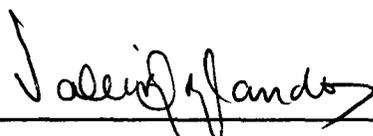


1. Publicação nº <i>INPE-3187-PRE/552</i>	2. Versão	3. Data <i>Julho, 1984</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC/DGC</i>	Programa <i>CONTAT</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>SUAVIZAÇÃO DE DADOS FILTRO DE KALMAN</i> <i>ESTIMAÇÃO DE DADOS RUIDO ADAPTATIVO</i>			
7. C.D.U.: <i>681.5.015.44</i>			
8. Título <i>APLICAÇÃO DE TÉCNICA DE RUIDO ADAPTATIVO EM ESTIMAÇÃO DE ESTADO À SUAUIZACÃO DE DADOS</i>		10. Páginas: <i>07</i>	
		11. Última página: <i>06</i>	
		12. Revisada por	
9. Autoria <i>Valcir Orlando</i> <i>Atair Rios Neto</i>		 <i>J.A.M. Felipe de Souza</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor Geral	
14. Resumo/Notas <i>Apresenta-se um procedimento de suavização de dados por ajuste de curvas, desenvolvido através da aplicação do filtro de Kalman combinado com técnica adaptativa de dosagem do ruído no estado. O emprego de um estimador sequencial recursivo ao problema de ajuste de curvas permitiu o desenvolvimento de duas versões de procedimento. A primeira emprega processamento em lote dos dados e a segunda permite o processamento de cada dado tão logo este esteja disponível. Essa característica da segunda versão pode emprestar ao ajuste características de processamento em tempo real. Dentro das hipóteses efetuadas durante a solução do problema, ambas as versões apresentam a característica de evitar inversões matriciais.</i>			
15. Observações <i>Este trabalho será apresentado no 1º Congresso Latino-Americano de Automática/5º Congresso Brasileiro de Automática - 1º CIA/5º CBA - Campina Grande, PB, de 3 a 6 de setembro de 1984.</i>			

APLICAÇÃO DE TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO EM ESTIMAÇÃO DE ESTADO À SUAVIZAÇÃO DE DADOS

Valcir Orlando
Atair Rios Neto

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq
C.P. 515 - São José dos Campos - 12.200 - São Paulo - Brasil

Resumo

Apresenta-se um procedimento de suavização de dados por ajuste de curvas, desenvolvido através da aplicação do filtro de Kalman combinado com técnica adaptativa de dosagem do ruído no estado. O emprego de um estimador sequencial recursivo ao problema de ajuste de curvas permitiu o desenvolvimento de duas versões de procedimento. A primeira emprega processamento em lote dos dados e a segunda permite o processamento de cada dado tão logo este esteja disponível. Essa característica da segunda versão pode emprestar ao ajuste características de processamento em tempo real. Dentro das hipóteses efetuadas durante a solução do problema, ambas as versões apresentam a característica de evitar inversões matriciais.

Application of an Adaptive Noise Technique on State Estimation to Data Smoothing

Abstract

A data smoothing by curve fitting procedure, developed by the application of the Kalman filter combined with an adaptive technique of state noise evaluation is presented. The use of a recursive sequential estimator in the curve fitting problem made possible the development of two versions of the procedure: the first with batch data processing and the second with sequential data processing. This characteristic of the second version can give a real time processing capability to the fitting procedure. Within the hypotheses made during the problem solution, both versions present the characteristic of not needing any matrix inversion.

1. INTRODUÇÃO

Apresenta-se um procedimento de suavização de dados por ajuste de curvas. Os métodos mais comumente utilizados para esse fim são os métodos de ajuste por mínimos quadrados e χ -quadrado (Wertz, 1978; Meyer, 1975; Bendat e Piersol, 1971). Ambos os métodos supõem os valores da curva a ser ajustada, correspondentes aos pontos de amostragem de dados, como os valores esperados da grandeza medida nesses instantes. No caso linear, a curva é tomada como uma combinação linear de funções do tempo conhecidas. Os coeficientes dessa combinação são então calculados segundo algum critério de otimização. No caso do ajuste por mínimos quadrados, esse critério consiste no cálculo dos coeficientes, de modo a minimizar uma soma ponderada que envolve o quadrado dos resíduos entre os dados e os correspondentes pontos da curva. Para o ajuste por χ -quadrado, o critério é de máxima verossimilhança. Ambas as técnicas possuem a característica de processamento em lotes e exigem a inversão de uma matriz cuja dimensão é dada pelo grau da curva ajustada acrescida de uma unidade.

No procedimento apresentado, o problema de ajuste é colocado de tal forma a permitir o emprego do filtro de Kalman (Jazwinski, 1970) associado a uma técnica de ruído adaptativo (Rios Neto e Kuga, 1982) na sua solução. Com isto os coeficientes são estimados no sentido de minimizar os resíduos entre os pontos de dados e a curva ajustada.

O procedimento é apresentado em duas formas distintas: uma baseada no processamento dos dados em lotes e outra baseada no processamento sequencial dos dados. Essa última característica é inédita dentre os procedimentos pesquisados na literatura, pois permite que o ajuste seja efetuado em tempo real, desde que se conheça o grau da curva a ser ajustada.

2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Suponha-se que se dispõe de um conjunto de medidas de uma grandeza física de interesse, que possam ser modeladas matematicamente por:

$$y(k+1) = y_R(k+1) + v_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

onde $y(k+1)$ representa o valor da medida referente ao instante t_{k+1} , $y_R(k+1)$ representa o valor real da grandeza medida nesse instante e $v(k+1)$ representa um erro aleatório de que a medida $y(k+1)$ está afetada. Suponha-se que esse erro segue uma distribuição gaussiana com:

$$E[v(k)] = 0 ; E[v_k v_j] = r_k \delta_{kj} , \quad (2)$$

onde δ_{kj} é a função delta de Kronecker.

O problema considerado é o de ajustar a esse conjunto de dados, segundo um critério de mínima variância do erro, uma curva da forma:

$$f(x,t) = x_{(1)}g_1(t) + x_{(2)}g_2(t) + \dots + x_{(n)}g_n(t) = \sum_{j=1}^n x_{(j)}g_j(t) , \quad (3)$$

onde $x_{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$ são constantes reais e $g_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$ são funções do tempo conhecidas e linearmente independentes.

A solução proposta para esse problema atinge o objetivo através da estimação dos coeficientes da curva a partir da utilização do filtro de Kalman.

3. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Seja x o vetor formado pelos coeficientes da curva a ser ajustada. Considere-se esse vetor modelado dinamicamente por:

$$x_1 = x_0 + \omega_0 , \quad (4)$$

onde ω_0 é um vetor de ruídos brancos gaussianos com:

$$E[\omega_0] = 0 ; E[\omega_{(i)} \omega_{(j)}] = Q_0 \delta_{ij} , \quad (5)$$

que expressa incertezas do modelo matemático proposto; os índices 0 e 1 indicam respectivamente t_0 e t_1 que nada têm a ver com os instantes de amostragem das medidas, como será evidenciado na sequência.

Suponha-se cada medida modelada pela equação:

$$y_1(k+1) = f(x_1, k+1) + v_1(k+1) , \quad (6)$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1 ,$$

onde a notação $y_1(k+1)$ representa a observação referente ao instante $k+1$, o qual contém informações sobre o vetor de coeficientes x_1 ; f é a curva a ser ajustada cuja expressão é dada pela Equação 3; e v_{k+1} é um ruído gaussiano cujas propriedades estatísticas são aquelas dadas pela Equação 2.

Definindo-se:

$$Y_1 \triangleq [y_1(1), y_1(2), \dots, y_1(m)] , \quad (7)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} g_1(1) & g_2(1) & \dots & g_n(1) \\ g_1(2) & g_2(2) & \dots & g_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(m) & g_2(m) & \dots & g_n(m) \end{bmatrix} , \quad (8)$$

e

$$V_1 = [v(1) \quad v(2) \quad \dots \quad v(m)] \quad (9)$$

com

$$E[V_1] = 0 ; E[V_1 V_1^T] = R_1 , \quad (10)$$

a Equação 6 pode ser colocada na forma:

$$Y_1 = M_1 x_1 + V_1 . \quad (11)$$

Desse modo o problema de ajuste da curva a um conjunto de medidas de uma determinada grandeza física foi colocado em uma forma adequada à aplicação do filtro de Kalman para a estimação dos coeficientes que determinam essa curva. Consideraram-se os coeficientes modelados pela Equação 4 com observações modeladas pela Equação 11. As equações do filtro de Kalman aplicadas a esse sistema tomam a forma:

$$\hat{x}_{1/0} = \hat{x}_{0/0} , \quad (12)$$

$$P_{1/0} = P_{0/0} + Q_0 , \quad (13)$$

$$\hat{x}_{1/1} = \hat{x}_{1/0} + K_1 [Y_1 - M_1 \hat{x}_{1/0}] , \quad (14)$$

$$P_{1/1} = [I - K_1 M_1] P_{1/0} , \quad (15)$$

$$K_1 = P_{1/0} M_1^T [M_1 P_{1/0} M_1^T + R_1]^{-1} . \quad (16)$$

A matriz de covariância do erro do vetor cujos elementos constituem-se das estimativas da grandeza física observada, calculadas a partir da curva ajustada, é dada pela equação (Orlando, 1983):

$$P_{\hat{Y}} = M_1 P_{1/1} M_1^T . \quad (17)$$

Durante o processo de filtragem, todos os dados são processados de uma só vez em uma única iteração. É importante notar que o cálculo do ganho de Kalman envolve a inversão de uma matriz $m \times m$ que pode ser evitada através do processamento ponto a ponto do vetor de observações durante a fase de atualização, já que se supõe que os ruídos das componentes do vetor de medidas são não-correlacionados entre si (Sorenson, 1966).

A inclusão do ruído aleatório ω_0 na Equação 4, com a qual se modelou os coeficientes, tem o objetivo de criar uma faixa de incerteza em relação ao modelo matemático adotado para os coeficientes, com dispersão representada por Q_0 . Pela Equação 12, percebe-se que o valor propagado da estimativa a priori dos coeficientes $\hat{x}_{1/0}$ é o próprio valor da esti

mativa a priori $\bar{x}_{0/0}$. O mesmo, porém, não ocorre com relação à matriz de covariância do erro que, como se pode ver pela Equação 8, será o valor a priori da matriz de covariância $P_{0/0}$, adicionado à matriz de covariância de w_0, Q_0 . Em vista disto e do fato de não haver um critério para a escolha das condições iniciais para a partida do procedimento de estimação, combinou-se com o processo de estimação dos coeficientes uma técnica de ruído adaptativo (Rios Neto e Kuga, 1982), cuja finalidade é a estimação da matriz Q_0 de modo a satisfazer a hipótese fundamental de consistência entre o resíduo das observações e sua estatística (Jazwinski, 1969). Para satisfazer a esta hipótese, as variâncias do ruído dinâmico (diagonal principal da matriz Q_0) são estimadas de modo a maximizar a probabilidade de ocorrência do valor verdadeiro do resíduo de cada observação. A adição da matriz Q_0 , assim determinada, à matriz de covariância do erro da estimativa a priori dos coeficientes, $P_{0/0}$, resulta em uma matriz propagada $P_{1/0}$ coerente com os resíduos componentes do vetor:

$$RES_1 = Y_1 - M_1 \bar{x}_{1/0}.$$

A aplicação da citada técnica de ruído adaptativo, descrita em detalhes em Rios Neto e Kuga (1982), fornece as seguintes equações adicionais para a estimação dos elementos da diagonal principal da matriz Q_0 :

a) Equações para propagação:

$$\hat{q}_{k+1/k} = \hat{q}_{k/k}, \quad (18)$$

$$P_{k+1/k}^q = P_{k/k}^q, \quad (19)$$

onde \hat{q} é um vetor de dimensão n , cujos elementos são as estimativas da diagonal principal da matriz Q_0 ; P^q é a matriz de covariância do erro na estimação do vetor q ; e o índice k representa o instante de amostragem t_k .

b) Equações para atualização:

$$\hat{q}_{k+1/k+1} = \hat{q}_{k+1/k} + K_{k+1}^q [z_{k+1} - H_{k+1} \hat{q}_{k+1/k}], \quad (20)$$

$$P_{k+1/k+1}^q = [I - K_{k+1}^q H_{k+1}] P_{k+1/k}^q, \quad (21)$$

com observações modeladas por:

$$z_{k+1} = H_{k+1} q_{k+1} + \eta_{k+1}, \quad (22)$$

onde:

$$H_{k+1} = [M_{1(k+1,1)}^2 \dots M_{1(k+1,n)}^2], \quad (23)$$

e o índice (k, ℓ) representa o elemento da k -ésima linha e ℓ -ésima coluna da matriz indexada,

$$E[\eta_{k+1}] = 0; \quad (24)$$

$$E[\eta_{k+1}^2] = 4r_{0k+1}^2 \cdot r_{k+1} + 2r_{k+1}^2,$$

com:

$$r_{0(k+1)} = y(k+1) - M_{1(k+1)} \bar{x}_{1/0}, \quad (25)$$

$$k = 1, 2, \dots, m,$$

onde $y(k)$ representa a medida correspondente ao instante t_k e $M_{1(k)}$ a k -ésima linha da matriz M_1 .

O valor da observação z_{k+1} é calculado por:

$$z_{k+1} = r_{0k+1}^2 + r_{k+1} - M_{1(k+1)} P_{0/0} M_{1(k+1)}^T, \quad (26)$$

e

$$K_{k+1}^q = P_{1/0}^q H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{1/0}^q H_{k+1}^T + 4r_{0k+1}^2 \cdot r_{k+1} + 2r_{k+1}^2]^{-1}. \quad (27)$$

O processo de estimação do vetor q é efetuado a partir do processamento sequencial de todas as observações z_{k+1} , em uma única iteração, antes da fase de atualização do filtro principal, isto é, do filtro para a estimação dos coeficientes da curva a ser ajustada. Através do emprego da técnica de ruído adaptativo cria-se uma maior comodidade para a escolha dos valores das estimativas a priori, necessárias à aplicação do procedimento.

Outro fator importante refere-se ao grau da curva ajustada. A escolha de um grau muito alto implica uma suavização pobre, na qual componentes indesejáveis de ruído de alta frequência podem estar presentes. Por outro lado, se o grau for muito baixo poder-se-á cortar componentes de frequências mais altas que ainda não sejam ruídos, perdendo-se informações. Propõe-se para a escolha do grau o seguinte critério heurístico: inicialmente aplica-se a solução descrita ao ajuste de uma curva do 1º grau. Verifica-se após o ajuste se:

$$|y(t_k) - f(t_k, x)| \leq 3 \sqrt{r_k},$$

$$k = 1, \dots, m.$$

Se a igualdade acima não for verificada, então incrementa-se o grau da curva de uma unidade e repete-se a aplicação do procedimento. Repete-se esse processo até que pela primeira vez a desigualdade se verifique. Quando isso ocorrer ter-se-á o resíduo estimado da mesma ordem de grandeza do resíduo verdadeiro, e a curva ajustada deverá então ser uma boa aproximação do valor real da grandeza da medida.

O procedimento de ajuste de curvas acima descrito, baseado no processamento em lotes

das observações, pode ser adaptado de modo a permitir o processamento de cada dado tão logo este esteja disponível, tornando possível um ajuste de curvas em tempo real. Neste caso, tudo ocorreria como se os valores dos coeficientes variassem dinamicamente ao processar uma nova medida, de modo que esta seja incluída no ajuste. Por esse motivo, para o ajuste sequencial pode-se modelar matematicamente o vetor de coeficientes pela equação:

$$x_{k+1} = x_k + \omega_k, \quad k \geq 0, \quad (28)$$

onde o índice k pode ser agora diretamente relacionado com os instantes de amostragem de observações e, por este motivo, substituiu-se a notação do caso anterior $x_1(k+1)$ por x_{k+1} .

As observações são dadas por:

$$y_{k+1} = f(x_{k+1}) + v_{k+1} = M'_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}, \quad (29)$$

onde:

$$M'_{k+1} = [g_1(k+1) \quad g_2(k+1) \quad \dots \quad g_n(k+1)]. \quad (30)$$

As equações do filtro de Kalman aplicadas ao sistema dado pelas Equações 28 e 29 para a estimação sequencial dos coeficientes são similares ao caso anterior, sendo dispensável descrevê-las aqui. Ressalta-se apenas que a diferença fundamental é que, para o caso presente, antes do processamento de cada observação, y_{k+1} , o vetor de coeficientes resultante da última atualização, $\hat{x}_{k/k}$, deverá ser propagado para o instante da observação presente: $k+1$. No caso anterior só havia uma propagação de 0 para 1, após o que todas as observações eram processadas em lote. Também aqui o procedimento do ruído adaptativo foi utilizado, porém com a diferença de que a cada propagação do vetor $\hat{x}_{k/k}$ estima-se o vetor de variâncias de ω_k , q_k , com a aplicação desse procedimento. Com isso, não se permite que os valores dos elementos da diagonal principal da matriz de covariância do erro das estimativas decaiam devido ao uso de modelo de determinístico não-exato. Como o ganho de Kalman é diretamente proporcional a essa matriz, seu ajuste adaptativo também ajusta o valor do ganho, permitindo que na atualização seja retirado o máximo de informação sobre as variáveis estimadas, contidas em cada observação, evitando-se a divergência do filtro.

Deve ainda ser salientado que as supostas variações dos coeficientes, para que o ajuste acomode mais um ponto de dado a medida que cada observação é processada, podem constituir variações de caráter tendencioso, não consideradas no modelo matemático adotado pelos coeficientes dado na Equação 28. O modelo que inclui estas tendências pode ser escrito por:

$$x_{k+1} = x_k + \psi_k + \omega_k,$$

onde ψ_k representa os erros tendenciosos desconhecidos, que se comete com a utilização da Equação 28. Existe um corolário de um teorema de convergência do filtro de Kalman apresentado em Jazwinski (1970), segundo o qual: se o modelo do sistema é uniforme e completamente observável e controlável, e se ψ_k é limitado e P_0 é limitada, então P_k/k é uniformemente limitada, ou seja, o filtro converge.

Pode-se provar que o modelo adotado para os coeficientes é uniforme e completamente observável e controlável (Orlando, 1983), e desde que ψ_k seja uniformemente limitado e P_0 limitada, então o filtro convergirá.

Tanto o procedimento para ajuste com processamento de dados em lote quanto o sequencial foram testados na suavização de dados simulados de rastreamento de um satélite artificial. Para a geração desses dados simulou-se a órbita do satélite TD-1A (European Space Agency - ESA). Considerando uma estação de rastreamento fictícia calculou-se, a cada segundo, a distância entre essa estação e o satélite. A cada valor da distância estação-satélite, assim calculada, somou-se um erro aleatório de média nula e desvio padrão de 50 metros, calculado a partir de uma rotina geradora de números aleatórios. Os resultados obtidos nos testes efetuados são apresentados a seguir.

4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos foram praticamente idênticos, tanto para o ajuste com processamento de dados em lotes quanto para o sequencial. Por esse motivo apresenta-se somente os resultados da aplicação do procedimento com processamento em lote, resultados estes que podem ser tomados também como ilustração dos obtidos com o processamento sequencial (Orlando, 1983).

A curva ajustada foi uma série polinomial de potências do tempo. As estimativas a priori tanto do vetor de coeficientes, $\hat{x}_0/0$, quanto do vetor formado pelos elementos da diagonal principal da matriz Q , $\hat{q}_0/0$, foram tomadas como nulas. Os primeiros elementos das matrizes de covariâncias a priori, $P_0/0$ e $P_0^q/0$, foram tomados, respectivamente, com os valores 0,01 e 10^{-30} , e os outros termos sucessivos das diagonais dessa matriz foram tomados como os valores dos primeiros divididos sucessivamente por potências pares de 10. A Figura 1 apresenta os erros aleatórios com os quais foram contaminados os valores reais das observações simuladas da distância estação-satélite, com 20 pontos de dados. Como já foi dito, esses valores foram obtidos através de uma rotina geradora de números aleatórios supondo um desvio padrão de 50 metros. Note-se que os picos da curva apresentada, correspondentes aos valores discretos dos erros aleatórios, mantêm-se na faixa $\pm 3\sigma$, ou seja, no intervalo (-150 m, +150 m). A Figura 2 apresenta a curva obtida para os desvios entre a curva real da grandeza medida e a curva de grau 2 ajustada aos pontos de dados. Observe-se que os erros agora já não apresen-

tam a característica aleatória, isto é, os pontos calculados pela curva, correspondentes aos instantes de amostragem, apresentam desvios em relação à curva real, alinhados segundo uma curva suave, mantendo na maior parte do intervalo de tempo envolvido valores menores que 25 m.

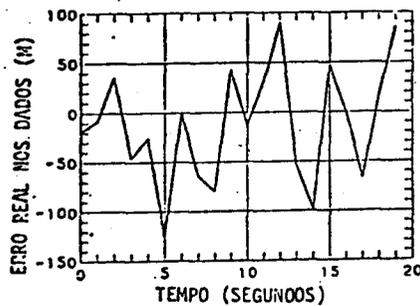


Fig. 1: Erro aleatório nos dados.

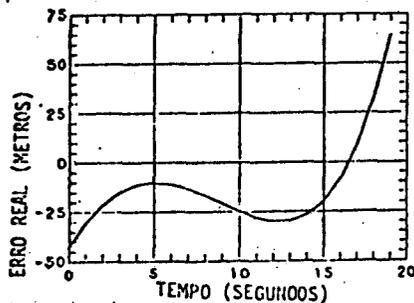


Fig. 2: Erro real no ajuste.

Para as estimativas do vetor de coeficientes e respectiva matriz de covariância do erro, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\hat{x}_{1/1} = \begin{bmatrix} 513479,948 \text{ m} \\ 103,149635 \text{ m/s} \\ 51,6501758 \text{ m/s}^2 \end{bmatrix},$$

$$P_{1/1} = [P_{1/1}^1 \quad P_{1/1}^2 \quad P_{1/1}^3],$$

onde:

$$P_{1/1}^1 = \begin{bmatrix} 926,859127 \text{ m}^2 \\ -189,889623 \text{ m}^2/\text{s} \\ 8,11424315 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{bmatrix},$$

$$P_{1/1}^2 = \begin{bmatrix} -189,889623 \text{ m}^2/\text{s} \\ 55,1470525 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ -2,70461015 \text{ m}^2/\text{s}^3 \end{bmatrix}$$

$$P_{1/1}^3 = \begin{bmatrix} 8,11424315 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ -2,70462015 \text{ m}^2/\text{s}^3 \\ 0,132345747 \text{ m}^2/\text{s}^4 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, os resultados obtidos para a

variância do erro dos pontos estimados pela curva, correspondentes aos instantes de amostragem, são apresentados na Tabela 1.

TABELA 1 Tempo versus variância

TEMPO (s)	VARIÂNCIA (m ²)	TEMPO (s)	VARIÂNCIA (m ²)
1	926,85912674	11	280,947709061
2	613,18944417	12	270,248370038
3	411,810157802	13	252,264075057
4	295,390392758	14	233,82658549
5	240,015572079	15	225,185392837
6	225,187416741	16	240,004089187
7	233,823945659	17	295,364042576
8	252,259485626	18	411,762552346
9	270,244621405	19	613,11321114
10	280,946295677	20	926,74591126

Comparando os valores das variâncias apresentadas na tabela acima com os erros reais dos pontos correspondentes, calculados pela curva ajustada, apresentados graficamente na Figura 2, nota-se que existe coerência estatística entre os erros e suas respectivas variâncias. Observe-se ainda que os valores destas variâncias são bem menores que a variância dos dados iniciais que eram constantes e iguais a 1500 m². Isto era de se esperar, visto que a curva foi ajustada a partir de informações contidas em todas as observações da grandeza medida.

5. CONCLUSÕES

O fato de utilizar o filtro de Kalman ao problema de ajuste de curvas permitiu o desenvolvimento de duas versões da técnica de sua visualização. Embora a versão para processamento em lote necessite que todo o conjunto de dados ao qual a curva será ajustada já tenha sido coletado para que possa ser aplicada, ela permite que os dados sejam processados um a um desde que seus erros aleatórios sejam não-correlacionados entre si. Com isto, evita-se a inversão matricial necessária ao cálculo do ganho de Kalman transformando-a em uma série de inversões escalares. Esta característica de ausência de inversão matricial não existe nos procedimentos usuais de ajuste de curvas por mínimos quadrados e χ -quadrado (Meyer, 1975), cujas aplicações requerem a inversão de uma matriz de dimensão de uma unidade maior que o grau da curva ajustada. No caso da versão com processamento sequencial, existe uma vantagem adicional visto que ela pode permitir que o ajuste seja feito em tempo real, desde que se conheça a priori o grau da curva a ser ajustada. Em termos de desen-

penho ambas as técnicas mostraram-se equivalentes nos testes efetuados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bendat, J.S.; Piersol, A.G., (1971). "Random data: analysis and measurements procedures". Wiley-Interscience.
- EUROPEAN SPACE AGENCY (ESA)., (1977). "TD-1" In: 6, Report presented by the European Space Agency to the 20th COSPAR meeting a Tel Aviv, Israel, June, Paris, p. 44. (ESA SP 1002).
- Jazwinski, A.H., (1969). "Adaptive filtering", Automática, (5):475-485.
- Jazwinski, A.H., (1970). "Stochastic processes and filtering theory". New York, Academic (Mathematics in Science and Engineering 64).
- Meyer, S.L., (1975). "Data analysis for scientistis and engineers". New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Orlando, V., (1983). "Técnicas estocásticas aplicadas à suavização, tratamento de tendências e compressão de dados de rastreamento ou telemetria de satélites artificiais". Tese de Doutorado, São José dos Campos, INPE, out. 1983. (INPE-2909-TDL/148).
- Rios Neto, A.; Kuga, H.K., (1982). "Estimação adaptativa do ruído no estado para o filtro de Kalman". 4º Congresso Brasileiro de Automática, pp. 101-105, Campinas.
- Sorenson, H.W., (1966). "Kalman filtering techniques". New York, N.Y., Academic. Advances in Control Systems, (3):219-292.
- Wertz, K.R., (1978). "Spacecraft attitude determination and control". London, D. Reidel. (Astrophysics and Space Science Library).