[1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{n}{n+1}\right]^{-1}\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{2n(n-1)}{3(n+1)} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{2n^2(n-1)}{3(2n+1)(n+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2n(n-1)}{3(2n+1)}\right](\frac{a}{b})^{2n+1} . \qquad (35)$$

Observa-se que o segundo termo do lado direito da Equação 35, é nulo quando $\rho_1 = \rho_2$ ou $a=0$. Por outro lado, este termo tornar-se-á significativo quando o núcleo fluido for de raio grande.

A frequência das ondas de gravidade internas quando $\rho_1 \sim \rho_2$ deve ser de ordem $\sqrt{\xi}$. Com esta suposição conclui-se que:

$$\sigma^{(0)^2} = \xi\left\{\frac{\frac{n}{3}(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2})\left[1 - (\frac{a}{b})^{2n+1}\right]}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{n}{n+1} + \left[\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{2n+1}{n+1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{n}{n+1} - 1\right](\frac{a}{b})^{2n+1}}\right\} . \qquad (36)$$

Nota-se, portanto, que as frequências das ondas de gravidade internas diminuem com o aumento do raio do núcleo fluido.

De modo análogo ao caso do núcleo sólido, pode-se provar que $\sigma^{(1)} = 0$ também para o caso do núcleo fluido. Portanto, o sentido na solução também não influi nas frequências das ondas de gravidade externa e interna até termos de ordem Ω.

5. CONCLUSÕES

As ondas de gravidade externas num fluido homogêneo que envolve um núcleo homogêneo sólido mais pesado poderão representar um modelo terrestre quando o fluido for delgado, ou um modelo de planeta que tenha um núcleo de tamanho desconhecido (por exemplo, Júpiter). A principal conclusão sobre as frequências destas ondas é de que o aumento do raio do núcleo sólido diminui suas frequências.

Quando tanto a massa do núcleo quanto a massa que envolve o núcleo forem fluidas, podem-se ter ondas de gravidade internas e externas. Isto será um modelo de planeta (se existir). Se as densidades ρ_1 e ρ_2 das massas forem próximas, as ondas de gravidade externas poderão ser desacopladas das internas. Nota-se que a extratificação é significativa especialmente para núcleos grandes. Neste caso, a frequência das ondas de gravidade externa aumenta, enquanto a das ondas de gravidade internas diminui.

Seja o núcleo sólido ou não, o sentido da rotação não afeta as frequências das ondas de gravidade até termos de ordem Ω. Além disso, as perturbações ondulatórias de origem gravitacional sempre devem possuir direções zonal e meridional.

Futuramente este trabalho pode ser ampliado para um modelo de três camadas, sendo o núcleo um sólido e as duas camadas restantes constituídas de fluidos. Este modelo é particularmente interessante para descrever ondas de gravidade externas e internas da atmosfera ou oceanos terrestres.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HADA, K. Equilíbrio hidrostático de uma massa em rotação. (INPE-3485-RPE/474). 1985.

HADA, K. Um modelo de sistema de equações para ondas. No prelo.