1. Publicação nº
INPE-3527-PRE/748

2. Versão

3. Data
Maio, 1985

5. Distribuição
☐ Interna ☒ Externa
☐ Restrita

4. Origem
DMC/DGC

Programa
CONTAT

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
SUAVIZAÇÃO
MÍNIMOS QUADRADOS
REJEIÇÃO DE DADOS INVÁLIDOS
AJUSTE POLINOMIAL

7. C.D.U.: 681.5.015.44

8. Título
INPE-3527-PRE/748

"PROCEDIMENTO PARA REDUÇÃO DO TEMPO DE PROCESSAMENTO EM ESTIMAÇÃO DE ESTADO VIA FILTRO DE KALMAN"

10. Páginas: 5

11. Última página: 4

12. Revisada por

Décio Castilho Ceballos

9. Autoria
Valcir Orlando
Atair Rios Neto

Assinatura responsável

13. Autorizada por

Marco Antonio Raupp
Diretor Geral

14. Resumo/Notas

É apresentado um procedimento para redução do tempo de processamento gasto em cada passo da aplicação do filtro de Kalman para a estimação do estado de sistemas não-lineares. A condição essencial a ser satisfeita para que o procedimento seja aplicável é que apenas uma partição do vetor de estado do sistema seja diretamente observada, ou seja, que as observações a serem processadas sejam funções apenas de algumas componentes do vetor de estado. O procedimento foi testado, através de simulação numérica em computador, na estimação da órbita de um satélite artificial.

15. Observações
Trabalho a ser apresentado no VIIIº Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São José dos Campos, 10 - 13 de Dezembro de 1985. (ITA/CTA).

SUMÁRIO

É apresentado um procedimento para redução do tempo de processamento gasto em cada passo da aplicação do filtro de Kalman para a estimação do estado de sistemas não-lineares. A condição essencial a ser satisfeita para que o procedimento seja aplicável é que apenas uma partição do vetor de estado do sistema seja diretamente observada, ou seja, que as observações a serem processadas sejam funções apenas de algumas componentes do vetor de estado. O procedimento foi testado, através de simulação numérica em computador digital, na estimação da órbita de um satélite artificial.

INTRODUÇÃO

O procedimento a ser descrito, aplicável dentro de certas condições, permite que se obtenha uma redução do tempo de computação em processos de estimação de estado via filtro de Kalman. Sua aplicação pode, desta maneira, permitir processamento em tempo real em casos nos quais isto não é possível com a aplicação do algoritmo original do citado filtro. Ele pode ser encarado como uma adaptação à utilização do filtro estendido de Kalman, aplicável a sistemas não-lineares, de técnica de compressão de dados apresenta por Bar-Itzhack [1]. Além de aplicável a sistemas não-lineares o procedimento apresenta ainda a particularidade de evitar a necessidade do emprego de um modelo de ordem reduzida do sistema dinâmico.

DESCRIÇÃO DO PROCEDIMENTO

Suponha-se um sistema dinâmico modelado matematicamente por:

$$\dot{x}(t) = f[x(t),t] + G(t)w(t), \tag{1}$$

onde $x(t)$ é o vetor de estado do sistema; f é um vetor de dimensão n, função não-linear do estado; G é uma matriz n x r contínua no tempo; $w(t)$ é um vetor r dimensional de ruídos brancos gaussianos com:

$$E[w(t)] = 0;\ E[w(t)w(t)] = Q(t)\ \delta(t-\tau), \tag{2}$$

onde E é o operador expectância; $\delta(t-\tau)$ é a função δ de Dirac, e $Q(t)$ é uma matriz r x r positiva semidefinida.

Suponha-se que se dispõe de observações do estado do sistema modeladas por:

$$y(t_k) = h[x(t_k),t_k] + \nu(t_k), \tag{3}$$

onde $y(t_k)$ representa o vetor de observação, m dimensional, no instante t_k; $h[.]$ é uma função vetorial de dimensão m; $\nu(t_k)$ é um vetor de dimensão m de ruídos brancos gaussianos com:

$$E[\nu(t_k)] = 0;\ E[\nu(t_k)\nu^T(t_j)] = R(t_k)\delta(k,j), \tag{4}$$

onde $R(t_k)$ é uma matriz m x m positiva definida e $\delta(k,j)$ é a função δ de Kronecker.

Suponha-se ainda que o vetor de estado inicial é uma variável aleatória com estatística $N[\hat{x}(t_0),P(t_0)]$.

As equações do filtro estendido de Kalman aplicadas ao sistema acima são dadas por [2]:

$$\hat{x}(t_{k+1}/t_k) = \hat{x}(t_k/t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f[\hat{x}(t/t_k)]\ dt, \tag{5}$$

$$P(t_{k+1}/t_k) = \Phi(t_{k+1},t_k)P(t_k/t_k)\Phi^T(t_{k+1},t_k) + \Gamma(t_k)\ Q(t_k)\ \Gamma^T(t_k), \tag{6}$$

$$\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1}/t_k) + K(t_k)\{y(t_{k+1}) - h[\hat{x}(t_{k+1}/t_k),\ t_{k+1}]\}, \tag{7}$$

$$P(t_{k+1}/t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})M(t_{k+1})]\ .\ P(t_{k+1}/t_k), \tag{8}$$

onde:

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}/t_k)\ M^T(t_{k+1})[M(t_{k+1})P(t_{k+1}/t_k)\ \times\ M^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1}, \tag{9}$$

$$M(t_{k+1}) = \frac{\partial h[x(t),t]}{\partial x}\bigg|_{\hat{x}(t_{k+1}/t_k),\ t_{k+1}}, \tag{10}$$

$$\Gamma(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi[t_{k+1},\tau]\ G(\tau)\ d\tau, \tag{11}$$

e Φ é a matriz de transição de estado do sistema linearizado.

Suponha-se agora o vetor de estado participando da seguinte maneira:

$$x(t) = [{}^u x\ \ {}^v x]^T, \tag{12}$$

onde ${}^u x$ é a partição do vetor de estado com suas primeiras u componentes e ${}^v x$ sua partição com as últimas v componentes, $v = n - u$.

A hipótese básica na qual se fundamenta o procedimento a ser descrito é que, além de satisfeitas condições de observabilidade, o vetor de observações seja função apenas das primeiras u componentes do vetor de estado, ou seja:

$$h[x(t),t] = h[{}^{u}x(t),t] \,, \tag{13}$$

o que implica em:

$$M(t_{k+1}) = [C(t_{k+1}) \ 0 \,] \,, \tag{14}$$

onde $C(t_{k+1})$ é a partição não-nula de $M(t_{k+1})$, de dimensão m x u e 0 é a matriz nula de dimensão m x v.

Considerando o vetor de estado particionado da maneira dada na equação (12), a matriz de covariância do êrro no estado pode ser escrita na forma:

$$P = \begin{bmatrix} {}^{uu}P & {}^{uv}P \\ {}^{uv}P^{T} & {}^{vv}P \end{bmatrix} . \tag{15}$$

Desde que seja válida a hipótese representada na equação (13), pode ser provado que [1]:

$${}^{uv}P(t_{k+1}/t_{k+1}) = -\,G(t_{k+1})\ {}^{uv}P(t_{k+1}/t_k), \tag{16}$$

$${}^{vv}P(t_{k+1}/t_{k+1}) = {}^{vv}P(t_{k+1}/t_k)\,{}^{uv}P^{T}(t_{k+1}/t_k) \ \times$$

$$\times\ D(t_{k+1})\ {}^{uv}P(t_{k+1}/t_k), \tag{17}$$

onde:

$$G(t_{k+1}) \triangleq {}^{uu}P(t_{k+1}/t_{k+1})\ {}^{uu}P^{-1}(t_{k+1}/t_k), \tag{18}$$

$$D(t_{k+1}) \triangleq {}^{uu}P^{-1}(t_{k+1}/t_k)\ [I - G(t_{k+1})] \,, \tag{19}$$

o que mostra que, conhecendo apenas a partição da matriz de covariância atualizada, ${}^{uu}P(t_{k+1}/t_{k+1})$, e a matriz de covariância completa propagada $P(t_{k+1}/t_k)$, podem-se calcular as partições restantes da matriz de covariância atualizada.

Pode ainda ser provado que [1]:

$${}^{v}\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = {}^{v}\hat{x}(t_{k+1}/t_k) + {}^{uv}P^{T}(t_{k+1}/t_k)\,{}^{uu}P^{-1}(t_{k+1}/t_k)\,\cdot$$

$$\cdot\ [{}^{u}\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) - {}^{u}\hat{x}(t_{k+1}/t_k)], \tag{20}$$

de onde se nota que a obtenção da partição ${}^{v}x$ da estimativa atualizada do vetor de estado pode ser feita a partir de conhecimento da partição ${}^{u}x(t_{k+1}/t_{k+1})$ e da estimativa completa propagada do vetor de estado $\hat{x}(t_{k+1}/t_k)$.

A partir desses resultados Bar-Itzhack [1] desenvolveu um método de compressão de dados, aplicável apenas a sistemas lineares, cujo objetivo é a obtenção de uma redução do tempo de processamento em estimação de estado via filtro de Kalman. Este método utiliza um filtro de Kalman de ordem reduzida que opera na mesma taxa em que as observações são amostradas. Paralelamente um filtro de ordem total opera numa taxa menor.

O procedimento aqui apresentado visa a aplicação do método de Bar-Itzhack considerando o filtro estendido de Kalman, e contorna ainda a necessidade de utilização de modelo de ordem reduzida do sistema, mediante algumas aproximações, como ilustrado na Figura (1) e evidenciado pelo seguinte algoritmo:

a) Propagar a estimativa do estado $\hat{x}(k/k)$ durante N intervalos de discretização, N inteiro. A cada intervalo atualizar a partição ${}^{u}\hat{x}$. Com relação à matriz de covariância, propagar e atualizar a cada intervalo de amostragem apenas sua partição ${}^{uu}P$, durante N intervalos.

b) Propagar de uma única vez, do instante t_k ao instante t_{k+N}, todo o vetor $\hat{x}(t_k/t_k)$ e a matriz $P\ (t_k/t_k)$, obtendo-se $\hat{x}(t_{k+N}/t_k)$ e $P(t_{k+N}/t_k)$.

c) Já de posse dos valores obtidos no passo a, de ${}^{u}\hat{x}(t_{k+N}/t_{k+N})$, ${}^{u}P(t_{k+N}/t_{k+N})$ e dos valores obtidos no passo b de $\hat{x}(t_{k+N}/t_k)$ e $P(t_{k+N}/t_k)$, através das equações (16), (17) e (20), calcular todos os elementos restantes das estimativas atualizadas do estado e matriz de covariância para o instante t_{k+N}.

d) Repetir os passos anteriores para os próximos N intervalos de amostragem seguintes ao instante t_{k+N} e assim sucessivamente.

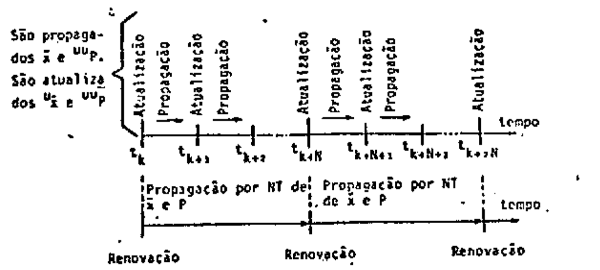


Figura 1 - Esquematização do procedimento de compressão.

Na figura 1 os instantes em que as estimativas globais do estado e respectiva matriz de covariância do erro são atualizadas são chamados instantes de renovação.

Para que as citadas propagações e atualizações de apenas partições do vetor de estado e da matriz de covariância do erro possam ser efetuadas, são necessárias algumas aproximações. Serão colocadas a seguir as equações envolvidas nesta tarefa, destacando-se as aproximações efetuadas. Maiores detalhes sobre a dedução das equações que serão agora apresentadas podem ser encontrados na referência [3]. A propagação do vetor de estado entre instantes de amostragem é feita diretamente pela equação (5).

Para a atualização apenas da partição ${}^{u}\hat{x}$ devem ser utilizadas as equações:

$${}^{u}\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = {}^{u}\hat{x}(t_{k+1}/t_k) + {}^{um}K(t_{k+1})[y(t_{k+1}) - h(t_{k+1})] \,. \tag{21}$$

$${}^{um}K(t_{k+1}) = {}^{uu}P(t_{k+1}/t_k)M^{T}(t_{k+1})[M(t_{k+1})P(t_{k+1}/t_k)\,M^{T}(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1}. \tag{22}$$

No caso da propagação entre instantes de amostragem apenas da partição ${}^{uu}P$ da matriz de covariância do erro, seria necessário que se dispusesse da matriz atualizada completa no instante anterior ao propagado. Como se dispõe desta matriz totalmente atualizada apenas nos instantes de renovação, pois nos instantes intermediários somente se dispõe de sua partição ${}^{uu}P$ atualizada, sugere-se a propagação, via matriz de transição de estado, do instante de renovação, t_i, para o instante t_{k+1}

para as partições desconhecidas. Em função das partições, a equação deduzida a partir das equações (6) e (9), a ser utilizada para esta finalidade, englobando já as citadas aproximações, é dada por:

$$
\begin{aligned}
{}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_k) \doteq\; & {}^{uu}\phi(t_{k+1},t_k)\,{}^{uu}P(t_k/t_k)\,{}^{uu}\phi^T(t_{k+1},t_k) \;+ \\
& + [{}^{uu}\phi(t_{k+1},t_i)\;{}^{uv}P(t_i/t_i)\;{}^{uv}\phi^T(t_{k+1},t_i)]^T \;+ \\
& + {}^{uu}\phi(t_{k+1},t_i)\;{}^{uv}P(t_i/t_i)\;{}^{uv}\phi^T(t_{k+1},t_i) \;+ \\
& + {}^{uv}\phi(t_{k+1},t_i)\;{}^{vv}P(t_i/t_i)\;{}^{uv}\phi^T(t_{k+1},t_i) \;+ \\
& + {}^{ur}\Gamma(t_k)\;Q(t_k)\;{}^{ur}\Gamma^T. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

A aproximação efetuada refere-se à propagação das partições ${}^{vv}P(t_i/t_i)$ e ${}^{uv}P(t_i/t_i)$ do instante t_i, correspondente à última renovação, ao instante t_{k+1}, através da matriz $\phi(t_{k+1},t_i)$. Esta aproximação é introduzida em virtude de não se dispor de valores atualizados nos instantes t_k para estas partições, pois estas só são atualizadas nos instantes de renovação. Na equação original do filtro de Kalman estas propagações devem ser feitas sempre de t_k a t_{k+1}.

A equação para a atualização da partição ${}^{uu}P$ deduzida a partir da equação (8) é:

$$
\begin{aligned}
{}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_{k+1}) \doteq\; & \{I - {}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_k)C^T(t_{k+1})[C(t_{k+1}) \;\times \\
& \times\; {}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_k)C^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1}\; C(t_{k+1})\; \times \\
& \times\; {}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_k). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

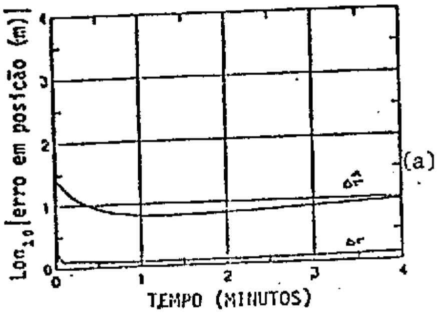
Nas equações (23) e (24) o símbolo "*" indica que se trata de um valor proveniente de um cálculo aproximado.

O algoritmo foi testado através de simulação numérica na estimação da órbita de um satélite artificial. O modelo matemático do sistema possui dimensão 6. Utilizou-se ainda técnica de compensação de erros de modelagem [4] que estima, juntamente com o estado do sistema, acelerações não-modeladas, elevando a dimensão do estado para 9. Foram consideradas observações simuladas do tipo distância entre estações de rastreamento e satélite, considerando três estações que observam simultaneamente o satélite, à taxa de amostragem de uma observação por segundo. Este tipo de observação é função apenas das três primeiras componentes do vetor de estado, sendo assim satisfeita a hipótese (13), na qual se baseia o algoritmo.

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

A figura 2 apresenta as curvas dos erros em posição estimado e real, obtidas com a aplicação do algoritmo do filtro de Kalman original e com a aplicação do algoritmo de compressão de dados, considerando renovações a cada seis período de amostragem, isto é, N=6. Note-se que em termos de precisão ambos os algoritmos praticamente se equivalem. Parte-se de um erro inicial de aproximadamente 1000 metros, caindo este erro rapidamente para valores da ordem de 1 metro, assim permanecendo. Os erros em velocidade caíram de valores iniciais de 100 m/s para valores da ordem de 0,05 m/s. O algoritmo original consumiu um tempo de processamento da ordem de 44,6 segundos, enquanto o algoritmo de compressão consumiu 36,4 segundos.

Testou-se ainda o procedimento considerando a matriz de transição constante durante N períodos de amostragem, N=6. Obtiveram-se praticamente os mesmos resultados em termos de precisão, porém, neste caso, o tempo de processamento caiu para 22,6 segundos.



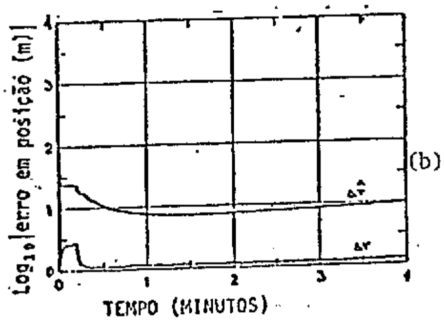


Figura 2 - Erros estimado e real resultantes: a) algoritmo original do filtro de Kalman; b) algoritmo para redução do tempo de processamento.

O algoritmo foi também testado para valores de N que variam de 2 a 15. A partir de N = 12 os resultados passaram a se deteriorar em termos de precisão. Em termos de tempo de processamento o menor valor obtido foi 34,1 segundos para N = 10. Ainda para N = 10, considerando a matriz de transição constante por 10 período de amostragem, o tempo de processamento caiu para 18,4 segundos.

CONCLUSÕES

O procedimento desenvolvido pode, através da redução em termos de tempo de computação, permitir que se efetue um processamento em tempo real em casos em que isto não é possível com a aplicação direta do filtro de Kalman usual. Por utilizar as aproximações evidenciadas na descrição, trata-se de um procedimento subótimo. Porém, através dos resultados obtidos nos testes efetuados, percebe-se que na aplicação em questão ele apresentou praticamente a mesma eficiência do filtro de Kalman original.

REFERÊNCIAS

[1] Bar-Itzhack, I.Y. "Novel Method fôr Data Compression in Recursive INS Error Estimation", Journal of Guidance and Control, May-June (1980), p. 245-250.

[2] Jazwinski, A.H. "Stochastic Processes and Filtering Theory". New York, Academic Press Inc., 1970.

[3] Orlando, V. "Técnicas Estocásticas Aplicadas à Suavização, Tratamento de Tendenciosidade e Compressão de dados, de Rastreamento ou Telemetria de Satélites Artificiais", INPE-209-TDL/148, São José dos Campos, SP, (1983).

[4] Kuga, H.K. "Estimação Adaptativa de Órbitas Aplicadas Satélite à Baixa Altitude", INPE-2316-TDL/079, São José dos Campos, SP (1982).

SUMMARY

A procedure for reducing processing time of Kalman filter state estimation is presented. The restriction to apply the procedure is that only a state vector partition is directly observed, that is, the observations to be processed need to be functions of only some state vector components. The procedure was tested by digital computer numerical simulation in artificial satellite orbit estimation.